

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

I-LIMITES ET CONTINUITES :

1) Limites

a) Limite de référence :

- $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \end{cases}$
- $n \in \mathbb{N}^*$ et n impair : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 4 ;$$

b) Limite somme - Limite produit - Limite quotient :

Soient f et g deux fonctions numériques, l et l' deux réels et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Limite somme :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	∞	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Limite produit :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l > 0$		$l < 0$		$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite quotient :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$-\infty$		$+\infty$		0	$l > 0$		$l < 0$		∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$-\infty$	0^+	0^-	0^-	0^+	∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	?

Remarque : Dans le calcul des limites on a quatre formes indéterminées qui sont : $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ et $+\infty - \infty$

c) Limite de fonction polynômes et rationnelles :

- Limite en un point x_0 :

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 5x - 15) ; \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 5x - 15)^2$$

- Limite à l'infini :

- A l'infini un polynôme a même limite que son monôme le plus haut degré.
- A l'infini une fonction rationnelle a même limite que son monôme le plus haut degré du numérateur et celui du dénominateur.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 5x - 15)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 5x - 15)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 15}{5x^4 + 9x^2 - 1} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 15}{5x^4 + 9x^2 - 1} \right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^5 + x + 1}{-5x^2 - x^2 - 1} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^5 + x + 1}{-5x^2 - x^2 - 1} \right)$

d) Limite des fonctions comportant des radicaux :

Exemples : Calculer les limites :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \right)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2} \right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} + x)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x} - x)$

e) Limite des fonctions trigonométriques :

Formules usuelles : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1.$$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 4x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3(1-\cos x)}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$.

f) Limite à gauche - Limite à droite :

Exemple : Calculer les limites suivantes aux bornes des ensembles de définitions

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{2-x} ; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$$

2) Continuités

a) Continuité en un point x_0 :

Soit f une fonction numérique et x_0 un nombre réel. f est continue en x_0 si et seulement si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple :

$f(x) = x^2 - 2x + 5$. f est-elle continue en $x_0 = 2$?

Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$ Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$

b) Continuité à gauche - Continuité à droite

f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

NB: f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

Dans le cas contraire on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Exemple: Soit $f(x) = x^2 + |x|$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue
- 2) Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

$$x \in]-\infty, 0] \quad f(x) = x^2 - x$$

$$x \in [0, +\infty[\quad f(x) = x^2 + x$$

c) Continuité sur un intervalle

- f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si elle est continue en tout de l'intervalle
- f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si elle est :
 - Continue sur $]a, b[$
 - Continue à droite en $x = a$
 - Continue à gauche en $x = b$.

d) Théorèmes sur les fonctions continues :

- Soit f et g deux fonctions continues en x_0 et α un réel : $f + g$; $f \times g$; αf ; $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) sont continues en x_0 .
- Toute **fonction polynôme** est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute **fonction rationnelle** est continue sur son domaine de définition
- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

3) Prolongement par continuité :

Activité : Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- f est - elle continue en x_0 ?
- Soit g une fonction définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(1) = 2 \end{cases}$. g est - elle continue en 1 ?

Définition : Soit f une fonction ; x_0 et l deux réels tels que :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On appelle prolongement de f par continuité en x_0 la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Exemple 1 : Soit la fonction f définie par $(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. f est - elle prolongeable par continuité en $x_0 = 1$

Exemple 2 : Soit la fonction $h: x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

- Calculer la limite en 1 de la fonction h .
- En déduire une k prolongement par continuité de h en 1.

4) Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K . Si c est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un réel $x \in [a ; b]$ tel que $f(x) = c$.

Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

DERIVABILITE

1) Dérivabilité en un point x_0 :

Soit f une fonction numérique, D_f son domaine de définition et $x_0 \in D_f$. f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

On note si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ ou $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivée de f en x_0

Exemple: soit $g(x) = x^2 + 2x + 5$. La fonction g est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

2) Dérivabilité à gauche - Dérivabilité à droite :

✓ La fonction f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$.

✓ La fonction f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$.

NB : f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple: Soit $g(x) = x^2 + |x|$. Etudier la dérivabilité de g en 0.

3) Dérivabilité sur un intervalle :

f est dérivable sur un intervalle k si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

✓ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

✓ Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition

4) Fonction dérivée :

a) Dérivée des fonctions usuelles :

Fonction f	Fonction dérivée f'	f est dérivable sur l'intervalle
a	0	$\mathbb{R}$
ax	x	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$

x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
ax^n	anx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2} + k; \frac{\pi}{2} + k[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\cotan x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$]k\pi; k\pi + \pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Opération sur les fonctions :

Soit U et V deux fonctions dérivables et $\alpha \in \mathbb{R}$

Fonctions	Dérivée sur k
$U + V$	$U' + V'$
αU	$\alpha U'$
$U \times V$	$U'V + V'U$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$
$\frac{1}{V}$	$-\frac{V'}{V^2} \quad (V \neq 0)$
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
U^n	$nU'U^{n-1}$
$\cos U$	$-U' \sin U$
$\sin U$	$U' \cos U$

Exemple :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$
- 2) $f(x) = \frac{2x+1}{2-x}$
- 3) $f(x) = (x^2 + 4x - 3)^5$
- 4) $f(x) = (x^2 - x + 2)^5$
- 5) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 2}$
- 6) $g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{3x - 1}$
- 7) $g(x) = \frac{1}{-3x^2 - 5x + 2}$
- 8) $g(x) = (2x - 1)^2 (x^2 + 1)^3$
- 9) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}$
- 10) $g(x) = 3x\sqrt{x + 1}$
- 11) $h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

$$12) h(x) = \frac{-4x}{x-8}$$

$$13) h(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2+3}}$$

c) **Dérivée de la composée :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , g la fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$

Exemple : Soit $h(x) = \sin(x^2 + 1)$. Calculer la dérivée $h'(x)$

Solution :

Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sin x$ donc on a $h(x) = g \circ f(x)$

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$$

$$f'(x) = 2x \text{ et } g'(x) = \cos x \text{ d'où } h'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$$

En particulier :

$$[\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b)$$

$$[\sin(ax + b)]' = a \cos(ax + b)$$

$$[\tan(ax + b)]' = \frac{a}{\cos^2(ax + b)} = a[1 + \tan^2(ax + b)]$$

Exemple :

Calculer la dérivée des fonctions : $f(x) = \cos(3x + 2) + \sin(\pi x)$ et

$$g(x) = \frac{4}{5} \tan(3 - 5x)$$

d) **Sens de variation :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x élément de I $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x élément de I $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout x élément de I $f'(x) = 0$.

Remarque :

f est strictement croissante si et seulement si si pour tout x élément de I $f'(x) > 0$.

f est strictement décroissante si et seulement si si pour tout x élément de $f'(x) < 0$.

En générale les variations d'une fonction sont consignées dans un tableau de variation

Exemple :

a) Soit $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Etudier les variations de f puis dressé son tableau de variation

b) Soit $g(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

Etudier les variations de g puis dressé son tableau de variation

Définition :

Une fonction f est monotone (respectivement strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante)

Théorème de la bijection :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I donc réalise une bijection de I sur $f(I)$ par suite elle admet une fonction réciproque notée f^{-1} qui est aussi une bijection de $f(I)$ sur I .

Soit $I = [a; b]$ et f une fonction, si de plus $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [a; b]$.

Dérivée de la fonction réciproque :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Exercice :

Soit $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $] -\infty, -1[$ réalise une bijection de $] -\infty, -1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3) Calculer $(g^{-1})'(3)$ de deux manières différentes.

SERIES D'EXERCICES

Exercices

I- Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$

b- $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

c- $f(x) = \sqrt{3-2x}$

d- $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

e- $g(x) = \frac{x^2+1}{|x-3|-2}$

f- $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$

g- $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

h- $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

II- Calculer les limites suivantes :

a- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{5x^4 + x^2 - 1} \right)$

b- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 3x^4 + x^3 - 8}{2x^4 + x^3 - x - 3} \right)$

c- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right)$

d- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 5x^2 - 3x - 7}{x^3 - 3x^2 + x + 5} \right)$

e- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - 1} \right)$

f- $\lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x+5}{\sqrt{1-3x}-4} \right)$

g- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{3x^2-8x+2} \right)$

h- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} \right)$

i- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5 + x^2 + 3x^4 - 2x^5)$

j- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

k- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

l- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{x-2}$

m- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{\sqrt{x}-1}$

n- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

o- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

p- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} \right]$

q- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

III- a- Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}{3x^2 + 3x - 6} & \text{si } x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(-2) = -1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f aux points -2 et 1 .

b- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}.$$

Pour quelle valeur de a la fonction f est - elle continue au point -1 ?