

LBAC

Série d'Exercice sur les Fonctions Numériques d'une Variable réelle : TSE-STI

Exercice 1 :

I./ Calcule les limites

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos 2x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} x} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}, a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} \text{ où } E(x) \text{ est la partie entière de } x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{2 + \sin x}$$

II/ Dans chacun des cas étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction en x_0

$$1/ \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ f(1) = 2 \end{cases}; x_0 = 1$$

$$2/ \begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x - 5}}{x - 2} \sin x + 2 \\ f(2) = \frac{1}{3} \end{cases}; x_0 = 2$$

Prof: Mohamed TRAORE
« seule l'épreuve du feu forge un
acier fin »

$$3/ \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2 \cos 2x} - 1}{2 \cos 2x + 1} \sin x \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] - \{\frac{\pi}{3}\} \\ f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}; x_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$4/ \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \sin x \quad x \in]-\infty, 1[\\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \sin x \quad x \in [1, 3] \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \sin x \quad x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

$x_0 \in \{1, 3\}$

Exercice 2 :

I/ Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{2x + 1}$

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur g que $\forall a \in [0, 4]; 1 + \frac{1}{3}a \leq \sqrt{2a + 1} \leq 1 + a$

II/ On donne $f(x) = \frac{2x^3}{(1+x^3)\sqrt{1+x^4}}$

1/ Détermine l'ensemble de définition

2/ Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^3}$

III/ Soit $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1/ Vérifie que $2x = x^2 + 1 - (x-1)^2$ puis déduire que f est majorée

2/ Vérifie que $2x = (x+2)^2 - (x+1)^2$ puis déduire que f est minorée

3/ Déduis que $\forall x \in \mathbb{R} - 1 \leq f(x) \leq 1$

IV/ a et b sont deux réels tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

Utilise l'inégalité des accroissements finis pour montrer que :

$$0 \leq \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \leq \frac{b-a}{\cos^2 x}$$

1/4

Problème 1:

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1}$

Partie A: Etude d'une fonction auxiliaire

soit la fonction g définie par:

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

- 1-1 Etudier les variations de g
- 2-1 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$
- 3-1 Donner un encadrement de α au centième près
- 4-1 Dédire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B: Etude de la fonction principale

- 1-1 Déterminer l'ensemble de définition D de f et les limites.
- 2-1 Justifier que $\forall x \in D; f'(x) = \frac{11x(x-1)^2}{(x-1)^2}$
- 3-1 Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
- 4-1 a) Justifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1})$
b) Encadrer puis déduire le signe de $f(\alpha)$
c) Justifier que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α puis déduire le signe de $f(x)$

Partie C: Etude d'une restriction de f

- 1-1 Soit l'application g définie par:
 $h:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto h(x) = f(x)$
a-1 Démontrer que h admet une appli-

cation réciproque h^{-1}

b-1 Déterminer $h^{-1}(0)$ et $h^{-1}(1)$

c-1 Démontrer que la courbe (C) de f dans l'intervalle $]1, +\infty[$ coupe une seule fois la droite $(\Delta): y = m$ ($m \in \mathbb{R}$)
(On représentera (C) d'abord)

Problème 2:

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

1-1 a-1 Déterminer le domaine de définition E de f et calculer les limites aux bornes de E

b-1 Etudier le sens de variation de E et dresser son tableau de variation

c-1 Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

2-1 Soit $I = [\frac{1}{4}; 1]$

a-1 Démontrer que $\forall x \in I; f(x) \in I$

b-1 Démontrer qu'il existe $k \in I$ tel que $\forall x \in I; |f'(x)| \leq k$

c-1 Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$

d-1 Démontrer que:

$$\forall x \in I; |f(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|$$

3-1 Soit l'application g définie par
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

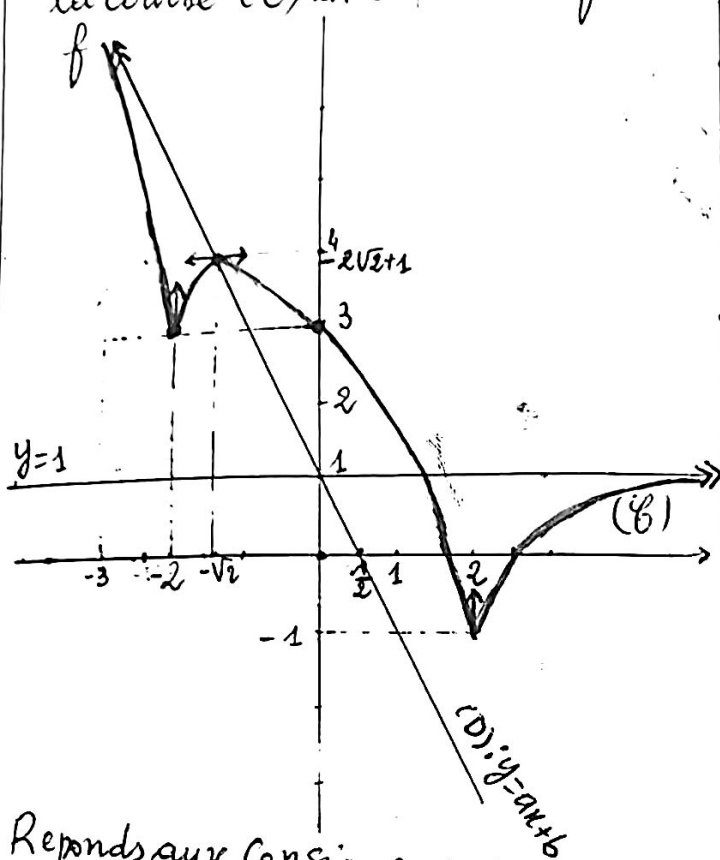
a-1 Démontrer que g est une bijection et que sa bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

b-1 Calculer $(g^{-1})'(\alpha)$ sans le symbole de la racine carrée.

$\frac{2}{4}$

Problème 3 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) est celle d'une fonction f



Reponds aux Consignes suivantes en observant la courbe (C) .

- Consigne 1 : Détermine le domaine de définition D_f tout en définissant les limites en ses bornes.
- Consigne 2 : Détermine l'ensemble de dérivabilité E de f
- Consigne 3 : Détermine l'équation de la droite (D) .
- Consigne 4 : Extrais toutes les informations utiles concernant f et f'
- Consigne 5 : Dresse le tableau de variation de f
- Consigne 6 : Demontre que l'équation
 - $f(x) = 1$ admet une unique solution $0 < d < 2$
 - $f(x) = 0$ admet 2 solutions dont on précisera les intervalles
- Consigne 7 : Donne $f([0, 2])$ et le signe de $f(x)$

Problème 4 :

Soit la fonction f définie par son tableau de variation

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	2	$\circ$	$\textcircled{4}$	$-\infty$	$+\infty$

- 1/ Détermine D_f , le domaine de définition
- 2/ En deduire les limites de f aux bornes de D_f
- 3/ f est-elle continue ; dérivable en -3 ?
- 4/ Donne une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 0
- 5/ Étudie les asymptotes à la courbe (C) de f .
- 6/ Détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ puis en deduire les positions relatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.
- 7/ Montre que la restriction g de la fonction f à $[0, 3[$ est une bijection de $[0, 3[$ vers un intervalle J à préciser.
- 8/ Trace la courbe (C) sachant que l'asymptote oblique en $+\infty$ à (C_f) passe par les points $A(-\frac{2}{3})$ et $B(0, 2)$

Problème 5 :

Les parties A, B, C et D sont toutes indépendantes

A/ Soit $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x - \sin x$

- 1/ Détermine l'ensemble de définition
- 2/ Justifie le choix de l'intervalle $[0, \pi]$ comme intervalle d'étude
- 3/ Montrer que $f'(x) = -4 \sin^2 x \cos x$ 3/4

a) En déduis les variations de f
 b) Trace la courbe (C) de f sur $[-\pi, \pi]$

B) Soit $g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

1- Déterminer le domaine de définition.

2- Montre que g est périodique de période $T = 2\pi$

3- Étudie la parité de f et en déduis la symétrie correspondante

4- Étudie les variations de f sur $[0, \pi]$

5- Trace la courbe (Cg) sur $[-\pi, \pi]$

C) Soit $h(x) = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x}$

1) Détermine Df puis justifie l'étude de f sur $[0, \pi]$

2) Montre que f est impaire.

3) Démontre que pour tout $x \in Df$

$$f'(x) = \frac{2\cos^2 x + 2\cos x - 1}{1 + \cos x}$$

4) Vérifie que sur $[0, \pi]$, la courbe (C) de f admet une branche infinie dont on précisera la nature.

5) Dresse le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$

6) Trace (C) sur $[-2\pi, 2\pi]$

D) On considère la fonction f définie

$$\text{par } f(x) = \begin{cases} x^2 - \cos x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} - (x+2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- Montre que f est continue en 0

3- Étudie la continuité de f sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$

4- a) Montre que tout $x < 0$

$$x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$$

b) En déduis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

Problème 6 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x + |x^2 - 4|}$$

1- Écrire f sans le symbole valeur absolue et précise Df

2- Étudie la continuité et la dérivabilité de f sur Df.

3- Étudie les variations de f .

4- Calcule les limites de f aux bornes de Df et précise les asymptotes à la courbe (C) de la fonction f .

- Précise les positions relatives de (C) par rapport aux asymptotes obliques

NB : Dans chaque intervalle, on pourra comparer $[f(x)]^2$ et y^2

5- Trace (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 1,5 cm) en précisant les tangentes et demi-tangentes aux points remarquables

6- Montre que la restriction de f à l'intervalle $[-1; \frac{3}{2}]$ notée g est une bijection de $[-1; \frac{3}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

7- Représente graphiquement dans le même repère la réciproque g^{-1} et g .

8- Définir g^{-1} .

Prof : Mohamed TRAORE

« Seule l'épreuve du feu forge un acier fin. »