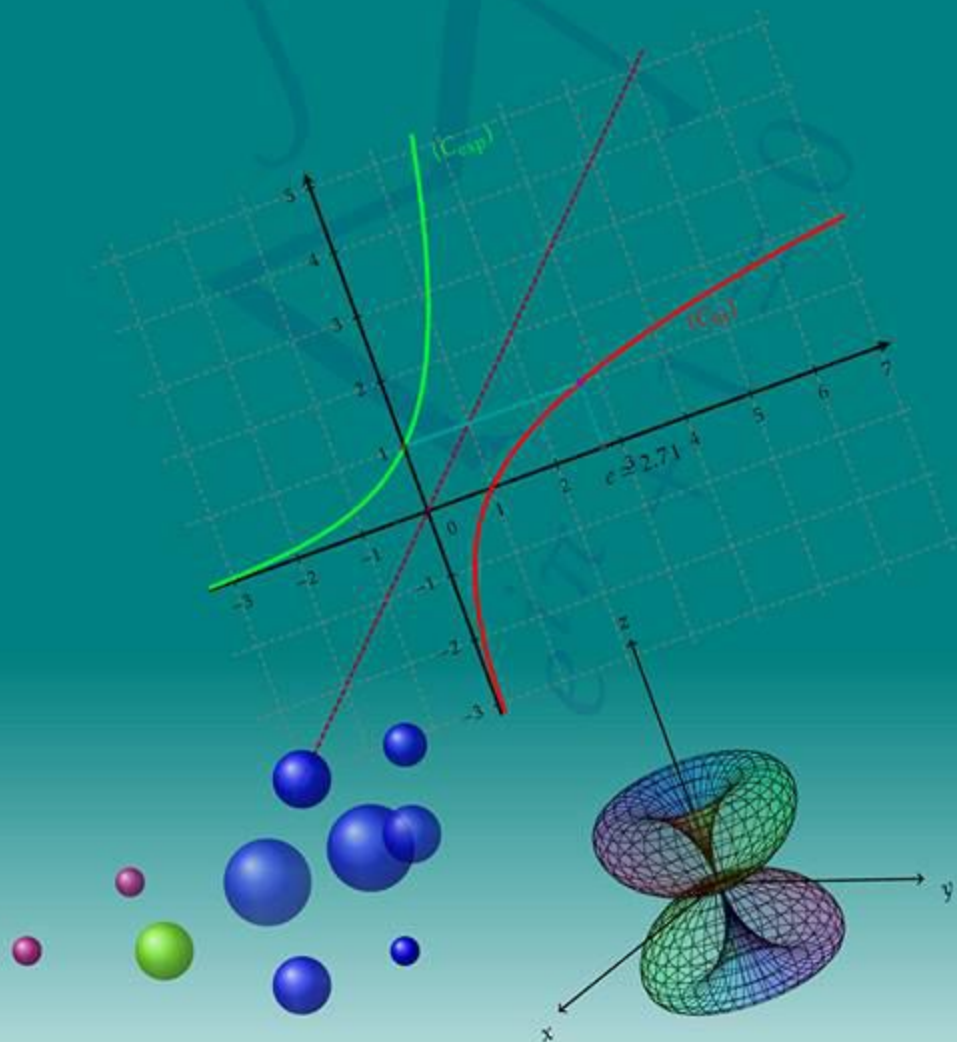




Taki Academy
www.takiacademy.com

Chapitre 1 : Limites et continuité

MATHÉMATIQUES



Année Scolaire 2018-2019

1	Limites et continuité	1
I	Limite des fonctions :	1
1	Activité 1	1
2	Activité 2	1
3	Activité 3	1
4	Activité 4	2
5	Activité 5	2
a	Limite d'une somme	2
b	Limite d'un produit	2
c	Limite d'un inverse	2
d	Limite d'un quotient	3
e	Limite du valeur absolue	3
f	Limite du racine carrée	3
6	Activité 6	4
II	Continuité	4
1	Activité 7	4
2	Activité 8	5
III	Prolongement par continuité	5
1	Activité 9	5
IV	Continuité sur un intervalle	6
1	Activité 10	6
2	Activité 11	6
V	Composée de deux fonctions	7
1	Activité 12	7
2	Activité 13	7
3	Activité 14	8
VI	Limite d'une fonction composée	8
1	Activité 15	8
2	Activité 16	9
3	Activité 17	9
4	Activité 18	9
VII	Continuité d'une fonction composée	10
1	Activité 19	10
2	Activité 20	10
VIII	Limite et ordre	10
1	Activité 21	10
2	Activité 22	11
3	Activité 23	11
4	Activité 24	12
IX	Limites et comportement asymptotique	12
1	Activité 25	12
a	Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées :	13
b	Asymptote parallèle à l'axe des abscisses :	13
c	Asymptote oblique :	13
d	Etude d'une branche infinie :	14
2	Activité 26	14
3	Activité 27	14
X	Image d'un intervalle par une fonction	15

1	Activité 28	15
XI	Théorème des valeurs intermédiaires	16
1	Activité 29	16
2	Activité 30	16
	Exercice 1	18
	Exercice 2	18
	Exercice 3	19
	Exercice 4	20
	Exercice 5	20

Chapitre 1

Limites et continuité

I Limite des fonctions :

1 Activité 1

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 7x + 10}{2x - 10} \right)$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{2x - 10}{x^2 - 8x + 15} \right)$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{8-x} - 2} \right)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x^2 - 7x + 10} \right)$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 5x + 4} \right)$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-1}}{|x+2| - 6} \right)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{2x - 10}{x^2 - 8x + 15} \right)$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}}{x^2 - 1} \right)$$

2 Activité 2

Déterminer dans chacun des cas suivants le domaine de définition de la fonction f puis étudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

$$1 \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}$$

$$6 \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} + x$$

$$2 \quad f(x) = \frac{2 - x}{x^2 + 2x - 3}$$

$$7 \quad f(x) = \sqrt{-x + 3} + 3x + 5$$

$$3 \quad f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 3x}$$

$$8 \quad f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$4 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - 3}{2x + 1}$$

$$9 \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{3x^2 - x - 2}$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - 3x$$

$$10 \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

3 Activité 3

Soient les fonctions f, g, h et k définies par :

$$f(x) = -3x^7 - x^5 - x + 1, \quad g(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, \quad h(x) = \sqrt{2x^2+x} + x, \quad k(x) = \left| \frac{x^3+4x^2}{x+4} \right|$$

- 1 Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

- 2 Pour chacune de ces fonctions donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

4 Activité 4

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_m(x) = \frac{(m-2)x^3 + 3mx^2 - 4x - 6}{x^2 - 1}$.
Où m est un paramètre réel

- Étudier suivant le paramètre m la limite de f_m en $+\infty$.
- Étudier suivant le paramètre m la limite de f_m en 1.

5 Activité 5

On considère la fonction définie par : $g_m(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - mx + 1$.
Où m est un paramètre réel.
Étudier suivant le paramètre m la limite de g_m en $+\infty$.

Opérations sur les limites :

Les opérations sur les limites qui vont suivre sont valables dans les cinq cas suivants :

$$x \rightarrow x_0 \text{ où } x_0 \in \mathbb{R} ; x \rightarrow x_0^+ ; x \rightarrow x_0^- ; x \rightarrow +\infty ; x \rightarrow -\infty$$

a Limite d'une somme

Si f à pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g à pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(f+g)$ à pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	(F.I)

b Limite d'un produit

Si f à pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g à pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $(f \times g)$ à pour limite	$\ell \times \ell'$	∞ (règle signe)	∞ (règle signe)	(F.I)

c Limite d'un inverse

Si f à pour limite	$\ell' \neq 0$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ à pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0



d Limite d'un quotient

Si f à pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Si g à pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	0	0^+ ou 0^-	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
Alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ à pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞ (r.signe)	(F.I)	∞ (r.signe)	∞ (r.signe)	(F.I)

N.B : (F.I) désigne une forme indéterminée, pour laquelle une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

e Limite du valeur absolue

✓ Si $\lim f(x) = \ell$ et $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim |f(x)| = |\ell|$.

✓ Si $\lim f(x) = +\infty$ alors $\lim |f(x)| = +\infty$.

Remarque : Les réciproques sont fausses sauf si $\ell = 0$, $\lim f(x) = 0 \iff \lim |f(x)| = 0$

f Limite du racine carrée

On suppose que f est positive

✓ Si $\lim f(x) = +\infty$ alors $\lim \sqrt{f(x)} = +\infty$.

✓ Si $\begin{cases} \lim f(x) = \ell \\ \text{et } \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \ell \geq 0 \\ \text{et } \lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell} \end{cases}$

Limites usuels :

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I .

♣ La limite d'une **fonction polynôme**, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle de son monôme de plus haut degré :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{où } a_n \neq 0, \quad \text{on a } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

♣ La limite d'une **fonction rationnelle**, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré :

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \text{où } a_n b_m \neq 0$$

$$\text{on a } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

6

Activité 6

- 1 Vérifier que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} \sqrt{x}$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.
- 3 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.
- 4 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$.
- 5 Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{4})}{1 + \cos 4x}$.

Limite d'une fonction trigonométrique :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a.$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x} = 0.$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a.$$

II

Continuité

1

Activité 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

- 1 Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
- 2 La fonction f est-elle continue en 1?
- 3 La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



Théorème :

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I .

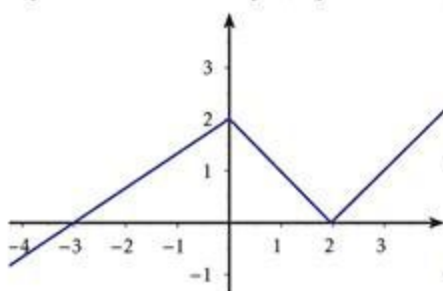
- ▲ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I . f est continue en x_0 si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ▲ Soit f une fonction définie sur un intervalle $[x_0, x_0 + h[$, ($h > 0$). f est continue à droite en si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- ▲ Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0 - h, x_0]$, ($h > 0$). f est continue à gauche en si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- ▲ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . f est continue en x_0 si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0 .
- ▲ Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $|f|$ sont continues en x_0 , si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
- ▲ Toute fonction polynôme est continue en tout réel x_0 .
- ▲ Toute fonction rationnelle est continue en tout réel x_0 de son domaine de définition.

2

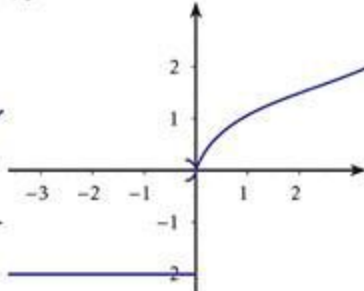
Activité 8

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en se référant à la représentation graphique de f , dans chacun des cas suivants :

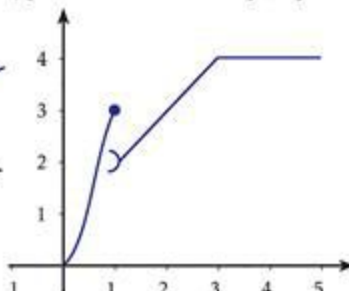
a) f est continue sur $[-2; 3]$



b) f est continue en 0



c) f est continue sur $]0; 5]$



III

Prolongement par continuité

1

Activité 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

Théorème et Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \setminus \{a\}$.
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec ℓ un réel fini, alors f est prolongeable par continuité en a et la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \text{ est continue en } a.$$

La fonction F est appelée prolongement par continuité en a de la fonction f .

IV Continuité sur un intervalle

1 Activité 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{4+2x^2}-2}{x}$.

- 1 a. Déterminer l'ensemble de définition de f .
b. Étudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
- 2 Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.

2 Activité 11

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x}{x}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.

Continuité sur un intervalle :

- ♣ Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I .
- ♣ Une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$, si elle est continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b . De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $] -\infty, a]$.
- ♣ Si f est continue sur un intervalle I alors les fonctions αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $|f|$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues sur I .
- ♣ Si f est continue et positive sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I .
- ♣ Si f et g sont continues sur un même intervalle I alors les fonctions $f+g$, $f-g$, $f \times g$ sont continues sur I .



Continuité sur un intervalle :

- ♣ Si f et g sont continues sur le même intervalle I et g est non nulle, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- ♣ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- ♣ Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
- ♣ Les fonctions **cosinus** et **sinus** notées respectivement $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ♣ La fonction trigonométrique tangente notée $\tan$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- ♣ La fonction trigonométrique cotangente notée $\cot$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

V Composée de deux fonctions

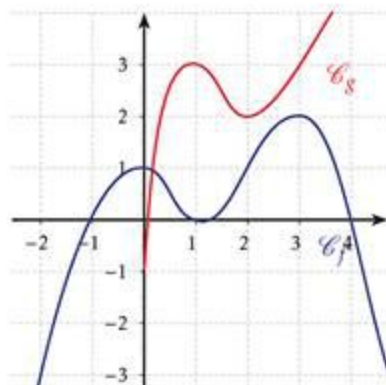
Définition :

On appelle fonction composée des fonctions g et f , la fonction notée $g \circ f$ (se lit **g rond f**), définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.
En général $g \circ f \neq f \circ g$

1 Activité 12

Dans la figure ci-contre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.

- 1 Lire sur le graphique les images par f des réels $-1, 0, 1, 2$ et 3 , ainsi que les images par g des réels $0, 1, 2$ et 3 .
- 2 Soit les fonctions $h : x \mapsto g(f(x))$
et $k : x \mapsto f(g(x))$.
 - a. Déterminer les images par h des réels $0, 1, 2$ et 3 .
 - b. Déterminer les images par k des réels $0, 1, 2$ et 3 .



2 Activité 13

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

- 1 $f : x \mapsto \cos(\pi x + 1)$



$$2 \quad f : x \mapsto \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x}$$

$$3 \quad f : x \mapsto \sin\left(\frac{x + x^4}{x^2 + 1}\right)$$

3 Activité 14

On considère les fonctions f , g , et h définies par $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f , g et h .
- 2 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$ et $h \circ f$.

Ensemble de définition d'une composée de fonctions :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de définition D_f et D_g .

L'ensemble de définition de la fonction $h = g \circ f$ composée de la fonction g suivie de la fonction f est $D_h = \{x \in D_g \text{ tel que } g(x) \in D_f\}$.

Explication : pour que $f \circ g$ soit définie il faut d'abord que g soit définie, donc il faut que $x \in D_g$ puisque c'est la première fonction que l'on utilise dans la composée, puis il faut que $f(g(x))$ existe donc il faut $g(x) \in D_f$.

VI Limite d'une fonction composée

1 Activité 15

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

- 1 Donner l'expression de $(g \circ f)(x)$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x)$.

Théorème (admis) :

Soit u et v deux fonctions. Soient a , b et c finis ou infinis.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} v \circ u(x) = c$$



2

Activité 16

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a .

1 $f(x) = \tan\left(\frac{x^2}{4}\right), \quad a = \sqrt{\pi}.$

2 $f(x) = \frac{\cos(x^2) - 1}{x^2}, \quad a = 0.$

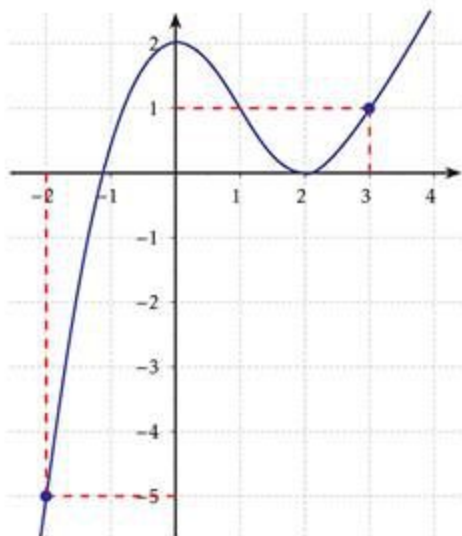
3 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right), \quad a = 2$

3

Activité 17

Dans la figure ci-dessous est représentée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} f\left(\frac{2}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f\left(\frac{x-4}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x - 1)$.



4

Activité 18

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right)$.

VII Continuité d'une fonction composée

Théorème (admis) :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.

- ✓ Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$ alors $v \circ u$ est continue en a .
- ✓ Si u est continue sur un intervalle I , v est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors $v \circ u$ est continue sur I .

1 Activité 19

Étudier dans chaque cas la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1 $f(x) = \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

2 $f(x) = \cos(\sin x)$.

2 Activité 20

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5$ et $g(x) = \frac{3x+6}{x-2}$.

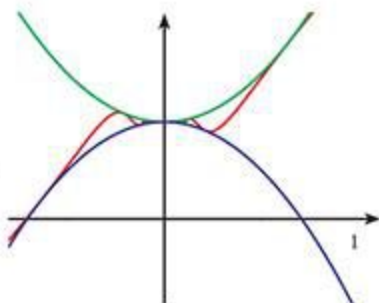
- 1 Déterminer le domaine de définition et continuité de chacune des fonctions f et g .
- 2 Déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ puis exprimer $(g \circ f)(x)$ en fonction de x .

VIII Limite et ordre

1 Activité 21

Soit f , g et h les fonction définie par : $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}$, $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ et $h(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$.

- 1 Montrer que pour tout réel non nul x ,
 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- 2 Dans la figure ci-contre on a représenté les fonctions f , g et h .
 - a. Identifier la courbe de chacune de ces fonctions.
 - b. Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

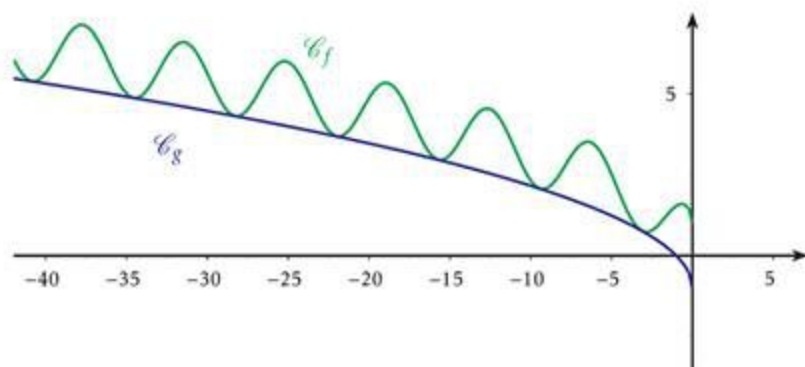


2

Activité 22

Dans la figure ci-dessous on a représenté les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{-x} + \cos x \text{ et } g(x) = \sqrt{-x} - 1$$



- 1 Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 2 Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut-être en $x_0 \in I$.
Soit deux réels ℓ et ℓ' .

✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ et $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ alors $\boxed{\ell \leq \ell'}$.

✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ et $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell}$.

✓ Si pour tout réel x de I ; différent de x_0 ; on a : $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell}$

✓ Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty}$

✓ Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty}$

3

Activité 23

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.

- 1 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $|f(x)| \leq |x|$.
- 2 En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.



Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$
- Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

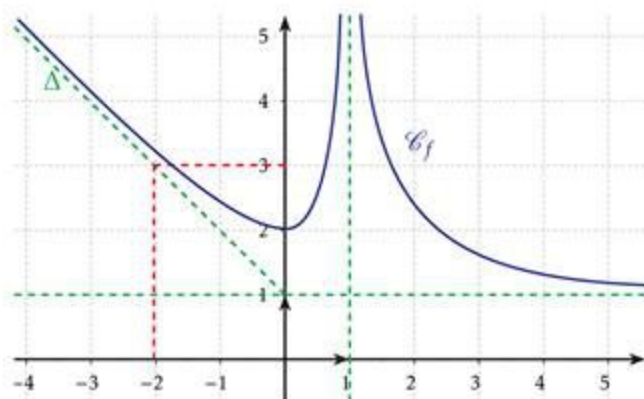
IX

Limites et comportement asymptotique

1

Activité 25

Dans la figure ci-dessous $\mathcal{C}_f$ est la courbe d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On sait que la droite Δ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet deux autres asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$.



- 1 a. Par lecture graphique déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

- b. Dresser le tableau de variation de f .

- 2 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = (f \circ f)(x) & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

- Déterminer $g(2)$, $g(0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.



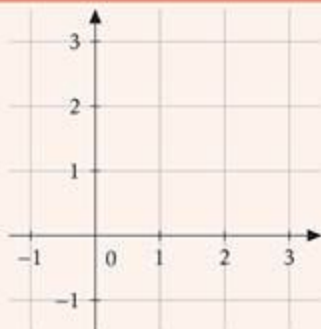
a Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées :

Retenons

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

La droite d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$



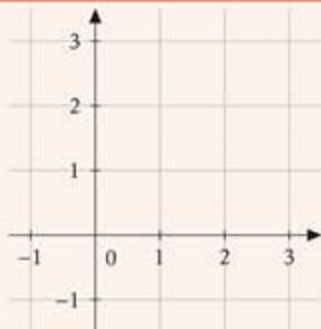
b Asymptote parallèle à l'axe des abscisses :

Retenons

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

La droite d'équation $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$



Remarque : Le signe de $f(x) - b$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

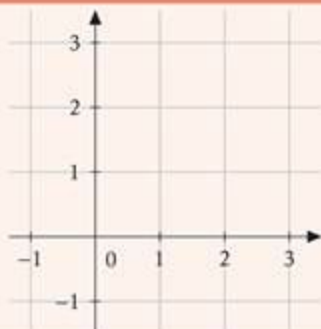
c Asymptote oblique :

Retenons

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

La droite d'équation $y = ax + b$ ($b \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



Remarque : Le signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.



d Etude d'une branche infinie :

Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$.

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans ce qui suit le procédé qu'il faut suivre pour déterminer la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec ($a \neq 0$), alors deux cas peuvent se présenter :

✓ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$ avec ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

✓ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque : Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$, l'étude de la branche infinie se fait de la même façon.

2 Activité 26

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \sqrt{x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la nature de la branche infinies de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3 Activité 27

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.



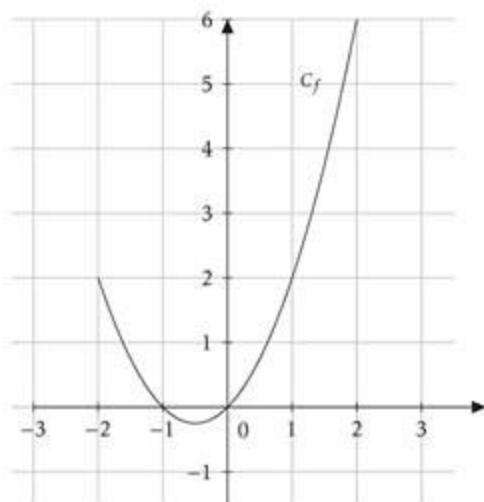
X Image d'un intervalle par une fonction

1 Activité 28

Soit la fonction : $f : x \mapsto x^2 + x$ définie dans $[-2, 2]$.

$\mathcal{C}_f$ étant sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Voir figure ci-contre :

- 1 Justifier que f est continue sur l'intervalle $[-2, 2]$.
- 2 Reproduire le graphique ci-contre et représenter chacun des ensembles de réels suivants : $f([-2, -1[)$, $f([-1; 0])$ et $f([0; 2])$.
- 3
 - a. Montrer que pour tout x de $[0; 2]$, le réel $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, 6]$.
 - b. Montrer que pour tout y de $[0, 6]$ il existe un réel x de $[0, 2]$ tel que $y = f(x)$.
 - c. En déduire $f([0; 2])$.
- 4
 - a. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
 - b. Résoudre algébriquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.



Théorème :

- * L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- * L'image d'un intervalle fermé borné $[a; b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m; M]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[a; b]$.

XI Théorème des valeurs intermédiaires

1 Activité 29

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- 1 Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 2 Résoudre graphiquement $f(x) = 1$ et $f(x) = 4$ dans l'intervalle $[-3; 2]$.
- 3 Soit k un réel compris entre $f(-3)$ et $f(-2)$ déterminer le nombre des solutions dans $[-3; 2]$ de l'équation $f(x) = k$

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I) :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

- * Soient a et b deux réels de I tel que $a < b$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède **au moins une solution** dans l'intervalle $[a, b]$.
- * Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** dans $[a, b]$.

Corollaire 1 :

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $f(a).f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

2 Activité 30

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$.

- 1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $] -2, -1[$.
- 2 Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (on utilise la **dichotomie**)

Corollaire 2 :

Si f une fonction continue **strictement monotone** sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $f(a).f(b) < 0$ alors il existe un unique réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Corollaire 3 :

Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

