

# Limites, Continuité et Comportement Asymptotique :

Outils essentiels pour l'analyse en terminale

Complément de cours - M. Almame Traoré

Formes indéterminées :  $\infty - \infty$ ;  $0 \times \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,

## Limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle :

**Règle 1 :** en  $\pm \infty$ , la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré

**Règle 2 :** en  $\pm \infty$ , la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

## ● Limite des fonctions trigonométriques :

**NB :** En  $\pm \infty$ , les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

## ● Asymptotes et Branches infinies :

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ , alors,  $(Cf)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$ , alors,  $(Cf)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , alors,  $(Cf)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ ; et  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$ , alors,  $(Cf)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ ; et  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , alors,  $(Cf)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$  et, alors,  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - ax] = \pm \infty$ , alors,  $(Cf)$  admet une branche parabolique de direction la droite  $(\Delta): y = ax$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$  et, alors,  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$ , alors,  $(Cf)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$

## ● Les éléments de symétrie d'une fonction :

- $f$  est paire si et seulement si  $\forall x \in Df, -x \in Df$  et  $f(-x) = f(x)$
- $f$  est impaire si et seulement si  $\forall x \in Df, -x \in Df$  et  $f(-x) = -f(x)$

- $(\Delta): x = a$  est un axe de symétrie de  $(Cf)$  si et seulement si  
 $\forall x \in Df, 2a - x \in Df$  et  $f(2a - x) = f(x)$
- $I(a, b)$  est un centre de symétrie de  $(Cf)$  si et seulement si  
 $\forall x \in Df, 2a - x \in Df$  et  $f(2a - x) + f(x) = 2b$

## CONTINUITE

### ● Etude de la continuité en un point :

$f$  est continue en  $x_0$ ,

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ou si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

### ● Théorème de continuité :

- Toute fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$
- Toute fonction dérivable sur  $I$  est continue sur  $I$

**NB :** La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas toujours dérivable.

### ● Exemples de fonctions continues :

- Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur  $\mathbb{R}$
- La fonction racine carrées est continue sur  $[0, +\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue

### ● Bijection continue :

$$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J$$

### ● Solution de l'équation $f(x) = k$

$$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \circ k \in J = f(I) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution } \alpha \in I$$

### ● Théorème des valeurs intermédiaires :

Résolution de l'équation  $f(x) = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } [a, b] \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } [a, b] \\ \circ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in ]a, b[$$

## Exercices d'application sur les asymptotes

### Exemple 1 : (Asymptote horizontale)

Étudie les asymptotes de la fonction  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$

### Solution :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$$

La droite  $y = 2$  est une asymptote horizontale en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

### Exemple 2: ( Asymptote verticale )

Étudie les asymptotes de la fonction  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

### Solution:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

La droite  $x = 2$  est une asymptote verticale.

### Exemple 3: ( Asymptote oblique )

Étudie les asymptotes de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$

### Solution :

1. Calcul de  $a$  :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)} = 1$$

2. Calcul de  $b$  :

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} - x \right) = 1$$

La droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique en  $+\infty$ .

Vérification en  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$$

L'asymptote oblique est la même en  $-\infty$ .

### Exemple 4 : ( Branche parabolique )

Étudie le comportement asymptotique de  $f(x) = x\sqrt{x}$

### Solution :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

La courbe admet une branche parabolique de direction verticale en  $+\infty$ .

### Exemple 5 : ( Asymptote oblique avec position relative )

Étudie l'asymptote oblique de  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$  et la position relative.

**Solution :**

$$1. a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$$

$$2. b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = 0$$

Asymptote oblique :  $y = x$

Position relative :  $f(x) - x = -\frac{1}{x}$

— Si  $x > 0$ ,  $f(x) - x < 0$  : courbe en dessous de l'asymptote

— Si  $x < 0$ ,  $f(x) - x > 0$  : courbe au-dessus de l'asymptote

**Exemple 6: ( Double asymptote )**

Étudie les asymptotes de  $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$

**Solution :**

— Asymptotes verticales :  $x = 1$  et  $x = -1$

— Asymptote oblique :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x(x^2 - 2)} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \right) = -1$$

Asymptote oblique :  $y = 2x - 1$

*Conçu dans une logique d'apprentissage actif, ce support peut être utilisé en classe, en autonomie ou en préparation d'évaluations. Il s'inscrit également dans une perspective plus large de modélisation mathématique, où l'analyse asymptotique permet de décrire le comportement de phénomènes réels*

**BONNE ET HEUREUSE ANNEE 2026**