

Chapitre : Etude locale d'une fonction numérique.

Séquence 1 : Limites – Continuités

I. Limites d'une fonction numérique :

1. Limite d'une fonction en un point :

a) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de centre x_0 , sauf peut être au point x_0 . On dit que la fonction f admet un réel l comme limite au point x_0 , si pour tout $x \in I$, $f(x)$ devient suffisamment voisin de l , lorsque x est de plus en plus proche de x_0 .

On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Exemple : $f : x \mapsto 2x^2 + x + 1$; $x_0 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

Théorème : La limite d'une fonction en un point si elle existe, est unique.

b) Opérations sur la limite en un point :

Théorèmes :

- Si f et g sont deux fonctions admettant chacune une limite en un point x_0 , alors les fonctions $f + g$, $f \times g$ et λf ou λ est un réel quelconque admettent une limite en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Si en plus $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ admettent une limite en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

- Si f est une fonction admettant le réel l comme limite en un point x_0 et g une fonction admettant une limite au point l , alors la fonction composée $g \circ f$ admet une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow l} g(x)$

Exemple :

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right); \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Evaluation :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{19}} 4\sqrt{3}; \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-7}{x-2}; \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. Limite à droite, limite à gauche en un point :

Activité :

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{(x-1)(x+3)}{|x+3|}$

- 1) Etudier le signe $x+3$ et puis écrire $f(x)$ sans la valeur absolue ;
- 2) Etudier la limite de f avec la valeur absolue et puis sans la valeur absolue au point $x_0 = -3$.

Synthèse :

- Définition :

- La $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 4$ est appelée la limite à gauche de f au point -3 ;
- La $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -4$ est appelée la limite à droite de f au point -3 .

- Théorème :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si et si seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 qui sont égales, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$.

Evaluation :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{|x|}; \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{|x|-3}$$

3. Règles de calcul des limites:

Soit $a \in \mathbb{R}$:

- R₁) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;
- R₂) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$;
- R₃) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;

Démonstration :

x	0,01	0,001	0,0001	0	x	-0,01	-0,001	-0,0001	0
$\frac{1}{x}$					$\frac{1}{x}$				

- R₄) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$;

Démonstration :

x	10	100	1000
$\frac{1}{x}$			

x	-10	-100	-1000
$\frac{1}{x}$			

- R₅) $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$;

- R₆) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$;

- R₇) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$;

Remarque :

- la limite à l'infini d'une fonction polynôme est la limite à l'infini du monôme de plus haut degré.
- La limite à l'infini d'une fonction rationnel est la limite du quotient du monôme de plus haut degré au numérateur par le monôme de plus haut degré au dénominateur.

Exemple :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 \left(1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 = +\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{7x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x \left(1 + \frac{2}{3x} \right)}{7x^2 \left(1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{7x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{7x} = 0$$

Evaluation :

4. Formes indéterminées :

Activité :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} + x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right)$.

Synthèse :

Dans la recherche de la limite, si nous obtenons l'une des formes suivantes :

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \times \infty; (+\infty)+(-\infty)$, aucun théorème Mathématiques ne nous permet de conclure. On dit qu'on a une forme indéterminée.

Lorsqu'on a une forme indéterminée, on lève l'indétermination.

Par exemple dans b) on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} = \frac{\sqrt{3+1}-\sqrt{5-1}}{\sqrt{2+7}-\sqrt{10-1}} = \frac{2-2}{3-3} = \frac{0}{0}$ Forme Indéterminée.

Levons l'indétermination en utilisant les formules des produits remarquables :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x})}{(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x})(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x})}{(3x-3)(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})} \end{aligned}$$

En simplifiant le numérateur et dénominateur par $(x-1)$ on aura :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x})}{3(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})} = \frac{2(\sqrt{2+7}+\sqrt{10-1})}{3(\sqrt{3+1}+\sqrt{5-1})} = \frac{6}{6}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} = 1$$

5. Limites et relations d'ordre :

Soit f , g et h trois fonctions, I un intervalle et $a \in I$ où a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- Si $\forall x \in I, h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l, l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(théorème de gendarmes).

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+3+\sin x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}$$

Solution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2x+2 \leq 2x+3+\sin x \leq 2x+4$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, 2x+2 \leq 2x+3+\sin x \leq 2x+4$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+4 = -\infty \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+3+\sin x = -\infty.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } x^2+1 > 0$$

$$\implies -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = 0$$

II. Fonction continue :

1. Fonction continue en un point :

Synthèse :

Définitions :

- Soit f une fonction définie en un point x_0 :
On dit que f continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Soit $r \in \mathbb{R}, r > 0$:
 - Si f est définie sur l'intervalle $]x_0-r, x_0]$, on dit f est continue à gauche au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
 - Si f est définie sur l'intervalle $[x_0, x_0+r[$, on dit f est continue à droite au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. Prolongement par continuité :

Activité :

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

- Trouver l'ensemble de définition de f .
- La fonction f admet-elle une limite au point $x_0=3$?

Synthèse :

- La fonction $g: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ qui coïncide avec la fonction f sur D_f , admet un limite en $x_0=3$ et est continue en ce point.
On dit que la fonction g est la fonction prolonge par continuité de f au point $x_0=3$; et on a $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{4}$.
- Définition :

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité au point } x_0 \end{array} \right) \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} x_0 \notin Df \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

3. Fonctions continues sur un intervalle :

Activité :

a) Définition :

Une fonction est continue sur intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Théorème :

- Une fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto |x|$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

b) Propriétés :

- ❖ Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $f+g$; $f \cdot g$ et λf où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont continues sur I .
Et si en plus g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I \quad g(x) \neq 0$) alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- ❖ Si f est fonction continue en un point x_0 et g une fonction continue au point $f(x_0)$ alors la composée $g \circ f$ est continue au point x_0 .

Exemple : Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Solution :

- La fonction polynôme $x \mapsto x + \frac{\pi}{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.
- La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elles sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.
- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right], 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ donc la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ est continue sur } \left[0; \frac{\pi}{6}\right].$$

c) Image d'un intervalle par une fonction continue :

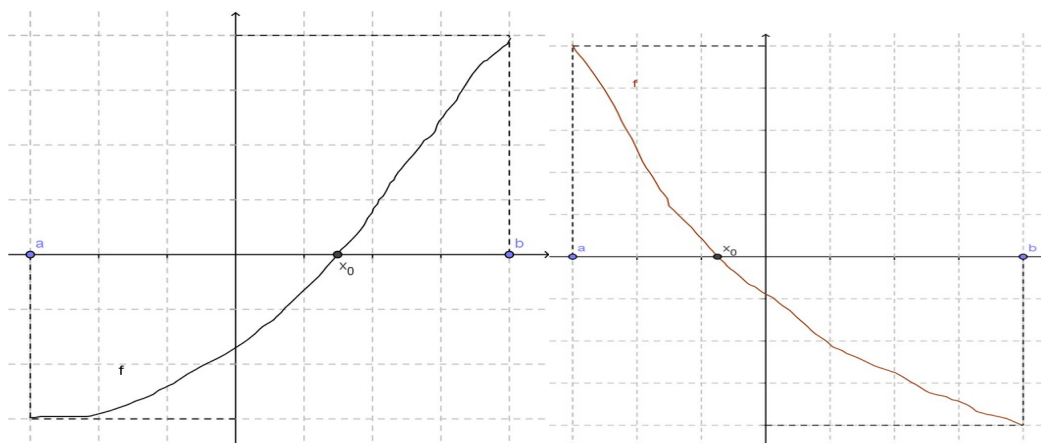
- L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f sur I est un intervalle.
- Si f est continue et croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
- Si f est continue et décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Théorème fondamentale :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ alors pour réel α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur intervalle $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un réel unique x_0 de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

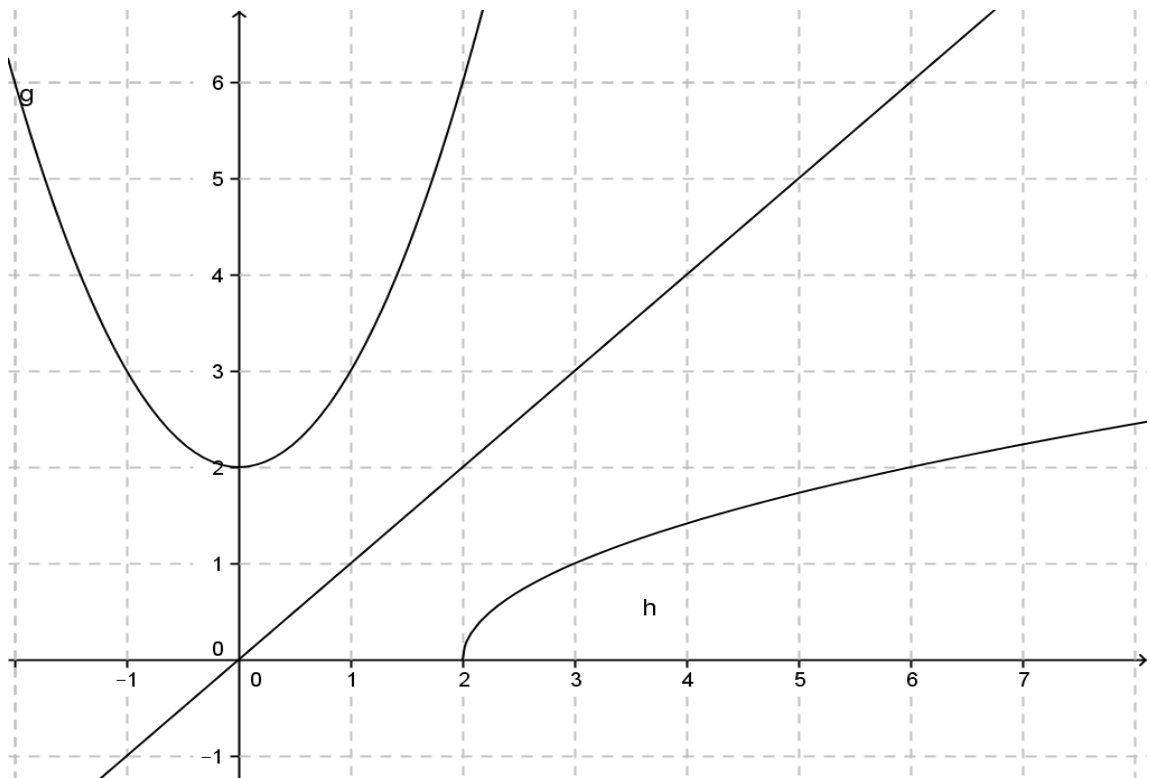


Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$; f admet alors une fonction réciproque f^{-1} qui est une bijection de J sur I et f^{-1} varie dans le même sens que f .

Dans un repère orthonormé du plan, les deux courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (1^{ère} bissectrice).

Exemple : $g : x \mapsto x^2 + 2$ a pour réciproque $h : \mapsto \sqrt{x - 2}$ sur $[0; +\infty]$



6. Branches infinies :

a) Asymptote parallèle à l'un des axes :

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$.

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f .

Exemple : Etudier les branches infinies de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

Solution :

f est définie si $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow Df = \mathbb{R} -]-1; 3[$

x	$-\infty$	-1	3
$x^2 - 2x - 3$	+	-	+

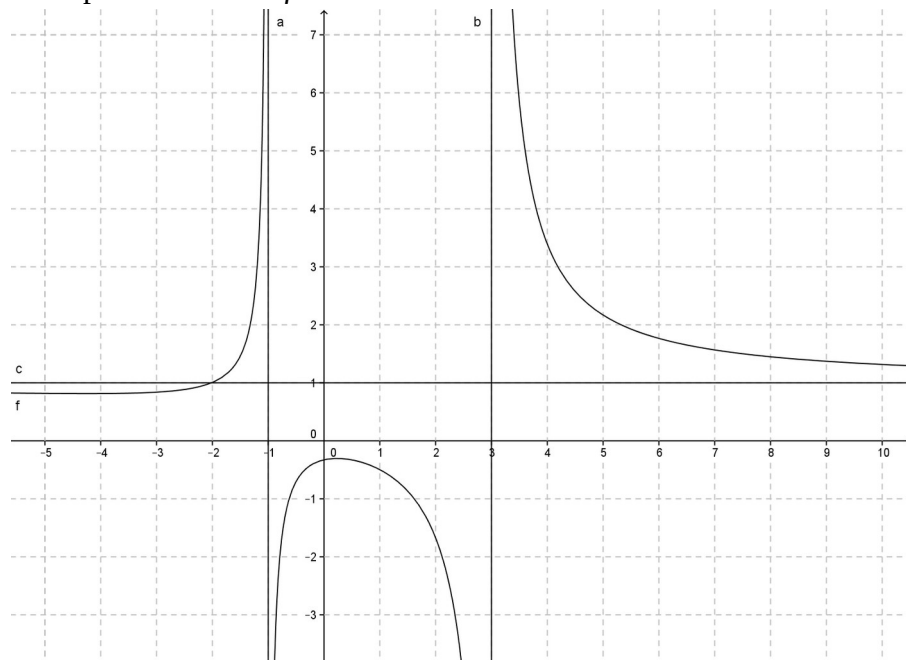
$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \text{la droite d'équation } x = -1 \text{ est asymptote verticale de}$$

la courbe représentative de f .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{10}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{10}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \text{la droite d'équation } x = 3 \text{ est asymptote verticale de la}$$

courbe représentative de f .



Remarque :

Une courbe et son asymptote peuvent se couper.

b) Asymptote d'équation $y = ax + b$:

On dit qu'une droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction f lorsque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Ou encore on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f s'il existe une fonction ε telle que $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Recherche de l'asymptote oblique :

Si f est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ On dit alors que il y a possibilité d'asymptote oblique pour la courbe de f .

$$\text{- Si } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ existe alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\text{- Si } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] \text{ existe alors}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ On dit alors que la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f .

- Cas particuliers :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors il y a possibilité d'asymptote oblique pour la courbe de f .

❖ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on dit alors que la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe oy .

❖ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, on dit alors que la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe ox .

❖ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ on dit alors que la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

❖ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas ; il n'y a ni asymptote, ni branche parabolique ni direction asymptotique

Exemple : Etudier les branches infinies de la fonction f :

$$a) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 2}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$$

Solution :

$$a) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 2}$$

f est définie si $x^2 + x + 2 \neq 0$

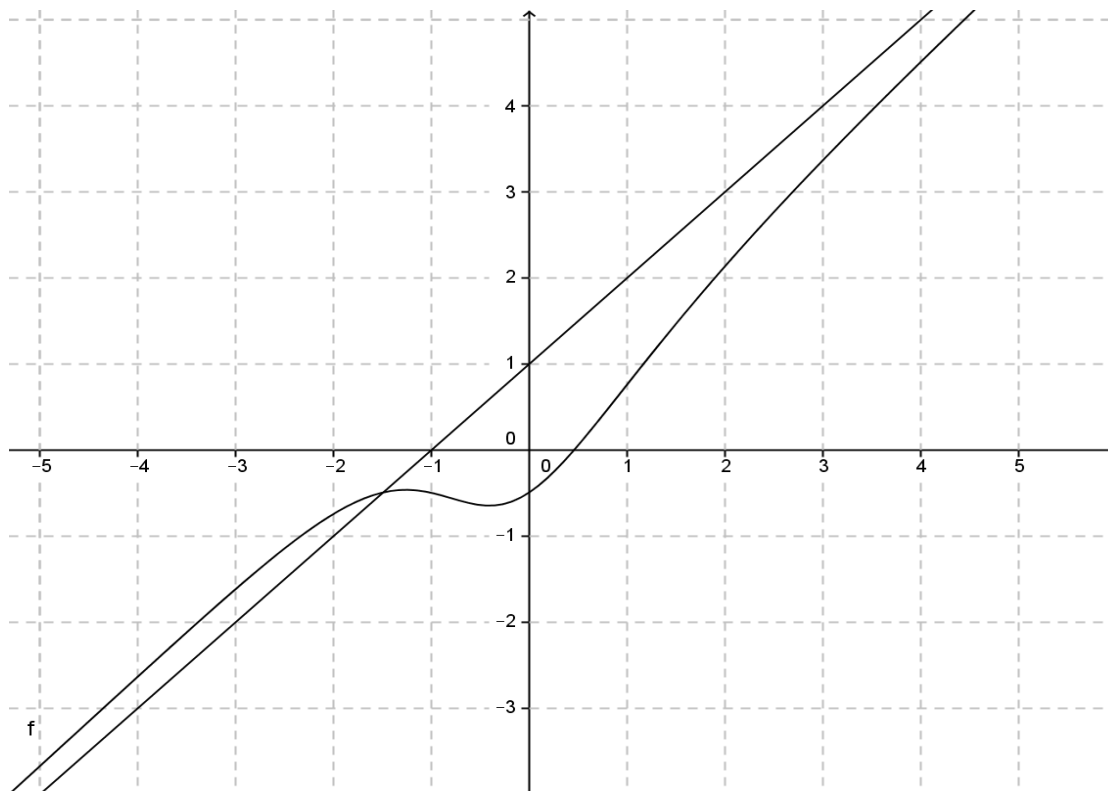
Posons $x^2 + x + 2 = 0$; $\Delta = -7$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \text{Possibilité d'asymptote oblique}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x(x^2 + x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f .



III. Dérivées :

1. Fonction dérivable en un point :

a) Définition :

Soit f une fonction définie en un point x_0 , on dit que f dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

Cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée le nombre dérive de la fonction f au point x_0 .

Autre définition ; en posant $h = x - x_0$, $h \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x_0 + h$, f derivable au point x_0 si et seulement si la limite : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$ existe.

Exemple : $f(x) = x^2 + x$; $x_0 = -1$

b) Nombre dérivé à gauche et à droite d'un point :

- Une fonction f est dérivable à gauche en un point x_0 si et seulement si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie.

Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche au point x_0 de la fonction, on la note $f'_g(x_0)$.

- Une fonction f est dérivable à droite en un point x_0 si et seulement si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

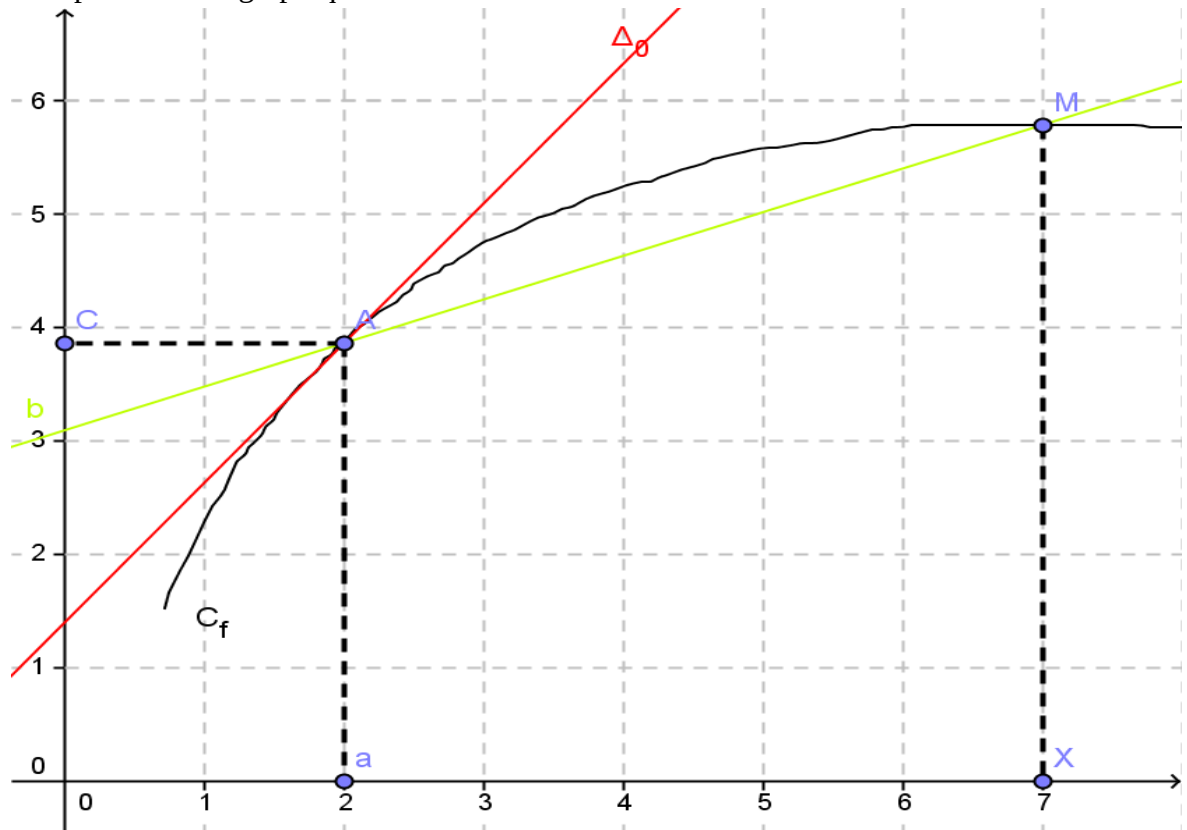
Cette limite si elle existe, est appelée nombre dérivé à droite au point x_0 de la fonction, on la note $f'_d(x_0)$.

Théorème :

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

2. Interprétation géométrique :

- a. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable au point A d'abscisse a de I , de représentation graphique ci-dessous :



Soit $A(a ; f(a))$ un point fixe de C_f . Considérons le point $M(x ; f(x))$ mobile sur C_f .

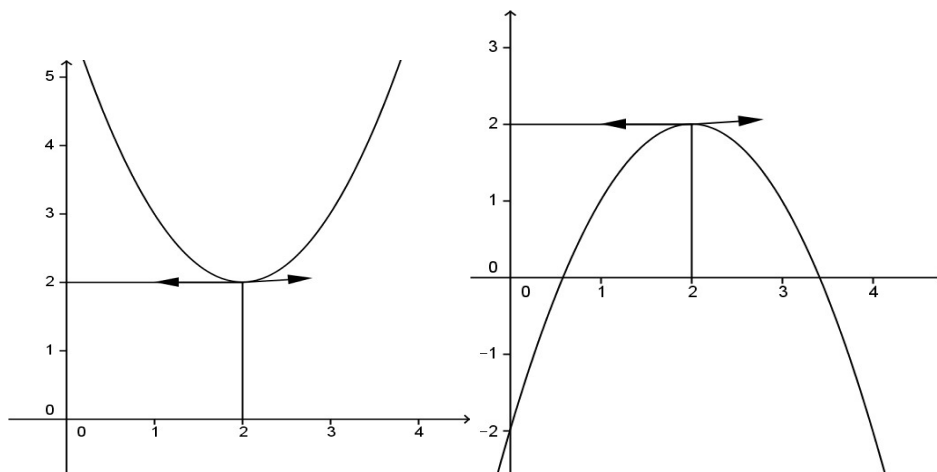
Le rapport $r = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) . Lorsque M tend vers $A(x \rightarrow a)$ la droite (AM) tourne autour du point A et tend vers une position limite qui est celle de la droite (Δ_0) . (Δ_0) est appelé la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a de coefficient directeur ou de pente $f'(a)$.

- b. Equation de la tangente à la courbe en un point a :

L'équation de la tangente (Δ_0) à la courbe C_f de f au point d'abscisse a est :

$$(\Delta_0): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque : si le coefficient directeur $f'(x_0)$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisse en x_0 .



3. Fonction dérivable sur un intervalle :

a) Définition :

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I .

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors l'application $f': x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée (ou dérivée première) de f sur l'intervalle I .

Exemple : $f: x \mapsto x^2 + 3x + 2$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 2 - x_0^2 - 3x_0 - 2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - x_0^2 - 3x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 3) = 2x_0 + 3$$

$\Rightarrow f$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0 + 3$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' est définie par $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x + 3$.

Remarque :

- Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle est dérivable en tout point de son domaine de définition.
- Les fonction $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Théorème 1 :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors $\forall n \in \mathbb{Q}$, la fonction u^n est dérivable sur un intervalle I et on a : $(u^n)' = nu' u^{n-1}$.

En particulier on a : $\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Théorème 2 :

- Si f est une fonction dérivable en un point x_0 et g une fonction dérivable au point $f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$
- Si f est une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J et si f est dérivable sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :
- $\forall x \in J \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

c) Dérivées successives :

- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors sa fonction dérivée sur I est notée f' qu'on appelle aussi dérivée premier de f sur I .
- Si f' est aussi dérivable I , alors sa fonction dérivée sur I est appelée dérivée second sur I que l'on note f'' .
- Si f'' est aussi dérivable I , alors sa fonction dérivée sur I est appelée dérivée troisième sur I que l'on note f''' . De proches en proche, si f est n fois dérivable sur I , alors sa dérivée $n^{\text{ième}}$ ou dérivée d'ordre n est notée $f^{(n)}$.

On note aussi $f' = \frac{df}{dx}$; $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$; ... ; $f^n = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple :

$$f : x \mapsto 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 8x + 1$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 8$$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$$f^{(4)}(x) = 72$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 5 \quad f^{(n)}(x) = 0$$

d) Sens de variation d'une fonction :

Activité :

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4$

- i. Etudier le signe f' ;
- ii. Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

En déduire la sens variation f sur l'intervalle $[-3; 3]$

Que remarquez-vous ?

Théorème :

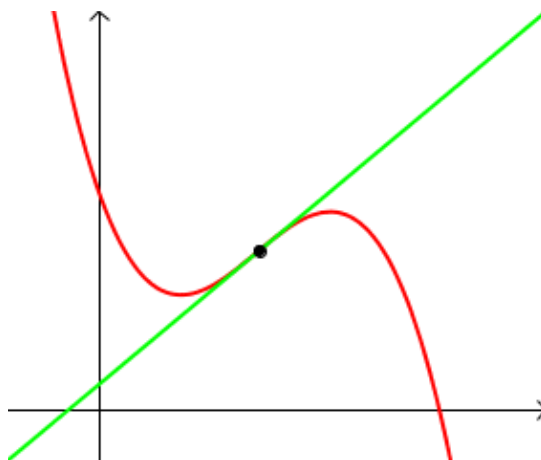
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I .
- si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I .
- si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I .

e) Point inflexion :

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Théorème :

Un point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de la courbe de f si et seulement si f est deux fois dérivable en x_0 et sa dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en x_0 .

Exemple :

$$f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$Df = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} f'(x) = x^2 + 4$

Posons $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$

x	$-\infty$	-2		2
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{13}{3}$	

$$f''(x) = 2x \text{ posons } f''(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0
$f''(x)$	-	+

Alors le point de coordonnées $(0; 1)$ est un point d'inflexion de la courbe de f tangente à la courbe de f au point d'inflexion :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = -4x + 1$$

