

BEMBUS-MALI

Au service de la nation

Bemba dit Bamba TRAORE

Enseignant Chercheur, tél : (00223) 69 - 50-23-20/ 76 - 43-95-33 mël : bbtraoremali@yahoo.fr

Formation en Ligne de BEMBUS

Groupe WhatsApp 76 43 95 33

(Votre contribution par Orange Money : 76 43 95 33)

Guide du Candidat au BAC

Etudes des fonctions

Etudes de fonctions numériques $f(x)$

Note:

Ce document n'est pas à vendre c'est un outil d'aide aux enseignants

Bamako, novembre 2022

Etudes de fonctions numériques $f(x)$

Généralité

L'étude d'une fonction numérique passe par les étapes suivantes

Etape 1 : Domaine de définition

Fonction polynôme : $f(x) = a_0 + a_1 * x^1 + \dots + a_n * x^n \rightarrow Df =]-\infty; +\infty[$

Fonction rationnelle : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \rightarrow$ est définie ssi $B(x) \neq 0$.

Fonction irrationnelle $f(x) = \sqrt{A(x)} \rightarrow$ Est définie ssi $A(x) \geq 0$.

Fonction logarithme $f(x) = \ln A(x) \rightarrow$ Est définie ssi $A(x) > 0$.

Etape 2 : limites aux bornes

Etape 3 : Signe de la fonction :

- Si $f(x) > 0$: $f(x)$ est positive
- Si $f(x) < 0$: $f(x)$ est négative.

Etape 4 : dérivée première (Sens de variation)

- Si $f'(x) > 0$: $f(x)$ est croissante
- Si $f'(x) < 0$: $f(x)$ est décroissante.

Etape 5 : Tableau de variation

x	Xo du Df et de f'(x)
f'(x)	Signe de f'(x)
f(x)	Sens de variation

Etape 6 : représentation graphique

- Intersection avec l'axe des abscisses $f(x) = 0$
- Intersection avec l'axe des ordonnées $f(0)$
- **Asymptotes à la courbe :**
 - verticale AV ? $x = x_0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
 - horizontale AH ? $y = b \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
 - oblique AO ? D : $y = ax + b$
- **Position de la courbe C par rapport à D :**
 - Si $f(x) - y > 0$: C est au-dessus de D
 - Si $f(x) - y < 0$: C est au-dessous de D
- Tableau des valeurs
- Le graphe

I.- Domaine de définition d'une fonction numérique

Fonction polynôme : $f(x) = a_0 + a_1 * x^1 + a_2 * x^2 + \dots + a_n * x^n$

est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

Exemple : $f(x) = 5x^2 - x + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

Fonction rationnelle de type : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

est définie ssi $B(x) \neq 0$.

Exemple : $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ est définie ssi $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$
 $Df =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

Fonction irrationnelle de type $f(x) = \sqrt{A(x)}$

Est définie ssi $A(x) \geq 0$.

Exemple : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ est définie ssi $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow$ c'est le signe du trinôme : le signe de « a » (-) à l'extérieur des deux racines -2 et 2 et le signe contraire (+) entre les deux racines $\Rightarrow Df = [-2; 2]$

Exo : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$A(x) = x^2 - 3x + 2$	$F(x) = \frac{7x+2}{x^2+4}$	$K(x) = \sqrt{x-2}$
$B(x) = \frac{x+3}{x}$	$G(x) = \frac{x-8}{x^2+1}$	$L(x) = \sqrt{x^2+2}$
$C(x) = \frac{x}{x+1}$	$H(x) = \frac{7x+2}{2x^2+2x-12}$	$M(x) = \sqrt{x^2-1}$
$D(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$	$I(x) = \frac{x^2+2}{3x^2+x+5}$	$N(x) = \sqrt{2+ x }$
$E(x) = \frac{5x-2}{x^2+2x-15}$	$J(x) = \frac{2x-1}{1+ x }$	$P(x) = \frac{6x-5}{\sqrt{x-2}}$

Solution

$A(x) = x^2 - 3x + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

$B(x) = \frac{x+3}{x}$ est définie si $x \neq 0$ $Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$K(x) = \sqrt{x-2}$ est définie si $x - 2 \geq 0$ $Df = [2; +\infty[$

$L(x) = \sqrt{x^2+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$ car $x^2 + 2 \geq 0$ n'est pas factorisable donc > 0 car $a > 0$. (Note : si $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable alors le trinôme est du même signe que a)

$M(x) = \sqrt{x^2-1}$ est définie si $x^2 - 1 \geq 0$ (on trouve $x = -1$ et $x = 1$, le signe du trinôme) $Df = [-1; 1]$

II.- Calcul de limites

Calcul de limite au point x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0) = l$

Retenons bien ceci :

Calculer la limite au point x_0 revient à calculer si possible $f(x_0)$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3 * 2 - 5 = 1$

Exemple de calcul de limites au point x_0

Enoncé	Solution
$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)$	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3 * 2 - 5 = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{0-1}{0+1} = -1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-x+2}{-x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-x+2}{-x+2} \right) = \frac{0-0+2}{-0+2} = 1$
Calculer la limite au point x_0 revient à calculer $f(x_0)$.	

Les formes indéterminées $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

Le Calcul de $f(x_0)$ peut être compliqué ce qui conduit à des formes indéterminées.

Les 4 formes indéterminées (retenues au niveau secondaire)

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$-\infty + \infty$	$0 \times \infty$
---------------	-------------------------	--------------------	-------------------

Les limites en un point :

Si $a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
Si $a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$
Si $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
Si $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Limite au point x_0 à gauche et à droite

- Limite à gauche $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x_0) = \pm \infty$
- Limite à droite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x_0) = \pm \infty$

NB : un nombre sur zéro = $\pm \infty$

$\frac{+5}{0^+} = +\infty$	$\frac{-5}{0^+} = -\infty$	$\frac{+5}{0^-} = -\infty$	$\frac{-5}{0^-} = +\infty$	
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	--

Cas de dénominateur un binôme $ax + b$ **Rappelons que : $ax + b$ est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.**Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1-x}{x-5} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{1-5}{5-5} = \frac{-5}{0}$ on calcule la limite à gauche et à droite de 5

$x - 5$	-	5	+
$\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$			$\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3-x} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3-x} \right) = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0}$ on calcule la limite à gauche et à droite de 3

$3 - x$	+	3	-
$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x}{3-x} \right) = \frac{3}{0^-} = -\infty$			$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x}{3-x} \right) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Cas de dénominateur un trinôme $ax^2 + bx + c$ $ax^2 + bx + c$ est factorisable ($\Delta > 0$) le trinôme est du signe de « a » à l'extérieur de x_1 et x_2 et du signe contraire entre x_1 et x_2 .

$ax^2 + bx + c$	Signe « a »	x_1	Signe « -a »	x_2	Signe « a »
-----------------	-------------	-------	--------------	-------	-------------

 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x^2-3x+2} \right) = \frac{4}{0}$ on calcule la limite à gauche et à droite de 1

$x^2 - 3x + 2$	+	1	-	2	+
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+3}{x^2-3x+2} \right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$					$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+3}{x^2-3x+2} \right) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1-x}{4-x^2} \right) = \frac{-1}{0}$ on calcule la limite à gauche et à droite de 2

$4 - x^2$	-	-2	+	2	-
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1-x}{4-x^2} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$					$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1-x}{4-x^2} \right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Exemple à faire : Calcule la limite

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-x}{-x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7-x}{4-2x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-3}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+5}{x-1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x+1}{5x+10} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+3}{-x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x}{x-2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-3}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x-5}{1-x} \right)$

Calcul de Limite à l'infini $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x_0) = f(\pm\infty) = l$

Retenons bien ceci : Calculer la limite à l'infini $\pm\infty$ revient à remplacer x (du plus haut degré) par l'infini si possible.

Note : $(-\infty)^2 = +\infty$; $(+\infty)^2 = +\infty$; $(-\infty)^3 = -\infty$; $(+\infty)^3 = +\infty$

Retenons que : $a > 0$

$\pm\infty + a = \pm\infty$	$\frac{a}{-\infty} = 0$	$\frac{+a}{0^+} = +\infty$	$\frac{-a}{0^+} = -\infty$
$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \quad a > 0$	$\frac{a}{+\infty} = 0$	$\frac{-a}{0^+} = -\infty$	$\frac{+a}{0^-} = -\infty$
$\sqrt{x^2} = x = -x$ quand x tend vers $-\infty$			
$\sqrt{x^2} = x = +x$ quand x tend vers $+\infty$			

Exemple :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty)^2 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{x^3-x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{4x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{4x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{+\infty}{4} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{\sqrt{x^2-7x+1}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+3}{\sqrt{x^2-7x+1}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{-x}\right) = -5$

Exemple : calculer la limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{\sqrt{x^2-7x+1}}\right) & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+3}{\sqrt{x^2-7x+1}}\right) & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{\sqrt{3x^2+2x-5}}\right) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{\sqrt{3x^2+2x-5}}\right) & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{5x^2-x+1}}{2x-7}\right) & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{5x^2-x+1}}{2x-7}\right) \end{aligned}$$

Les limites à l'infini

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$			

Les limites des fonctions circulaires

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comment lever l'indétermination

Le Calcul de $f(x_0)$ peut être compliqué ce qui conduit à des formes indéterminées.

Les 4 formes indéterminées (retenues au niveau secondaire)

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$-\infty + \infty$	$0 \times \infty$
---------------	-------------------------	--------------------	-------------------

Cas de fonction rationnelle :

On factorise le numérateur et le dénominateur puis on simplifie

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

→ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée **Fi** levons l'indétermination

$$\frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x - 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

Exercice : calcule

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 5}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3 - x^2}{x - \sqrt{3}}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

Cas de fonction irrationnelle

On rend rationnel le dénominateur / numérateur puis on simplifie

$$\frac{\sqrt{A}-B}{\sqrt{C}+D} = \frac{(A-B^2)}{(\sqrt{A}+B)} * \frac{(\sqrt{C}+D)}{(C-D^2)}$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}}$

→ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée **Fi** levons l'indétermination

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} = \frac{(\sqrt{x+1}-1^2)}{\sqrt{x+1}+1} * \frac{(2+\sqrt{x+4})}{(2^2-\sqrt{x+4}^2)} = \frac{(x)(2+\sqrt{x+4})}{(-x)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(2+\sqrt{x+4})}{-(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+\sqrt{x+4})}{-(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

Exercices de limite (forme indéterminée)

Après avoir levé l'indétermination calculer la limite de chacune des fonctions.

1.-/ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2 - x} \right)$ Réponse : -1 2.-/ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9} \right)$ Réponse : $\frac{1}{6}$

3.-/ $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+\sqrt{12+x}}{3+x} \right)$ Rép: $\frac{7}{6}$ 4.-/ $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x+\sqrt{5+x}}{3x+\sqrt{10+x}} \right)$ Réponse : $\frac{54}{76}$

5.-/ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{3-\sqrt{10-x}} \right)$ Rép : -3 6.-/ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{x-2}} \right)$ Rép : $-\sqrt{3}$

Sujet d'examen

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 7x^3) & \lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^2 - x) & \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 5) \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 5) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{\sqrt{7x^2-x+2}} \right) & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{9x^2+2x+1}}{5x+2} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2} \right) & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+3} + 2x) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3-3x^2+1}}{x^3+2} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{x-5} \right) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} \right) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+x}{x} \right) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3+5x^2}{x^2} \right) & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-3}{x^2-1} \right) & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-6}{x^2-3x+2} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1+x}{x^3+1} \right) & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{x^3-1} \right) & \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{2x^2-13x+15}{x^2-2x-15} \right)
 \end{array}$$

Sujet d'examen : Calculer les limites

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+5x+4}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4}}{\sqrt{3x^2-7}}$
$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{8-x}-1}{3-\sqrt{x+2}}$	$\lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\sqrt{4x}-2a}{x-a^2}, a>0.$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{1-3x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-7x+6}{1-5x^3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-7x+6}{2x^3-x^2+x}$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x^3-7x+6}{1-5x^2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3-4-7x+6}}{2x\sqrt{x+3}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3-4-7x+6}}{2x\sqrt{x+3}}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+x-6}{ x+3 }$	$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+x-6}{ x+3 }$

Sujet d'examen : Calculer les limites

1	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2+4x-12}$	6	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{11x-6}}{x+1-\sqrt{x+3}}$
2	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2}$	7	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{x^2-6x+9}$
3	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-\sqrt{12+x^2}}{3x^2-7x+2}$	8	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$
4	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-13x^2+16x-4}$	9	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$
5	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{2-\sqrt{x^2-x+2}}$	10	$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{-2x^2+x+3}{-2x^2+5x-3}$

La limite et continuité

La fonction $f(x)$ est continue au point x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Application 1 :

Déterminer le réel m pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-\sqrt{x^2-5x+25}}{2x-10} & \text{si } x \neq 5 \\ 2m-3 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

Soit continue en $x_0 = 5$.

Solution 3 :

$f(x)$ est continue au point 5 ssi $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2m-3$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{5-\sqrt{5^2-5 \cdot 5+25}}{2 \cdot 5-10} = \frac{0}{0} \text{ forme indéterminée}$$

Pour lever l'indétermination on rend rationnel le numérateur

$$\frac{5-\sqrt{x^2-5x+25}}{2x-10} = \frac{25-x^2+5x-25}{(2x-10)(5+\sqrt{x^2-5x+25})} = \frac{-x(x-5)}{2(x-5)(5+\sqrt{x^2-5x+25})} = \frac{-x}{2(5+\sqrt{x^2-5x+25})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x}{2(5+\sqrt{x^2-5x+25})} = \frac{-5}{2(5+5)} = \frac{-1}{4}$$

$f(x)$ est continue au point 5 ssi $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2m-3 = \frac{-1}{4} \Rightarrow m = 11/8$

Application 2 :

Déterminer le réel m pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ m^2-3m-19 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Soit continue en $x_0 = -2$.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = \frac{0}{0} \text{ forme indéterminée, levons l'indétermination}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1$$

$f(x)$ est continue au point x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$m^2-3m-19 = -1 \Rightarrow m^2-3m-18 = 0 \Rightarrow (m-6)(m+3) = 0$$

On trouve $m = -3$ ou $m = 6$.

Application 3 : Déterminer le réel m pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{si } x \neq +2 \\ m-3 & \text{si } x = +2 \end{cases}$$

Soit continue en $x_0 = +2$.

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$f(x)$ est continue au point x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$m-3 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2m-6 = 3 \Rightarrow m = 9/2.$$

Les 3 asymptotes à la courbe

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = b$. Alors $y = b$ est asymptote horizontale AH

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = \infty$. Alors $x = x_0$ est asymptote verticale AV

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Alors $y = ax + b$ est asymptote oblique AO.

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f définie par :

a.- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ b.- $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ c.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2-x}$

Déterminer (si possible) les asymptotes à la courbe de f .

Solution 1 :

a.- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2) = 3(-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3(+\infty)^2 = +\infty$$

Il n'existe pas d'asymptote à cette courbe.

b.- $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2 \text{ alors } y = 2 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right) = \frac{2(-3)-1}{-3+3} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \text{ alors } x = -3 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptote : $y = 2$ et $x = -3$.

c.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2-x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ il n'y a pas A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2-x+3}{2-x} \right) = \frac{4-2+3}{2-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty \text{ alors } x = 2 \text{ A V.}$$

Existence d'asymptote oblique car le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur de 1. On effectue la division euclidienne :

$x^2 - x + 3$	$2 - x$	$f(x) = -x - 1 + \frac{5}{2-x}$ $y = -x - 1 \text{ asymptote oblique.}$
$-x^2 + 2x$	$-x - 1$	
$x + 3$		
$-x + 2$		
5		

Il existe deux asymptote : $x = 2$ et $y = -x - 1$.

II.- la dérivée première de f(x)

1.- Dérivée simple

$(ax)' = a$	$(a x^n)' = n.a.x^{n-1}$	$(a)' = 0$
-------------	--------------------------	------------

Exemple : calculer la dérivée de f(x)

1.- $f(x) = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x + 3$	6.- $f(x) = \frac{2}{x^7} + \sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x}$
2.- $f(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 5x + 20$	7.- $f(x) = x^{-7} + \frac{1}{x^{-5}}$
3.- $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$	8.- $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{x}$
4.- $f(x) = \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}$	9.- $f(x) = \frac{2}{x^n} + \sqrt[n]{x}$
5.- $f(x) = 7x^3 + \frac{2}{x^4} + 4x^5 - x + 3$	10.- $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Solution : Rappelons que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$; $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$

$$1.- f(x) = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x + 3 \rightarrow f'(x) = 20x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 1$$

$$2.- f(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 5x + 20 \rightarrow f'(x) = -5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5$$

$$3.- f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \rightarrow f(x) = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} \text{ on sait que } x^{-p} = \frac{1}{x^p}$$

$$\text{La dérivée } f'(x) = -1.x^{-2} - 2.x^{-3} - 3x^{-4} = \frac{-1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$$4.- f(x) = \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} \rightarrow f(x) = x^{1/2} - 5.x^{1/3} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}.x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$5.- f(x) = 7x^3 + \frac{2}{x^4} + 4x^5 - x + 3 \rightarrow f'(x) = 21x^2 - 8x^{-5} + 20x^4 - 1$$

$$6.- f(x) = \frac{2}{x^7} + \sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x} \rightarrow f(x) = 2.x^{-7} + x^{\frac{1}{5}} - x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow f'(x) = -14.x^{-8} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{-14}{x^8} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7.- f(x) = x^{-7} + \frac{1}{x^{-5}} \rightarrow f(x) = x^{-7} + x^5 \rightarrow f'(x) = -7x^{-8} + 5x^4$$

$$8.- f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{x} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$9.- f(x) = \frac{2}{x^n} + \sqrt[n]{x} \rightarrow f(x) = 2.x^{-n} + x^{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(x) = -2n.x^{-n-1} + \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$$

$$10.- f(x) = -2x^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \rightarrow f(x) = -2x^2 - x^{-\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = -4x + \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$$

2.- Dérivée composée

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - v' * u}{v^2}$	$(u^n)' = n * u' * u^{n-1}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
---	-----------------------------	--------------------------------------	---

Exemple : calculer la dérivée de $f(x)$

1.- $f(x) = \frac{3x+2}{7x-1}$	6.- $f(x) = (5x+3)^2$
2.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2-1}$	7.- $f(x) = (x^2-2x+3)^4$
3.- $f(x) = \sqrt{3x^2-4x+1}$	8.- $f(x) = \frac{1}{(3x^2-7x)}$
4.- $f(x) = 5x+6 + \frac{2}{x-3}$	9.- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$
5.- $f(x) = (2x^2-x+3)^7$	10.- $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x-1}$

Solution

1.- On pose $u = 3x+2 \rightarrow u' = 3$; $v = 7x-1 \rightarrow v' = 7$ de la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - v' * u}{v^2} \text{ alors } f'(x) = \frac{3(7x-1) - 7(3x+2)}{(7x-1)^2} = \frac{-17}{(7x-1)^2}$$

2.- On pose $u = x^2-x+3 \rightarrow u' = 2x-1$; $v = x^2-1 \rightarrow v' = 2x$ de la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - v' * u}{v^2} \text{ alors } f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-1) - (2x)(x^2-x+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{\dots\dots\dots}{(x^2-1)^2}$$

3.- On pose $u = 3x^2-4x+1 \rightarrow u' = 6x-4$ de la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \frac{6x-4}{2\sqrt{3x^2-4x+1}}$$

4.- On pose $u = x-3 \rightarrow u' = 1$ de la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

$$f'(x) = 5 - \frac{2}{(x-3)^2}$$

5.- On pose $u = 2x^2-x+3 \rightarrow u' = 4x-1$ de la formule

$$(u^n)' = n * u' * u^{n-1} \quad f(x) = 7 * (4x-1)(2x^2-x+3)^6$$

6.- $f(x) = (5x+3)^2$ la dérivée $f'(x) = (2)(5)(5x+3)^1 = 10(5x+3)$

7.- $f(x) = (x^2-2x+3)^4$ la dérivée $f'(x) = (4)(2x-2)(x^2-2x+3)^3$

8.- $f(x) = \frac{1}{(3x^2-7x)} = (3x^2-7x)^{-1}$ la dérivée $f'(x) = (-1)(6x-7)(3x^2-7x)^{-2}$

$$f'(x) = \frac{7-6x}{(3x^2-7x)^2}$$

9.- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$ Calculer $f'(x)$? C'est la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - v' * u}{v^2}$ on pose $u = 4x-5$ alors

$$u' = 4 \text{ et } v = 1-x \rightarrow v' = -1 \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{4(1-x) - (-1)(4x-5)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

10.- $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{-17x+20}{(3x-1)^2}$

Equation de la tangente $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ **Exercice 1 :**

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la fonction dérivée de f .

3-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

Solution :

1.-/ La fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

2.-/ $f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

3.-/ Equation de la tangente $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$f(1) = 1^2 - 2 * 1 + 3 = 2 \text{ et } f'(1) = 2 * 1 - 2 = 0$$

$$T: y = 0 * (x - 1) + 2 \Rightarrow T: y = 2$$

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la fonction dérivée de f .

3-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 0$

Solution :

1.-/ La fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est définie si $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2.-/ $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

3.-/ Equation de la tangente $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{2}{(0+1)^2} = 2$$

$$T: y = (2) * (x - 0) + (-1) \Rightarrow T: y = 2x - 1$$

Les étapes de l'étude d'une fonction

1^{ère} étape : domaine de définition

2^{ème} étape : limites aux bornes

3^{ème} étape : dérivée de la fonction

4^{ème} étape : le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de $f(x)$

5^{ème} étape : la courbe Cf

Exemple d'étude de fonction

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f .
2. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montre qu'il existe trois réels a , b et c telle que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
4. Montre que la droite (D) d'équation $y = x-2$ est asymptote à (Cf).
5. Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.
6. Dresse le tableau de variation de f .
7. Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.

Solution

$$\rightarrow f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$$

1.-) l'ensemble de définition de $f \rightarrow x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2. les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{x^2}{x} = x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x^2}{x} = x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$3.-) f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} = \frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1} = \frac{x^2-x-1}{x+1} \text{ par indentification}$$

$\rightarrow a = 1; a+b = -1$ et $b+c = -1 \rightarrow$ on trouve $a = 1; b = -2$ et $c = 1$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$$

4.-) $y = x - 2$ est asymptote à (Cf) ?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \rightarrow \text{alors } y = ax + b \text{ est asymptote à (Cf)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{\infty} = 0$$

5. La dérivée f' de f puis étudie son signe

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Le signe de $x^2 + 2x \Rightarrow$ le signe du trinôme $\Rightarrow$ $\begin{matrix} + & -2 & - & 0 & + \end{matrix}$

Si $x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[\quad f'(x) > 0$

Si $x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0$

6. Dresse le tableau de variation de f .

X	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$	-1	$+\infty$

7. Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé (O; i; j).

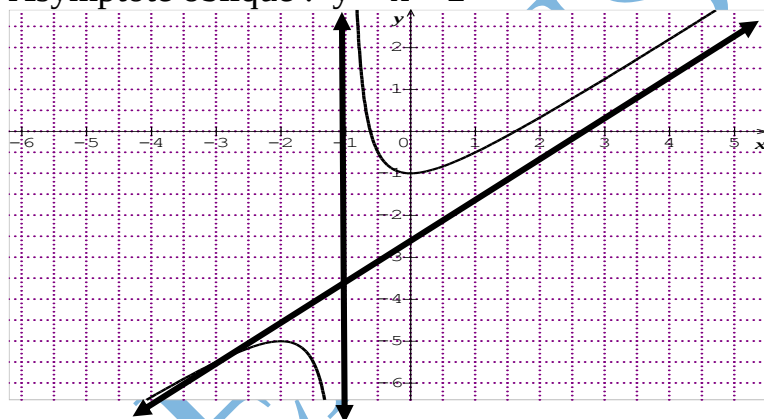
$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$$

Intersection avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0$ on trouve $x = 1,72$ ou $x = -0,72$

Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0)$ on trouve $y = 1$

Asymptote verticale : $x = -1$

Asymptote oblique : $y = x - 2$



Exemple d'étude de fonction

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1}$.

Etudier et représente graphiquement

Etape 1 : Domaine de définition

f est définie lorsque $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\Rightarrow Df =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Etape 2 : limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Etape 3 : dérivée première

$$f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x - 2)(x - 1) - 2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2}$$

Etape 4 : sens de variation (signe de $f'(x)$)

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2} = 0 \text{ on trouve } x = 0 \text{ ou } x = 2$$

X	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	6	$+\infty$

Etape 4 : représentation graphique

- Intersection avec l'axe des abscisses

$\Rightarrow f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1} = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ pas d'intersection

- Intersection avec l'axe des ordonnées

$$f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1} \Rightarrow f(0) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1} = -2$$

- Asymptote verticale ? $x = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$
- Tableau des valeurs
- Le graphe

III.- Fonction logarithme et fonction exponentielle

« $\ln x$ ou $\text{Log } x$ » ; « $\log x$ » ; « $\log_y^x$ » « e^x » ; $e^1 = 2,7182818$

« $\ln x$ ou $\text{Log } x$ » logarithmique népérien de x

« e^x » exponentiel de $x \rightarrow$ est la fonction réciproque de x

Ex : $\ln e^x = x$ $e^{\ln x} = x$ $e^1 = 2,7182818$

« $\log x$ » logarithmique décimal à base 10 $\rightarrow \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

« $\log_y^x$ » logarithmique décimal de x à base $y \rightarrow \log_y^x = \frac{\ln x}{\ln y}$

1.-) Relation fonctionnelle : pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

• $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ • $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ • $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ • $\ln x^n = n \ln x$	$y = \ln x$ avec $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$ $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$ Pour tout x , $\ln e^x = x$ Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$
--	---

2.-) Opération de fonction $\ln x$

$\ln x + \ln y \neq \ln(x + y)$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$a \ln x + b \ln x = (a + b) \ln x$

$\ln e^2 = 2$

$\ln e^x = x$

La fonction réciproque de $\ln x$ est $e^x \rightarrow \ln e^x = x$ et $e^{\ln x} = x$

Exemple 1 : simplifie

$A = \ln 8 - 5 \ln 32 - 3 \ln 64$

$B = 2 \ln 27 + \ln 9 - 5 \ln 81$

$C = \ln 5 + \ln 125 - 2 \ln 625$

Réponse :

$\rightarrow A = \ln 2^3 - 5 \ln 2^5 - 3 \ln 2^6 = 3 \ln 2 - 25 \ln 2 - 18 \ln 2 = -40 \ln 2$

$\rightarrow B = 2 \ln 3^3 + \ln 3^2 - 5 \ln 3^4 = 6 \ln 3 + 2 \ln 3 - 20 \ln 3 = -12 \ln 3$

$\rightarrow C = \ln 5 + \ln 5^3 - 2 \ln 5^4 = \ln 5 + 3 \ln 5 - 20 \ln 5 = -16 \ln 5$

Exemple : simplifier les expressions

$A = 5 \ln a + 6 \ln a - 3 \ln a$

$\rightarrow A = 8 \ln a$

$B = 2 \ln a - 5 \ln a$

$\rightarrow B = -3 \ln a$

$C = \ln 3 + 4 \ln 3 - 7 \ln 3$

$\rightarrow C = -2 \ln a$

Exemple : simplifier les écritures

$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2}$

$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64. \quad (1\text{pt})$

Solution :

$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} = 4 + 3 - 5 - 2 = 0$

$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64 = 5 \ln 2 - 3 \ln 2 + 5 \ln 2 - 6 \ln 2 = \ln 2$

3.-) Domaine de définitions d'une fonction $\ln x$

$\ln(f(x))$ est défini ssi $f(x) > 0$. Ce qui veut dire le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.

$f(x) = \ln(g(x))$ est définie ssi $g(x) \in]0; +\infty[$

Déterminer le domaine de définition

$f(x) = \ln(4 - x^2)$	$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$	$f(x) = \ln 4 - x^2 $	$f(x) = \frac{1}{\ln x}$
$f(x) = \ln(2x^2 - x)$	$f(x) = \ln(x^2 + 4)$	$f(x) = \ln 2 + x $	$f(x) = \ln\frac{1}{x}$

Solution 1 : $f(x) = \ln(4 - x^2)$ est définie ssi $4 - x^2 > 0 \rightarrow$ c'est le signe du trinôme : le signe de « a » (-) à l'extérieur des deux racines -2 et 2 et le signe contraire (+) entre les deux racines $\rightarrow Df =]-2; 2[$.

Solution 2 : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ est définie ssi $\frac{1-x}{x+2} > 0$ et $x+2 \neq 0$

X	$-\infty$	-2	+1	$+\infty$	Explication
$1 - x$		+	+	-	Le signe - à droite de 1 et + à gauche
$x + 2$		-	+	+	Le signe + à droite de -2 et - à gauche
$\frac{1-x}{x+2}$		-	+	-	
	Non	oui	Non		

$$Df =]-2; 1[$$

Solution 3 : $f(x) = \ln|4 - x^2|$ est définie ssi $4 - x^2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$

$$Df =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[.$$

Solution 4 : $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ est définie ssi $\ln x \neq 0$ et $x > 0$

$$\rightarrow \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq e^0 = 1 \rightarrow Df =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

Solution 5 : $f(x) = \ln(2x^2 - x)$ est définie ssi $2x^2 - x > 0$

X	$-\infty$	0	+1/2	$+\infty$
$2x^2 - x$		+	-	+
	Oui	Non	Oui	

$$Df =]-\infty; 0[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

4.-) Limites des fonctions logarithmes

Calcul de limites (Log)

* utilisation des limites usuelles :

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \ln^a u = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \ln u = 0$$

Exemple :

a. $\lim_{u \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ b. $\lim_{u \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$

c. $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+1}{x^2-3} \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{\infty} \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln 0) = -\infty$

d. $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x^2+1}{x-3} \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln x) = +\infty$; e. $\lim_{u \rightarrow \infty} (x \ln^2 x) = 0$

5.-) Dérivée : cas des fonctions $\ln x$

$$f(u) = \ln(u) \rightarrow f'(u) = \frac{u'}{u}$$

$$f(u) = \ln|u| \rightarrow f'(u) = \frac{u'}{u}$$

Exemple :

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3) \rightarrow f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3}$$

$$\rightarrow f(x) = \ln(3x+2) \quad f'(x) = \frac{3}{3x+2}$$

$$\rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$$

6.-) Primitive

La fonction $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln|x| + k \rightarrow I = \int \frac{1}{x} dx = \ln|ax| + k$

La fonction $f(x) = e^{ax} \rightarrow F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k \rightarrow I = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + k$

La fonction $f(u) = \frac{u'}{u} \rightarrow$ Primitive est $F(x) = \ln|u| + k$ (k constante réelle)

La fonction $f(u) = u' e^u \rightarrow$ Primitive est $F(x) = e^u + k$ (k constante réelle)

Cas des fonctions exponentielles e^x

• Domaine de définition

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

- $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$
- $f(x) = e^{\frac{2x}{x-1}}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

• Calcul de limites ($e^{f(x)}$)

* utilisation des limites usuelles :

$$\lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

Exemple :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (numérateur croît plus vite que le dénominateur)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (dénominateur croît plus vite que le numérateur)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

Calcul de dérivée : cas des fonctions e^x

$$f(x) = e^u \rightarrow f'(x) = u' \cdot e^u$$

Exemple :

- $f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = -e^x$
- $f(x) = e^{2x} \rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$
- $f(x) = e^{x^2} \rightarrow f'(x) = 2x e^{x^2}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = e^{(3x^2-5x)} \rightarrow f'(x) = (6x-5) e^{(3x^2-5x)}$
- $f(x) = x \cdot e^x \rightarrow f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$

Exercice : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1.-) $f(x) = e^{3x-7}$

2.-) $g(x) = \ln(e^x + 7)$

3.-) $h(x) = \frac{e^x+2}{e^x-9}$

4.-) $k(x) = 8\ln x - x^2 - 7x + 5$

5.-) Résolution d'équation avec ln

Résoudre une équation avec ln

*** les équations de type : $A^x = B \Rightarrow x = \frac{\ln B}{\ln A}$**

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$: $5^x = 20$; $6^x = 1$; $2^{x-1} = 9$; $7^{2x-3} = 5$

Réponse :

$$5^x = 20 \Rightarrow x = \frac{\ln 20}{\ln 5} = \frac{2,9957}{1,6094} = 1,86 \Rightarrow S = \left\{ \frac{\ln 20}{\ln 5} \right\}$$

*** les équations de type : $\ln u = A \Rightarrow u = e^A$**

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln x = 2$; $\ln(x-1) = 1$; $\ln(x^2 + 1) = 1$

Réponse :

$$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow S = \{e^2\}$$

$$\ln(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = e^1 \Rightarrow S = \{e^1 + 1\}$$

$$\ln(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = e^1 \Rightarrow S = \{e^1 - 1\}$$

*** les équations de type : $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$**

On pose $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et l'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(\ln x)^2 - (\ln x) - 6 = 0$	$6(\ln x)^2 - 19(\ln x) + 10 = 0$
$4(\ln(x+1))^2 - 19\ln(x+1) - 5 = 0$	$(\ln(x-2))^2 + 4\ln(x-2) - 5 = 0$

Réponse :

$$(\ln x)^2 - (\ln x) - 6 = 0 \text{ On pose } X = \ln x \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ alors : } X^2 - X - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 ; x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$\text{Pour } x = -2 \text{ on } \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$$

$$\text{Pour } x = 3 \text{ on } \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3 \text{ l'ensemble solution } S = \{e^{-2}; e^3\}$$

$$6(\ln x)^2 - 19(\ln x) + 10 = 0 \text{ On pose } X = \ln x \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ alors : } 6X^2 - 19X + 10 = 0$$

$$\Delta = (-19)^2 - 4(6)(10) = 121 = 11^2 \Rightarrow x_1 = \frac{19-11}{12} = \frac{2}{3} ; x_2 = \frac{19+11}{12} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pour } x = \frac{2}{3} \text{ on } \ln x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Pour } x = \frac{5}{2} \text{ on } \ln x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{5}{2}} \text{ l'ensemble solution } S = \left\{ e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$4(\ln(x+1))^2 - 19\ln(x+1) - 5 = 0$$

$$\text{On pose } X = \ln(x+1) \text{ alors : } 4X^2 - 19X - 5 = 0 \text{ on trouve } x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x = 5$$

$$\text{Pour } x = -\frac{1}{4} \text{ on } \ln(x+1) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{4}} - 1$$

$$\text{Pour } x = 5 \text{ on } \ln x = 5 \Rightarrow x = e^5 \text{ l'ensemble solution } S = \left\{ e^{-\frac{1}{4}} - 1; e^5 \right\}$$

$$(\ln(x-2))^2 + 4\ln(x-2) - 5 = 0$$

$$\text{On pose } X = \ln(x-2) \text{ alors : } X^2 + 4X - 5 = 0 \text{ on trouve } x = -5 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{Pour } x = -5 \text{ on } \ln(x-2) = -5 \Rightarrow x = e^{-5} + 2$$

$$\text{Pour } x = 1 \text{ on } \ln(x-2) = 1 \Rightarrow x = e^1 + 2 \Rightarrow S = \{e^{-5} + 2; e^1 + 2\}$$

* Système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a \ln x + b \ln y = c \\ a' \ln x + b' \ln y = c' \end{cases} \quad \text{on pose } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y \quad \begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = -5 \\ 8 \ln x - 2 \ln y = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 5 \ln(1-x) + \ln(2+y) = 58 \\ \ln(1-x) - 3 \ln(2+y) = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = 1 \\ 3 \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$
--	---	--

Solution : 2 et 3 10 et 8 1 et 0

$$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = -5 \\ 8 \ln x - 2 \ln y = 10 \end{cases} \quad \text{on pose } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y \quad \begin{cases} 2X - 3Y = -5 \\ 8X - 2Y = 10 \end{cases}$$

On trouve $X = 2$ et $Y = 3$

Pour $X = 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$. Pour $Y = 3 \Rightarrow \ln y = 3 \Rightarrow y = e^3$

L'ensemble solution $S = \{(e^2; e^3)\}$

$$\begin{cases} 5 \ln(1-x) + \ln(2+y) = 58 \\ \ln(1-x) - 3 \ln(2+y) = -14 \end{cases} \Rightarrow X = \ln(x-1) \text{ et } Y = \ln(2+y) \Rightarrow \begin{cases} 5X + Y = 58 \\ X - 3Y = -14 \end{cases}$$

On trouve $X = 10$ et $Y = 8$

Pour $X = 10 \Rightarrow \ln(1-x) = 10 \Rightarrow x = 1 - e^{10}$.

Pour $Y = 8 \Rightarrow \ln(2+y) = 8 \Rightarrow y = e^8 - 2$

L'ensemble solution $S = \{(1 - e^{10}; e^8 - 2)\}$

$$\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = 1 \\ 3 \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \quad \text{on pose } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y \Rightarrow \begin{cases} X - 2Y = 1 \\ 3X + Y = 3 \end{cases}$$

On trouve $X = 1$ et $Y = 0$

Pour $X = 1 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e^1$. Pour $Y = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1$

L'ensemble solution $S = \{(e^1; 1)\}$

Résoudre une équation avec $\ln$ et e

* les équations de type :

$$\ln u = A \Rightarrow u = e^A \quad \text{et} \quad e^u = A \Rightarrow u = \ln A$$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5 ; \quad e^{x-3} = 1 \Rightarrow x = \ln 1 + 3 = 3 ; \quad e^{2x-1} = 8 \Rightarrow x = \frac{\ln 8 + 1}{2}$$

2

*** les équations de type : $a(e^x)^2 + b(e^x) + c = 0$**

On pose $X = e^x$ avec $X > 0$ et l'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$	$6e^{2x} - 19e^x + 10 = 0$
$4e^{2x+2} - 19e^{x+1} - 5 = 0$	$e^{2x-4} + e^{(x-2)+\ln 4} - 5 = 0$

Réponse :

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$ On pose $X = e^x$ avec $X > 0$ alors : $X^2 - X - 6 = 0$

On trouve $X = -2$ (rejet) ou $X = 3$ (accepte)

Pour $X = 3$ on $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$ l'ensemble solution $S = \{\ln 3\}$

$6e^{2x} - 19e^x + 10 = 0$ On pose $X = e^x$ avec $X > 0$ alors : $6X^2 - 19X + 10 = 0$

On trouve $X = 2/3$ ou $X = 5/2$

Pour $x = \frac{2}{3}$ on $e^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \ln \frac{2}{3}$

Pour $x = \frac{5}{2}$ on $e^x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{5}{2}$ l'ensemble solution $S = \{\ln \frac{2}{3}; \ln \frac{5}{2}\}$

$4e^{2x+2} - 19e^{x+1} - 5 = 0$ On pose $X = e^{x+1}$ alors : $4X^2 - 19X - 5 = 0$

on trouve $x = -\frac{1}{4}$ (rejet) ou $x = 5$

Pour $x = 5$ on $\Rightarrow x = \ln 5 - 1$ l'ensemble solution $S = \{\ln 5 - 1\}$

$e^{2x-4} + e^{(x-2)+\ln 4} - 5 = 0$

On pose $X = e^{x-2}$ alors : $X^2 + 4X - 5 = 0$ on trouve $x = -5$ (rejet) ou $x = 1$

Pour $x = 1$ on $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

Exercice :

A.- Calculez la fonction dérivée des fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3} \quad (1\text{pt}) \quad g(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - 9.$$

B.- Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} \quad (1\text{pt}); \quad B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64. \quad (1\text{pt})$$

Corrigé de l'exercice :

A.- Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2 + 1}{(x+3)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2}$$

$$g(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - 9 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}x + 7$$

B.- Simplification :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} = 4 + 3 - 5 - 2 = 0; \quad A = 0$$

$$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64 = \ln 2^5 - \ln 2^3 + \ln 2^5 - \ln 2^5 = 5\ln 2 - 3\ln 2 + 5\ln 2 - 6\ln 2 = \ln 2; \quad B = \ln 2$$

Exemple d'étude de fonction

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

Etudier et représenter graphiquement

Rappelons que le logarithme décimal :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+4) = \frac{\ln(x+4)}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{-\ln(x+4)}{\ln 2}$$

Etape 1 : Domaine de définition

f est définie lorsque $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4 \Rightarrow Df =]-4; +\infty[$

Etape 2 : limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Etape 3 : dérivée première

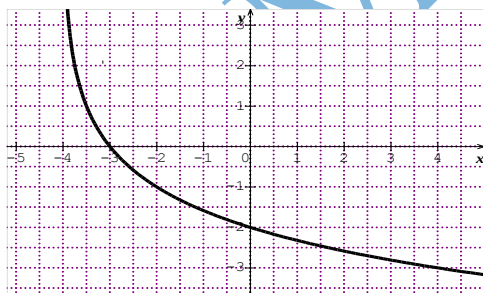
$$f(x) = \frac{-\ln(x+4)}{\ln 2} \quad f'(x) = \frac{1}{\ln 2} * \frac{-1}{x+4}$$

Etape 4 : sens de variation (signe de $f'(x)$)

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} * \frac{-1}{x+4} < 0 \quad \forall x \in Df$$

X	-4	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Etape 5 : représentation graphique



Exemple d'étude de fonction

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$
Etudier et représenter graphiquement

Etape 1 : Domaine de définition

f est définie lorsque $x > 0 \rightarrow Df =]0; +\infty[$

Etape 2 : limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Etape 3 : dérivée première $\rightarrow f'(x) = \frac{5(3-2\ln x)}{x}$

Sens de variation (signe de $f'(x)$)

$$f'(x) = \frac{5(3-2\ln x)}{x} = 0 \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1,25	$-\infty$

Etape 4 : représentation graphique



Exemple d'étude de fonction

Soient deux fonctions sur $] -1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2 \ln(x+1)$$

1.-) Calcule $g'(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x^2+4x}{x+1}$

En déduire que g admet un minimum

Quel est le signe de g(x)

2.-) Etudier les variations de f et calcule limite de f(x) lorsque x tend vers -1 et x tend vers + l'infini

3.-) déterminer la tangente T à C à l'origine

Solution

Soient deux fonctions sur $] -1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2 \ln(x+1)$$

1.-) $g'(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x^2+4x}{x+1} \Rightarrow$ En déduire que g admet un minimum

$$g(x) = \frac{2x^2+4x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et le Min de } g = 3 \Rightarrow \text{le signe de } g(x)$$

Le Min de $g = 3$ veut dire que $g(x) \geq 3 \Rightarrow g$ est positif

2.-) Les variations de f

$$f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2}{x+1} \cdot (x+1) - 1 \cdot (2 \ln(x+1))}{(x+1)^2} = \frac{2 - 2 \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

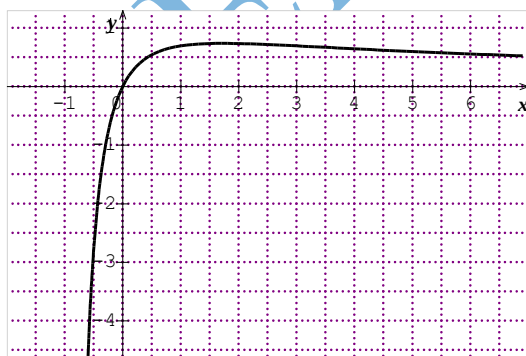
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = e^1 - 1$$

Limite de f(x) lorsque x tend vers -1 et x tend vers + l'infini

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} = 0$$

3.-) La tangente T à C à l'origine : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = 2(x - 0) + 0 \Rightarrow y = 2x$$



Cas particuliers : les fonctions circulaires

Rappels de notions :

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$	$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$
$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$	$\operatorname{Cotg} u = \frac{\cos u}{\sin u}$	$\operatorname{Tang}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$
$\sin 2a = 2 \sin a * \cos a$	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$	
$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$		

Formule de somme de la trigonométrie:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

Les cinq angles remarquables sont :

Degré	Radian	Sinus	Cosinus
0°	2π ou 0 rd	$\sin 0^\circ = \sin 2\pi = 0$	$\cos 0^\circ = \cos 2\pi = 1$
30°	$\frac{\pi}{6}$ rd	$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$ rd	$\sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$ rd	$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$ rd	$\sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Les limites au voisinage de zéro

$\lim_{u \rightarrow 0} \sin(u) = u$	$\lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{tg}(u) = u$	$\lim_{u \rightarrow 0} \cos(u) = 1$
$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$	$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$	$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$
$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2u)}{2} = \lim_{u \rightarrow 0} \sin^2 u = u^2$		

Exercice : calculer les limites au voisinage de zéro

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)}{7x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x)}{3x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{x \sin x}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)}{x \sin 7x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tang} 9x}{3x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 11x)}{\sin^2 5x}$

Solution

a.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)}{7x^2}$ Rappelons que : $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ en effet

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{7x^2}$ on voisinage de zéro $\sin^\alpha u = u^\alpha$ ainsi $\sin^2 2x = 4x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(4x^2)}{7x^2} = \frac{8}{7} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)}{7x^2} = \frac{8}{7}$$

b.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 5x)}{3x^2}$ Rappelons que : $2 \sin^2 u = 1 - \cos 2u$ en effet : $2u = 5x \rightarrow u = \frac{5}{2}x \rightarrow$ on remplace u dans $2 \sin^2 u = 1 - \cos 2u \rightarrow 2 \sin^2 \frac{5}{2}x = 1 - \cos 5x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5}{2}x}{3x^2}$ on voisinage de zéro $\sin^\alpha u = u^\alpha$ ainsi $\sin^2 \frac{5}{2}x = \frac{25}{4}x^2$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{25}{4}x^2\right)}{3x^2} = \frac{50}{12}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 5x)}{3x^2} = \frac{50}{12}$

c.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

d.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos^2 3x)}{x \sin 7x} = \frac{\sin^2 3x}{7x^2} = \frac{9x^2}{7x^2} = \frac{9}{7}$

e.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 9x}{3x} = \frac{9x}{3x} = 3$

b.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 11x)}{\sin^2 5x}$ réponse : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 11x)}{\sin^2 5x} = \frac{242}{40}$

Sujet :

1.- démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

en déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x} = \frac{1}{2}$

2.- Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1-2 \cos x}$

Calculer les limites au point x_0 :

Changement de variable $X = x - x_0$ quand x tend vers x_0 alors X tend vers 0

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos 4x)}{\sin 2x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3-\frac{3}{2}\cos x}{\sqrt{3}-2 \sin x}$
--	--	--

Solution

a.- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1+\cos x)}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée. Levons l'indétermination : transformons la limite au voisinage de zéro à partir d'un changement de variable.

$X = x - x_0$ quand x tend vers x_0 alors X tend vers 0

$X = x - \pi$ quand x tend vers π alors X tend vers 0

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}$ on remplace x par $X + \pi$:

$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1+\cos(X+\pi)}{\sin(X+\pi)}$ rappelons que :

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\rightarrow \cos(X+\pi) = \cos(X) \cdot \cos(\pi) - \sin(X) \cdot \sin(\pi) = -\cos X$

$\rightarrow \sin(X+\pi) = \sin(X) \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi) \cdot \cos(X) = -\sin X$

$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1+\cos(X+\pi)}{\sin(X+\pi)} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1-\cos X}{-\sin X}$

Rappelons que : $2 \sin^2 u = 1 - \cos 2u$ en effet : $2u = X \rightarrow u = \frac{1}{2}X$

$\rightarrow$ on remplace u dans $2 \sin^2 u = 1 - \cos 2u \rightarrow 2 \sin^2 \frac{1}{2}X = 1 - \cos \frac{1}{2}X$

$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1-\cos X}{-\sin X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}X}{-\sin X} = \frac{\frac{1}{2}X^2}{-X} = -\frac{1}{2}X = 0$

Etudes de fonctions circulaires

• La dérivée première

Fonction	Dérivée première
$f(x) = \sin(kx + b)$	$f'(x) = k \cos(kx + b)$
$f(x) = \cos(kx + b)$	$f'(x) = -k \cos(kx + b)$
$f(x) = \arctan(kx + b)$	$f'(x) = \frac{k}{1+(kx+b)^2}$
$f(x) = \arcsin(kx + b)$	$f'(x) = \frac{k}{\sqrt{1-(kx+b)^2}}$

Exemple : Calculer la dérivée première de $f(x)$

Rappels

$[\sin f]' = f' \cos f$	$[\cos f]' = -f' \sin f$	$[\tan f]' = \frac{f'}{\cos^2 f} = f'(1 + \tan^2 f)$
-------------------------	--------------------------	--

$[\arcsin f]' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$[\arctan f]' = \frac{f'}{1+f^2}$
--	-----------------------------------

- a.-) $f(x) = \sin(x + 2)$; b.-) $f(x) = \cos(5x + 2)$
 c.-) $f(x) = \sin(1 - x)$; d.-) $f(x) = \cos(x^2 - x + 1)$
 e.-) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x} + 1\right)$; f.-) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
 g.-) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$; h.-) $f(x) = \cos(2 + x)$
 i.-) $f(x) = \tan(5x - 7)$; j.-) $f(x) = \tan(2 - x)$
 k.-) $f(x) = \arcsin(3x + 1)$ L.-) $f(x) = \arctan(1 - 2x)$

Solution

- a.-) $f(x) = \sin(x + 2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x + 2)$
 b.-) $f(x) = \cos(5x + 2) \Rightarrow f'(x) = -5 \sin(5x + 2)$
 c.-) $f(x) = \sin(1 - x) \Rightarrow f'(x) = -\cos(1 - x)$
 d.-) $f(x) = \cos(x^2 - x + 1) \Rightarrow f'(x) = -(2x - 1)\sin(x^2 - x + 1)$
 e.-) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x} + 1\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x} + 1\right)$
 f.-) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x} - 1\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
 g.-) $f(x) = \sin(\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$
 h.-) $f(x) = \cos(2 + x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(2 + x)$
 i.-) $f(x) = \tan(5x - 7) \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x-7)}$
 j.-) $f(x) = \tan(2 - x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\cos^2(2-x)}$

Exemple : la dérivée de f(x)

a.-) $f(x) = \sin^2 x$ b.-) $f(x) = (\cos x)^5$ c.-) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 5x}$
 d.-) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ e.-) $f(x) = \tan^7 x$

Solution

a.-) $f(x) = \sin^2 x$ c'est la forme $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

On pose $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow n = 2$

$f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$

b.-) $f(x) = (\cos x)^5$ c'est la forme $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

On pose $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x \Rightarrow n = 5$

$f'(x) = -5 \cdot \sin x \cdot (\cos x)^4$

c.-) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 5x} \Rightarrow$ c'est la forme $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u = \sin 2x \Rightarrow u' = 2 \cos 2x$

$v = \cos 5x \Rightarrow v' = -5 \sin 5x$

$f'(x) = \frac{2 \cos 2x \cdot \cos 5x + 5 \sin 5x \cdot \sin 2x}{\cos^2 5x}$

d.-) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ c'est la forme $[u \cdot v]' = u'v + v'u$

$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$f'(x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

d.-) $f(x) = \tan^7 x$ c'est la forme $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

On pose $u = \tan x \Rightarrow u' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow n = 7$

$f'(x) = 7 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan^6 x$

Etudes de fonctions circulaires

• Primitive ou intégral

La dérivée de « $\sin x$ » égale « $\cos x$ » alors

$$\ll \int \cos x \, dx = \sin x \gg$$

La dérivée de « $\cos x$ » égale « $-\sin x$ » alors

$$\ll \int \sin x \, dx = -\cos x \gg$$

La dérivée de « $\tan x$ » égale « $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ » alors

$$\ll \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x \gg$$

La dérivée de « $\arcsin x$ » égale « $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ » alors

$$\ll \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \gg$$

La dérivée de « $\arccos x$ » égale « $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ » alors

$$\ll \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x \gg$$

La dérivée de « $\arctan ax$ » égale « $\frac{a}{1+(ax)^2}$ » alors

$$\ll \int \frac{a}{1+(ax)^2} \, dx = \arctan ax \gg$$

$\int \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + k$	$\int \sin(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + k$
$\int \frac{a}{\cos^2 ax} \, dx = \tan(ax) + k$	$\int \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}} \, dx = \arcsin ax$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x$	$\int \frac{a}{1+(ax)^2} \, dx = \arctan ax$

Exercices de réchauffement

$$\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) ;$$

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

- $f(x) = \cos 5x \rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{5} \sin 5x + k$
- $f(x) = \sin 5x \rightarrow$ Primitive est de $F(x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + k$
- $f(x) = \cos(2x+1) \rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + k$
- $f(x) = \sin(1-x) \rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \cos(1-x) + k$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \arctan x + k$
- $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \tan x + k$.

Primitive d'une fonction

En mathématiques, une **primitive** d'une fonction f d'une variable réelle définie sur un intervalle I est une fonction F , définie et dérivable sur I , dont la dérivée est f , autrement dit telle que pour tout réel x de l'intervalle I ,

$$F'(x) = f(x) : \quad \forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Une condition suffisante pour qu'une fonction f admette des primitives sur un intervalle est qu'elle y soit continue.

Si f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I alors, pour tout réel k , une primitive de $k f$ sur I est $k F$.

Si F et G sont des primitives respectives de deux fonctions f et g , alors une primitive de $f + g$ est $F + G$.

Si une fonction f admet une primitive sur un intervalle, elle en admet une infinité, qui diffèrent d'une constante (appelée souvent « constante d'intégration ») : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors il existe un scalaire C tel que $F_1 = F_2 + C$.

En mathématiques, l'**intégrale impropre** (ou **intégrale généralisée**) désigne une extension de l'intégrale usuelle, définie par une forme de passage à la limite dans des intégrales.

La primitive est notée $F(x) \rightarrow F'(x) = f(x)$

L'intégrale indéfinie de $f(x) \rightarrow I = \int f(x)dx = F(x) + K$

L'intégrale définie de $f(x) \rightarrow I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

L'intégrale impropre de $f(x) \rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Primitive usuelle

$f(x) = a$ alors $F(x) = ax + k$	$f(x) = x^n$ alors $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = e^{ax}$ alors $F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ alors $F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$f(x) = \frac{a}{x}$ alors $F(x) = a \ln x + k$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ alors $F(x) = 2\sqrt{x} + k$

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$ une primitive de f	Validité	Exemples	
			$f(x)$	$F(x)$
a (cste)	$a x$	R	$f(x) = 5$	$F(x) = 5x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	R^*	$f(x) = 2 x^6$	$F(x) = \frac{2 x^7}{7}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0; +\infty[$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$]0; +\infty[$		

Primitives des fonctions composées

$f(x)$	$F(x)$ une primitive de f	Validité	Exemples	
			$f(x)$	$F(x)$
$U' U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + k$	Aucune		
$\frac{U'}{U^n}$	$\frac{-1}{(n-1) U^{n-1}} + k$	U ne s'annule pas sur I		
$\frac{U'}{U}$	$\ln U + k$	U strictement positive sur I		
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2 \sqrt{U} + k$	U strictement positive sur R		
$U' e^U$		Aucune		
$U' \sqrt{U}$	$\frac{2 U \sqrt{U}}{3} + k$			

Primitive des fonctions circulaires

$f(x)$	$F(x)$ une primitive de f
$f(x) = \cos(ax)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax) + k$
$f(x) = \sin(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax) + k$
$f(x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$F(x) = \tan(u) + k$
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ sur $] -1; 1[$	$F(x) = \arcsin u = \arccos u + \frac{\pi}{2}$
$f(x) = \frac{u'}{1+u^2}$ sur $R - \{-1; 1\}$	$F(x) = \arctan u + k$

La dérivée de « $\sin x$ » égale « $\cos x$ » alors « $\int \cos x \, dx = \sin x$ »

La dérivée de « $\cos x$ » égale « $-\sin x$ » alors « $\int \sin x \, dx = -\cos x$ »

La dérivée de « $\tan x$ » égale « $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ » alors « $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan^2 x$ »

La dérivée de « $\arcsin x$ » égale « $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ » alors « $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$ »

La dérivée de « $\arctan ax$ » égale « $\frac{a}{1+(ax)^2}$ » alors « $\int \frac{a}{1+(ax)^2} \, dx = \arccos ax$ »

Exercices de réchauffement : calculer $F(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x^9}; f(x) = \frac{1}{x}; f(x) = \sqrt[n]{x}; f(x) = \sqrt[3]{x}; f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}; f(x) = e^{ax}.$$

- $f(x) = \frac{1}{x^9} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^9} = x^{-9} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{-9+1} x^{-9+1} = \frac{-1}{8 \cdot x^8} + k$
- $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \ln |x| + k$
- $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{x^{\frac{1+n}{n}}}{\frac{1+n}{n}} + K$
- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + k = \frac{3 \cdot x^{\frac{4}{3}}}{4} + k$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = x^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1} = \frac{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}{4} = \frac{5 \sqrt[5]{x^4}}{4} + k$
- $f(x) = e^{ax} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k$

Exercices de réchauffement : calculer $F(x)$

$$\int \sin(ax+b)dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b); \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

$$f(x) = \cos 5x; f(x) = \sin 5x; f(x) = \cos(2x+1); f(x) = \sin(1-x)$$

- $f(x) = \cos 5x \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{5} \sin 5x + k$
- $f(x) = \sin 5x \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{-1}{5} \cos 5x + k$
- $f(x) = \cos(2x+1) \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + k$
- $f(x) = \sin(1-x) \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \cos(1-x) + k$

Exercices de réchauffement : calculer $F(x)$

$$\int \frac{1}{1+ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(x\sqrt{a}); \int \frac{1}{\sqrt{1-ax^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin(x\sqrt{a})$$

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2}; f(x) = \frac{1}{1+5x^2}; f(x) = \frac{1}{1+16x^2}; f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}; f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$$

- $f(x) = \frac{1}{1+4x^2} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{2} \arctan 2x + k$
- $f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan x\sqrt{5} + k$
- $f(x) = \frac{1}{1+16x^2} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{4} \arctan 4x + k$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin 2x + k$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}} \Rightarrow$ Primitive est de $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{2}x + k$

Exercices de réchauffement : calculer $F(x)$

Enoncés	Corrigés $\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 5)^7$	$\rightarrow F(x) = \frac{(x^2-3x+5)^8}{8}$
$f(x) = (2x - 5)^9$	$\rightarrow F(x) = \frac{(2x-5)^{10}}{2 \cdot 10}$
$f(x) = \sqrt{4x+3}$	$F(x) = \frac{(4x+3)^{\frac{3}{2}}}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{(4x+3)^3}}{6}$
$f(x) = (x - 5)(x^2 - 10x + 4)$	$\rightarrow F(x) = \frac{(x^2-10x+4)^2}{4}$
$f(x) = (x - 5)(x^2 - 10x + 4)^5$	$\rightarrow F(x) = \frac{(x^2-10x+4)^6}{12}$
$f(x) = \sqrt[3]{4x+3}$	$\rightarrow F(x) = \frac{3(4x+3)^{\frac{4}{3}}}{16} + K$
$f(x) = \frac{1}{(2x-3)^7}$	$\rightarrow F(x) = \frac{-1}{12(2x-3)^6}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x+3}}$	$\rightarrow F(x) = \frac{3 \sqrt[3]{(4x+3)^2}}{4} + K$
$f(x) = \frac{1}{(x-11)^3}$	$\rightarrow F(x) = \frac{(x-11)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(x-11)^2} + K$
$f(x) = \frac{1}{x^2+6x+9}$	$F(x) = -(x+3)^{-1} + K$
$f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$	$F(x) = \frac{-1}{2}(x+1)^{-2} + K$
$f(x) = \frac{1}{x^3-6x^2+12x-8}$	$F(x) = \frac{-1}{2}(x-2)^{-2} + K$
$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^{10}}$	$F(x) = \frac{1}{18}(x-2)^{-9} + K$
$f(x) = \frac{\ln x}{x}$	$F(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + K$
$f(x) = \frac{(\ln x)^7}{x}$	$F(x) = \frac{1}{8} (\ln x)^8 + K$
$f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x}$	$F(x) = \frac{1}{5} (\ln x)^5 + K$
$f(x) = \sin x * \cos^2 x$	$F(x) = \frac{-1}{3} (\cos x)^3 + K$
$f(x) = \cos x * \sin^9 x$	$F(x) = \frac{1}{10} (\sin x)^{10} + K$

Exercices de réchauffement : calculer $F(x)$

Enoncés	Corrigés - application de la formule $\int \frac{u'}{u} = \ln u $
$f(x) = \frac{5}{x+1}$	$F(x) = 5 \ln x+1 + k$
$f(x) = \frac{2}{1-x}$	$F(x) = -2 \ln 1-x + k$
$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}$	$F(x) = \ln x^2+x+5 + k$
$f(x) = \frac{10x-3}{5x^2-3x+1}$	On pose $u = 5x^2 - 3x + 1 \Rightarrow u' = 10x - 3$, $\int \frac{u'}{u} = \ln u $ $F(x) = \ln 5x^2 - 3x + 1 + k$
$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$	On pose $u = 1 - x^2 \Rightarrow u' = -2x$; la forme $\int \frac{u'}{u} = \ln u $ $F(x) = -\frac{1}{2} \ln 1 - x^2 + k$
$f(x) = \frac{1}{5x+2}$	On pose $u = 5x + 2 \Rightarrow u' = 5$ c'est la forme $\int \frac{u'}{u} = \ln u $ $F(x) = \frac{1}{5} \ln 5x + 2 + k$
$f(x) = \frac{x}{x+2}$	$f(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$ Primitive est de : $F(x) = x - 2 \ln x+2 + K$
$f(x) = \frac{x}{x-3}$	$f(x) = \frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$ Primitive est de : $F(x) = x + 3 \ln x-3 + K$
$f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x+1}$	$f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x+1}$ la division euclidienne donne $f(x) = x + 1 + \frac{3}{x+1}$ Primitive est de : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3 \ln x+1 + K$
$f(x) = \frac{5x^2-3x+1}{x+2}$	$f(x) = \frac{5x^2-3x+1}{x+2}$ la division euclidienne $f(x) = 5x - 13 + \frac{27}{x+2}$ Primitive est de : $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 13x + 27 \ln x+2 + K$

Exercices de réchauffement : calculer $F(x)$

Enoncés	Corrigés - application de la formule $\int u' e^u = e^u$
$f(x) = e^{2x}$	On pose $u = 2x \Rightarrow u' = 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + k$
$f(x) = e^{-x}$	On pose $u = -x \Rightarrow u' = -1 \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + k$
$f(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$	On pose $u = x^2 - x \Rightarrow u' = 2x - 1 \Rightarrow F(x) = e^{x^2-x} + k$
$f(x) = x e^{x^2}$	On pose $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$

Exercices à faire : calculer une primitive $F(x)$ de chacune des fonctions

$f(x) = \frac{5x}{x+2}$	$f(x) = \frac{10}{(5x+1)^5}$
$f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$	$f(x) = \frac{3x^2-5}{x-1}$
$f(x) = \frac{-3x}{x^2-6}$	$f(x) = \frac{x^2-x+6}{3x-5}$
$f(x) = \frac{3x}{x+2}$	$f(x) = \frac{6x^2-x+7}{4x+1}$
$f(x) = \frac{5}{1+3x}$	$f(x) = \frac{6x-5}{(3x^2-5x+1)^3}$
$f(x) = \frac{3x}{x-7}$	$f(x) = \frac{7x}{(x^2+1)^{20}}$
$f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+8}$	$f(x) = \sqrt[7]{1-3x}$
$f(x) = \frac{3x^5-7x^2+x+1}{x-1}$	$f(x) = \sqrt[3]{2-5x}$
$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^6}$	$f(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$
$f(x) = \frac{1}{2x^2+12x+18}$	$f(x) = \frac{x+7}{(x^2+14x+1)^2}$
$f(x) = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x^2}$	$f(x) = \sqrt[7]{4x+3}$
$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$	$f(x) = \frac{5}{(1-x)^9}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x}}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2x+1}}$
$f(x) = (3x^2 - 8x + 2) \sqrt[5]{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}$	$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt[5]{x^2+x-1}}$
$f(x) = (8x+1) \sqrt[9]{4x^2+x+1}$	

Exemple : $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$

• $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln x-1$ • $\int \frac{1}{3x+5} dx = \frac{1}{3} \ln 3x+5$ • $\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln 1-2x$	• $\int \frac{7}{7x+3} dx = \ln 7x+3$ • $\int \frac{2}{2-3x} dx = \frac{-2}{3} \ln 2-3x$ • $\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln 1-2x$
--	---

Exemple : $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u|$

• $\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln x^2-1$ • $\int \frac{x}{3x^2+5} dx = \frac{1}{6} \ln 3x^2+5$	• $\int \frac{7x}{x^2+3} dx = \frac{7}{2} \ln x^2+1$ • $\int \frac{6x+3}{x^2+x+1} dx = 3 \ln x^2+x+1$
---	--

Intégration par partie

Intégration par partie : $I = \int u(x).v'(x).dx = [u(x).v(x)] - \int u'(x).v(x).dx$

Exemple : En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : **une primitive de $f(x) = \ln x$**

Posons $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ et $v' = 1 \Rightarrow v = x$ formule $\int u.v' = [u.v] - \int u'.v$

$$\int \ln x = [x \ln x] - \int \frac{1}{x}.x dx = [x \ln x] + x + k$$

Exemple 2 : En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \text{ et } J = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$$

Solution : Rép $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = 2\sqrt{2} \quad J = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx = \frac{4}{5} \sqrt{2}$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \text{ on pose } u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ et } v' = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow v = 2\sqrt{x+2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = \left[2x \sqrt{x+2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx = \left[2x \sqrt{x+2} \right]_0^1 - \left[2 \sqrt{x+2} \right]_0^1$$

$$I = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$J = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ et } v' = \sqrt{x+1} \Rightarrow v = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$$

$$J = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3} x (x+1) \sqrt{x+1} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 (x+1) \sqrt{x+1} dx =$$

$$J = \frac{2}{3} * 2 * \sqrt{2} - \frac{2}{3} \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{x+1} dx =$$

$$J = \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} * J - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{x+1} dx$$

$$J + \frac{2}{3} J = \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} \right]_0^1$$

$$\frac{5}{3} J = \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} * \frac{4}{3} * \sqrt{2} = -\frac{4}{3} \sqrt{2} \Rightarrow J = -\frac{4}{5} \sqrt{2}$$

Exemple 3 : En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $I = \int_1^e \ln x dx$

Solution : Rép $I = \int_1^e \ln x = 1$

$$\text{On pose } u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \text{ et } v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$I = \int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx = e - \left[x \right]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Exemple 4 : En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $I = \int_1^e x \cos x dx$

Solution :

$$\text{On pose } u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ et } v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = \int_0^\pi x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_1^e - \int_1^e \sin x dx = 0 - \left[-\cos x \right]_0^\pi = -1 - 1 = -2$$

Rappelons que : $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$; $\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$;

Intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad I = \int_{-3}^5 f(x)dx = F(5) - F(-3)$$

Exemple : Calculer les intégrales suivantes

Enoncés	Corrigés												
$I = \int_0^1 (x - 2) (x^2 - 4x + 7) \, dx$	$I = \int_0^1 (x - 2) (x^2 - 4x + 7) \, dx = \left[\frac{(x^2 - 4x + 7)^2}{4} \right]_0^1$ $I = \left[\frac{(x^2 - 4x + 7)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{16}{4} - \frac{49}{4} = -\frac{33}{4}$												
$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$	On pose $U = x^2 + 1 \Rightarrow U' = 2x \Rightarrow \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$ $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$												
$I = \int_0^2 (1 - x - 1) \, dx$	On étudie le signe de $(x - 1)$ <table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>-</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$x - 1$</td><td>$-x + 1$</td><td>$x - 1$</td><td></td></tr></table> $I = \int_0^1 (1 - (-x + 1)) \, dx + \int_1^2 (1 - (x - 1)) \, dx$ $I = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} - 0 + 2 - \frac{3}{2} = 1$	X	0	1	2		-	+		$ x - 1 $	$-x + 1$	$x - 1$	
X	0	1	2										
	-	+											
$ x - 1 $	$-x + 1$	$x - 1$											
$I = \int_0^5 \left(2x - 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} \right) \, dx$													
$I = \int_1^2 \left(\frac{2x^3 - x^2 + 2}{3x^2} \right) \, dx$													
$I = \int_{-1}^1 (3x - 2)^3 \, dx$													
$I = \int_{-2}^{-1} (\sqrt{1 - 2x}) \, dx$													
$I = \int_{-1}^0 \frac{x^3 + x^2 - 17x + 15}{x - 1} \, dx$													
$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \, dx$													
$I = \int_0^1 (x - 2)(x^2 - 4x + 7) \, dx$													

Sujet d'examen 1

On considère les fonctions F et f défini sur $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

F est-elle une primitive de f ? Justifier.

Solution : F est une primitive de $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ alors F est une primitive de f .

La formule de $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \Rightarrow f = 1-x ; f' = -1$

Sujet d'examen 2

On considère les fonctions F et f défini sur $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{3} (2x+1)^3 \text{ et } f(x) = (2x+1)^2$$

F est-elle une primitive de f ? Justifier.

Solution : F est une primitive de $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$$F(x) = \frac{1}{3} (2x+1)^3 \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{3} * 3 * (2) * (2x+1)^{3-1} = 2 (2x+1)^2$$

$\Rightarrow F'(x) = 2 (2x+1)^2 \neq f(x)$ alors F n'est pas une primitive de f .

La formule de $(f^n)' = n f' f^{n-1} \Rightarrow f = 2x+1 ; n=3 ; f' = 2$

Sujet d'examen 3

Déterminer, dans chaque cas, une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

a.) $f(x) = \frac{2x^4}{3}$ et $I = \mathbb{R}$	c.) $f(x) = \frac{5}{7x}$ et $I =]0; +\infty[$
b.) $f(x) = \frac{5}{2x^3}$ et $I =]0; +\infty[$	d.) $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{5x} + 3x - 21$ et $I =]0; +\infty[$
e.) $f(x) = \frac{5}{2x-1}$ et $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$	f.) $f(x) = \frac{x+2}{(x^2+4x)^3}$ et $I =]0; +\infty[$
g.) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $I =]0; +\infty[$	h.) $f(x) = e^{2x}$ et $I = \mathbb{R}$
i.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0; +\infty[$	k.) $f(x) = \sin x + \cos 2x$ et $I = \mathbb{R}$

Solution :

a.) $f(x) = \frac{2x^4}{3} \Rightarrow F(x) = \frac{2x^5}{15} + k$

b.) $f(x) = \frac{5}{2x^3} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} x^{-3} \Rightarrow F(x) = \frac{-5}{4} x^{-2} + k$

c.) $f(x) = \frac{5}{7x} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{7} \ln|x| + k$

d.) $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{5x} + 3x - 21 \Rightarrow$ d.) $f(x) = 3x^{-2} + \frac{2}{5x} + 3x - 21$

$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{2}{5} \ln|x| + \frac{3}{2}x^2 - 21x + k$

Sujet d'examen 4

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$, par $f(x) = x \ln x$

1.-) déterminer $f'(x)$

2.-) En déduire une fonction primitive de la fonction $\ln x$.

Solution

$$f(x) = x \ln x \rightarrow f'(x) = \ln x + 1$$

2.-) En déduire une fonction primitive de la fonction $\ln x$.

$$f'(x) = \ln x + 1 \text{ et } F(x) = x \ln x = \ln x + 1 \rightarrow \ln x = \frac{x \ln x}{x} - 1$$

$$(x \ln x)' = \ln x + 1 \rightarrow \ln x = (x \ln x)' - 1 \rightarrow \text{primitive de } \ln x .$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow F(x) = x \ln x - x$$

Sujet d'examen 5

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$, par $f(x) = \frac{x-6}{(x-1)^2}$

1.-) déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2.-) En déduire une primitive F de f sur $]1; +\infty[$.

Sujet d'examen 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{4}$

Déterminer la primitive F de f dont la courbe passe par le point $A(2; 1)$.

Sujet d'examen 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x e^x$

1^{ère} méthode :

Déterminer les réels a et b tels que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)e^x$ soit une primitive de f .

2^{ème} méthode :

Trouver une relation entre f et f'

En déduire une primitive F de f

Résolution d'équations différentielles

Définition

On appelle équation différentielle d'ordre n , ($n \in \mathbb{N}$) toute équation de la forme $F(x; y(x); y'(x); y''(x); \dots; y^n(x)) = 0$ ou F est une fonction de $(n+1)$ variables, ou y est la fonction inconnue supposée n fois dérivable de dérivée successives $y; y'; y''; \dots; y^n$ de la variable x .

Il suffit de remarquer que : $y' = \frac{dy}{dx}$

Résoudre une équation différentielle revient à retrouver la fonction : $y(x)$.

Solutions d'une équation différentielle :

Etant donnée une équation différentielle d'ordre n ; on appelle solution de cette équation différentielle toute fonction f définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$; n fois dérivable sur I et vérifiant l'équation différentielle donnée pour tout x de I

Remarque : si U est une fonction définie sur I et continue alors équation différentielle $y' = U(x)$ admet comme solution toute fonction primitive de U sur I

Equation différentielle du type $y' + ky = 0$

Soit à résoudre l'équation $y' + ky = 0$

L'équation caractéristique est $r + k = 0$ qui a pour solution unique $r = -k$

$$y' + ky = 0 \Rightarrow y' = -ky$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$S = \{x \mapsto ce^{-kx} ; c \in \mathbb{R}\}$$

Equation différentielle du type $y'' - w^2 y = 0$:

Soit à résoudre l'équation $y'' - w^2 y = 0$ avec $w \in \mathbb{R}$

Cette équation différentielle a pour l'équation caractéristique est $r^2 - w^2 = 0$ donc les solutions sont $r_1 = w$ et $r_2 = -w$

Ces solutions sont alors les fonctions de la forme :

$$S = \{x \mapsto c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx} ; (c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Equation différentielle du type $y'' + w^2 y = 0$:

Soit à résoudre l'équation $y'' + w^2 y = 0$ avec $w \in \mathbb{R}$

Cette équation différentielle a pour l'équation caractéristique est $r^2 + w^2 = 0$ donc les solutions sont $r_1 = wi$ et $r_2 = -wi$

Ces solutions sont alors les fonctions de la forme :

$$S = \{x \mapsto c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx) ; (c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Activité : résoudre les équations différentielles suivantes :

$$a) y' = y \quad b) y'' - 9y = 0 \quad c) y'' + 4y = 0$$

Equations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants sans 2^{ème} membre :

Soit à résoudre l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ avec $w \in \mathbb{R}$

Cette équation différentielle a pour l'équation caractéristique est

$$ar^2 + br + c = 0$$

Pour résoudre cette équation différentielle on admet le tableau suivant :

Si l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ admet	Alors les solutions sont les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$
2 racines réelles : r_1 et r_2	$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$
1 racine réelle : r_0	$f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$ $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$
2 racines complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$

Activité :

1) Résoudre les équations suivantes :

a) $(E_1): y'' + y' - 6y = 0$

b) $(E_2): y'' - 6y' + 13y = 0$

2) Déterminer la fonction solution de l'équation différentielle (E) la condition indiquée

$(E): y'' + 6y' + 9y = 0$ sachant que: $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$

Résolution des types d'équation différentielle

Type 1 : Equation différentielle de type : $y' = p(x)$ ($P(x)$ continue sur I)

$$y' = k \Rightarrow y = kx + \lambda$$

$$y' = p(x) \Rightarrow y = \int p(x) dx$$

Exemple 1 :

1/ Trouver toutes les solutions de $y' = 5$

2/ trouver la solution qui vérifie les conditions initiales pour :

$$x_0 = 2 \text{ et } y(x_0) = 12$$

Solution :

1/ $y' = 5 \Rightarrow$ la solution générale : $y(x) = 5x + \lambda$

2/ $\Rightarrow y(2) = 5 * 2 + \lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 2$

La solution particulière : $y(x) = 5x + 2$

Exemple 2 :

1/ Trouver toutes les solutions de $y' = 2x - 1$

2/ trouver la solution qui vérifie les conditions initiales pour :

$$x_0 = 0 \text{ et } y(x_0) = -2$$

Solution :

1/ $y' = 2x - 1 \Rightarrow y = x^2 - x + \lambda$

$\Rightarrow$ La solution générale : $y(x) = x^2 - x + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

2/ $x_0 = 0$ et $y(x_0) = -2$

La solution générale : $y(x) = x^2 - x + \lambda$

$y(0) = 0^2 - 0 + \lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -2$

La solution particulière : $y(x) = x^2 - x - 2$

Type 2 : Equation différentielle de type : $y'' = p(x)$ (p continue sur I)

$$y'' = p(x) \Rightarrow y' = \int p(x) dx \Rightarrow y = \int y' dx + \lambda_1 x + \lambda_2$$

Exemple 1 : résoudre $y'' = 3$; $y'' = x$; $y'' = x^2$

$$y'' = 3 \Rightarrow y' = 3x + \lambda_1 \Rightarrow y(x) = \frac{3}{2}x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

$$y'' = x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^2 + \lambda_1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6}x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^3 + \lambda_1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{12}x^4 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

Exemple 2 : Trouver toutes les solutions de $y'' = 2x - 3$

$$y'' = 2x - 3 \Rightarrow y' = x^2 - 3x + \lambda_1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\lambda_1 + \lambda_2$$

La solution générale : $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\lambda_1 + \lambda_2$

Exemple 3 :1/ Trouver toutes les solutions de $y'' = x + \frac{1}{x^2}$

2/ trouver la solution qui vérifie les conditions initiales pour :

$$y'(1) = \frac{1}{2} \text{ et } y(1) = \frac{1}{6}$$

Solution :

$$1/ y'' = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} + \lambda_1 \Rightarrow$$

$$\text{La solution générale : } y(x) = \frac{1}{6} x^3 - \ln|x| + \lambda_1 x + \lambda_2$$

$$2/ y'(1) = \frac{1}{2} \text{ et } y(1) = \frac{1}{6}$$

$$y'(1) = \frac{1}{2} 1^2 - \frac{1}{1} + \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = \frac{1}{6} - \ln|1| + \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$$\text{On trouve } \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -1$$

$$\text{La solution particulière : } y(x) = \frac{1}{6} x^3 - \ln|x| + x - 1$$

Type 3 : équation différentielle de type : $y' = ay$ $a \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Résoudre : } y' = ay \Rightarrow y(x) = \lambda e^{ax} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Equation homogène à coefficient constant $ay' + by = 0$

$$ay' + by = 0 \Rightarrow ay' = -by \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{b}{a} dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a} x \Rightarrow y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y' = ay \Rightarrow \text{Solution générale } y(x) = \lambda e^{ax} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Résoudre : } y' - y = 0; y' + y = 0; 2y' - 3y = 0; y' + 5y = 0.$$

Solution :

$$y' - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow y(x) = \lambda e^x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2y' - 3y = 0 \Rightarrow y' = \frac{3}{2} y \Rightarrow y(x) = \lambda e^{\frac{3}{2}x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y' + 5y = 0 \Rightarrow y' = -5y \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-5x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple :1/ Trouver toutes les solutions de $y' = 3y$ 2/ trouver la solution qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.**Solution :**

$$1/ y' = 3y \Rightarrow \text{la solution générale : } y(x) = \lambda e^{3x} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2/ y(0) = 1; y(0) = \lambda e^0 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{La solution particulière : } y(x) = e^{3x}$$

Type 4 : Equation différentielle à coefficient constant à second membre P(x)

$$y' + k y = ax^2 + bx + c \quad E1$$

- **Résolution de l'équation homogène associée** $y' + k y = 0$
 $y' + k y = 0 \Rightarrow y' = -k y \Rightarrow$ Solution générale de E1
 $\Rightarrow y(x) = \lambda e^{-k x}$ avec $\lambda \in R$

- **Résolution d'une solution particulière de E1 : $y_0(x)$**
 avec $y_0(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_0(x) = 2ax + b$
Remplaçons $y_0(x)$ et $y'_0(x)$ dans E1 :
 $y'_0(x) + k y_0(x) = 0 \Rightarrow (2ax + b) + k (ax^2 + bx + c) = 0$

En mettant l'équation sous la forme $AX^2 + BX + C = 0 \Rightarrow A=0 ; B=0$ et $C=0$.
 On résout le système puis on aura les valeurs de a, b, c.

Exemple : résoudre $y' + 2y = x^2$ E1

- **Résolution de l'équation homogène associée** $y' + 2 y = 0$
 $y' + 2 y = 0 \Rightarrow y' = -2 y \Rightarrow$ Solution générale de E1
 $\Rightarrow y(x) = \lambda e^{-2 x}$ avec $\lambda \in R$

• **Résolution d'une solution particulière de E1 : $y_0(x)$**
 Le second membre est x^2 ce qui veut dire que $y_0(x)$ est un polynôme de degré 2
 $(ax^2 + bx + c) : y_0(x) = ax^2 + bx + c$ et $y'_0(x) = 2ax + b$

Remplaçons $y_0(x)$ et $y'_0(x)$ dans E1 :
 $y'_0(x) + 2 y_0(x) = x^2 \Rightarrow (2ax + b) + 2 (ax^2 + bx + c) = x^2 \Rightarrow$
 $(2a - 1)x^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = 0$ Un polynôme est nul si tous les coefficients sont nuls $\Rightarrow 2a - 1 = 0 ; 2a + 2b = 0$ et $b + 2c = 0$

Après résolution on trouve $a = \frac{1}{2} ; b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$

La solution particulière : $y_0(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}$

La solution de E1 = solution de l'équation homogène + solution particulière

La solution de E1, $y(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in R$

Réchauffement : résoudre

1.-) $y' + 2y = x^2$ E1	6.-) $y' + y = 2x - 1$ E6
2.-) $3y' - y = 4x$ E2	7.-) $3y' - y = x^2 - 7x$ E7
3.-) $2y' + 7y = 4x^2$ E3	8.-) $y' - 3y = 3x^2 - x + 1$ E8
4.-) $y' - 5y = 3x^2 + x$ E4	9.-) $y' - 7y = x^2 + 2x + 3$ E9
5.-) $y' - y = x^2 + x + 1$ E5	10.-) $y' + 5y = 5x + 7$ E10

Type 5 : équation différentielle de type : $y'' + \theta^2 y = 0$ $\theta \in \mathbb{R}$

$$y'' + \theta^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de $y'' + 4y = 0$.

2/ trouver la solution qui prend la valeur : $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = -1$

Solution :

$$1/ y'' + \theta^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

$$y'' + 2^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

La solution générale $y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$ où $A, B \in \mathbb{R}$

$$2/ y(\pi) = 1 \text{ et } y'(\pi) = -1$$

$$y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x \Rightarrow y'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$y(\pi) = A \cos 2\pi + B \sin 2\pi = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$y'(\pi) = -2A \sin 2\pi + 2B \cos 2\pi = -1 \Rightarrow B = -1/2$$

$$\text{La solution particulière : } y(x) = \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

Exemple :

Trouver toutes les solutions de $y'' + 3y = 0$

Solution :

$$y'' + \theta^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

$$y'' + 3y = 0 \Rightarrow y'' + \sqrt{3}^2 y = 0$$

$$y(x) = A \cos x\sqrt{3} + B \sin x\sqrt{3} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

La solution générale : $y(x) = A \cos x\sqrt{3} + B \sin x\sqrt{3}$ où $A, B \in \mathbb{R}$

Type 6 : équation de type : $a y'' + y' + cy = 0$ $a \neq 0$

$$a y'' + y' + cy = 0 \Rightarrow a r^2 + br + c = 0 \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{Solution } r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{La solution générale : } g(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de : $2 y'' - 6 y' - 8 y = 0$

2/ trouver la solution qui prend la valeur : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

Solution :

$$1/ \text{L'équation } 2 y'' - 6 y' - 8 y = 0 \text{ devient } 2 r^2 - 6 r - 8 = 0 \rightarrow r^2 - 3 r - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 = 5^2 \text{ on trouve } r_1 = -1 \text{ et } r_2 = 4 \text{ d'où : } g(x) = A e^{-x} + B e^{4x}$$

$$2/ g(x) = A.e^{-x} + B.e^{4x} \text{ et } g'(x) = -A.e^{-x} + 4.B.e^{4x}$$

$$g(0) = A.e^0 + B.e^0 = 0 \text{ alors } A + B = 0 \text{ l'équation 1}$$

$$\text{et } g'(0) = -A.e^0 + 4.B.e^0 = 1 \text{ alors } -A + 4B = 1 \text{ l'équation 2 :}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 4B = 1 \end{cases} \text{ on trouve } A = -1/5 \text{ et } B = 1/5$$

$$\text{La solution particulière : } g(x) = (-1/5).e^{-x} + (1/5).e^{4x}$$

Résumé du cours sur les équations différentielles

Résoudre $y' = k \Rightarrow$ sol gle $y = kx + \lambda$

Exemple : $y' = 7 \Rightarrow$ sol gle $y = 7x + \lambda$

Résoudre $y' = p(x) \Rightarrow$ sol gle $y = \int p(x) dx + \lambda$

Exemple : $y' = x^3 \Rightarrow$ sol gle $y = \frac{1}{4} x^4 + \lambda$

$y'' = p(x) \Rightarrow y' = \int p(x) dx \Rightarrow y = \int y' dx + \lambda_1 x + \lambda_2$

Exemple : $y'' = 2x \Rightarrow y' = x^2 + \lambda_1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$

$y' = a y \Rightarrow$ Solution générale $y(x) = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in R$

Exemple : $y' = -2y \Rightarrow$ Solution générale $y(x) = \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in R$

Résoudre $y' + k y = ax + b$ E₁

L'équation homogène $y' + k y = 0$

$\Rightarrow$ solution gle $y(x) = \lambda e^{-kx}$ avec $\lambda \in R$

Solution particulière de E₁ : $y_0(x) = ax + b$ et $y'_0(x) = a$

Remplaçons dans y et y' dans E₁ pour déterminer a et b

Résoudre $y' + k y = ax^2 + bx + c$ E₁

L'équation homogène $y' + k y = 0$

$\Rightarrow$ solution gle $y(x) = \lambda e^{-kx}$ avec $\lambda \in R$

Sol particulière de E₁ : $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ et $y'_0(x) = 2ax + b$

Remplaçons dans y et y' dans E₁ pour déterminer a et b.

$y'' + \theta^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x$ où $A, B \in R$

$a y'' + y' + cy = 0 \Rightarrow a r^2 + br + c = 0$ où $a, b, c \in R$

$\Delta = b^2 - 4ac$ Solution $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

La solution générale : $g(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$

Sujet d'examen sur les équations différentielles

Sujet 1 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$

Solution : $y'' - 2y' - 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$

$$\Delta = 16 = 4^2 \Rightarrow r_1 = \frac{+2-4}{2} = -1 \quad r_2 = \frac{+2+4}{2} = 3$$

La solution générale : $g(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \Rightarrow g(x) = A e^{-x} + B e^{3x}$

Sujet 2 :

1/ Résoudre l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$

Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 3$

2/ Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$

Déterminer la solution g qui vérifie : $g(\pi/2) = -1$ et $g(\pi/4) = 1$

3/ Calculer : $I = \int_0^{\pi/2} xg(x)dx$

Solution :

$$y' = a y \Rightarrow \text{Solution générale } y(x) = \lambda e^{ax} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y'' + \theta^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

1/ l'équation différentielle $3y' + 2y = 0 \Rightarrow$

$$3y' + 2y = 0$$

$$3^{\text{ième}} \text{ cas : } y' = a.y \Rightarrow y(x) = A.e^{3x}$$

$$y' = -\frac{2}{3}y \Rightarrow y(x) = A.e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$y(0) = A.e^0 = 3 \Rightarrow A = 3 \text{ la solution } y(x) = 3.e^{-\frac{2}{3}x}$$

2/ $y'' + 4y = 0$

$$4^{\text{ième}} \text{ cas : } y'' + \omega^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos \omega x + B.\sin \omega x \quad \text{où } (A \text{ et } B \in \mathbb{R})$$

$$y'' + 2^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos 2x + B.\sin 2x$$

$$g(\pi/2) = -1 \text{ et } g(\pi/4) = 1$$

$$y(\pi/2) = A.\cos \pi + B.\sin \pi = -1 \Rightarrow A = -1 \text{ et } y(\pi/4) = A.\cos \frac{\pi}{2} + B.\sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow B = 1$$

La solution particulière : $y(x) = -\cos 2x + \sin 2x$

Exercice 1 : BAC SBT 2001

- Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$
- Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$

Indication de solution :

$y'' + 4y = 0$ c'est le 4^{ième} cas : $y'' + 2^2 \cdot y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$

$2y' + 3y = 0$ c'est le 3^{ième} cas : $y' = -\frac{3}{2} \cdot y \Rightarrow y(x) = A \cdot e^{-\frac{3}{2}x}$

Exercice 2 : SBT juin 1999

Résoudre les équations différentielles :

1/ $y' + 5y = 0$

2/ $y' + 9y = 0$

3/ a) Calculer $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx$

b) En déduire l'intégrale suivante : $A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx$

Indication de solution :

1/ $y' + 5y = 0$ c'est le 3^{ième} cas : $y' = -5 \cdot y \Rightarrow y(x) = A \cdot e^{-5x}$

2/ $y' + 9y = 0$ c'est le 3^{ième} cas : $y' = -9 \cdot y \Rightarrow y(x) = A \cdot e^{-9x}$

3/ $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$

$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \int_{-\pi/4}^0 \cos 2x \cdot dx + \int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2} \right) = 1$

Rappelons que : si $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2}$ alors $\int_{-\pi/4}^0 \cos 2x \cdot dx = \frac{-1}{2}$

Exercice 3 : résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a.-) $4y'' + 4y' + y = 0$

b.-) $y'' + y' + y = 0$

c.-) $2y'' - 6y' - 8y = 0$

d.-) $y'' + 4y' + 4y = 0$

e.-) $y'' - 4y' + 5y = 0$

f.-) $y'' - y' - 6y = 0$

Indication de solution :

5^{ième} cas : $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0 \Rightarrow a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ où $(a ; b ; c \in \mathbb{R})$

$\Delta = b^2 - 4ac$ et $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

La solution générale : $g(x) = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}$