

I – Définition et conséquences :

1- Définition : la fonction logarithme népérien notée **ln** ou **Log** est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule pour **1**. Elle est définie sur $]0 ; +\infty[$.

2- Conséquence immédiates de la définition :

La fonction **ln** : $]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$$x \mapsto \ln x$$

II – Relation fonctionnelle fondamentale:

1- Propriété : $\forall (a ; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 ; \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

2- Conséquences :

C₁) Soit a et b deux réels strictement positifs : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

En effet si $c = \frac{a}{b}$ alors $a = bc$; $\ln a = \ln(bc) \Rightarrow \ln a = \ln b + \ln c \Rightarrow$

$$\ln c = \ln a - \ln b \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

C₂) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

C₃) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \forall n \in \mathbb{R} ; \ln a^n = n \times \ln a$.

C₄) $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b ; \ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.

C₅) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$.

III – Fonction du type (ln o u):

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I.

1 – Propriétés des dérivées logarithmiques :

P₁) $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemples : a/ Soit $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$ on a : $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$.

b/ Soit $g :] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} [\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = -\ln(\cos x) \quad \text{on a} \quad g'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Donc une primitive de $\tan x$ est : $-\ln(\cos x)$.

$$P_2) \quad [\ln(u \times v)]' = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

$$P_3) \quad [\ln(\frac{u}{v})]' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

$$\text{Exemple : } f(x) = \ln \left| \frac{2x-1}{-x+3} \right| \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{-x+3}.$$

$$P_4) \quad [\ln(U^r)]' = r \times \frac{U'}{U}.$$

$$\text{Exemple : } f(x) = \ln(x+3)^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \times \frac{1}{x+3}.$$

2 – Recherche de Primitives :

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u| + c$.

$$\text{Soit } g(x) = \frac{1}{x} \text{ on a } G(x) = \ln|x| + c ; h(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow H(x) = \ln|x^2+1| + c.$$

IV – Etude de la fonction logarithme Népérien:

1– Ensemble de définition

La fonction **ln** est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$.

2 – Limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

3 – Fonction dérivée

La fonction **ln** est dérivable donc continue sur $]0 ; +\infty[$.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in]0 ; +\infty[.$$

D'où **ln** est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4– Bijectivité – Nombre e :

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$. C'est donc une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. $\forall y \in \mathbb{R}; \exists ! x \in]0 ; +\infty[$ tel que $\ln x = y$.
Pour $y = 1$ l'équation $\ln(x) = 1$ admet une solution unique $x = e \approx 2,71$.

$$2,718 \leq e \leq 2,719.$$

Définition :

On appelle **base du logarithme Népérien** l'unique nombre réel e tel que $\ln e = 1$.

5 – Etude des branches infinies :

a-/ Comportement asymptotique au voisinage de zéro :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ || donc la droite d'équation $x = 0$ est Asymptote Verticale.

b-/ Comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$:

Soit $f(x) = \ln x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

En effet pour tout réel x strictement positif on a : $\ln x \leq \sqrt{x}$; $\Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$

De plus si $x > 1$ on a : $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow$

$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \leq 0$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

D'où la droite d'équation $y = 0$ est une direction parabolique.

- Conséquences :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 .$$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = (0) \times (-\infty)$ Forme indéterminée.

Posons $x = \frac{1}{X}$; si $x \rightarrow 0^+$ alors $X \rightarrow +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} (\ln 1 - \ln X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} - \left(\frac{\ln X}{X} \right) = 0$.

■ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0}$ Forme indéterminée.

Posons $x + 1 = h \Leftrightarrow x = h - 1$; si $x \rightarrow 0$ alors $h \rightarrow 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln(h) - \ln(1)}{h - 1} = \ln'(1) = 1$.

6 – Tableau de variation de $\ln$:

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+	+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

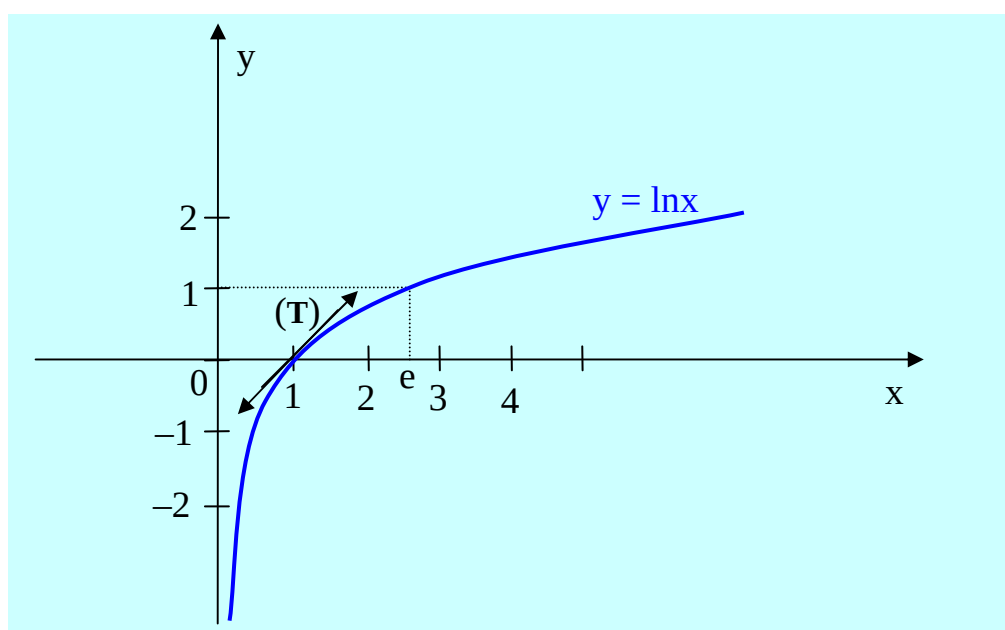
Remarques importantes :

- Si $x \in]0 ; 1[$ alors $\ln x < 0$;
- Si $x \in]1 ; +\infty[$ alors $\ln x > 0$.

- Equation de la tangente (T) en $x_0 = 1$:

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow (T) : y = x - 1.$$

7 – Tracé de la courbe de $\ln$:



IV – Logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^*$; et $a \neq 1$) :

1-/ Définition : On appelle logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ et définie par :

$$\log_a :]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_a^{(x)} = \frac{\ln x}{\ln a} .$$

$$\log_a^{(x)} = \frac{\ln x}{\ln a} .$$

2-/ Propriétés :

$$a) \quad \log'_a(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a \times x} ;$$

$$b) \quad (\log_a \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a} = \frac{1}{\ln a} \times \frac{u'(x)}{u(x)} .$$

$$c) \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a^x - \log_a^y ; \quad \log_a(x \times y) = \log_a^x + \log_a^y ;$$

$$d) \quad \log_a(x^r) = r \times \log_a^x ; \quad \log_a \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_a^y ; \quad \log_a^a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1 .$$

3-/ Logarithme décimal (log à base dix)

On définit le logarithme décimal noté **log** par : $\log_{10}^{(x)} = \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} .$

$$\log 10 = \log_{10}^{10} = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1 . \text{ D'où } \log 10 = 1 \text{ et } \log 10^3 = 3 \log 10 = 3 .$$