

I) LimitesActivité 1 : Ensemble de définitionConsigne : détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{4} + 2x ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{2x+4}}{x-1} ; \quad h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$$

Synthèse : l'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f on le note D_f .Pour les fonctions polynômes $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 ; D_f = \mathbb{R}$ Pour les fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} ; D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0\}$ Pour les fonctions irrationnelles $f(x) = \sqrt{P(x)} ; D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\}$ Activité 2 : Limites d'une fonctionConsigne : calcule les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ \text{b) } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x^2-x^3+2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2} \\ \text{c) } & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-x-6}{x^2+3x-10} ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+4}-1} \end{aligned}$$

Synthèse :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c \text{ (c est une constante)} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

✓ En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré✓ En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.Remarque : soit R un nombre réel non nul

$$\frac{R}{0} = \infty ; \quad \frac{0}{R} = 0 ; \quad R \times 0 = 0 ; \quad \frac{R}{\infty} = 0 ; \quad \frac{\infty}{R} = \infty ; \quad R \times \infty = \infty$$

Il y a quatre formes indéterminées (F. I.) qui sont : $\frac{0}{0} ; 0 \times \infty ; \frac{\infty}{\infty} ; +\infty - \infty$ Soit f une fonction numérique, x_0 et l des nombres réels.Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, alors on dit que f admet une limite l en x_0 .Exemple : $f(x) = \frac{x^2-2}{3x-1} ; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$. f admet une limite $-\frac{1}{2}$ en 1Limite des fonctions circulaires : si a est un réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\text{Synthèse : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c \text{ (c est une constante)} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

✓ En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré✓ En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.Remarque : soit R un nombre réel non nul

$$\frac{R}{0} = \infty ; \quad \frac{0}{R} = 0 ; \quad R \times 0 = 0 ; \quad \frac{R}{\infty} = 0 ; \quad \frac{\infty}{R} = \infty ; \quad R \times \infty = \infty$$

Il y a quatre formes indéterminées (F. I.) qui sont : $\frac{0}{0} ; 0 \times \infty ; \frac{\infty}{\infty} ; +\infty - \infty$

Exemple : calcule les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{d) } & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ \text{e) } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x^2-x^3+2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2} \end{aligned}$$

Activité 4 : Limite à gauche, limite à droite

Consigne : calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 5}{1 - x}$$

Synthèse : soit f une fonction définie sur D_f et $x_0 \notin D_f$.

On dit que f a pour limite à gauche l en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.

On dit que f a pour limite à droite l en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$.

Activité 5 : Notion d'asymptotes

Consigne 1 : soit $f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$

- a) Détermine le domaine de définition de f . Calcule les limites aux bornes de D_f .
Interprète ces résultats.

Consigne 2 : soit $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2}$

- a) Détermine les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)]$. Interprète ce résultat.

Synthèse : soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) **Asymptotes parallèles aux axes du repère :**

✓ Asymptote verticale (asymptote parallèle à l'axe des abscisses)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale (A. V.) à (C) .

✓ Asymptote horizontale (asymptote parallèle à l'axe des ordonnées)

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale (A. H.) à (C) .

b) **Asymptote non parallèle aux axes du repère :**

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite $(\Delta): y = ax + b$ est asymptote oblique à (C) .

II) **Continuité :**

Activité 1 : continuité d'une fonction

Consigne : étudie la continuité de la fonction f en x_0 dans chaque cas :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} ; x_0 = 2 \\ f(2) = 2 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} ; x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Synthèse :

1) **Définition :** f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$. f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2) **Continuité sur un intervalle :** soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

Exemple : les fonctions polynômes et rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.

3) **Continuité à gauche – continuité à droite**

a) **Continuité à gauche :** f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

b) **Continuité à droite :** f est continue à droite de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

NB : une fonction est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

Activité 2 : prolongement par continuité

Consigne :

- 1) Etudie la continuité de la fonction f en x_0 donné dans chaque cas :

- 2) Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f puis dire si elle est prolongeable par continuité en x_0 .

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

3) Soit $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$.

Détermine une fonction g qui est le prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$.

Synthèse

Soit f une fonction non définie en x_0 , mais admettant une limite l en ce point. La fonction

g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est le prolongement de f par continuité en x_0 .

N.B. : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0 .

III) Dérivations

Activité 1 : Nombre dérivé en un point x_0

Consigne : calcule le nombre dérivé de f en $x_0 = 2$.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $x_0 = -1$.

Synthèse :

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée nombre dérivé en x_0 et est noté $f'(x_0)$. C'est-à-dire : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Remarque : toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 mais la réciproque est inexacte.

Activité 2 : Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

Consigne :

Soit $f(x) = |x|$. f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

Synthèse :

a) **Nombre dérivé à gauche** : si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_0 . On la note $f'_g(x_0)$.

b) **Nombre dérivé à droite** : si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_0 . On la note $f'_d(x_0)$.

Théorème : si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_0 et on a : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

c) **Equation de la tangente au point d'abscisse x_0** : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

✓ Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi-tangentes en x_0 de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 et fait un angle en ce point.

✓ Si la courbe de f admet en x_0 , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$

Exemple : détermine l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 .

$f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$ et $x_0 = 1$

Activité 3 : Fonctions dérivées

Consigne

Détermine la dérivée de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = (x^3 + 3x)(x^4 - 3)$

d) $f(x) = (x^3 + 2)\sqrt{2 - x}$

$$b) f(x) = \frac{2-3x}{2x-1}$$

$$c) f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$e) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 5}$$

$$f) f(x) = x \cos x$$

Synthèse

Soit f une fonction définie par : $x \mapsto f(x)$. On appelle dérivée de f , la fonction f' définie par : $f' : x \mapsto f'(x)$ nombre dérivé de la fonction f au point x

Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées
a (constante)	0
ax^n	anx^{n-1}
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-na}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cotan x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cotan^2 x$

Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$U' + v'$
$a \times u$	au'
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u}$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{a}{u^n}$	$\frac{-nau'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$P \sin u$	$u' \cos u$

1) Dérivée de la réciproque d'une fonction $f : (f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

2) Sens de variation d'une fonction : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante.

3) Extremum d'une fonction : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en passant par x_0 , alors f admet un extremum en x_0 .

Si $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum.
 Si $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif on dit que f présente un maximum
 Ainsi on dit que : (C_f) admet une tangente horizontale en $M_0(x_0 ; f(x_0))$.

Exemple :

a) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 donné :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} & ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

b) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$
 c) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

IV) Etude de fonction :

Activité

Consigne 1 : on donne $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

a) Démontre que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
 b) Etudie la position de la courbe (C_f) et (Δ) .

Consigne 2 : on donne $f(x) = \frac{2x - 4}{x - 3}$.

a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
 b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
 c) En déduis les équations des asymptotes à la courbe (C_f) .

Synthèse :

1) Parité et périodicité d'une fonction :

a) **Fonction paire** : une fonction f est dite paire si et seulement si : $f(-x) = f(x)$
 b) **Fonction impaire** : une fonction f est dite impaire si et seulement si : $f(-x) = -f(x)$
 c) **Fonction Périodique** : une fonction f est dite périodique de période T s'il existe un nombre réel T tel que $\forall x \in D_f$ et $x + T \in D_f$; $f(x + T) = f(x)$.

Remarque :

- La fonction $\cos x$ est paire car $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction $\sin x$ est impaire car $\sin(-x) = -\sin x$
- Les fonctions $\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Exemple : soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
 2) Etudie la périodicité la parité de f puis en déduire que D_f peut se réduire à $[0 ; \pi]$
 3) Montre que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
 4) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

2) Courbes symétriques :

a) **Axe de symétrie** : la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie à la courbe (C_f) de f si : $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a + x)$ est paire ou $f(a + x) = f(a - x)$
 b) **Centre de symétrie** : le point $I(a, b)$ est dit centre de symétrie à la courbe (C_f) si $f(2a - x) + f(x) = 2b$ ou $f(a + x) - b$ est paire ou $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe $(y' o y)$ comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point $O(0, 0)$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

- **Centre de symétrie** : soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où : $a; b; c; \gamma; \beta$ sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de f a pour coordonnées : $I \left(\begin{matrix} x_0 = -\frac{\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{matrix} \right)$

- **Axe de symétrie** : soit un polynôme du second degré défini par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe de f a pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple

- 1) Pour chacune des fonctions données, vérifie si $x = a$ est un axe de symétrie :

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $a = -1$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ et $a = \frac{1}{2}$

- 2) Pour chacune des fonctions données, vérifie si le point $I \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right)$ est un centre de symétrie :

a) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$ et $I \left(0; -\frac{1}{3} \right)$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ et $I \left(-1; 0 \right)$

- 3) **Point d'inflexion – point de reboursement** :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a; b[$.

- ✓ On appelle point d'inflexion, tout point où la dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm\infty$, alors on dit que f admet un point de reboursement x_0 à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :

- 4) **Fonction réciproque** : les courbes représentatives d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta): y = x$.

Théorème : si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I sur $f(I)$, et admet une bijection réciproque f^{-1} de $f(I)$ vers I ayant même sens de variation que f . Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta): y = x$. Si $M(x; y) \in (C_f)$ alors $N(y; x) \in (C_{f^{-1}})$.

Si $x = a$ est asymptote à (C_f) alors $y = a$ devient asymptote pour $(C_{f^{-1}})$.

- 5) **Théorème de valeurs intermédiaires** :

1^{ère} forme : si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a; b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

2^{ème} forme : si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a; b]$.

- 8) **Approximation d'une solution α de l'équation $f(x) = 0$** :

- a) **Méthode de dichotomie** : soit f la fonction définie sur $[a; b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$.

Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- Si f est strictement croissante sur $[a; b]$, alors on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [a_n; b_n]$. On calcule $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}; b_n\right]$.

- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.
 - Si f est strictement décroissante sur $[a ; b]$, alors on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [a_n ; b_n]$. On calcule $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.
- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.
- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$ alors $\alpha = \frac{a_n + b_n}{2}$.

b) Méthode des balayages : c'est une méthode qui consiste à déterminer une approximation de α à partir d'un tableau de valeurs où la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$		$f(x_n)$

Si par exemple $f(x_5) \times f(x_6) < 0$ alors $\alpha \in [x_5 ; x_6]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

Exemple 1 : soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

- 1- Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f .
- 2- Dresse le tableau de variation de f .
- 3- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]1 ; 2[$.
- 4- Détermine une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exemple 2 : soit $f(x) = \sqrt{x+2}$.

- 1- Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2- Montre que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

6) **Théorème de l'inégalité des accroissements finis :** soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Soit a et b deux réels appartenant à I tel que $a < b$.

✓ Si m et M sont deux réels tel que $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a :

$$(b-a)m \leq f(b) - f(a) \leq (b-a)M.$$

✓ Si f est dérivable sur I , alors il existe un réel k appartenant à I tel que $|f'(x)| \leq k$.

Ainsi par conséquent $\forall a \in I$ et $b \in I$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$.

Exemple : soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrer que $\forall x \in [4 ; 5]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduire que $\forall x \in [4 ; 5]$, on a : $|f(x) - \frac{15}{2}| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

7) **Etude des branches infinies :** recherche d'asymptote oblique :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f .

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe de f admet l'axe $(y'oy)$ comme branche parabolique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe de f admet l'axe $(x'ox)$ comme branche parabolique

10) **Position relative d'une courbe et de son asymptote oblique.**

Pour déterminer la position relative de (C_f) par rapport à son asymptote oblique (Δ) , on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ) .
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ) .

- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (C_f) et la droite (Δ) sont confondues.

11) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

Pour trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$. La courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur (Ox) .

Pour trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(0)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(0)$ sur l'axe des (Oy) .

12) Plan d'étude d'une fonction : pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (C_f) dans le repère on adopte le plan suivant :

- On détermine le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f
- On calcule les limites aux bornes de D_f
- On étudie la parité et la périodicité de f
- On étudie la continuité de f
- On étudie le sens de variation de f qui consiste à calculer la dérivée et à étudier son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

Exemple :

1) Étudie et représente la courbe (C) des fonctions f et g définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^4 x}$ et (C) sa courbe.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Étudier la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E

c) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

d) Étudier le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E .

e) Tracer la courbe (C) .

Exo I

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x - 3}$. Soit (C_f) , la courbe représentative dans un repère orthonormal.

Déterminer l'ensemble de définition de f .

Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour (C_f) .

Étudier les variations de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Étudier les branches infinies de (C_f) sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Tracer (C_f) sur $\mathbb{R}$.

Exo II

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f .

Dresser le tableau de variation de f .

Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie à (C_f) .

a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une ~~axe~~ asymptote pour (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b. Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) .

c. Montrer que la droite (D') d'équation : $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote pour (C_f) au voisinage de $-\infty$. Étudier la position de (C_f) par rapport à (D') .

Tracer la courbe (C_f) .

Exo III

On a la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ et (C_f) la courbe représentative dans un repère orthonormal.

Déterminer l'ensemble de définition de f .

Étudier la parité de f et interpréter le résultat géométriquement.

Calculer les limites de f aux bornes de D_f et en déduire les asymptotes.

Étudier les variations de f .

Montrer que f admet un point d'inflexion.

Tracer (C_f) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- ① Déterminer le domaine de définition de f
- ② Calculer les limites aux bornes de D_f
- ③ Étudier la dérivabilité de f aux points $x_0 = 2$ et $x_1 = 1$
- ④ Étudier les variations de f puis dresser le TV et préciser les asymptotes.
- ⑤ Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, -2]$
 - a) Montrer que h est une bijection de $]-\infty, -2]$ vers un intervalle J à préciser
 - b) Soit h^{-1} la réciproque de h , déterminer $h^{-1}(x)$.
- ⑥ Tracer (C_f)