

La fonction logarithme népérien

I. Définition de la fonction logarithme népérien :

Définition :

Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$, associe le réel noté $\ln(x)$ dont l'exponentielle est x .

Remarque :

L'image d'un réel strictement positif x par la fonction $\ln$ se note souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Conséquences :

1. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y , $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

3. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$

Preuve :

(1) et (2) se déduisent directement de la définition.

(3) Pour tout réel x , si $y = \ln(e^x)$ alors d'après (1) $e^x = e^y$ donc $x=y$.

Conséquences :

$\ln 1 = 0$. En effet $e^0 = 1$ et d'après (1) ceci équivaut à $\ln 1 = 0$.

$\ln e = 1$. En effet $e^1 = e$ et d'après (1) ceci équivaut à $\ln e = 1$.

Pour tout réel λ , l'équation $\ln x = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$ d'après (1).

Propriété:

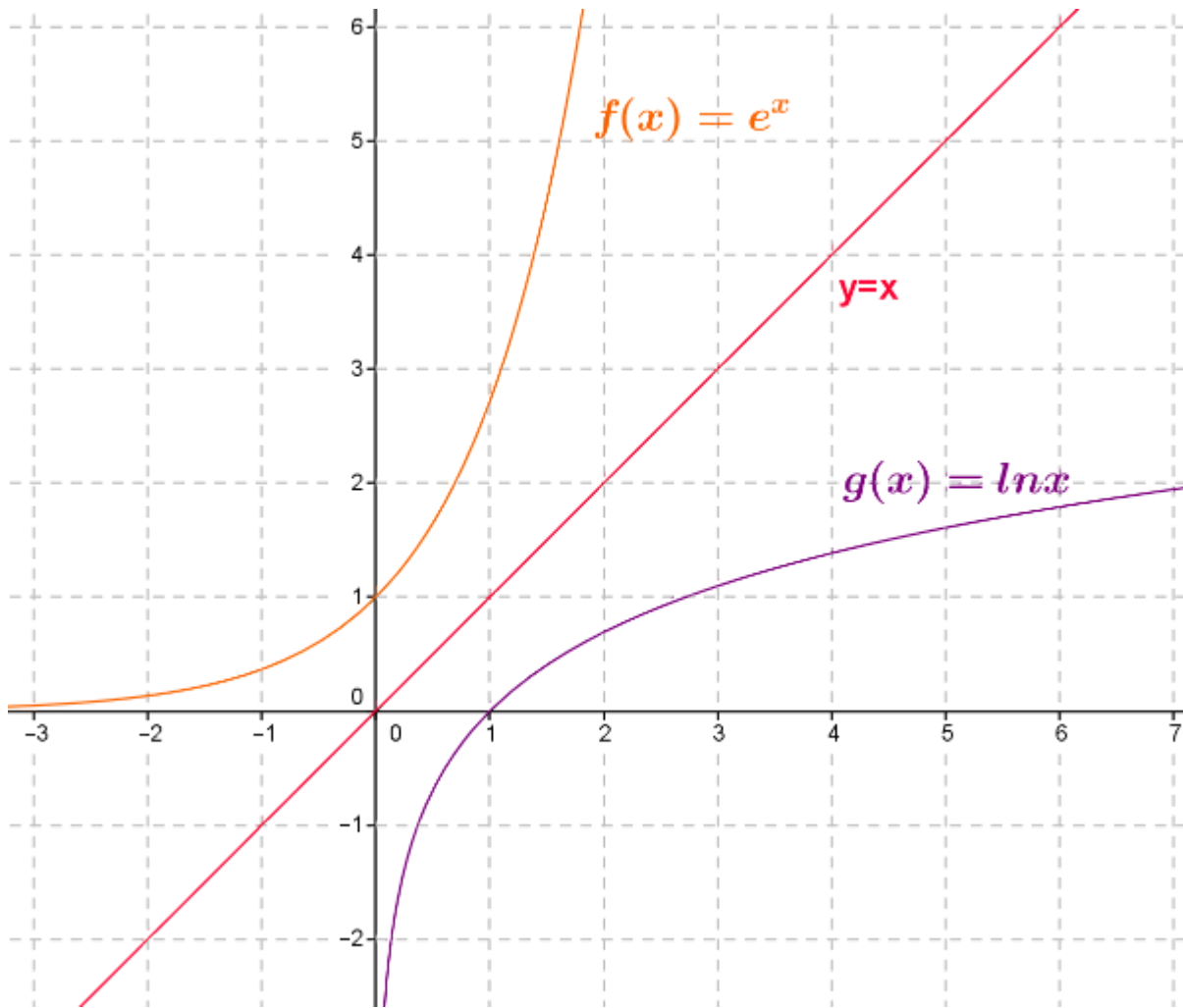
Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithmes népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Preuve :

ON note φ et φ' les courbes représentatives des fonctions exp et ln.

Dire que $M'(x;y)$ appartient à φ' équivaut à dire que $M(y;x)$ appartient à φ .

φ et φ' sont donc symétriques par rapport à la droite $y=x$.



$]0; +\infty[$

II. Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur :

Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

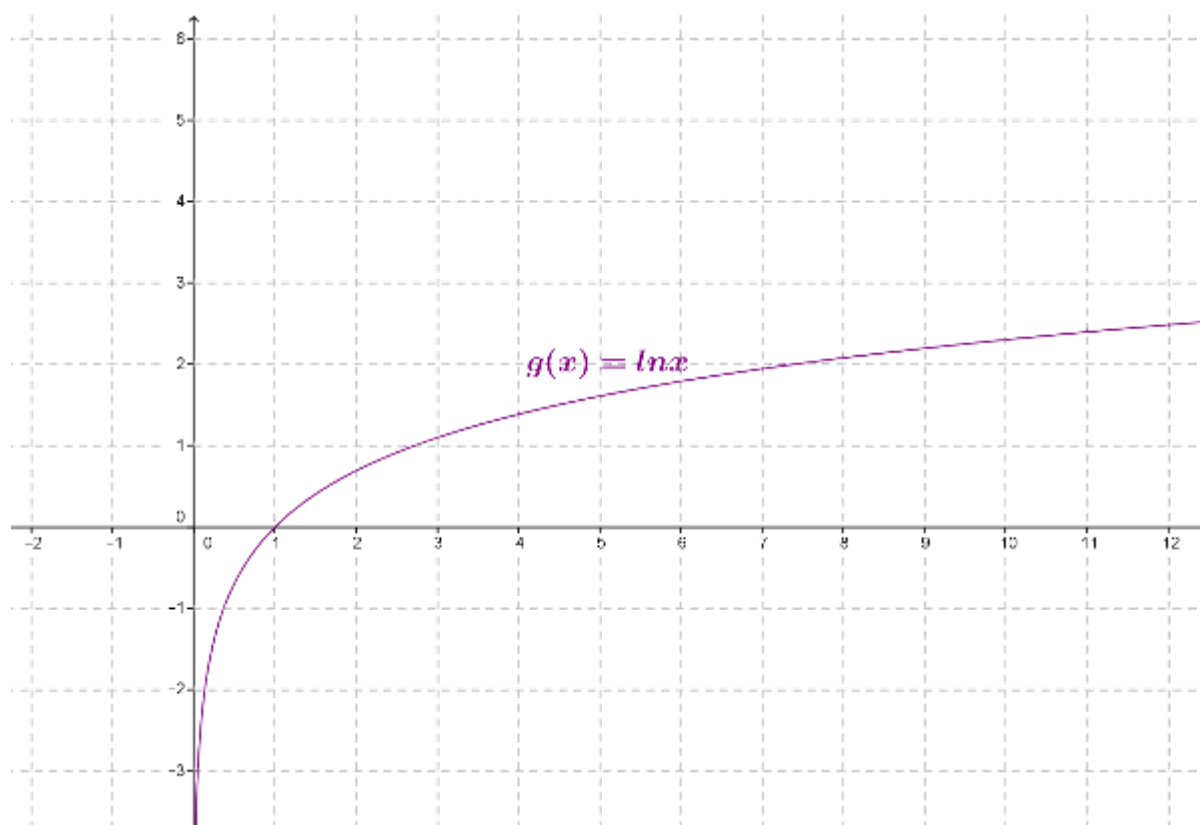
a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, c'est à dire que $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\ln a < \ln b$.

Conséquences :

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$:

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ et $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.
- $\ln a > 0$ équivaut à $a > 1$ et $\ln a < 0$ équivaut à $0 < a < 1$.



III. Les propriétés algébriques :

1. Relation fonctionnelle :

Théorème :

Pour tout réels a et b de $]0; +\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Preuve :

a et b sont deux réels strictement positifs. On note $A = \ln ab$ et $B = \ln a + \ln b$ alors

$$e^A = ab \text{ et } e^B = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$$

donc $e^A = e^B$ d'où $A = B$ puisque la fonction exponentielle est bijective sur $\mathbb{R}$.

2. Logarithme d'un quotient :

Propriété :

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

Preuve :

Pour $a > 0$, on écrit $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1$

c'est à dire $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ d'où $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Propriété :

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Preuve :

Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln(a) - \ln(b)$.

3. Logarithme d'un produit de nombres réels strictement positifs :

Propriété :

Pour tous réels $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de $]0; +\infty[$,

$$\ln(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \dots + \ln a_n$$

Remarque :

Cette formule généralise la relation fonctionnelle établie dans le paragraphe 1. et peut se démontrer par récurrence.

Propriété :

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$ et tout entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln a$.

Démonstration :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence et sur le signe de n .

4. Logarithme d'une racine carrée :

Propriété :

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

Preuve :

Pour $a > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$

ainsi $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$

d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$