

1- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée (**ln**), la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle $]0; +\infty[$

2- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow Df =]0; +\infty[$
- Si $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = \ln[u(x)] \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \neq 0\}$

3- Propriétés Remarquables :

$\forall a > 0$ et $\forall b > 0$, on a les propriétés suivantes:

- $P_1 : \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $P_6 : \ln\sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$
- $P_2 : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $P_7 : \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $P_3 : \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ $P_8 : \ln e^a = a$ et $e^{\ln a} = a$
- $P_4 : \ln(a)^n = n \ln a$ $P_9 : \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$
- $P_5 : \ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ $P_{10} : \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $P_{11} : \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$

4- Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \qquad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0 \qquad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \qquad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad (\text{Nombre dérivé de la fonction } \ln \text{ au point } 1)$$

$$x \rightarrow 0 \qquad x \rightarrow 1$$

5- Dérivées logarithmiques:

La dérivée logarithmique d'une fonction u , est la dérivée de $\ln|u|$

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si $f(x) = \ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si $f(x) = \ln(U(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln(U(x) \cdot v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \frac{u'(x)}{u(x)}$

6- Primitives remarquables :

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions :
 $x \rightarrow \ln x$ et $x \rightarrow \ln(ax + b)$. Ainsi on retiendra :

$$\text{Si } f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + k$$

$$\text{- Si } f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax + b) - x + k$$

$$- \text{ Si } f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|u(x)| + k$$

7- Fonction logarithme de base a :

a) Définition :

Soit **a** un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base **a**, la fonction définie par : $\log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

N.B : Lorsque **a** = 10, la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale. Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$M = \frac{1}{\ln 10}$ est appelée le **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi $\log x = M \cdot \ln x$.

b) Propriétés :

$$P_1 : \log(ab) = \log a + \log b$$

$$P_3 : \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$P_2 : \log(a)^n = n \log a$$

$$P_4 : \log(10)^n = n$$

$$P_5 : (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

8- Etude de la fonction $\log_a(x)$:

Soit $f(x) = \log_a(x)$ et de courbe représentative (C_a).

1^{er} Cas : $0 < a < 1$ ($\ln a < 0$)

$$Df =] 0 ; + \infty [$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = + \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow + \infty} f(x) = - \infty.$$

$$x \rightarrow 0 \qquad \qquad \qquad x \rightarrow + \infty$$

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$$x \rightarrow + \infty$$

$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$$(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

$$(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0 \text{ et } f(0) = \ln(0) \text{ qui n'existe pas.}$$

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

2^{ème} Cas : $a > 1$ ($\ln a > 0$)

$$Df =]0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

$$(x'Ox) \text{ est branche parabolique (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0)$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

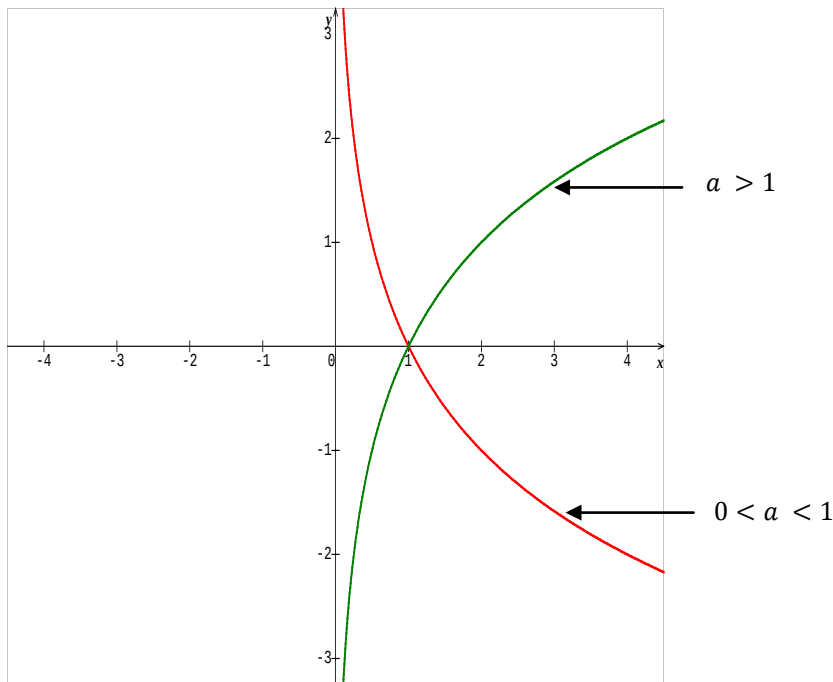
Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

$$(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0 \text{ et } f(0) = \ln(0) \text{ qui n'existe pas.}$$

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

NB : dans tous les cas, $\log_a(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Représentation



Exercices

Propriétés de la fonction logarithme

- 1** 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprime en fonction de $\ln 2$ les réels suivants :

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2} ; B = \ln \left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) + \ln \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) + \ln(2 + \sqrt{2})$$

$$C = \ln 2\sqrt{2} + \ln 4 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2^3} ; D = \ln 64 + \frac{5}{3} \ln 8 - \ln \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

- 2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a- $\ln(2x + 7) = \ln(x - 3)$; **b-** $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7)$