Lycée Yana Maïga de Gao (LYMG)

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ

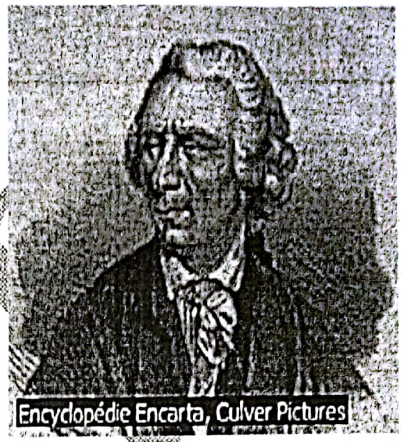
abdouldcm25@gmail.com

76 34 32 34 / 66 34 32 34

Fonctions numériques d'une variable réelle

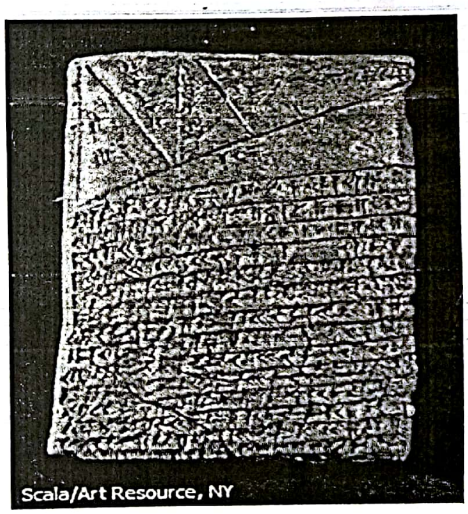


Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716) ingénieur et philosophe.



Euler Leonhard (1707-1783) Physicien, Mathématicien suisse, philosophe et savant allemand

Depuis longtemps, l'homme a utilisé la notion de fonction à partir des objets anciens tels que la tablette de calcul babylonienne. Cependant une fonction fut une formule permettant d'obtenir un résultat. Il a fallu donc attendre le XVII^{ème} siècle pour que le mot fonction et la notion $y = f(x)$ soit introduit par Leibniz et approfondie par Euler.



Tablette babylonienne

Classe : TSE

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Thème : Fonctions Numériques à une variable réelle

Scanned by CamScanner

Lycée Yana Maïga de Gao (LYMG)
Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Contenu

Séquence 1 : Généralité sur les fonctions 3
1.1 Définition d'une fonction 3
1.2 Ensemble ou domaine de définition d'une fonction numérique f : 3
Séquence 2 : Notion de limite 4
2.1 Propriétés des limites 4
2.2 Opération sur les limites 5
2.3 Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini. 6
2.4 Limite de fonctions composées 7
2.5 Limite des fonctions circulaires 8
2.6 Limite à gauche – Limite à droite de x_0 9
2.7 Théorèmes sur les limites 11
2.8 Continuité et prolongement par continuité 12
Séquence 3 : Dérivation 15
3.1. Nombre dérivé en un point x_0 15
3.2. Formules de dérivation des fonctions 17
3.3. Sens de variation d'une fonction. 18
Séquence 4 : Etude de fonctions 19
4.1. Parité et périodicité d'une fonction 19
4.2. les élément de symétries 20
4.3. Les points remarquables d'une courbe 20
4.4. Fonction réciproque 22
4.5. Théorème de valeurs intermédiaires 23
4.6. Théorème de l'inégalité des accroissements finis 26
4.7. Etude des branches infinies 27
4.8. Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique. 29
4.9. Intersection de la courbe avec les axes du repère 31
4.10. Plan d'étude d'une fonction 31
Tests : A vous de jouer ! 35

Déroulement des activités

Scanned by CamScanner

Lycée Yana Maïga de Gao (LYMG)
Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Séquence 1 : Généralité sur les fonctions

1.1 Définition d'une fonction

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B.**

1.2 Ensemble ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f, **l'ensemble des éléments qui ont une image par f.** On le note **Df.**

1.2.1 Fonction polynôme :

- L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de A vers B est : $D_f = A$
- L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

1.2.2 Fonctions rationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère la fonction rationnelle f de A vers B définie par : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in A, v(x) \neq 0\}$.

- Si l'équation $v(x) = 0$ admet des solutions $x_1, x_2, \ldots$, alors $D_f = A\backslash\{x_1, x_2, \ldots\}$.
- Si l'équation $v(x) = 0$ n'admet pas de solution, alors $D_f = A$.

1.2.3 Fonctions irrationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions irrationnelle f et g de A vers B définie par :

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in A;\ v(x) \geq 0\}$.

L'ensemble de définition de g est : $D_g = \left\{x/x \in A;\ \frac{u(x)}{v(x)} \geq 0 \text{ et } v(x) \neq 0\right\}$.

Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$; 2) $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}$;

3) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$

5) $f(x) = \frac{tg(2x)}{Cos(x)}$; 6) $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Synthèse

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

2) $f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$; $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 - 3x + 2 \geq 0\} =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$;

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad et\ x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0\} = [1 ; 2] \Rightarrow D_f =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-3x+4}$; $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \ et - x + 3 \geq 0\}$

$\Rightarrow D_f =]-\infty ; -4[\cup]-4 ; 1[\cup]1 ; 3]$

5) $f(x) = \frac{tg(2x)}{Cos(x)}$; $D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R} ; 2x \neq \frac{\pi}{2} \ et \ Cos(x) \neq 0\right\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right\}$

$\Rightarrow D_f = \left]-\infty ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; +\infty\right[$

6) $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$; $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 \geq 0 \ et \ x + \sqrt{x^2+1} \neq 0\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Séquence 2 : Notion de limite

Activité 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

x	-3000000	-2000000	-1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Donne la valeur de x pour la quelle f n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

x	-3000000	-2000000	-1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

2.1 Propriétés des limites

a) Propriété 1

$\lim x = +\infty$; $\lim x^2 - +\infty$; $\lim x^3 = +\infty$; $\lim \sqrt{x} = +\infty$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

b) Propriété 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{K}{x^n} = 0$ $(K \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{K}{x^n} = 0$ $(k \in \mathbb{R})$

c) Propriété 3 :

Si k est un réel non nul alors :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{k}{x} = \infty$ (le signe de ∞ dépend du signe du zéro et du signe de k).

2.2 Opération sur les limites

a. Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x)+g(x)) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

b. Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x)g(x)) =$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

1) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 ave	0 ave	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

		$-\infty$			C $g(x)<0$	C $g(x)<0$						
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Exemple : $\lim_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$?

$\lim_{x\to-\infty}(x-5)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(3+x^2)=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)=-\infty$

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty","0\times\infty","\frac{\infty}{\infty}"\text{ et }"\frac{0}{0}".$$

2.3 Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

$\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+2x^2-6x+1)=?$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $"-\infty+(+\infty)+(-\infty)"$

Levons l'indétermination :

$-3x^3+2x^2-6x+1=x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$ pour $x\neq 0$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$.

Donc par somme de limites $\lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-3$

Comme $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, on a par produit de limites $\lim_{x\to+\infty}x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$.

Donc $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+2x^2-6x+1)=-\infty$.

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x\to-\infty} 1-2x^2+3x = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBELE
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$$

cela nous conduit à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x\neq 0$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$.

Donc par somme de limites $\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(6-\frac{5}{x^2}\right)=6$.

Donc comme quotient de limites $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{1}{3}$

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+4x^3+x^2-1}{x^2-1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}4x=+\infty$

N.B : La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.
En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

2.4 Limite de fonctions composées

Soient f et g deux fonctions et fog leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne. Si : $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ et si $\lim\limits_{x\to l} f(x)=l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} fog(x)=l'$

Méthode : Détermine la limite d'une fonction composée

Calcule $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}$

- On commence par calcule la limite de la fonction $x\mapsto\frac{4x-1}{2x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$\frac{4x-1}{2x+3} = \frac{x}{x} \times \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)=4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} - \frac{4}{2} = 2$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+3}=2$.

- Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to 2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.

- Comme limite de fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}=\sqrt{2}$.

2.5 Limite des fonctions circulaires

Si a est un nombre réel non nul, on a :
Pour $a \neq 0$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinax}{ax}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{ax}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

2.6 Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inferieures on note : $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq 0}} f(x)$

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une *fonction* f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq 0}} f(x)$

NB :

Une fonction admet une limite en un point d'abscisse x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Exemple

Calcule la limite des fonctions suivantes :

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

d) $\frac{\sin 5x}{2x}$; $x \to 0$ e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2}$ f) $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+x+2}\right)$

Solution

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (Forme .Indéterminée)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$

Puisque la limite est étudiée à droite de-1, alors cherchons le signe du à droite de -1

Posons : $x^2 - x - 2 = 0 => x_1 = -1$ *ou* $x_2 = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

$$=> \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

NB : Le signe du zéro (0^-) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de -1

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{1} = 0$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{0}{0}$ (forme indéterminée)

Levons l'indétermination.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{5} \cdot \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{Sin5x}{5x} = \frac{5}{2}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} = \frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right) = +\infty - \infty$ (forme indéterminée)

Levons l'indétermination.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+x+2})(x+\sqrt{x^2+x+2})}{(x+\sqrt{x^2+x+2})}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-(\sqrt{x^2+x+2})^2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-(x^2+x+2)}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-x-2}{x+\sqrt{x^2+x+2}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

2.7 Théorèmes sur les limites

a) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich.**

Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + Sinx}{x + 1}$

Solution

On sait que : $-1 \leq Sinx \leq 1$

On a : $1 \leq 2 + Sinx \leq 3$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x + 1$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2 + Sinx}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + Sinx}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1}$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1} = 0$

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Calcule : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin x)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}$

b) Théorème de comparaison

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2.8 Continuité et prolongement par continuité



Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

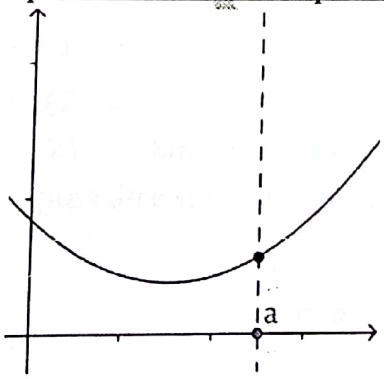
a. **Définition :** Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

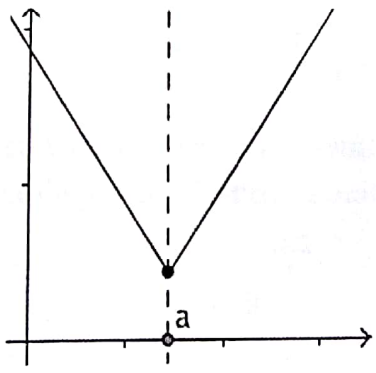
Exemples 1 :

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

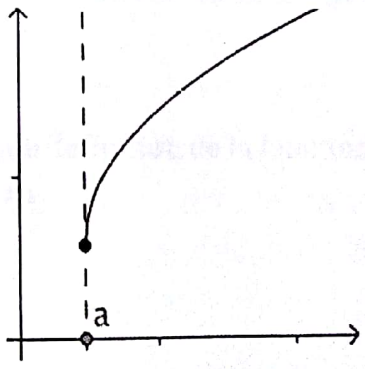
Exemples et contre-exemples :



f est continue en a



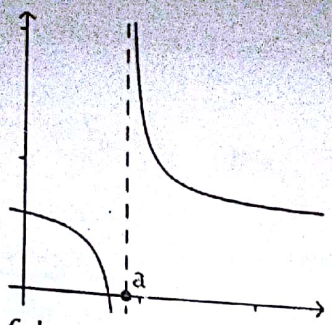
f est continue en a



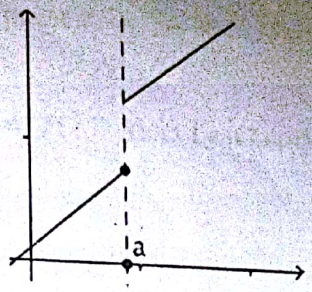
f est continue en a

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBELE
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

b. Continuité à gauche – continuité à droite

☞ **Continuité à gauche :**

Une fonction f est continue à gauche de x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

☞ **Continuité à droite :**

Une fonction f est continue à droit de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

NB :

Une fonction est continue en un point de x_0 si elle est **gauche** et à **droite** de x_0

c. Prolongement par continuité

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ; mais admettant une limite l en ce point. La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ x \neq x_0 \\ l \ si \ x = x_0 \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point x_0

N B : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0.

Exemple

1) Etudions la continuité de la fonction f en x_0 donné dans chacun des cas suivant:

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $x_0 = 2$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|2}{x+3} \\ f(1) = 5 \end{cases}$; $x_0 = 1$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f puis dire si elle est prolongeable par continuité au point x_0 :

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

Solution

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_0 donné dans chacun des cas suivant:

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} & si\ x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = 4 = f(2)$ **Alors f est continue en $x_0 = 2$**

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} & x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :
Posons $x - 1 = 0 => x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$			$x-1$	

$$=> \begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de $x_0 = 1$
f est continue en $x_0 = 1$ si $f(1) existe\ et\ si\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Continuité à gauche :
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$

Continuité à droite :
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$

Puis que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Alors f est continue en $x_0 = 1$.

2) Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction f et voyons si f est prolongeable par continuité au point x_0

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

f n'est pas définie en $x_0 = 0$ donc elle n'est pas continue en $x_0 = 0$
Voyons si f admet une limite finie $x_0 = 0$

Levons l'Indétermination.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{x(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-x}{x(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{(x+\sqrt{x})} = \infty$$

Alors f n'admet pas une limite finie en $x_0 = 0$.
Par conséquent f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$. On a : $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$

Par conséquent f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$
et son prolongement par continuité en $x_0 = 0$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{tgx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Séquence 3 : Dérivation

3.1. Nombre dérivé en un point x_o

a. **Définition :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée **nombre dérivé en x_0 et est noté $f'(xo)$.**
C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$
f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_o)$

b. **Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite**

☞ **Nombre dérivé à gauche :**

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Si lim $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_0

$x \to x_0^-$

On la note $f'_g(x_0)$

☞ **Nombre dérivé à droite :**

Si $\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_0.

$x \to x_0^+$

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème 1 :

si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_0 et on a :

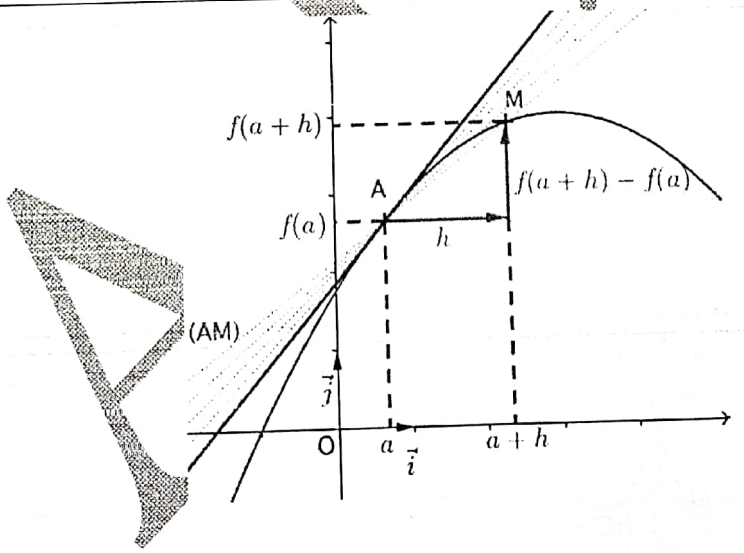
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Théorème 2 : Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque est inexacte.

c. Equation de la tangente

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

On veut Détermine une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+3(2+h)-1-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+7h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+7) = 7$$

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.

Donc son équation est de la forme : $y = 7(x-2)+f(2)$, soit :

$y = 7(x-2)+9$

$y = 7x-5$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x-5$.

NB : Si la courbe (C) de la fonction f admet en un point d'abcisse x_0, une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors $f'(x_0) = 0$

3.2. Formules de dérivation des fonctions

a. Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
Cos x	$\mathbb{R}$	$-$Sin x	$\mathbb{R}$
Sin x	$\mathbb{R}$	Cos x	$\mathbb{R}$
Tgx	$\mathbb{R}-\left\{\frac{k\Pi}{2}\right\}$	$\frac{1}{Cos^2x}=1+tg^2x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{k\Pi}{2}\right\}$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^6$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=6x^5$.

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=-\frac{4}{x^5}$.

b. **Formules d'opération sur les fonctions dérivées :**

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\frac{a}{u^n}$ $(a\in\mathbb{R})$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\frac{-nau'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u=(gof)(x)$	$u'=f'(x)g'(f(x))$
$\mathrm{Cos}\,(u)$	$-u'\mathrm{Sin}\,(u)$
$\mathrm{Sin}\,(u)$	$u'\mathrm{Cos}(u)$
$\mathrm{Cos}\,(ax+b)$	$-a\mathrm{Sin}\,(ax+b)$
$\mathrm{Sin}\,(ax+b)$	$a\,\mathrm{Cos}\,(ax+b)$

3.3. Sens de variation d'une fonction.

a. Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x)<0$ pour tout $x\in$ I, alors $\forall\, x\in$ I, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in$ I, alors $\forall\, x\in$ I, f est strictement croissante.
- Si $f'(x)=0$ pour tout $x\in$ I, alors $\forall\, x\in$ I, f est constante ou stationnaire

N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f. Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de f.

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

b. **Extremum d'une fonction** :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en *passant par* x_0, alors f admet un extremum en x_0.

Exemple

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 donné :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_o = 2$$

2) Calcule la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$$

3) Ecrire une équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$f(x) = Cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)$; on donne $x_0 = 2$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante : $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

Reponse 4)

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$

Séquence 4 : Etude de fonctions

4.1. Parité et périodicité d'une fonction

a) Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si : $\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = f(x)$

b) Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si : $\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$

c) Fonction Périodique :

Scanned by CamScanner

...au cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Une fonction f est dite périodique de période T s'il existe un nombre réel T tel que $\forall x \in Df$ et $x + T \in Df$; $f(x + T) = f(x)$.

Remarque :

- La fonction Cos$x$ est paire car $Cos(-x) = Cos\, x$
- La fonction Sin$x$ est impaire car $Sin(-x) = -Sin\, x$
- Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période $T = \frac{2\Pi}{|a|}$

4.2. les élément de symétries

a) Axe de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est dite axe de symétrie pour la courbe (Cf) de f si :
$\forall x \in Df$ et $\forall\, 2a - x \in Df$ ou $\forall\, a + x \in Df$ et $\forall\, a - x \in Df$

- $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a + x)$ est paire ou encore $f(a + x) = f(a - x)$

b) Centre de symétrie :

Le point $I\binom{a}{b}$ est dit centre de symétrie pour la courbe (Cf) de f si :
$\forall x \in Df$ et $\forall\, 2a - x \in Df$ ou $\forall\, a + x \in Df$ et $\forall\, a - x \in Df$

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$ ou $f(a + x) - b$ est paire ou $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe $(y'\, o\, y)$ comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point O $\binom{0}{0}$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

Exemple

a) La droite d'équation $a = -1$ est-elle un axe de symétrie pour la courbe (C) de f où $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

b) vérifiez si le point $I\binom{-1}{0}$ est un centre de symétrie pour la courbe (Cg) de g où $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

4.3. Les points remarquables d'une courbe

a) Minimum :

Soit f une fonction définie en un point x_0. S'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall\, x \in I$ on a : $f(x) \geq f(x_0)$ alors f présente un minimum en x_0. Ce minimum est $m = f(x_0)$.

b) Maximum :

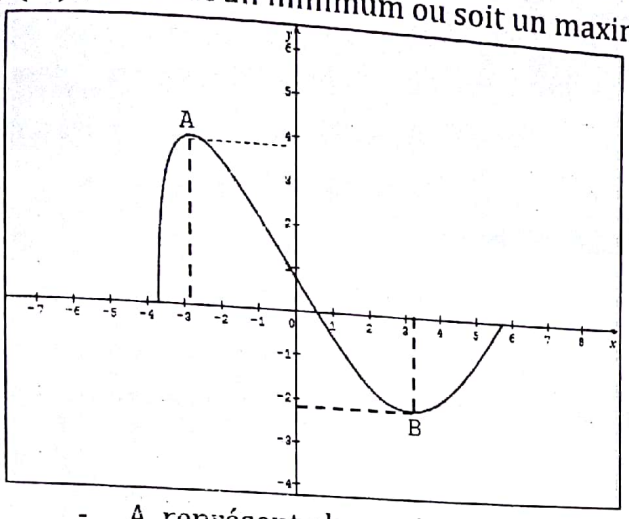
f admet un maximum relatif au point x_0, s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall\, x \in I$ on a : $f(x) \leq f(x_0)$. Le maximum est $M = f(x_0)$.

Théorème :

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x)$ s'annule en x_0 et change ce signe en passant par x_0, on dit alors que f présente un extremum en x_0. Cet extremum est égal à $f(x_0)$. Il soit est un minimum ou soit un maximum.



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

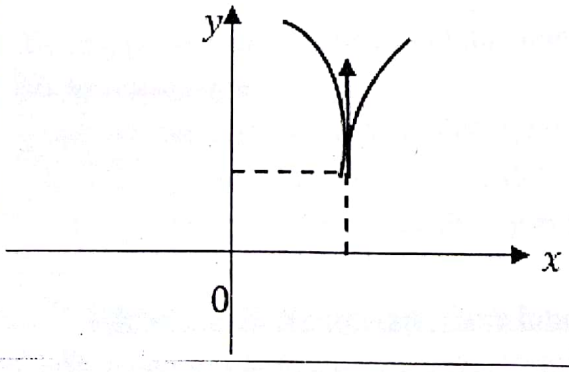
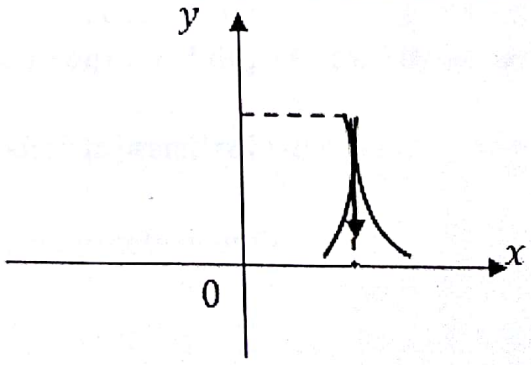
c) Point d'inflexion :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle]a ; b[. On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde f "(x) s'annule en changeant de signe.**

d) Point de reboursement :

$$Si \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$$

Alors on dit que f admet un point de reboursement d'abscisse x_0 à tangente parallèle à l'axe des ordonnées :

Point de reboursement de 1er espèce	Point de reboursement de 2ème espèce
$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$	$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$
	

Scanned by CamScanner

Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

4.4. Fonction réciproque

a. Bijection

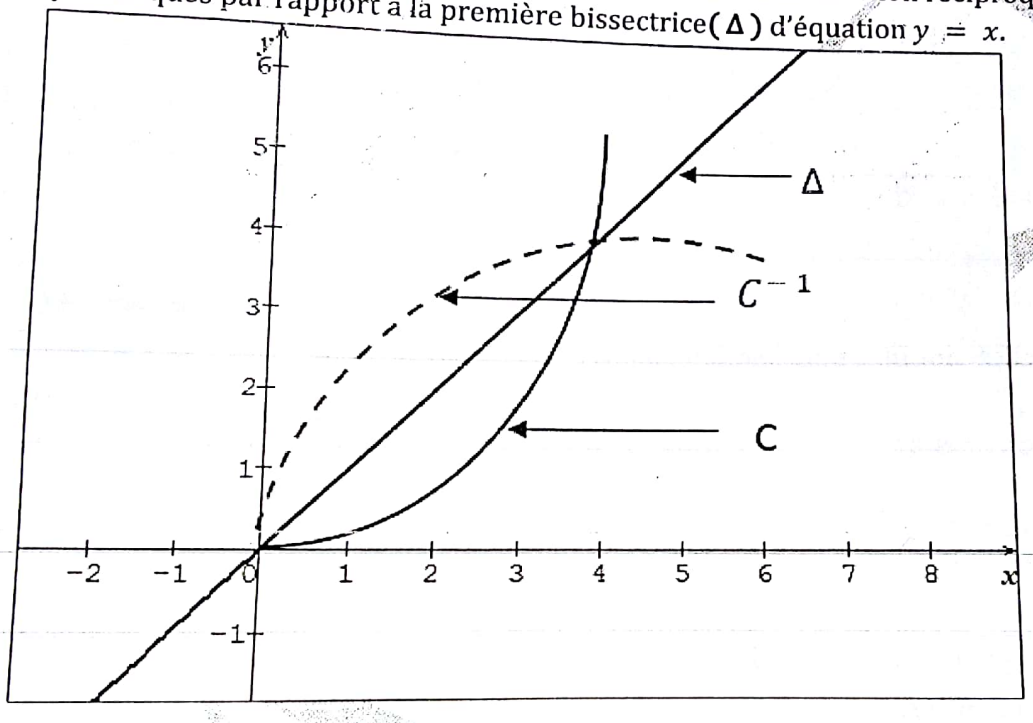
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivé F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E.

- **En Pratique :**

Une application f est bijective si et seulement si $\forall\, y \in F\ \exists!\, x \in E$ on a : $f(x) = y$

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$.



Théorème de la bijection :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de **I sur $f(I)$ et admet une bijection *réciproque* f^{-1} de $f\ (I\ )$ sur I ayant même sens de variation que f**

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$

Si M $(x\ ;\ y) \in C_f$ alors N $(y\ ;\ x\ ) \in C_{f^{-1}}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors $y =$ a devient asymptote pour $C_{f^{-1}}$

Dérivée de la réciproque d'une fonction f :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors f réalise une bijection de I sur sur $f\ (I\ )$ et admet une bijection f^{-1} de $f(I)$ dans I

Ayant même sens de variation que f et on a : $(f^{-1})'\ (x) = \frac{1}{f'[(f^{-1}(x)]}$

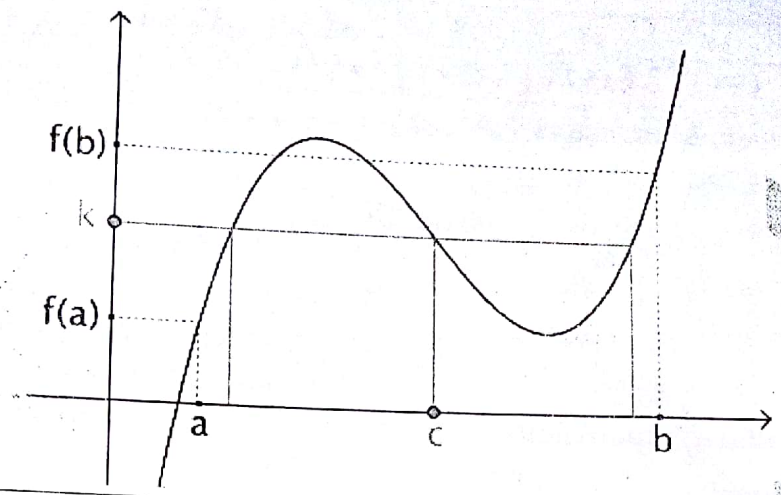
Scanned by CamScanner

4.5. Théorème de valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



Conséquence :

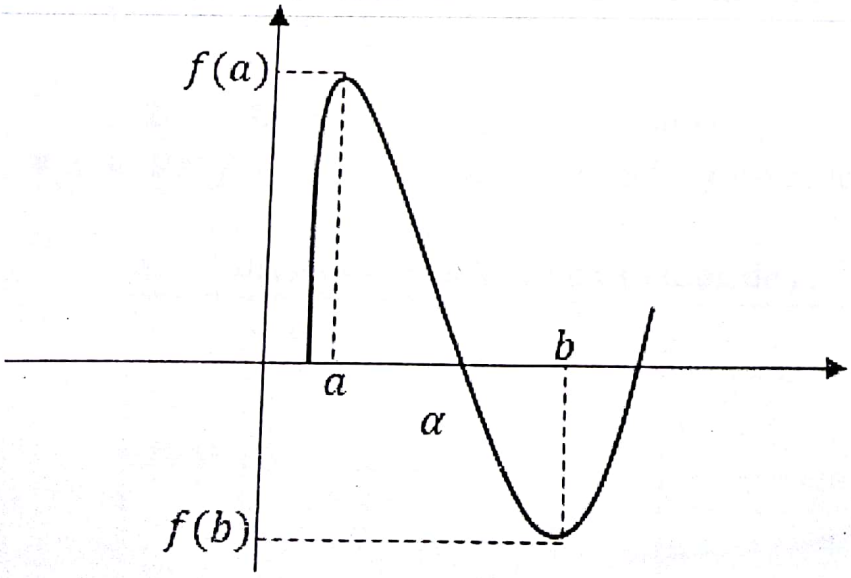
Dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet au **moins** une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0$.

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ et si $f(a)\times f(b)\leq 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[a\,;\,b]$.



Approximation d'une solution α de l'équation $g(x)=0$:

Scanned by CamScanner

Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Les méthodes les plus utilisés utilisées sont celles de dichotomie et de Méthode des balayages

☞ **Méthode des balayages**

C'est une méthode qui consiste à déterminée une approximation de α à partir d'un tableau de valeur où la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$	.....	$f(x_n)$

Si par exemple $f(x_5)\times f(x_5) < 0$ alors $\alpha \in [x_5\ ;\ x_6]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

Exemple

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- Calcule $f'(x)$.

2- Etudier le sens de variation de f.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in\ ]1\ ;\ 2[$.

5- Détermine une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

B) Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1- Détermine l'ensemble de définition Df de f.

2- Montre que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

C) Soit $f(x) = Cosx$ une fonction définie sur $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

1- Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

2- Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f(x) = x$.

Solution

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- *Calculons* $f'(x)$.

$Df = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 3$

2- Etudions le sens de variation de f.

$\forall\ x \in Df, f'(x) > 0$. D'où $\forall\ x \in Df$, f est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBELE
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

4- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]1\,;\,2[$

D'après le tableau de variation, f est définie, continue et strictement croissante de $]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,+\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

De plus : $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]1\,;\,2[$

5- Déterminons une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Pour cela utilisons la méthode des balayages

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Signe de $f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	+	+

Ainsi d'après le tableau, l'image par f des différentes valeurs de x commences à changé de signe à partir des valeurs de x comprises entre 1,4 et 1,5.

Alors : $\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45$

B) *Soit* $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1- Déterminons l'ensemble de définition Df de f.

$D_f = \{x/x \in IR\,;\, x + 2 \geq 0\}$

$x + 2 \geq 0$. Posons $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+

$\Rightarrow D_f = [-2\,;\,+\infty[$

2- Montre que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on Déterminea.

Pour cela, dressons le tableau de variation de f :

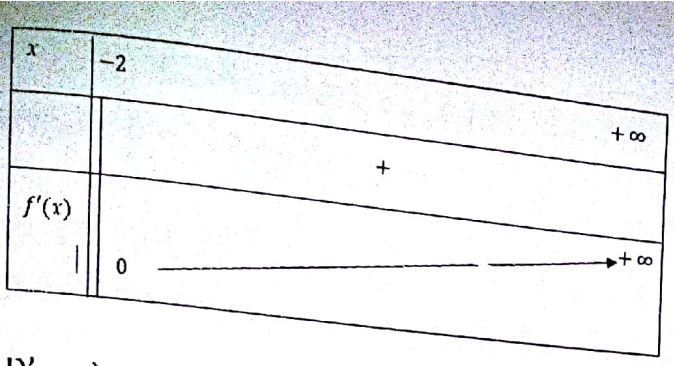
$f(-2) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

Scanned by CamScanner

abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34



D'après le tableau de variation , f est définie, continue et strictement croissante de $]-2\ ;+\infty[$ vers $]0\ ;+\infty[$ alors f réalise une bijection de $]-2\ ;+\infty[$ vers l'intervalle $J=]0\ ;+\infty[$.

4.6. Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit a et b deux réels appartenant à I tel que (a < b).

-Si m et M sont deux réels tel que $\boldsymbol{m \leq f'(x) \leq M}$, alors on a :

$$(b-a)\,m \leq f(b)-f(a) \leq (b-a)\,M.$$

-Si f est dérivable sur I, alors il existe un réel k appartenant à I tel que $|f'(x)| \leq k$.

Ainsi par conséquent $\forall\, a \in I$ et $b \in I$, on a : $\boxed{|f(x)-f(a)| \leq k\,|x-a|}$.

(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements fins).

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-x-5}{x-3}$

1) Montre que $\forall x \in [4\ ;5]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduire que $\forall x \in [4\ ;5]$, on a : $\left|f(x)-\frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

Solution

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-x-5}{x-3}$

1) Montrons que $\forall\ x \in [4\ ;5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

Or $x \in [4\ ;5] <=> 4 \leq x \leq 5$

Or $f'(4)=0$ et $f'(5)=\frac{3}{4}$ et on verifie bien que f est croissante sur $[4\ ;5]$

$=>$ $\boldsymbol{0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}}$ **et donc $f'(x)$ est positif.**

$=>|0| \leq |f'(x)| \leq \left|\frac{3}{4}\right|$ $=>$ $0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

D'où $\forall x \in [4\ ;5],\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

2) En déduisons que $\forall x \in [4\,;5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

D'après la question 1), on a :

$\forall x \in [4\,;5]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Or si $|f'(x)| \leq k$, on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$|f(x) - f(a)| \leq k|x-a| \quad \forall a \in [4\,;5]$

Ainsi puisque $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x) - f(5)| \leq \frac{3}{4}|x-5|$. Avec $k = \frac{3}{4}$ et $a = 5$

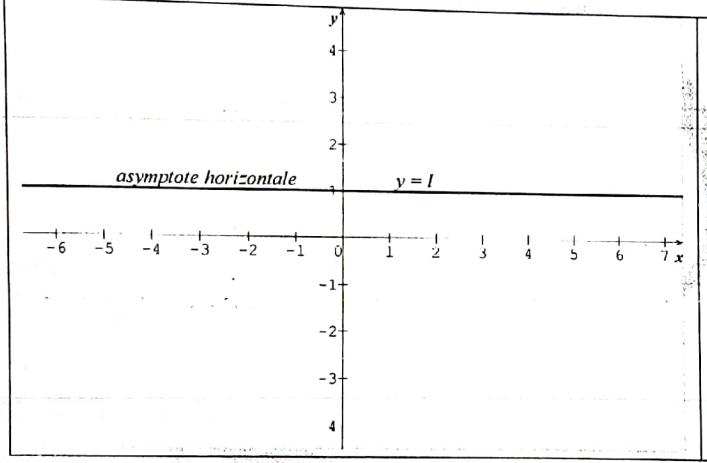
Or $f(5) = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

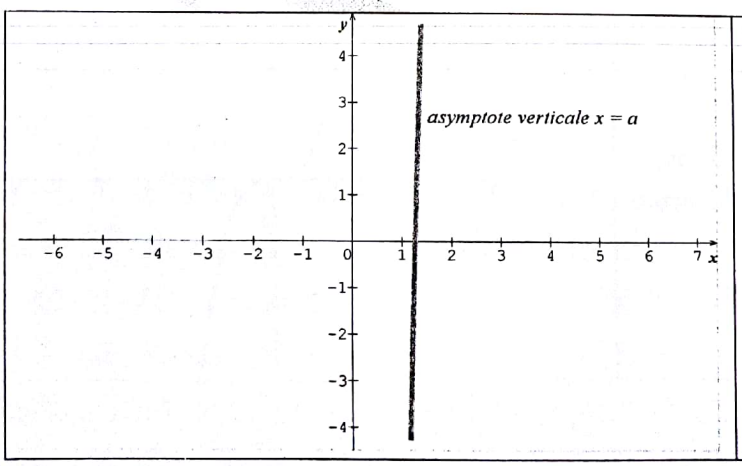
D'où $\forall x \in [4\,;5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

4.7. Etude des branches infinies

a. Notion d'asymptotes



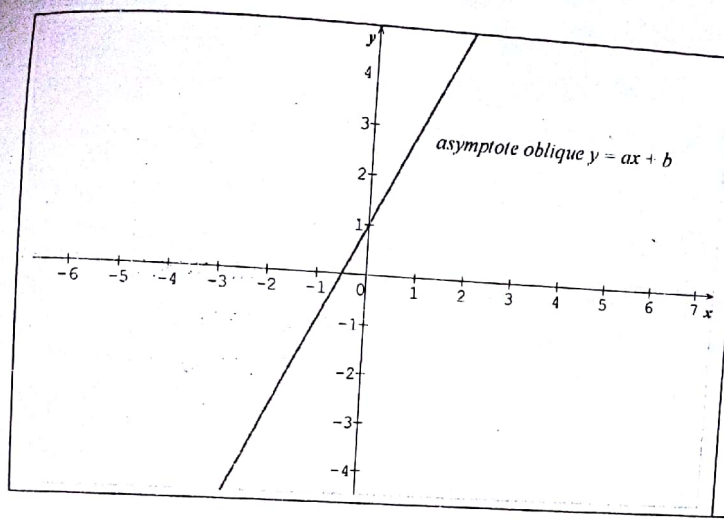
Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ avec l réel, **alors la droite d'équation $y = l$** est asymptote **Horizontale** à la courbe représentative de f.



Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ avec a réel **alors la droite d'équation $x = a$** est asymptote **verticale** à la courbe représentative de f.

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

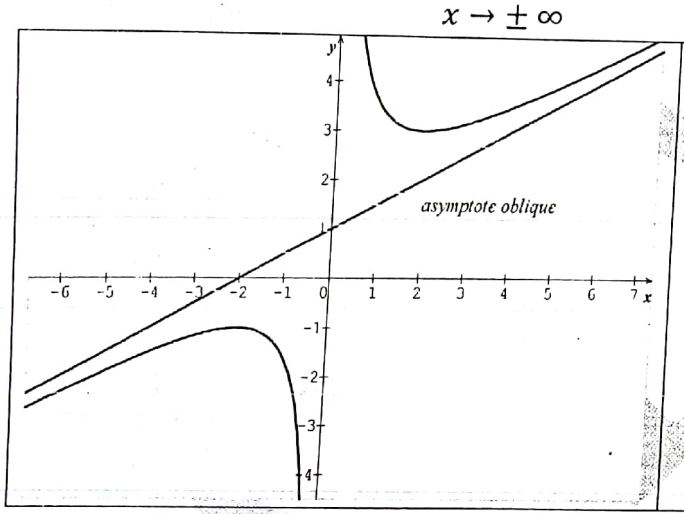
ou

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe représentatives de f.

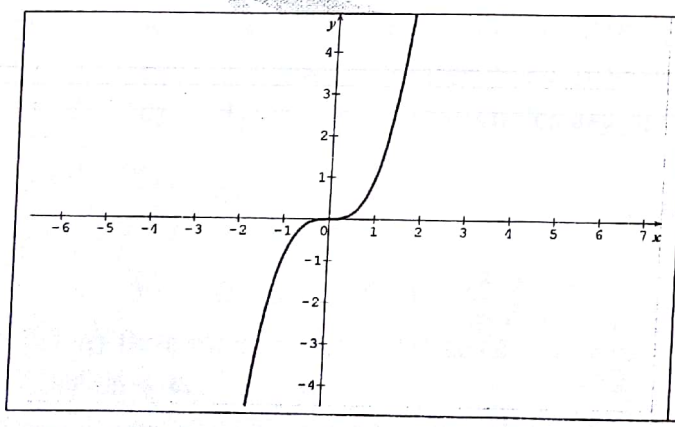
Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $lim\ f(x) = \pm\infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.
$x \to \pm\infty$



$si \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a\ et \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] = b$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f.

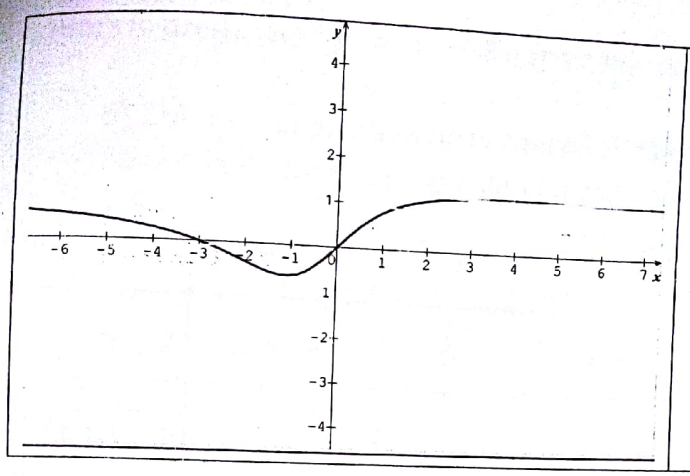


$si \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(y'oy)$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34



$si \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(x'ox)$

4.8. Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.

Pour Détermine la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

Exemple

A. On donne la fonction numérique à variable réelle ; $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontre que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe(Cf) de f en $+\infty$.

b) Etudier la position de la courbe (Cf) et (Δ).

B. On donne la fonction numérique à variable réelle ; $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Détermine l'ensemble de définition Df de f.

b) Calcule les limites de f aux bornes de Df.

c) Déduis en l'équation des asymptotes à la courbe (Cf).

Solution

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontrons que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Alors la droite $(\Delta) : y = x + 2$ e st asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$

b) Etudions la position de la courbe (Cf) et de la droite (Δ).
Pour cela étudions le signe de $f(x) - y$ qui dépend de de celui de $x - 2$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	(Δ)	$/$ (C)		(C)	$/$ (Δ)

☞ $\forall x \in]-\infty; 2[$; $f(x) - y < 0$ alors la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ).
☞ $\forall x \in]2 ; +\infty[$; $f(x) - y > 0$ alors la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ).

2- On donne $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Détermine l'ensemble de définition Df de f.

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x - 3 \neq 0\} => D_f = D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

b) Calculons les limites aux bornes de D_f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x-4}{x-3} = \lim \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x-4}{x-3} = \lim \frac{2}{0^+} = +\infty$$

c) Déduisons les asymptotes à la courbe (C) de f.

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \\ et \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$ Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (Cf).

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ et \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (Cf).

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote oblique à (Cf).

4.9. Intersection de la courbe avec les axes du repère

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

4.10. Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on peut adopter le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f;
- On calcule les limites aux bornes de D_f;
- On étudie la parité et la périodicité de f ;
- On étudie la continuité de f ;
- On étudie le sens de variation de f ;
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes ;
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées.

Evaluations

A. Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction f dans chacun des cas suivants :

Scanned by CamScanner

Cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

B. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + Cos3x}{Cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

b) Etudier la parité et la périodicité de f. En déduire qu'il suffit d'étudie la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E

c) Montre que $\forall x \in Df$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2Cosx)Sinx}{Cos^4 x}$

d) Etudier le signe de $(1 - 2cosx)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E.

e) Tracer la courbe (C).

Solution

A. Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

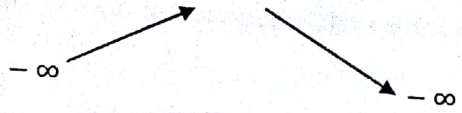
$=> f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$ or $\forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^2 + 2x$.

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-2	↘	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

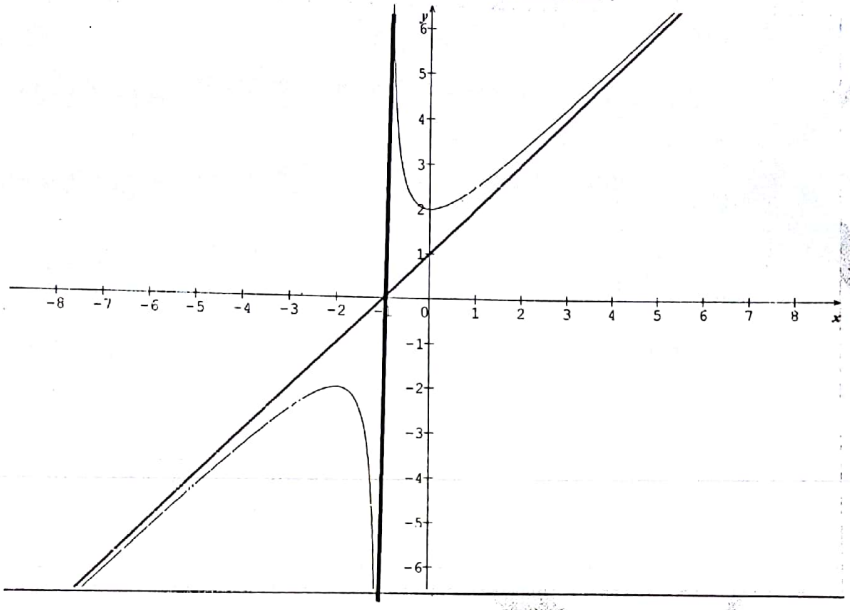


2

$x = -1$ est asymptote verticale à (C).

$y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) car $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$.

Ainsi on a la représentation suivante :



B. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 + Cos3x}{Cos^3 x}$ et (C) sa courbe

a) Déterminons l'ensemble de définition Df

Df $= \{x/x \in R\ ; Cos^3 x \neq 0\}$

$Cos^3 x \neq 0 <=> Cosx \neq 0 <=> Cosx \neq Cos\frac{\pi}{2} <=> x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$=> \boldsymbol{D_f} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ +\infty\right[$

b) Etude de la parité et de la périodicité de f

- Partie : $f(-x) = \dfrac{1 + Cos(-3x)}{Cos^3(-x)} = \dfrac{1 + Cos3x}{Cox^3 x} = f(x)$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'oy$ comme axe de symétrie.

- Périodicité : $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{1} => T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$

$\Leftrightarrow D_E = \left[-\frac{2\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{2}\right] => D_E = [-\pi\ ;\ \pi]$

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

Et puisque la fonction est paire alors nous pou

Scanned by CamScanner

Chargé du cours : Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ
abdouldem25@gmail.com
76 34 32 34 / 66 34 32 34

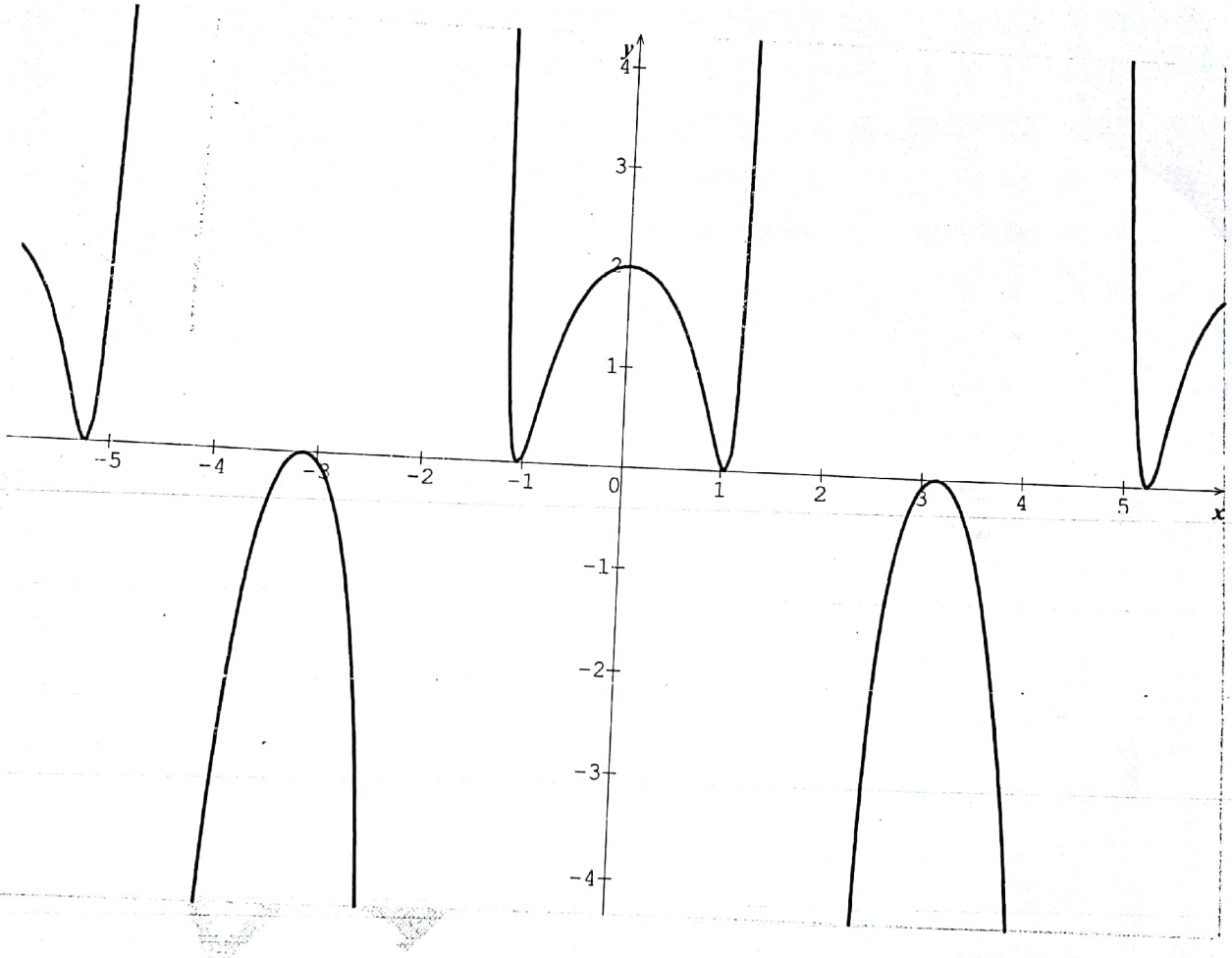
⇨ $\text{Cos}\, 3x = \text{Cos}\, \pi \quad \Leftrightarrow 3x = \pi$ ou $3x = -\pi$ =>

Donc (C) coupe l'axe (ox) en $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$

- $(C) \cap (oy) => = 0$; et $y = 2$

Donc (C) coupe l'axe oy en 2

Ainsi on a la représentation suivante :



Tests : A vous de jouer !

Exercice 1

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Ecris $f(x)$ sans valeur absolue.
3. Etudie la continuité de f sur D_f.
4. Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_1 = 3$ puis interprète graphiquement les résultats.

Scanned by CamScanner