

I- Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction $f : A \rightarrow B$, toute relation qui à chaque élément de A on associe **au plus un**
 $x \rightarrow f(x)$

élément de B .

NB :

- x est appelé la variable ;
- $f(x)$ est appelé image de x par la fonction f ;
- A est appelé ensemble de départ.
- B est appelé ensemble d'arrivée.

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

Soit f une fonction de A vers B

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f , l'ensemble des éléments de A qui ont une image dans B . On le note Df .

Ainsi :

- Si $f(x) = u(x)$ (fonction polynôme), alors $Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
- Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ (fonction irrationnelle), alors $Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0\}$
- Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ (fonction rationnelle), alors $Df = \{x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0\}$

3) Opération sur les fonctions :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur leur ensemble de définition Df et Dg .

a- **Somme** :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg; (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

b- **Produit** :

$$\forall x \in Df \cap Dg; (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

c- **Quotient** :

$$\forall x \in Df \cap Dg \text{ et } g(x) \neq 0 \text{ on a : } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

II- Limites

1) Propriétés sur les limites :

a) Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

b) Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \ (k \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \ (k \in \mathbb{R})$$

2) Opération sur les limites

a) Somme :

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

f	l	l	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \cdot g$	$l \cdot l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) Quotient:

f	l	l	0	l	∞	∞
g	$l' \neq 0$	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+/- \infty$ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$$-\infty + \infty ; 0 \times \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}.$$

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$

N.B : La propriété sur la limite des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient f et g deux fonctions et $f \circ g$ leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne de I .

Si : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et si $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$

5) Limite des fonctions circulaires :

Si a est un nombre réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f , la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une fonction f , la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

NB :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

7) Théorème des gendarmes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel qu'on ait l'encadrement suivant :

$$A(x) \leq f(x) \leq B(x)$$

$$\text{si} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = l \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = l \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

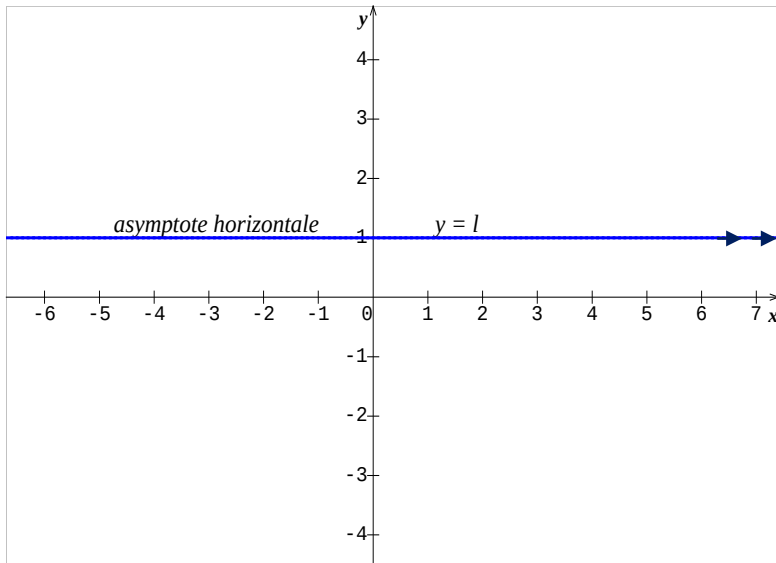
6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :

Soit f une fonction et Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

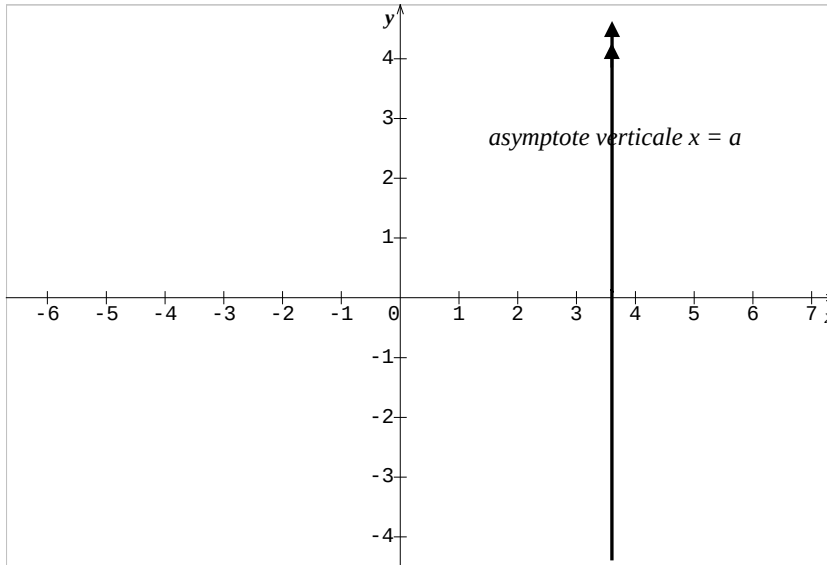
$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote **Horizontale** à courbe Cf



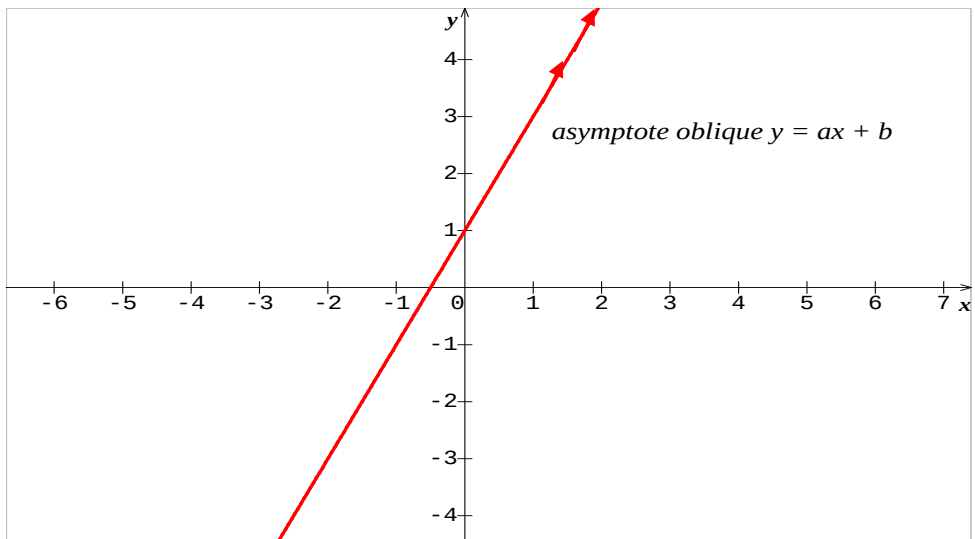
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote **verticale** à la courbe C_f .



Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe C_f .



III- Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un réel appartenant à I .

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si :

$$f(x_0) \text{ Existe et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = l \text{ (l fini).}$$

Remarque : les fonctions non continues en x_0 sont les fonctions non définies en x_0 et les fonctions n'admettant pas de limite en x_0

2) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$. On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

3) Continuité à gauche – continuité à droite

a- Continuité à gauche :

Une fonction f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

b) Continuité à droite :

Une fonction f est continue à droite de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

NB : Une fonction est continue en un point de x_0 si elle est **gauche** et à **droite** de x_0

4) Prolongement par continuité

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ; mais admettant une limite l en ce point. La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point x_0

NB : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0 .

IV- Dérivation :

1) Nombre dérivé en un point x_0 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée **nombre dérivé en x_0 et est noté $f'(x_0)$** .

$$\text{C'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_0)$

2) Lien entre continuité et dérivabilité :

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .

N.B : La réciproque est inexacte.

3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

a) Nombre dérivé à gauche :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_0 .

On la note $f'_g(x_0)$

b) Nombre dérivé à droite :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_0 .

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème :

Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et on a : } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

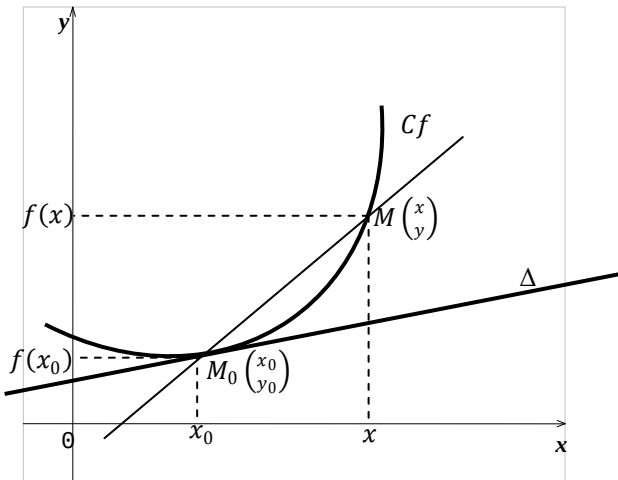
4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point fixé de (C) . $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point courant de (C) ; construisons la droite (M_0M) .

Lorsque x tend vers x_0 , la droite (M_0M) vient occuper une position limite (M_0T) appelée tangente à la courbe (C) au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

$f'(x_0)$ est appelé **pente** ou **coefficient directeur** de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



5) Equation de la tangente au point d'abscisse x_0 :

L'équation de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x_0 est donné par :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

NB :

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi-tangentes en M_0 de coefficients directeur respectifs : les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 en faisant un angle en ce point.

- La courbe (Cf) passe par le point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $f(x_0) = y_0$.
- La courbe (Cf) admet au point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe ox si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
- La courbe (Cf) admet au point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente parallèle à la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ si et seulement si $f'(x_0) = a$.
- La courbe (Cf) admet au point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente de coefficient directeur k si et seulement si $f'(x_0) = k$.

6) Formules sur les dérivées :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction f' qui à tout $x \in I$ fait correspondre le nombre dérivé de f en x que l'on note par $f'(x)$ est appelé fonction dérivée première de f . Ainsi si f ; u et v sont des fonctions dérivables en un point $x \in I$ alors on a le tableau des dérivées suivants :

a- Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées	Domaines
a	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
ax^n	nax^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}} (x \neq 0)$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$
$\cos(ax+b)$	$-\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

b- Opérations sur les dérivées :

$au (a \in \mathbb{R})$	au'
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u} (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v)-(v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{a}{u^n} (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-na'u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$u = (g \circ f)(x)$	$u' = f'(x)og' [f(x)]$

7) Sens de variation d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est constante ou stationnaire

N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Le domaine de définition Df .
- Les limites aux bornes du domaine de définition Df
- Les valeurs pour lesquelles la dérivée f' s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes justifiant les variations de f .

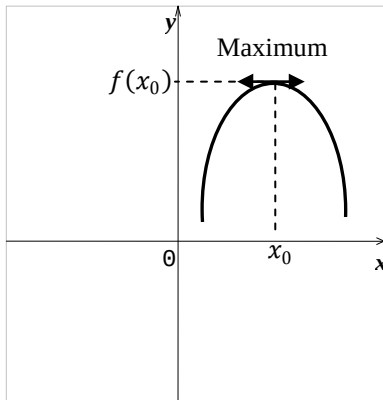
8) Extremum relatif:**Théorème 1**

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a ; b[$ ouvert contenant x_0 . Si $f'(x)$ s'annule en x_0 et en changeant de signe, alors f admet un extremum au point d'abscisse x_0 .

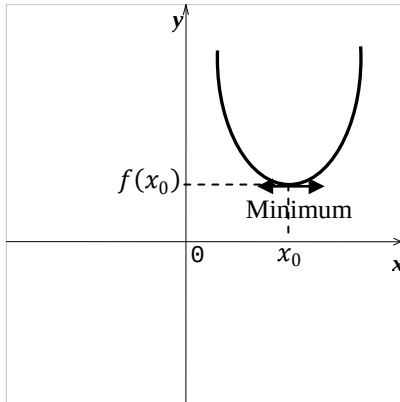
Théorème 2

Si f admet un extremum relatif d'abscisse x_0 , alors $f'(x_0) = 0$ ou encore on dira que f n'est pas dérivable au point d'abscisse x_0 .

Si $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum



Ici : $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif.
On dit que f présente un maximum



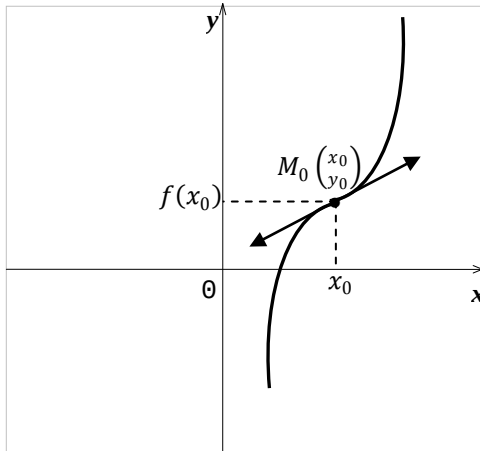
Ici : $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif.
On dit que f présente un minimum

9) Extension du nombre dérivé

a- Point d'inflexion:

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$ ouvert contenant x_0 . Si $f''(x)$ s'annule en x_0 changeant de signe, alors f admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 .

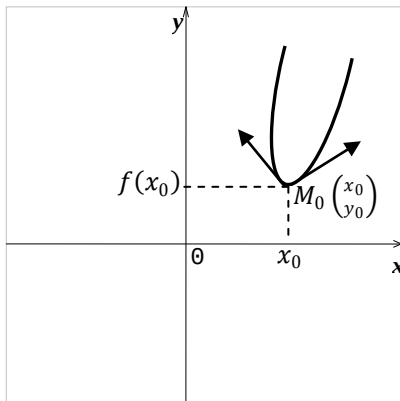


Au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ la courbe cf coupe la tangente.

Par conséquent M_0 est un point d'inflexion pour la courbe cf .

b- Points anguleux:

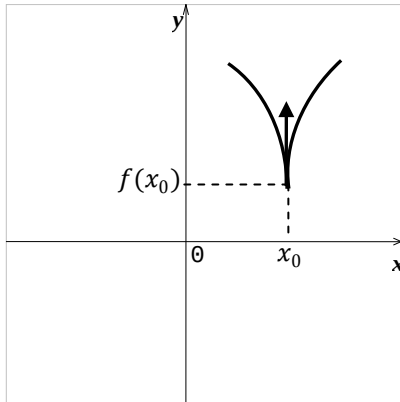
Soit f une fonction admettant au point d'abscisse x_0 un nombre dérivé à gauche $l (l \in \mathbb{R})$ et un nombre dérivé à droite $l' (l' \in \mathbb{R})$. On dit que la courbe (C) de f admet au point d'abscisse x_0 un point anguleux si et seulement si f n'est pas dérivable en x_0 et si $l \neq l'$.



Ici la courbe (C) admet au point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes de coefficient directeurs respectifs l et l' .
Avec $l \neq l'$.

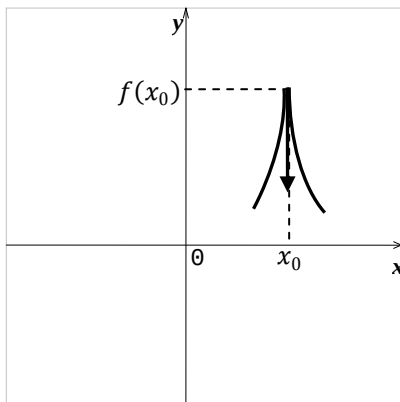
c- Points de rebroussement:

Soit f une fonction admettant au point d'abscisse x_0 un nombre dérivé.

**Point de rebroussement de 1^{ière} espèce**

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

Alors la courbe (c) de f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

**Point de rebroussement de 2^{ième} espèce**

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

Alors la courbe (c) de f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

d- Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I =]a ; b[$.

Première forme :

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ et m et M sont tels que si $x \in [a ; b]$ et $m \leq f'(x) \leq M$ alors on a : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Deuxième forme :

Si k est un réel tel que : $\forall x \in I = [a ; b]$, si $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

V- Etude de fonctions :

1) Parité d'une fonction

a- Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si $\forall x \in Df$ et $-x \in Df$, on a :
 $f(-x) = f(x)$

b- Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si $\forall x \in Df$ et $-x \in Df$, on a :
 $f(-x) = -f(x)$

NB :

- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire car $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire car $\sin(-x) = -\sin x$

2) Périodicité d'une fonction

Une fonction f est dite périodique et de période T si et seulement si $\forall x \in Df$, on a :
 $f(x + T) = f(x)$

NB :

- La fonction $x \mapsto \cos(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto \sin(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{\pi}{|a|}$
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont toutes deux périodiques et de période $T = 2\pi$

3) Courbes symétriques :

a) Axe de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est dite **axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :
 $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a + x)$ est paire ou $f(a + x) = f(a - x)$

b) Centre de symétrie :

Le point $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est dit **centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si
 $f(2a - x) + f(x) = 2b$ ou $f(a + x) - b$ est paire ou $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe $(y' o y)$ comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

Centre de symétrie :

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où : $a; b; c; \gamma; \beta$ sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie de la courbe (C) de f a pour coordonnées : $I \left(\begin{matrix} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{matrix} \right)$

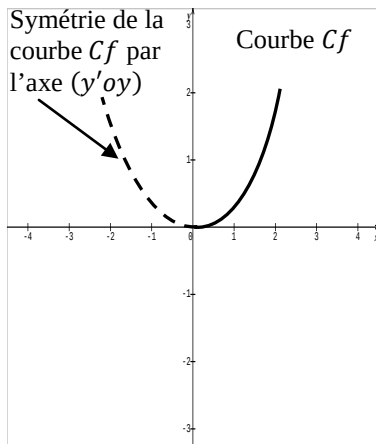
- Axe de symétrie :

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a \neq 0)$

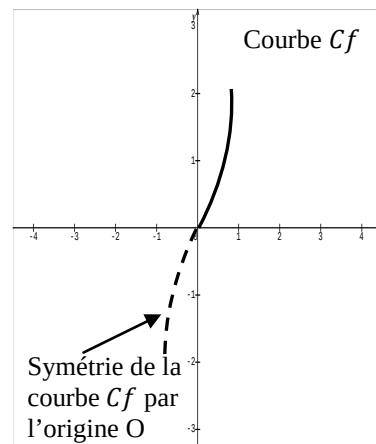
Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie de la courbe (C) de f a pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Représentation



Ici l'axe $(y'oy)$ est axe de symétrie



Ici l'origine O du repère est centre de symétrie

3) Fonction réciproque

Bijection :

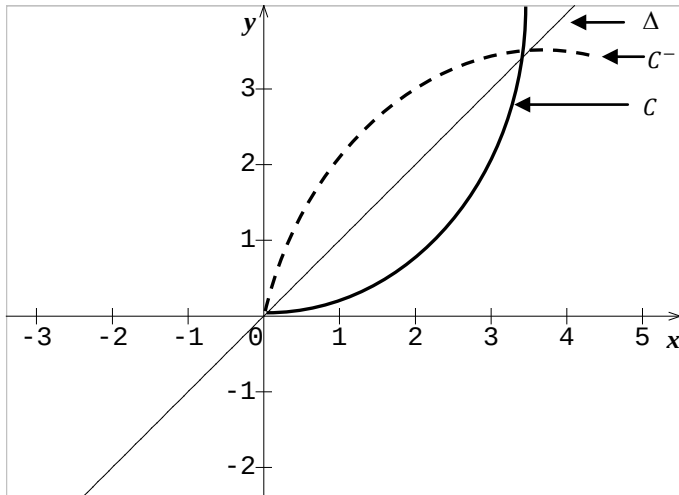
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E .

- En Pratique :

Une application f est bijective si et seulement si $\forall y \in F \exists ! x \in E$ on a : $f(x) = y$

- Graphiquement

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I sur $f(I)$. et admet une **bijection réciproque f^{-1} de $f(I)$ sur I ayant même sens de variation que f**

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$

Si $M(x; y) \in C_f$ alors $M(y; x) \in C_{f^{-1}}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors $y = a$ devient asymptote pour $C_{f^{-1}}$

4) Théorème de valeurs intermédiaires :

L'image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle

Théorème 2:

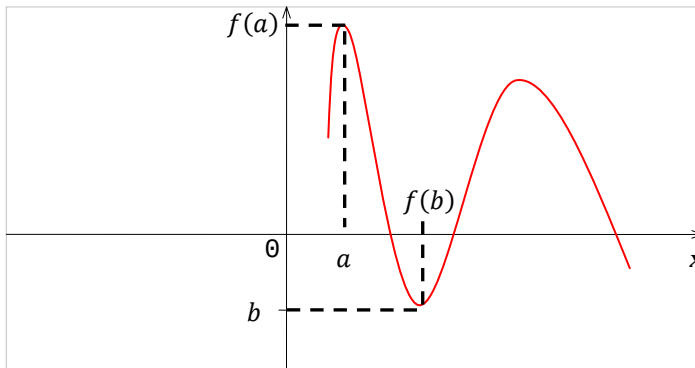
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

1^{ère} forme :

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

2^{ème} forme :

Si f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$

**5) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones**

1^{ère} forme : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$

et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a; b[$ tel que $f(x_0) = 0$

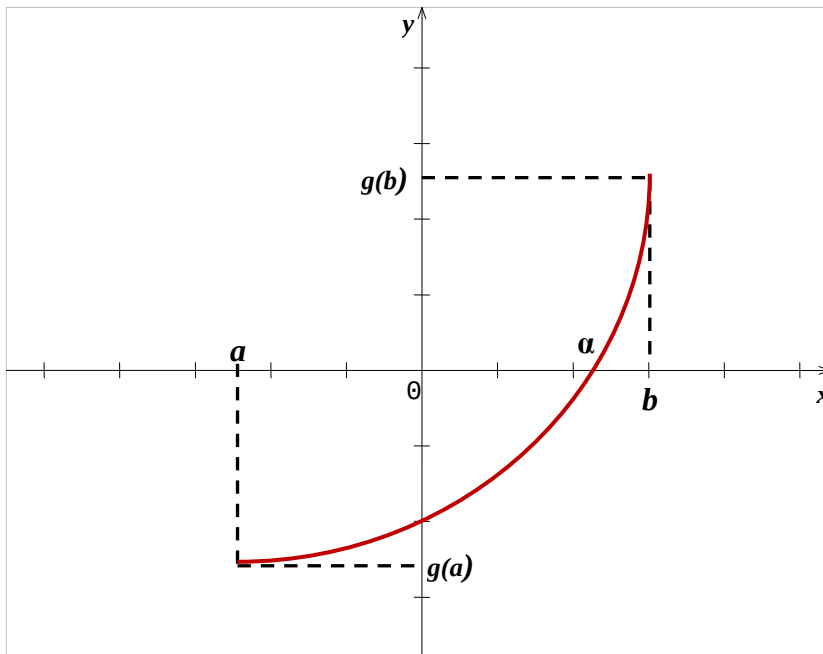
2^{ème} forme : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$ et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a ; b]$

6) Approximation d'une solution α de l'équation $g(x) = 0$:**a- Méthode de dichotomie :**

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$ tel que $g(a) \times g(b) < 0$.

Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

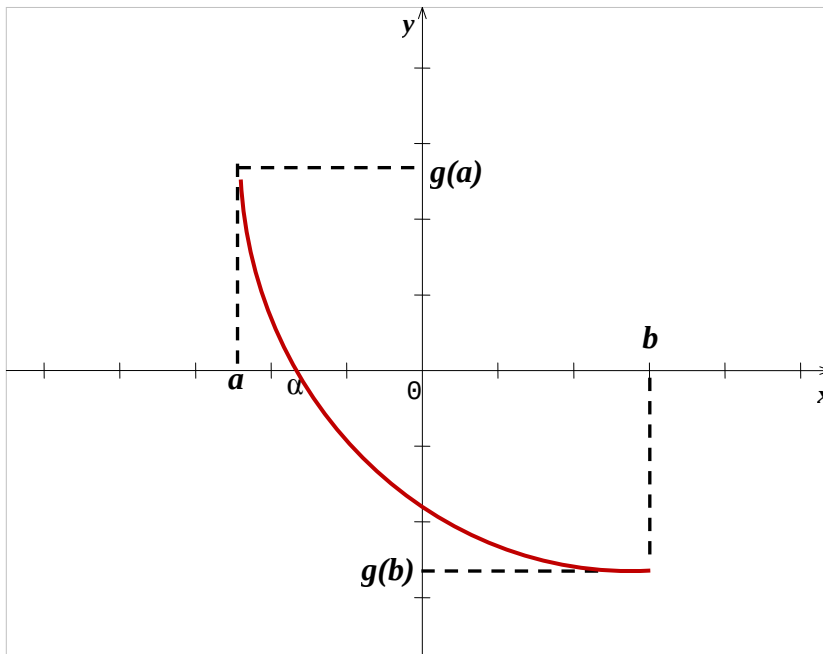
- Si g est strictement croissante sur $[a ; b]$



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [a_n ; b_n]$.
On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.
- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

- Si g est strictement décroissante sur $[a ; b]$



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [a_n ; b_n]$.

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.
-
- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.

b- Méthode des balayages :

C'est une méthode qui consiste à déterminer une approximation de α à partir d'un tableau de valeur. Ainsi la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$		$f(x_n)$

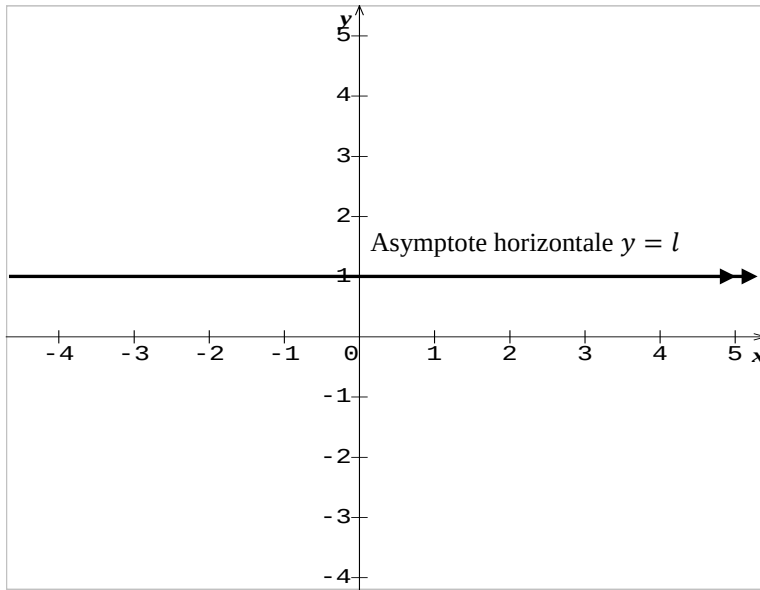
Si par exemple $f(x_5) \times f(x_6) < 0$ alors $\alpha \in [x_5 ; x_6]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

7) Etude des branches infinies :

Notion d'asymptotes :

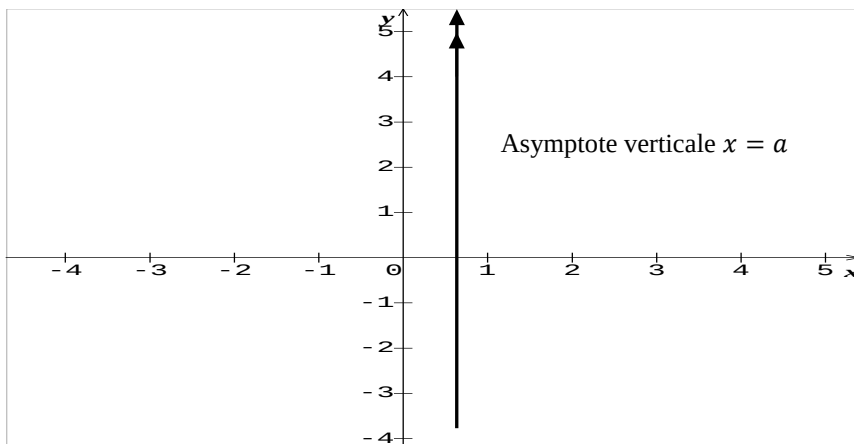
$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote **horizontale** à la courbe C_f .



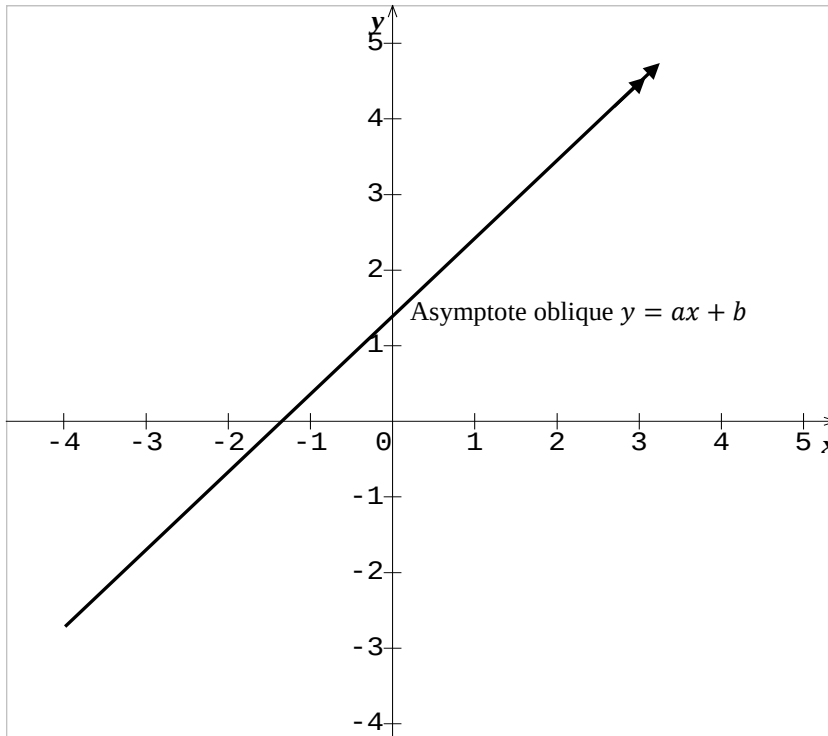
$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote **verticale** à la courbe C_f .



$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe C_f



Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = b$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f .

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = 0 \text{ ou } \infty$$

Alors la droite d'équation $y = ax$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f .

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$$

Alors la courbe (C) de f admet l'axe ($y'Oy$) comme branche parabolique.

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Alors la courbe (C) de f admet l'axe ($x'Ox$) comme branche parabolique.

N.B :

Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \text{quotient} + \frac{\text{Reste}}{\text{Diviseur}} = q(x) + \frac{R}{D(x)}$$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R}{D(x)} = 0$. Alors la droite d'équation $y = q(x)$ est appelée Asymptote oblique.

8) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ).

Pour Détermine la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

9) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (Ox)

Pour Trouve le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (Ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (Oy)

Pour Trouve le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (Oy).

10) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction f et représente graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on adopte le plan suivant :

- Recherche du domaine de définition ou ensemble de définition Df .
- Etude ci-possible de la continuité.
- Etude ci-possible de la parité et de la périodicité afin de réduire le domaine d'étude puis de Complète la courbe de la fonction f par symétrie.
- Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition Df .
- Calcule de la dérivée $f'(x)$ puis étude du signe de $f'(x)$.

- Préciser le sens de variation de la fonction f .
- Consignation des résultats précédents dans un tableau de variation.
- Rechercher ci-possible des points d'intersections éventuels avec les axes du repère.

Exercices

Limites

Limites en un point x_0

1 Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

$$\begin{array}{llll} \text{a- } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}; & \text{d- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ \\ \text{e- } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 4} \end{array}$$

2 Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

$$\begin{array}{llllll} \text{a- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}; & \text{e- } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}; \end{array}$$

Limites à l'infinie

3 Calcule les limites suivantes à l'infinie :

$$\begin{array}{llll} \text{a- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x}; & \text{d- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ \\ \text{e- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + x} - 5}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}; & \text{g- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{2x - 2} \\ \\ \text{h- } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}; & \text{i- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1} \text{ (théorème des gendarmes)} \end{array}$$

Limites et asymptotes

4 Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on Donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

$$\text{a- } f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}; \quad \text{b- } f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}; \quad \text{c- } f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x}; \quad \text{d- } f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$