

Fonctions numériques d'une variable réelle :

I) Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B**.

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f , **l'ensemble des éléments qui ont une image par f** . On le note **D_f** .

Exemple

- Si $f(x) = u(x)$ (fonction polynôme); alors $D_f = \mathbb{R} =] - \infty; + \infty[$
- Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ (fonction irrationnelle); alors $D_f = \{ x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0 \}$
- Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ (fonction rationnelle), alors $D_f = \{ x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0 \}$.

Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3} & ; \quad 2) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}; \\ 3) f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}} & ; \quad 4) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4} \\ 5) f(x) = \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\cos(x)} & ; \quad 6) f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

Synthèse

$$1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$$

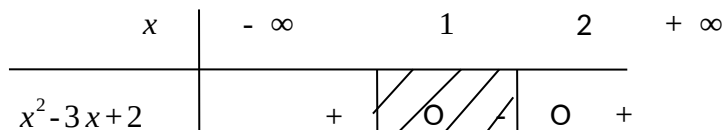
$$D_f = \{ x/x \in \mathbb{R} ; x+3 \neq 0 \}$$

$$x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$$

$$2) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}$$

$$D_f = \{ x/x \in \mathbb{R} ; x^2-3x+2 \geq 0 \}$$

$$x^2-3x+2 \geq 0. \text{ Posons } x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ et } x_2=2$$

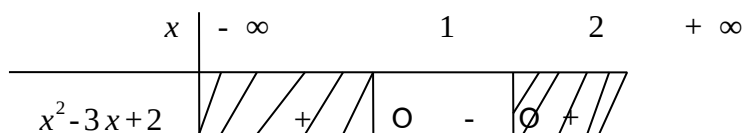


$$\Rightarrow D_f =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$$

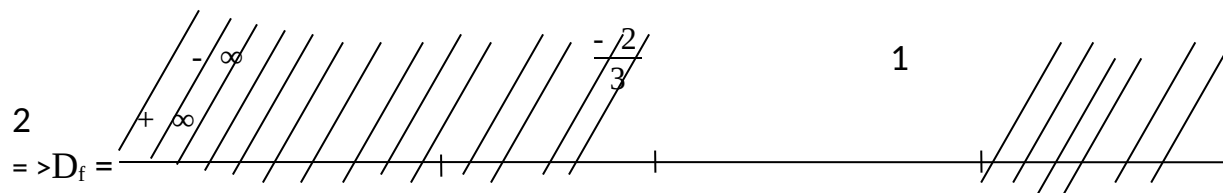
$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2-3x+2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x-\sqrt{x^2-3x+2} \neq 0\}$$

$$x^2-3x+2 \geq 0. \text{ Posons } x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ et } x_2=2$$



$$x-\sqrt{x^2-3x+2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} \neq x \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq x^2$$

$$\Rightarrow -3x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2}{3}$$



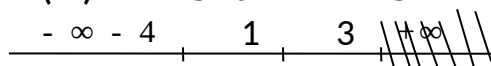
$$\Rightarrow D_f = [1; 2]$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; -x^2-2x+4 \neq 0 \quad \text{et} \quad -x+3 \geq 0\}$$

$$(1): -x^2-2x+4 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 1 \text{ et } x_2 \neq -4$$

$$(2): -x+3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$



$$\Rightarrow D_f =]-\infty; -4[\cup]-4; 1[\cup]1; 3]$$

M. BALLO

Année scolaire 2019-2020

$$5) f(x) = \frac{\tan(2x)}{\cos(x)}$$

$$D_f = \left\{ x/x \in \mathbb{R} ; 2x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos(x) \neq 0 \right\}$$

$$(1): 2x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$(2): \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty ; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} ; +\infty \right[$$

$$6) f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_f = \left\{ x/x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \right\}$$

$$x^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \neq -x \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq x^2 \Rightarrow 1 \neq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} = \left] -\infty ; +\infty \right[$$

3) Opération sur les fonctions :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition D_f et D_g .

a- Somme :

$$\forall x \in D_f \text{ et } \forall x \in D_g ; (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

b- Produit :

$$\forall x \in D_f \text{ et } \forall x \in D_g ; (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

c- Quotient :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ avec } g(x) \neq 0$$

I- Limites

Activité 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

x	- 3000000	- 2000000	- 1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Donne la valeur de x pour la quelle f n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

x	- 3000000	- 2000000	- 1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

1) Propriétés sur les limites :

a) Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

b) Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

c) Propriété 3 :

Si k est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} = \infty \quad (\text{le signe de } \infty \text{ dépend du signe du zéro et du signe de } k).$$

2) Opération sur les limites

a) Somme :

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

f	l	l	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \cdot g$	$l \cdot l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) Quotient:

f	l	l	0	l	∞	∞
g	$l' \neq 0$	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$\pm \infty$ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

NB :

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$$-\infty + \infty ; 0 \cdot \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}.$$

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$

N.B : La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient f et g deux fonctions et $f \circ g$ leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne.

Si

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et si $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$

5) Limite des fonctions circulaires :

Si a est un nombre réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f , la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une fonction f , la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

NB :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Exemple

Calculer la limite des fonctions suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$\text{d) } \int_4^5 \sqrt{x^3-12x-16}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2}$$

Solution

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$$

$$x \rightarrow -1^+$$

Puisque la limite est étudiée à droite de -1, alors cherchons le signe du dénominateur $x^2 - x - 2$ à droite de -1

$$\text{Posons : } x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ou } x_2 = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0 -	0 +

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

NB : Le signe du zéro (0^-) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de -1

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

$x \rightarrow$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16} = \frac{0}{0} \text{ (forme indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16} = \frac{\lim 5}{5} \cdot \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16} = \frac{\lim 5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty - \infty \text{ (forme indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 2})(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}{(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + x + 2})^2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x + 2)}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} =$$

$$-1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

7) Théorème sur les limites

a- Théorème des gendarmes :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si $f(x)$ Répond à l'inégalité : $A(x) < f(x) < B(x)$.

$$\text{et si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = l \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = l \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1}$

Solution

On sait que : $-1 \leq \sin x \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x+1$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2 + \sin x}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x+1} = 0$

$$x \rightarrow +\infty$$

c) Théorème de l'Hôpital :

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables en un point x_0 .

Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Exemple

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2}$ et $g(x) = x^2-5x+4$

a) Etudier la continuité de f et g en $x_0 = 1$

b) Calculer $g'(1)$ et $f'(1)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

$x \rightarrow 1$

Solution

a) Etudions la continuité de f et g en $x_0 = 1$

- Etude de la continuité de f en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} = \text{F.I.}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

- Etude de la continuité de g en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2-5x+4 = 1-5+4 = 0$$

Alors $f(1) = g(1) = 0$ d'autre part $f'(1) = -1$ et $g'(1) = -3 \neq 0$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (alors la droite d'équation $y = l$) est asymptote

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Horizontale à la courbe représentative de f .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (alors la droite d'équation $x = a$) est

asymptote **verticale** à la courbe représentative de f .

•

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

(alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe représentatives de f).

II- Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un réel appartenant à I .

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si :

$$f(x_0) \text{ existe et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = l \text{ (} l \text{ fini)}.$$

Remarque : les fonctions non continues en x_0 sont les fonctions non définies en x_0 et les fonctions n'admettant pas de limite en x_0

2) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$. On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

3) Continuité à gauche – continuité à droite

a- Continuité à gauche :

Une fonction f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

$$x \rightarrow x_0^-$$

b) Continuité à droite :

Une fonction f est continue à droite de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$x \rightarrow x_0^+$$

NB :

Une fonction est continue en un point de x_0 si elle est **gauche** et à **droite** de x_0 .

4) Prolongement par continuité

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ; mais admettant une limite l en ce point. La

fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point x_0

NB : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0 .

Exemple

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_0 donné dans chacun des cas suivant:

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{|x - 1| + 2}{x + 3} & ; \quad x_0 = 1 \\ f(1) = 5 \end{cases}$$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f puis dire si elle est prolongeable par continuité au point x_0 .

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} & ; \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Solution

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_0 donné dans chacun des cas suivant:

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

$$f \text{ est continue en } x_0 = 2, \text{ si } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2) = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2)$$

Alors f est continue en $x_0 = 2$

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} & x_0=1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :
Posons $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$ x-1 $	$-x+1$		$x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & \text{si } x \in]-\infty ; 1] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & \text{si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & \text{si } x \in]-\infty ; 1] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & \text{si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de $x_0 = 1$

f est continue en $x_0 = 1$ si $f(1)$ existe et si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Continuité à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Continuité à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Puis que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Alors f est continue en $x_0 = 1$.

2) Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction f et voyons si f est prolongeable par continuité au point x_0

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f =]0 ; +\infty[$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

f n'est pas définie en $x_0 = 0$ donc elle n'est pas continue en $x_0 = 0$

Voyons si f admet une limite finie $x_0 = 0$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x(x + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{(x + \sqrt{x})} = \infty$$

Alors f n'est pas continue en $x_0 = 0$.

Par conséquent f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$x \rightarrow 0$$

**Par conséquent f est prolongeable par continuité en $x_0=0$
et son prolongement par continuité en $x_0=0$ est la fonction h définie par :**

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

III- Dérivation :

1) Nombre dérivé en un point x_0 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée **nombre dérivé en x_0 et est noté $f'(x_0)$** . C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_0)$

2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .

N.B : La réciproque est inexacte.

3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

a) Nombre dérivé à gauche :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_0

On la note $f'_g(x_0)$

b) Nombre dérivé à droite :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_0 .

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème :

si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

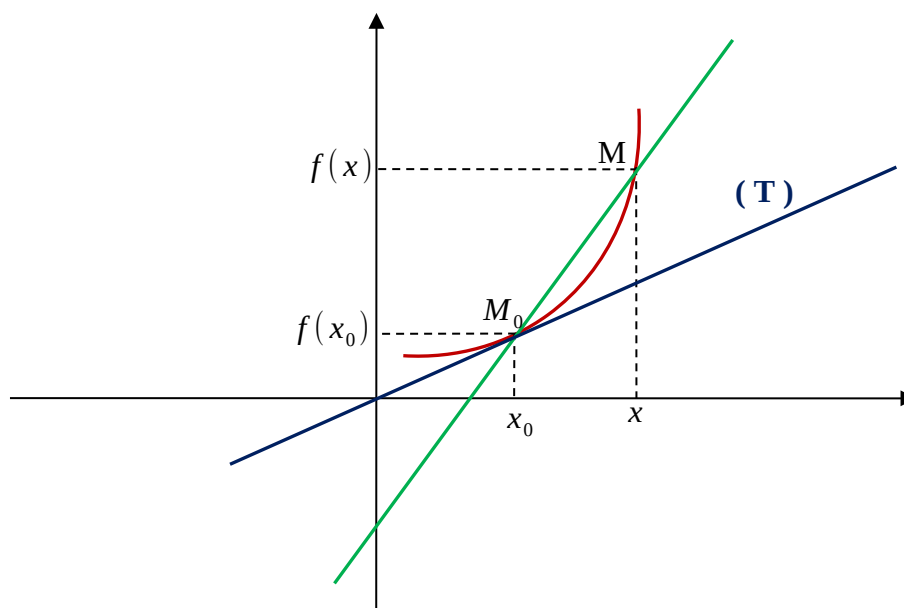
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$

Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point fixé de (C) . $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point courant de (C) ; construisons la droite (M_0M) .

Lorsque x tend vers x_0 la droite (M_0M) vient occuper une position limite

(M_0T) appelée tangente à la courbe (C) au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; $f'(x_0)$ est appelé pente ou

coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



a) Equation de la tangente au point d'abscisse x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi-tangentes en M_0 de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 et fait un angle en ce point.

Si la courbe (C) , de la fonction f admet en un point x_0 , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors $f'(x_0) = 0$

5) Utilisation des dérivées :

Sens de variation d'une fonction.
 Soit f une fonction définie par : $x \mapsto f(x)$. On appelle dérivée de f , la fonction f' définie par : $f' : x \mapsto f'(x)$ nombre dérivé de la fonction f au point x

6) Formules sur les dérivées :

a- Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées	Domaines de dérivabilité
a (constante)	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
ax^n	nax^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
Tgx	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(ax + b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \operatorname{tg}^2(ax+b)$	$\mathbb{R} - \left\{ ax + b = \frac{k\pi}{2} \right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

b- Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$au \quad (a \in \mathbb{R})$	au'
$(u)(v)$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$n(u')(u)^{n-1}$
$\frac{a}{u^n} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-na u' u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\operatorname{tg}(u)$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$u = (g \circ f)(x)$	$u' = f'(x) g'(f(x))$

7) Dérivée de la réciproque d'une fonction f :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et admet une bijection f^{-1} de $f(I)$ dans I

Ayant même sens de variation que f

Pour calculer $(f^{-1})'(x_0)$, on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation $f(x) = x_0$
- On calcule $f'(x)$ et on vérifie que $f'(x) \neq 0$
- On conclue $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

8) Sens de variation d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est constante ou stationnaire

N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de f .
- Une courbe (C_f) admet en un point $A(x_0 ; y_0)$ une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si : $f'(x_0) = 0$.
- Une courbe (C_f) admet en un point $A(x_0 ; y_0)$ une tangente de coefficient directeur a si et seulement si : $f'(x_0) = a$.

9) Extremum d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en passant par x_0 , alors f admet un extremum en x_0 .

Si $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum
Si $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif on dit que f présente un maximum

Ainsi on dit que : **(C_f) admet une tangente horizontale en $M_0(x_0 ; f(x_0))$**

Exemple

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 donné :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \end{array} \right. \text{ } \textcolor{red}{\text{! ! ! !}}$$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$$

3) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

Solution

1) Etudions la dérivabilité de la fonction f au point x_0 :

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \end{aligned} \right. \text{iiii}$$

f est dérivable en $x_0 = 2$ si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = l$ avec ($l \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)^2}{x^2+x-2}}{x - 2}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-2)}}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x-1)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$$

Alors f est dérivable en $x_0 = 2$ et son nombre dérivé est $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$.

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = -x^2 + 3x - 5 \Rightarrow U'(x) = -2x + 3 \\ V(x) = x^3 - 2 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(-2x + 3)(x^3 - 2) - (3x^2)(-x^2 + 3x - 5)}{(x^3 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3 - 2)^2}$$

3) Ecrivons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f aux points $x_0 = 2$ est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$\begin{aligned} U(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) & \Rightarrow \left| \begin{aligned} U'(x) &= -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \\ f(x) &= \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right) \end{aligned} \right. \\ n=2 & \Rightarrow U^{n-1}(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = n(U'(x))(U^{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \left[\left(-\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \right) \right] \Rightarrow f'(2) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} \text{ et } f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où : } y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}(x-2) + \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\pi\sqrt{3} + 3}{12}$$

IV- Etude de fonctions :

1) Parité et périodicité d'une fonction :

a) Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = f(x)$$

b) Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$$

c) Fonction Périodique :

Une fonction f est dite périodique de période T s'il existe un nombre réel T tel que

$$\forall x \in Df \text{ et } x+T \in Df ; f(x+T) = f(x).$$

Remarque :

- La fonction $\cos x$ est paire car $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction $\sin x$ est impaire car $\sin(-x) = -\sin x$
- Les fonctions $\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Étudier la périodicité la parité de f puis en déduire que D_f peut se réduire à $[0; \pi]$
- 3) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

Solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe

- 1) Déterminons l'ensemble de définition D_f

$$D_f = \left\{ x / x \in \mathbb{R} ; \cos^3 x \neq 0 \right\}$$

$$\cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty ; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} ; +\infty \right[$$

- 2) Étude de la parité et de la périodicité de f

$$\text{- Parité : } f(-x) = \frac{1 + \cos(-3x)}{\cos^3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} = f(x)$$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'Oy$ comme axe de symétrie.

$$\text{- Périodicité : } T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } T_2 = 1 \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$$

Alors l'étude peut donc se faire sur le domaine $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2} \right]$

$$\Leftrightarrow D_f = \left[-\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2} \right] \Rightarrow D_f = [-\pi ; \pi]$$

Et puisque la fonction f est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[0; \pi]$.

D'où $Df = [0 ; \pi]$

3) Montrons que $\forall x \in D^f$, on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + \cos 3x \Rightarrow u' = -3\sin 3x \\ v = \cos^3 x \Rightarrow v' = -3\sin x \cos^2 x \end{array} \right. \\ f'(x) &= \frac{-3\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cos^2 x (1 + \cos 3x)}{\cos^6 x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3\cos^2 x (-\cos x \sin 3x + \sin x + \sin x \cos 3x)}{\cos^6 x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos x + \sin x)}{\cos^4 x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin(x - 3x) + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3(-2\cos x \sin x + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

4) Etude du signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis de variations de f .

$$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

D'autre par $\forall x \in [0 ; \pi]$; $\sin x > 0$ et $\cos^4 x > 0$
Donc le signe dépend de $1 - 2\cos x$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	2	0	$+\infty$	0

$$f(-2) = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

2) Courbes symétriques :

a) Axe de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est dite **axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :

- $f(2a - x) = f(x)$
ou
- $f(a + x)$ est paire
ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

b) Centre de symétrie :

Le point $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est dit **centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$
ou
- $f(a + x) - b$ est paire
ou
- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe (y' ou y) comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

- Centre de symétrie :

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où : $a; b; c; \gamma; \beta$ sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie de la courbe (C) de f a pour coordonnée :

$$I \begin{pmatrix} x_0 = -\frac{\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{pmatrix}$$

- **Axe de symétrie :**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec ($a \neq 0$)

Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de f a pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple

1) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f .

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $a = -1$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ et $a = \frac{1}{2}$

2) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si le point $I \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f .

a) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$ et $I \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ et $I \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution

1) Pour chacune des fonctions données, vérifions si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f .

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $a = -1$

$a = -1$ est un axe de symétrie si $f(2a - x) = f(x)$

$$\begin{aligned}
 f(2(-1) - x) &= f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3 \\
 &= (2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 3 \\
 &= 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3 \\
 &= x^2 - 2x + 3 = f(x)
 \end{aligned}$$

Puisque $f(-2 - x) = f(x)$ alors $a = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{2} \\
 a = \frac{1}{2} \quad &\text{est un axe de symétrie si } f(2a - x) = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) &= f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + 3 \\
 &= 3 - 6x + 3x^2 - 2 + 2x + 3 \\
 &= 3x^2 - 4x + 4 \neq f(x)
 \end{aligned}$$

Puisque $f(1 - x) \neq f(x)$ alors $a = \frac{1}{2}$ n'est pas un axe de symétrie pour la courbe (C) de f .

2) Pour chacune des fonctions données, vérifions si le point $I\left(\frac{a}{b}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f .

$$a) \quad f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{0}{-1/3}\right)$$

$$\text{Le point } I\left(\frac{0}{-1/3}\right) \text{ est dit centre de symétrie si } f\left(2\left(0\right) - x\right) + f(x) = 2\left(\frac{-1/3}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = \left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \frac{3(-x)^3 - (-x)^2 + 4}{3(-x)^2 - 12} = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \\
 \Rightarrow f(-x) + f(x) &= \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} + \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} = \frac{-2x^2 + 8}{3x^2 - 12} \neq -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Puisque $f(-x) + f(x) \neq -\frac{2}{3}$ alors $I\left(\frac{0}{-1/3}\right)$ n'est pas un centre de symétrie pour la courbe (C) de f .

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{-1}{0}\right)$$

Le point $I\left(\frac{-1}{0}\right)$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$$\Leftrightarrow f(-2 - x) + f(x) = 0$$

$$f(-x - 2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x) + 1}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2 - x + 1} = \frac{x^2 + 2x}{-x - 1}$$

$$\Rightarrow f(-x - 2) + f(x) = \frac{x^2 + 2x}{-x - 1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = 0$$

Puisque $f(-x - 2) + f(x) = 0$ alors $I\left(\frac{-1}{0}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

3) Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion

a) Minimum :

Soit f une fonction définie en un point x_0 . S'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que

$\forall x \in I$ on a : $f(x) \geq f(x_0)$ alors f présente un minimum en x_0 . Ce minimum est $m = f(x_0)$.

b) Maximum :

f admet un maximum relatif au point x_0 , s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in I$ on a : $f(x) \leq f(x_0)$. Le maximum est $M = f(x_0)$.

Théorème :

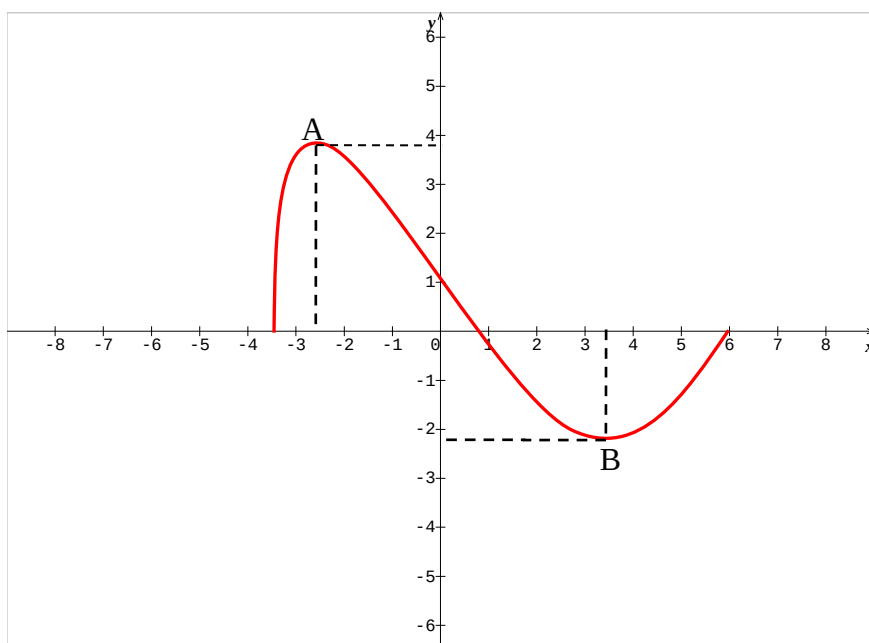
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x)$ s'annule en x_0 et change de signe en passant par x_0 , on dit alors que f présente un extremum en x_0 . Cet extremum est égal à $f(x_0)$. Il est le minimum si f' passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si f' passe du signe positif au signe négatif.

NB :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a; b[$, tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point x_0 , alors la fonction f admet un extremum relatif en x_0 .

c) Extremum :

Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

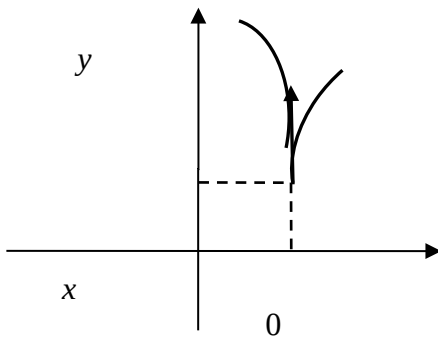
d) Point d'inflexion :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a; b[$. On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe**.

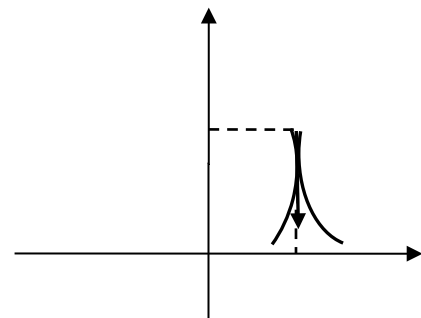
e) Point de reboursement :

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm \infty$$

Alors on dit que f admet un point de reboursement x_0 à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

4) Fonction réciproque

Bijection :

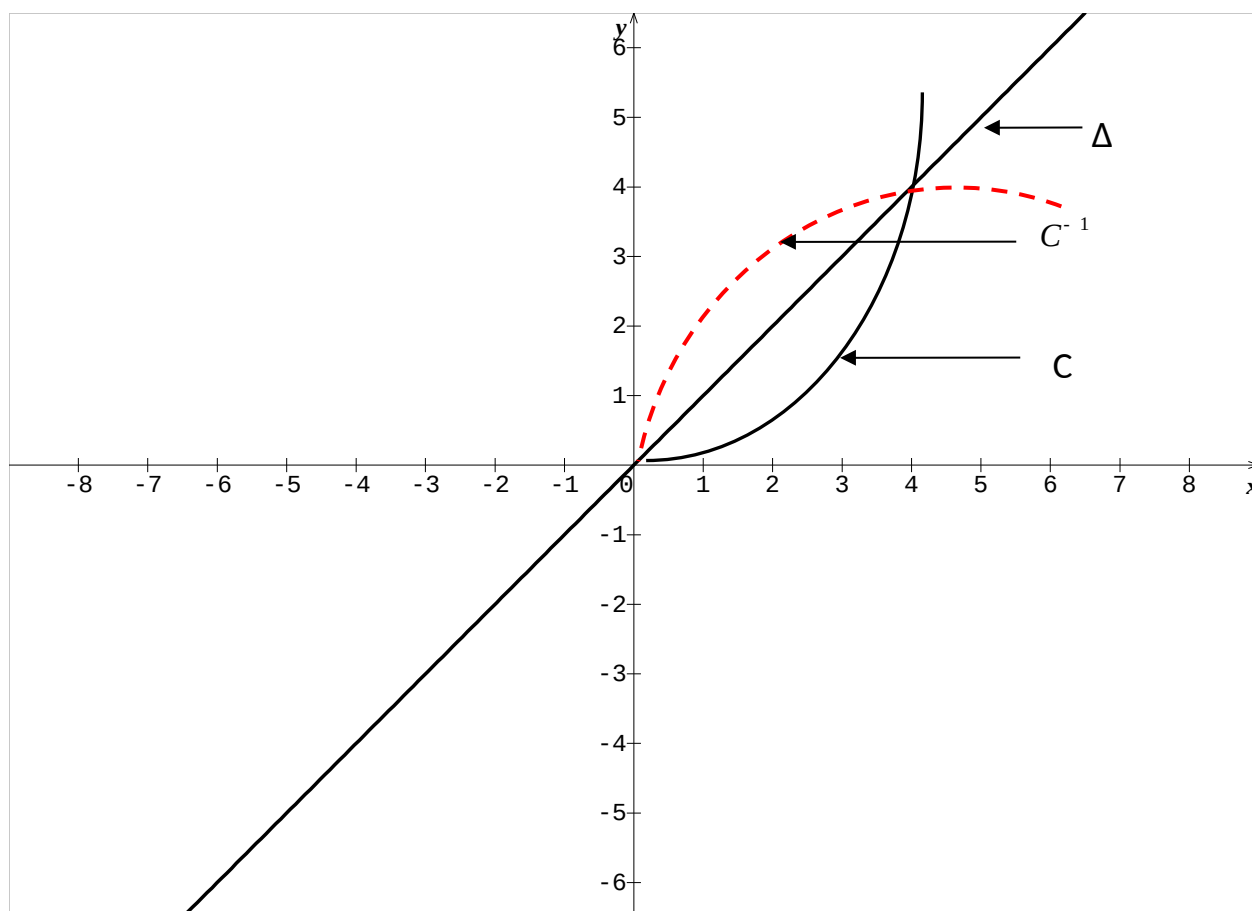
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E .

- En Pratique :

Une application f est bijective si et seulement si $\forall y \in F \quad \exists ! x \in E$ on a : $f(x) = y$

- Graphiquement

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I sur $f(I)$. et admet une bijection réciproque f^{-1} de $f(I)$ sur I ayant même sens de variation que f

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$

Si $M(x; y) \in C_f$ alors $N(y; x) \in C_{f^{-1}}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors $y = a$ devient asymptote pour $C_{f^{-1}}$

5) Théorème de valeurs intermédiaires :

L'image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle

Théorème 2:

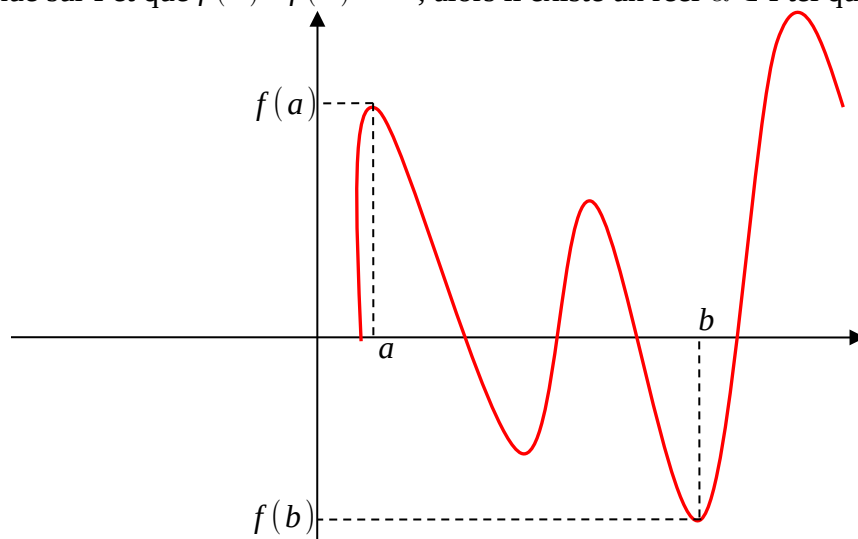
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

1^{ère} forme :

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

2^{ème} forme :

Si f est continue sur I et que $f(a) - f(b) < 0$, alors il existe un réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$



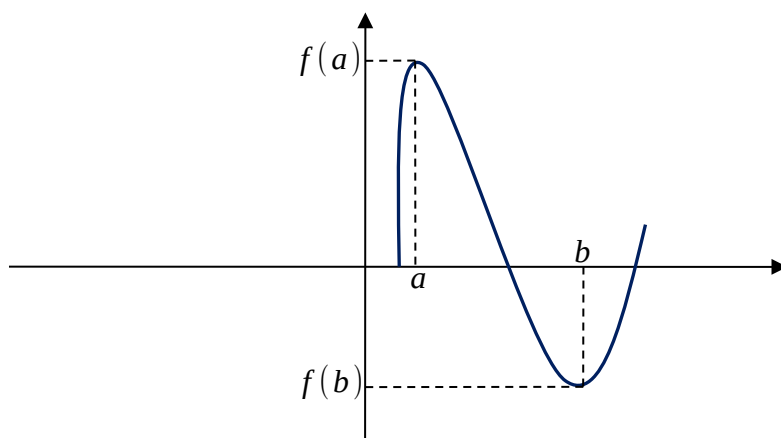
6) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

1^{ère} forme :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a ; b[$ tel que $f(x_0) = 0$

2^{ème} forme :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$ et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a ; b]$

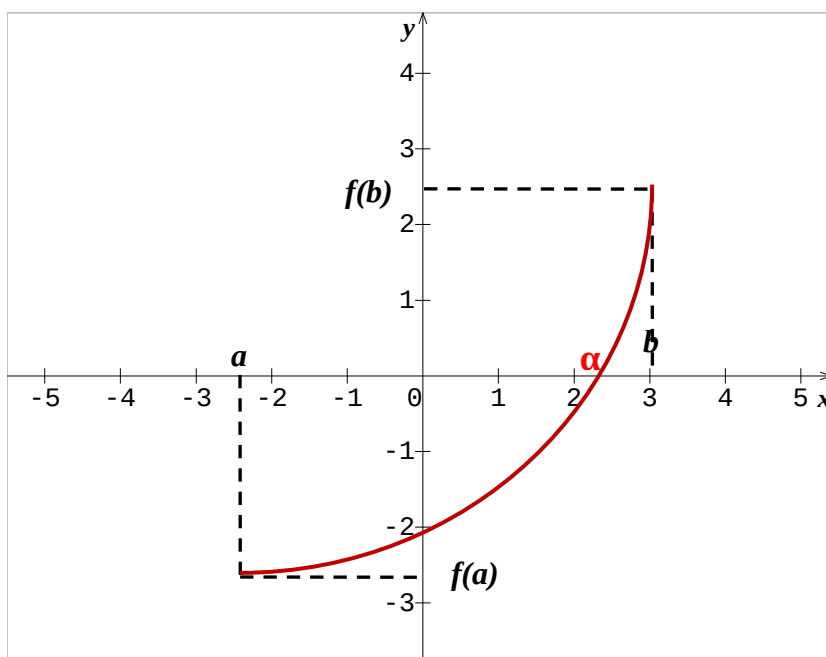


7) Approximation d'une solution α de l'équation $g(x)=0$:

a- Méthode de dichotomie :

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$ tel que $g(a) \cdot g(b) < 0$.
Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- Si g est strictement croissante sur $[a ; b]$



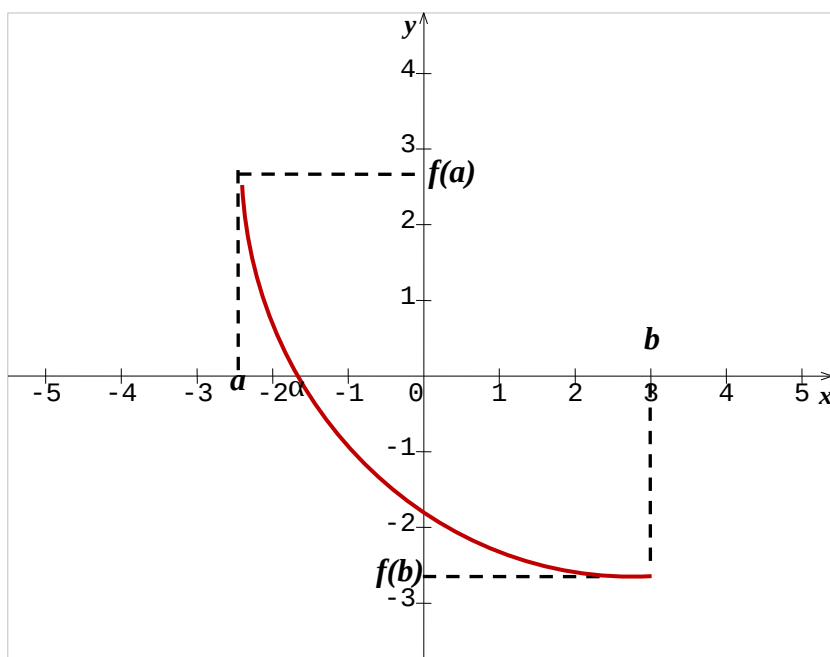
Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [a_n ; b_n]$.

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

- Si g est strictement décroissante sur $[a ; b]$



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [a_n ; b_n]$.

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

-

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.

b- Méthode des balayages :

C'est une méthode qui consiste à déterminer une approximation de α à partir d'un tableau de valeurs où la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$		$f(x_n)$

Si par exemple $f(x_5) \times f(x_6) < 0$ alors $\alpha \in [x_5 ; x_6]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

Exemple

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- Calculer $f'(x)$.

2- Etudier le sens de variation de f .

- 3- Dresser le tableau de variation de f .
- 4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]1 ; 2[$.
- 5- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

B) Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$.

- 1- Déterminer l'ensemble de définition Df de f .
- 2- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

C) Soit $f(x) = \cos x$ une fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

- 2- Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$
- 3- Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f(x) = x$

Solution

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- Calculons $f'(x)$.

$$Df = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$$

2- Etudions le sens de variation de f .

$\forall x \in Df, f'(x) > 0$. D'où $\forall x \in Df, f$ est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]1; 2[$
D'après le tableau de variation, f est définie, continue et strictement croissante de
 $] - \infty ; + \infty [$ vers $] - \infty ; + \infty [$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique
 α tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus : $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

1- Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]1; 2[$

2- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Pour cela utilisons la méthode des balayages

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	-2,36	-1,67	-0,90	-0,05	0,87	?	?	?	?

Ainsi d'après le tableau, l'image par f des différentes valeurs de x commence à changer de signe à partir des valeurs de x comprises entre 1,4 et 1,5.

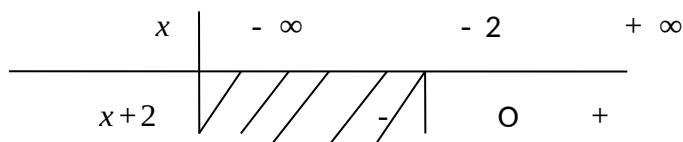
Alors : $\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45$

B) Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$.

4- Déterminons l'ensemble de définition D_f de f .

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x+2 \geq 0\}$

$x+2 \geq 0$. Posons $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$



$\Rightarrow D_f = [-2 ; +\infty[$

5- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

Pour cela, dressons le tableau de variation de f :

$f(-2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

D'après le tableau de variation, f est définie, continue et strictement croissante de $] - 2 ; + \infty [$ vers $] 0 ; + \infty [$ alors f réalise une bijection de $] - 2 ; + \infty [$ vers l'intervalle $J =] 0 ; + \infty [$

8) Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Soit a et b deux réels appartenant à I tel que $(a < b)$.

-Si m et M sont deux réels tel que $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a :

$$(b - a) m \leq f(b) - f(a) \leq (b - a) M.$$

-Si f est dérivable sur I , alors il existe un réel k appartenant à I tel que $|f'(x)| \leq k$.

Ainsi par conséquent $\forall a \in I$ et $b \in I$, on a : $|f(x) - f(a)| \leq k |x - a|$.

(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements finis).

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

$$1) \text{ Montrer que } \forall x \in [4 ; 5], \text{ on a } |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

$$2) \text{ En déduire que } \forall x \in [4 ; 5], \text{ on a : } \left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$$

Solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrons que $\forall x \in [4; 5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} \quad \left| \quad \begin{array}{l} U(x) = x^2 - x - 5 \Rightarrow U'(x) = 2x - 1 \\ V(x) = x - 3 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x - 1)(x - 3) - (1)(x^2 - x - 5)}{(x - 3)^2} = \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Or } x \in [4; 5] \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$$

En appliquant la fonction dérivée f' à l'inégalité, on a :

$$\text{Or } f'(4) = 0 \quad \text{et} \quad f'(5) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :

$$\Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \left| \frac{3}{4} \right|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [4; 5], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

$$2) \text{ En déduisons que } \forall x \in [4; 5], \text{ on a : } \left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$$

D'après la question 1), on a :

$$\forall x \in [4; 5], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

Or si $|f'(x)| \leq k$, on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(a)| \leq k |x - a|$$

Ainsi puisque $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements

finis on a : $|f(x) - f(5)| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$. Avec $k = \frac{3}{4}$ et $a = 5$

$$\text{Or } f(5) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$$

D'où $\forall x \in [4; 5]$, on a : $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

9) Etude des branches infinies :

Notion d'asymptotes :

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (alors la droite d'équation $y = l$)

est asymptote **horizontale** à la courbe représentative de f .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (alors la droite d'équation $x = a$)

est asymptote **verticale** à la courbe représentative de f .

•

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

(Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe représentatives de f).

Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

$$x \rightarrow \pm \infty$$

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

• Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a$	alors la droite d'équation $y = ax + b$ est
et $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = b$	Asymptote oblique à la courbe (C) de f .
• Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$	alors la courbe (C) de f admet l'axe ($y'Oy$) comme branche parabolique.
Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	alors la courbe (C) de f admet l'axe ($x'Ox$) comme branche parabolique.

N.B :

Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)} \text{ (en effectuant une division euclidienne) .}$$

$Q(x) = y$ est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.

$D(x)$ = est le diviseur

R = est le reste.

Cas Particulier d'asymptote

Toutes fonctions de la forme :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ ou } f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|} ; \text{ (avec } a \neq 0 \text{ et } a > 0 \text{)}$$

Admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation : $y = -\sqrt{a} \left(x + \frac{b}{a} \right)$

- L'une en $+\infty$ d'équation : $y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{a} \right)$

10) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ) .
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ) .
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

Exemple

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

- Démontrer que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$.
- Etudier la position de la courbe (Cf) et (Δ) .

2- On donne $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

- Déterminer l'ensemble de définition Df de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de Df .
- En déduire l'équation des asymptotes à la courbe (Cf) .

Solution

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

- Démontrons que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$.

la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$ si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-3) - (x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

$$x \rightarrow +\infty$$

Alors la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) de f en $+\infty$

b) Etudions la position de la courbe (C_f) et de la droite (Δ).

Pour cela étudions le signe de $f(x) - y$.

$$\text{Posons } f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

D'où le tableau de signe est le suivant :

	$x \rightarrow -\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$f(x) - y$	$(\Delta) \setminus (C)$	$(C) \setminus (\Delta)$	

Alors $\forall x \in]-\infty ; 2[; f(x) - y < 0 \Rightarrow$

$\forall x \in]-\infty ; 2[;$ la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ).

Et

$\forall x \in]2 ; +\infty[; f(x) - y > 0 \Rightarrow$

$\forall x \in]2 ; +\infty[;$ la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ).

2- On donne $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x-3 \neq 0\} \Rightarrow D_f = D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$$

b) Calculons les limites aux bornes de D_f

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$		- 0 +	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$$

c) En déduisons les asymptotes à la courbe (C) de f .

$$\text{Puisque } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \quad \text{Alors la droite d'équation } x = 2 \text{ est asymptote verticale à } (Cf).$$

$$\text{Puisque } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{Alors la droite d'équation } y = 3 \text{ est asymptote horizontale à } (Cf).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote oblique à (Cf) .

11) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x)=0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'axe (ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

12) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (C_f) dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f
- On calcule les limites aux bornes de D_f
- On étudie la parité et la périodicité de f
- On étudie la continuité de f
- On étudie le sens de variation de f qui consiste à calculer la dérivée et à étudier son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

Exemple

Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Etudier la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E

c) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

d) Etudier le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E .

e) Tracer la courbe (C).

Solution

1) Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ V(x) = x + 1 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (1)(x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \quad \text{or } \forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0 \text{ alors le signe de } f'(x) \text{ dépend}$$

donc du signe du numérateur $x^2 + 2x$.

Posons $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

M. BALLO

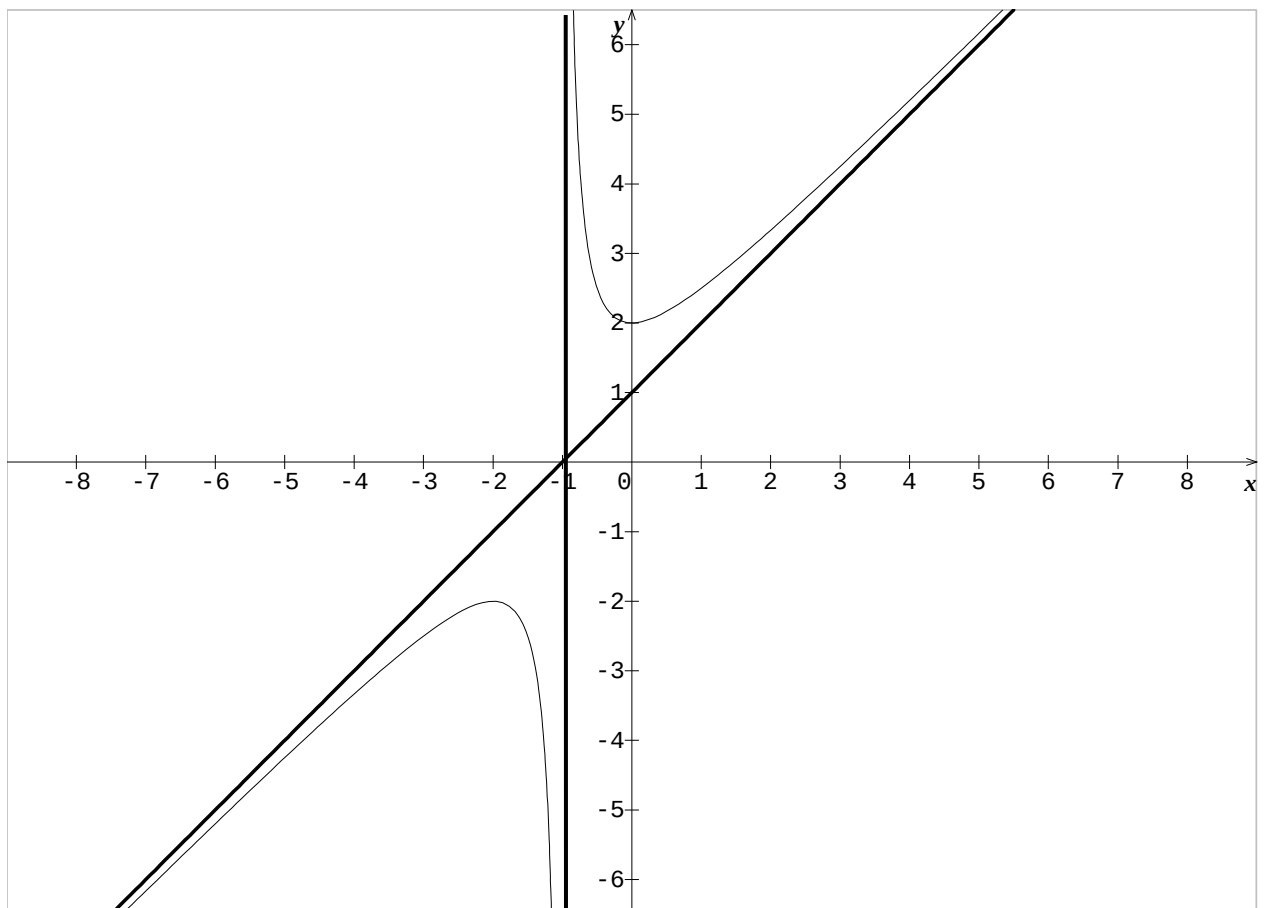
Année scolaire 2019-2020

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

$x = -1$ est asymptote verticale à (C).

$y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) car $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$.

Ainsi on a la représentation suivante :



Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe

a) Déterminons l'ensemble de définition D_f

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; \cos^3 x \neq 0\}$$

$$\cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; +\infty \right[$$

b) Etude de la parité et de la périodicité de f

$$\text{- Partie : } f(-x) = \frac{1 + \cos(-3x)}{\cos^3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} = f(x)$$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'Oy$ comme axe de symétrie.

$$\text{- Périodicité : } T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } T_2 = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$$

Alors l'étude peut donc se faire sur le domaine $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow D_E = \left[-\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2}\right] \Rightarrow D_E = [-\pi ; \pi]$$

Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[0 ; \pi]$
D'où $D_E = D \cap [0 ; \pi]$

$$\text{c) Montrons que } \forall x \in D_f, \text{ on a : } f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} \begin{cases} u = 1 + \cos 3x \Rightarrow u' = -3\sin 3x \\ v = \cos^3 x \Rightarrow v' = -3\sin x \cos^2 x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cos^2 x (1 + \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3\cos^2 x (-\cos x \sin 3x + \sin x + \sin x \cos 3x)}{\cos^6 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos x + \sin x)}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin(x - 3x) + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(-2\cos x \sin x + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}
\end{aligned}$$

d) Etude du signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis de variations de f .

$$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

D'autre par $\forall x \in [0; \pi]$ on a : $\sin x > 0$ et $\cos^4 x > 0$
Donc le signe dépend de $1 - 2\cos x$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	2	0	$+\infty$	0

Détermination des coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construction de la courbe (C) de f .

$$- (C) \cap (ox) \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos \pi \Leftrightarrow 3x = \pi \text{ ou } 3x = -\pi \Rightarrow$$

$$\text{Donc (C) coupe l'axe (ox) en } -\frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{3}$$

$$- (C) \cap (oy) \Rightarrow 0; \text{ et } y = 2$$

Donc (C) coupe l'axe oy en 2

Ainsi on a la représentation suivante :

