

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT :

Exercice1 : Préciser le domaine de validité, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(5 - 2x) = 0$; **b)** $\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = \ln(3x - 5)$; **c)** $2 \ln(x - 2) + \ln(3x + 1) = 2 \ln 2$;
d) $\ln|6 - x| = 1$; **e)** $\ln|x + 1| + \ln|x - 5| = \ln 16$; **f)** $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$;
g) $(\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$; **h)** $6 \ln^2 x + 7 \ln x - 3 = 0$; **i)** $\ln^3 x - 2 \ln^2 x - \ln x + 2 = 0$;
j) $2 \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + \ln\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$;
k) $\log x + \log(3 - x) = \log 5$; **l)** $\log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} + \log_9(4x + 15) = 0$.

Exercice2 : Préciser le domaine de validité, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{x^2+2} = e^{3x}$; **b)** $e^{x^2} = 4$; **c)** $e^{-x-4} - 6 = 0$; **d)** $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; **e)** $e^x - 10e^{-x} = 3$;
f) $3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}$; **g)** $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$; **h)** $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0$;
i) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$; **j)** $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$; **k)** $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$;
l) $3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$; **m)** $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$; **n)** $\frac{e^{2x} - 6}{2 - 2e^{2x}} = 1$.

Exercice3 : Préciser le domaine de validité, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0$; **b)** $\ln(x^2 - 10x + 9) > \ln(3x - 27)$; **c)** $\ln\left(\frac{2x - 3}{5x + 1}\right) \leq 0$;
d) $2(\ln 2x)^2 - 5 \ln 2x - 3 \leq 0$; **e)** $\ln(x + 5) + \ln(x + 4) \leq \ln(x + 13)$; **f)** $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3}$.
g) $e^{x-6} - 1 > 0$; **h)** $e^{x+2} < 8$; **h)** $e^{2x} - e^x - 12 > 0$; **i)** $e^x - 5 - 6e^{-x} \geq 0$.

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes équations suivantes :

a) $\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \ln(x - 2) + 3 \ln(y - 1) = 0 \\ 2 \ln(x - 2) - \ln(y - 1) = 4 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$; **g)** $\begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$;
h) $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$; **i)** $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 5 \\ e^x - e^y = -7 \end{cases}$; **j)** $\begin{cases} \ln(y + 1) - \ln(x + 4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$; **k)** $\begin{cases} 4^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \cdot 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$;
l) $\begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$; **m)** $\begin{cases} e^x e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} e^y = 2 \end{cases}$; **n)** $\begin{cases} xy = e^2 \\ 3 \log_x y + 3 \log_y x = -10 \end{cases}$.

Exercice5 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

- 1) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de degré 1.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- 3) En déduire les solutions des équations suivantes :
 - $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$.
 - $e^{3x} + 2e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

Exercice6 : $\forall x \in \mathbb{R}$; on pose $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

- 1) Montrer qu'il existe 3 réels a , b et c tels que : $Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 2) En déduire la solution dans $\mathbb{R}$ de : $Q(x) \leq 0$.
- 3) Utiliser les résultats précédents pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) \quad 2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 \leq 0$$

$$(I_2) \quad 2\ln x + \ln(2x - 1) \leq \ln(5x + 2).$$

Exercice7 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.
- 2) En déduire la résolution des équations suivantes :

$$a) 9^x - 3^{x+1} - 10 = 0; \quad b) 4^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0; \quad c) (\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0.$$

Exercice8 :

I. Déterminer D_f de f de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de D_f .

$$a) f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}; \quad b) f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right); \quad c) f(x) = (x - 1)e^{\frac{2}{x-1}}; \quad d) f(x) = \ln(e^{x+1} + 2);$$

II. Calculer les intégrales simples suivantes :

$$I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x - 3)dx; \quad I_2 = \int_0^1 e^{2x-1} dx; \quad I_3 = \int_0^1 xe^{x^2-1} dx; \quad I_4 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_5 = \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x}{e^x + 2} dx; \quad I_6 = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx; \quad I_7 = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx; \quad I_8 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx; \quad I_9 = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$$

III. Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_1^e \ln x dx; \quad J_2 = \int_{-1}^0 \ln(x + 2)dx; \quad J_3 = \int_e^{2e} x \ln x^2 dx; \quad J_4 = \int_0^1 (x + 2)e^x dx; \quad J_5 = \int_0^1 xe^{3x-2} dx$$

Exercice9 :

- I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.
- 1) Trouver les réels a et b tels que : $\forall x \neq -1 ; f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.
 - 2) En déduire la valeur de $I = \int_0^3 f(x)dx$.
- II. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$.
- 1) Déterminer le domaine de définition D_g de g .
 - 2) Trouver les réels a et b tels que : $\forall x \in D_g ; g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.
 - 3) En déduire la valeur de $J = \int_0^2 g(x)dx$.
- III. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.
- 1) Trouver les réels a , b et c tels que : $\forall x > 0 ; h(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
 - 2) Calculer $K_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x)dx$
- IV. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
- 1) Calculer I_0 .
 - 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, en utilisant une intégration par parties, trouver I_{n+1} en fonction de I_n .
 - 3) En déduire I_1, I_2, I_3 puis I_4 .

Problème1 : Extrait du Bac 2013 T. S.Exp

- 1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.
 - a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.
 - b) En déduire le signe de $g(x)$.
- 2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$.
 - a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
 - b) Calculer $f'(x)$.
 - c) Montrez que $f'(x)$ a le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau des variations de f .
 - d) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 ; donnez, en justifiant, un encadrement d'amplitude $0,1$ de chacune d'elles.
- 3) On note $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $4cm$.
 - a) Montrez que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.
 - b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) .
 - c) Déterminez les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à (D) .
 - d) Tracer $(\mathcal{C})$ et (D) dans le même repère.

Problème2 : Extrait du Bac 2012 T. S.Exp

- 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$.
 - a) Etudier les variations de la fonction g .
 - b) En déduire les signes de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- 2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$. $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique $2cm$ sur (ox) et $1cm$ sur (oy)).

- a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
 - b) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
 - c) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .
 - d) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$ puis dresser le tableau des variations de f .
 - e) Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ) .
- 3) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$.
- a) Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - b) Calculer en cm^2 l'aire $A(D)$ de la partie D du plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Problème3 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
 - b) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
 - c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 2) Montrer que le point $I(0; 1)$ est centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f .
- 3) Calculer le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point A d'ordonnée 4. En déduire son équation.
- 4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- a) Montrer que g est une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser
 - b) Expliciter l'application réciproque notée g^{-1} de g .
 - c) Etudier le sens de variation de g^{-1} .
 - d) On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} . Calculer le coefficient directeur de la tangente (T') à (Γ) au point B d'abscisse 4. Donner l'équation de (T') .
- 5) Représenter $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère (Γ) en pointillé).
- 6) Calculer l'aire du domaine limité par (Ox) , les droites $x = -2$, $x = 1$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

Problème4 :

Soient la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm.

- 1) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on dire pour la courbe ?
- 2) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour $x \in [0; +\infty[$.
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution m , montrer que $m \in [1; 2]$ et déterminer un encadrement de m à 10^{-1} près par dichotomie.
- 5) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure.
- 6) a) Déterminer les réels a et b tels $\forall x \neq -1; \frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.
- b) En déduire l'aire cm^2 du domaine limité par (T) ; $(\mathcal{C})$ et la droite $y = 1$.

