

FICHE N°2 SUR LES FONCTIONS $\ln$ et $\exp$ **Problème 1 :**

- I) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$
- 1) Dresser le tableau de variation de g .
 - 2) Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- II) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$
- 1) Dresser le tableau de variation de f .
 - 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions α et β ($\alpha < \beta$).
 - 3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) def.
 - a) Etudier le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduire la position de (C) et (Δ) .
 - 4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.

Problème 2 :**Partie A :**

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

- 1) Etudier les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Dresser le tableau de variation de g puis en déduire son signe sur $]0, +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = x + 2 \bullet \frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

d'unité graphique 2 cm.

- 1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) , puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) .
- 2) Déterminer les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ) .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
- 4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.
- 5) Hachurer puis calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Problème3 :**Partie A :**

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$

- 1) Etudier le sens de variation de g . (On ne demande pas de déterminer les limites de g , ni de construire sa courbe).
- 2) a) Calculer $g(0)$ et $g(2)$
b) Démontrer que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que $1,30 < \alpha < 1,31$

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $]-\infty, 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$.

- 1) Etudier le sens de variation de f . Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
- 2) Prouver que $f(\alpha) = \alpha$
- 3) a) Démontrer que $\forall x \in [0,3]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
b) En déduire que $\forall x \in [0,3]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
c) Démontrer que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f .
a) Tracer la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tel que : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.
b) En remarquant α que, $\forall x \neq 5 : \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$, Montrer que $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$
c) Prouver que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On utilisera une intégration par partie).

Exercice :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

- 1) Déterminer les nombres réels a , b et c tel que $\forall x \in]1; +\infty[$

$$\text{On ait } g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

- 2) Déterminer une primitive de la fonction g sur $]1; +\infty[$
- 3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx$