

fonction logarithme népérien

Table des matières

1	<u>présentation et propriétés algébriques</u>	2
1.1	activité	2
1.2	corrigé activité	2
1.3	à retenir	4
1.4	exercices	5
1.5	corrigés exercices	6
2	<u>dérivation</u>	8
2.1	activité	8
2.2	à retenir	12
2.3	exercices	12
2.4	corrigés exercices	13
3	<u>équations et Inéquations avec logarithme népérien.</u>	19
3.1	activité	19
3.2	corrigé activité	20
3.3	à retenir	21
3.4	exercices	22
3.5	corrigés exercices	25
4	<u>études de fonctions avec logarithme népérien.</u>	34
4.1	exercices	34
4.2	corrigés exercices	36
5	<u>logarithme d'une fonction : $f = \ln u$</u>	41
5.1	activité	41
5.2	corrigé activité	42
5.3	à retenir	43
5.4	exercices	44
6	<u>évaluations</u>	46
6.1	corrigé devoir maison 1	46
6.2	corrigé devoir maison 2	48
6.3	corrigé devoir maison 3	50
6.4	corrigé devoir maison 4	54
6.5	évaluation 1	56
6.6	corrigé évaluation 1	58
6.7	évaluation 2	60
6.8	corrigé évaluation 2	61
6.9	évaluation 3	63
6.10	corrigé évaluation 3	65
6.11	corrigé évaluation 5	67

1 présentation et propriétés algébriques

1.1 activité

la fonction logarithme népérien notée $\ln$ associe à tout nombre x de son domaine de définition (à préciser) un nombre noté $\ln x$ (le logarithme népérien de x) donné par la calculatrice ou une table de logarithmes. cette fonction est telle que, quels que soient les nombres x et y de son domaine de définition on a :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

cette fonction transforme donc un produit de deux nombres en une somme.

- A. donner si possible et grâce à la calculatrice, les valeurs de $\ln(-2)$, $\ln 0$, $\ln 1$, $\ln 2$, $\ln \frac{1}{2}$, $\ln 1000000$ puis, proposer à priori un domaine de définition pour la fonction $\ln$.
- B. quels que soient les nombres $x > 0$ et $y > 0$ la fonction logarithme est telle que : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
1. prendre $x = 1$ et $y = 1$ et trouver logiquement la valeur de $\ln 1$
 2. prendre $x = y = a$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $\ln(a^2)$
 3. prendre $x = a^2$ et $y = a$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $\ln(a^3)$
 4. généraliser à $\ln(a^n)$ où n est un entier et $a > 0$
 5. prendre $x = y = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $\ln(\sqrt{a})$
 6. prendre $x = a$ et $y = \frac{1}{a}$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $\ln(\frac{1}{a})$
 7. prendre $x = a$ et $y = \frac{1}{b}$ où $a > 0$ et $b > 0$, en déduire une autre écriture de $\ln(\frac{a}{b})$
 8. a t-on $\ln(a + b)$ et $\ln a + \ln b$ égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $b > 0$?
(prendre des valeurs simples de a et b pour voir)
 9. a t-on $\ln(a - b)$ et $\ln a - \ln b$ égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $a > b > 0$?
(prendre des valeurs simples de a et b pour voir)
 10. déterminer à 10^{-3} près à la calculatrice un nombre e tel que $\ln e = 1$

1.2 corrigé activité

- A. à la calculatrice :
- $\ln(-2)$ n'existe pas (pas de logarithme pour un nombre négatif strict)
 - $\ln 0$ n'existe pas (pas de logarithme pour un nombre nul)
 - $\ln 1 = 0$ (annulation en 0)
 - $\ln 2 \simeq 0,69$
 - $\ln \frac{1}{2} \simeq -0,69$
 - $\ln 1000000 \simeq 13,8$ (croissante très lente)
- à priori, le domaine de définition pour la fonction $\ln$ est $]0 ; +\infty[= \mathbb{R}^+$.
- B. quels que soient les nombres $x > 0$ et $y > 0$ la fonction logarithme est telle que : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
1. pour $x = 1$ et $y = 1$ on a :
d'une part : $\ln(1 \times 1) = \ln 1 + \ln 1 = 2\ln 1$
d'autre part : $\ln(1 \times 1) = \ln 1$
donc $2\ln 1 = \ln 1$
donc $2\ln 1 - \ln 1 = 0$
donc $\ln 1 = 0$
 2. pour $x = y = a$ où $a > 0$ on a :
 $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$
 3. avec $x = a^2$ et $y = a$ où $a > 0$, on a :
 $\ln(a^3) = \ln(a^2 \times a) = \ln(a^2) + \ln(a) = 2\ln a + \ln a = 3\ln a$
 4. $\ln(a^n) = n\ln a$ où n est un entier et $a > 0$

5. avec $x = y = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ où $a > 0$ on a :
 $\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$
donc
 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

6. avec $x = a$ et $y = \frac{1}{a}$ où $a > 0$
d'une part : $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(\frac{a}{a}) = \ln 1 = 0$
d'autre part : $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln a + \ln(\frac{1}{a})$
donc : $\ln a + \ln(\frac{1}{a}) = 0$
donc $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$

7. avec $x = a$ et $y = \frac{1}{b}$ où $a > 0$ et $b > 0$:
d'une part : $\ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(\frac{a}{b})$
d'autre part : $\ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln a - \ln b$
donc : $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

8. $\ln(a + b)$ et $\ln a + \ln b$ ne sont pas égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $b > 0$
car pour $a = 1$ et $b = 1$ on a :
 $\ln(a + b) = \ln 2$ d'autre part $\ln a + \ln b = \ln 1 + \ln 1 = 0 + 0 = 0$ et $\ln 2 \neq 0$

9. $\ln(a - b)$ et $\ln a - \ln b$ ne sont pas égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $a > b > 0$
car pour $a = 2$ et $b = 1$ on a :
 $\ln(a - b) = \ln 1 = 0$ d'autre part $\ln a - \ln b = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$ et $\ln 2 \neq 0$

10. à la calculatrice, on a :
 $\ln 2,718 \simeq 0,999$ et $\ln 2,719 \simeq 1,0002$
donc on peut prendre $e \simeq 2,718$ à 10^{-3} près tel que $\ln e = 1$

1.3 à retenir

définition 1 : (propriétés algébriques)

(1) la fonction logarithme népérien associe à tout nombre $x > 0$ (positif strict) le nombre noté $\ln x$ appelé logarithme népérien de x

(2) quels que soient les nombres $a > 0$, $b > 0$ et l'entier naturel n on a :

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

Remarques

(a) il n'y a pas de formule générale pour $\ln(a + b)$ ou $\ln(a - b)$
c'est à dire :

il existe des nombres a et b tels que $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$

en effet

pour $a = 1$ et $b = 1$: $\ln(1 + 1) = \ln 2$ alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$.

il existe des nombres a et b tels que $\ln(a - b) \neq \ln a - \ln b$

en effet

pour $a = 2$ et $b = 1$: $\ln(2 - 1) = \ln 1 = 0$ alors que $\ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \neq 0$.

1.4 exercices

exercice 1 :

simplifier au maximum

(a) $A = \ln(ab) + \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln(a^2) + \ln e$

(b) $B = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a^4) - \ln(a^3) + \ln 1$

(c) $C = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln(a^2 - b^2)$

(d) $D = \ln(e^2) + 2\ln(\sqrt{e}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(\frac{2}{e}\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) - 4$

exercice 2 :

écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de logarithmes de nombres entiers premiers

(a) $A = \ln\left(\frac{3 \times 5^2}{27}\right)$

(b) $B = \ln\left(\frac{25\sqrt{5}}{9}\right)$

(c) $C = \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)$

exercice 3 :

écrire sous la forme d'un seul logarithme

(a) $A = 2\ln 3 - \ln 5$

(b) $B = 3\ln 10 + \ln 0,08 - 5\ln 2$

(c) $C = \frac{1}{2}\ln 4 - 3\ln 2$

(d) $D = 2\ln 5 - 3\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 100$

exercice 4 :

donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

(a) $A(x) = (2x - 1)\ln(x + 1)$

(b) $B(x) = 5x - \ln(4 - x)$

(c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$

(d) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

1.5 corrigés exercices

corrigé exercice 1 :

$$\begin{aligned}A &= \ln(ab) + \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln(a^2) + \ln e \\A &= \ln a + \ln b + \ln a - \ln b - 2\ln a + 1 \\A &= \boxed{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= -\ln a + 4\ln a - 3\ln a + 0 \\B &= \boxed{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln(a^2 - b^2) \\C &= \ln[(a+b)(a-b)] - \ln(a^2 - b^2) \\C &= \ln[a^2 - b^2] - \ln(a^2 - b^2) \\C &= \boxed{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \ln(e^2) + 2\ln(\sqrt{e}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(\frac{2}{e}\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) - 4 \\D &= 2\ln e + 2 \times \frac{1}{2}\ln e - (-\ln e) + \ln 2 - \ln e + \ln e - \ln 2 - 4 \\D &= 2 \times 1 + 1 + 1 - 4 = \boxed{0}\end{aligned}$$

corrigé exercice 2 :

écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de logarithmes de nombre entiers premiers

$$(a) \ln\left(\frac{3 \times 5^2}{27}\right) = \ln(3 \times 5^2) - \ln 27 = \ln 3 + \ln(5^2) - \ln(3^3) = \ln 3 + 2\ln 5 - 3\ln 3 = -2\ln 3 + 2\ln 5$$

$$\begin{aligned}(b) \ln\left(\frac{25\sqrt{5}}{9}\right) &= \ln(25\sqrt{5}) - \ln 9 = \ln 25 + \ln(\sqrt{5}) - \ln(3^2) = \ln(5^2) + \frac{1}{2}\ln 5 - 2\ln 3 = 2\ln 5 + 0,5\ln 5 - 2\ln 3 \\&= 2,5\ln 5 - 2\ln 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right) &= \ln(2\sqrt{3}) - \ln(3\sqrt{2}) = \ln 2 + \ln(\sqrt{3}) - (\ln 3 + \ln(\sqrt{2})) \\&= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 = 0,5\ln 2 - 0,5\ln 3\end{aligned}$$

corrigé exercice 3 :

écrire sous la forme d'un seul logarithme

$$(a) 2\ln 3 - \ln 5 = \ln(3^2) - \ln 5 = \ln 9 - \ln 5 = \ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}(b) 3\ln 10 + \ln 0,08 - 5\ln 2 &= \ln(10^3) + \ln 0,08 - \ln(2^5) = \ln 1000 + \ln 0,08 - \ln 32 = \ln(1000 \times 0,08) - \ln 32 \\&= \ln 80 - \ln 32 = \ln\left(\frac{80}{32}\right) = \ln\left(\frac{40}{16}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)\end{aligned}$$

$$(c) \frac{1}{2}\ln 4 - 3\ln 2 = \ln(4^{\frac{1}{2}}) - \ln(2^3) = \ln(\sqrt{4}) - \ln 8 = \ln 2 - \ln 8 = \ln\left(\frac{2}{8}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}(d) 2\ln 5 - 3\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 100 &= \ln(5^2) - \ln(2^3) + \ln(\sqrt{100}) = \ln 25 - \ln 8 + \ln 10 = \ln\left(\frac{25}{8}\right) + \ln 10 \\&= \ln\left(\frac{25}{8} \times 10\right) = \ln\left(\frac{250}{8}\right) = \ln\left(\frac{125}{4}\right)\end{aligned}$$

corrigé exercice 4 :

donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

(a) $A(x) = (2x - 1)\ln(x + 1)$

$\ln(x + 1)$ n'existe que si $x + 1 > 0$

or : $x + 1 > 0 \iff x > -1$

donc : $D_A =]-1 ; +\infty[$

(b) $B(x) = 5x - \ln(4 - x)$

$\ln(4 - x)$ n'existe que si $4 - x > 0$

or : $4 - x > 0 \iff 4 > x$

donc : $D_B =]-\infty ; 4[$

(c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$

$\ln(x^2 + 2x)$ n'existe que si $x^2 + 2x > 0$

il suffit d'étudier le signe de $x^2 + 2x$ qui est un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $c = 0$

• annulations : (Δ non nécessaire, on met x en facteur)

$x^2 + 2x = 0 \iff x(x + 2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -2$

• signe :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^2 + 2x$		$+$	0	$-$

conclusion : $D_f =]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$

(d) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ n'existe que si $\frac{x+2}{x} > 0$

il suffit d'étudier le signe de $\frac{x+2}{x}$ qui est une fraction rationnelle

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$\frac{x+2}{x}$	$+$	0	$-$	$ $	$+$

annulations

$x = 0$

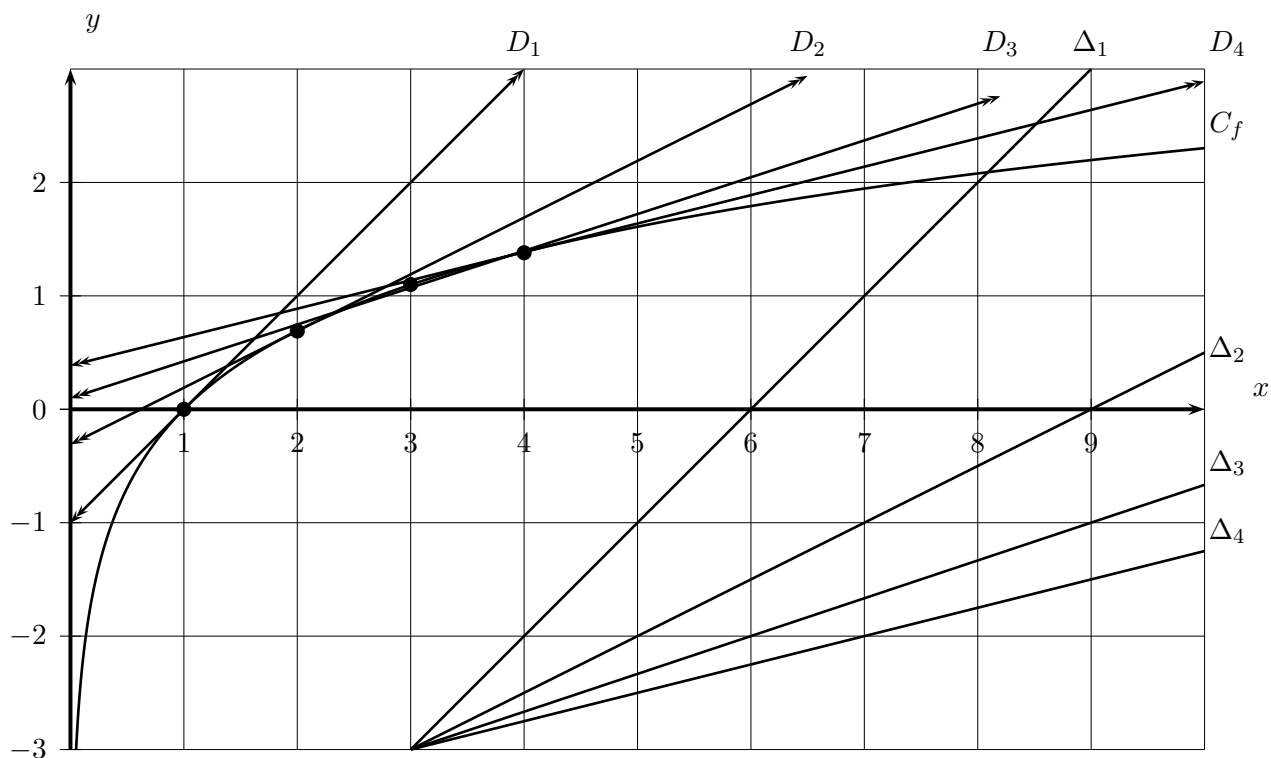
$x + 2 = 0 \iff x = -2$

conclusion : $D_f =]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$

2 dérivation

2.1 activité

- A. voici une partie de la courbe de la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$.
sont aussi représentées les droites tangentes D_1 en $x = 1$, D_2 en $x = 2$, D_3 en $x = 3$ et D_4 en $x = 4$.
de même que les droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 et Δ_4 respectivement parallèles à D_1 , D_2 , D_3 et D_4 .



1. rappeler ce que représente graphiquement le nombre $f'(1)$ et déterminer sa valeur en détaillant le calcul.
2. compléter le tableau de valeurs suivant grâce au graphique.

x	1	2	3	4
$f'(x)$				

calculs :

3. conjecturer alors une formule acceptable : $f'(x) = (\ln x)' = \dots$

B. Etude des variations

1. A partir du signe de la dérivée, déterminer le sens de variation de f pour $x > 0$

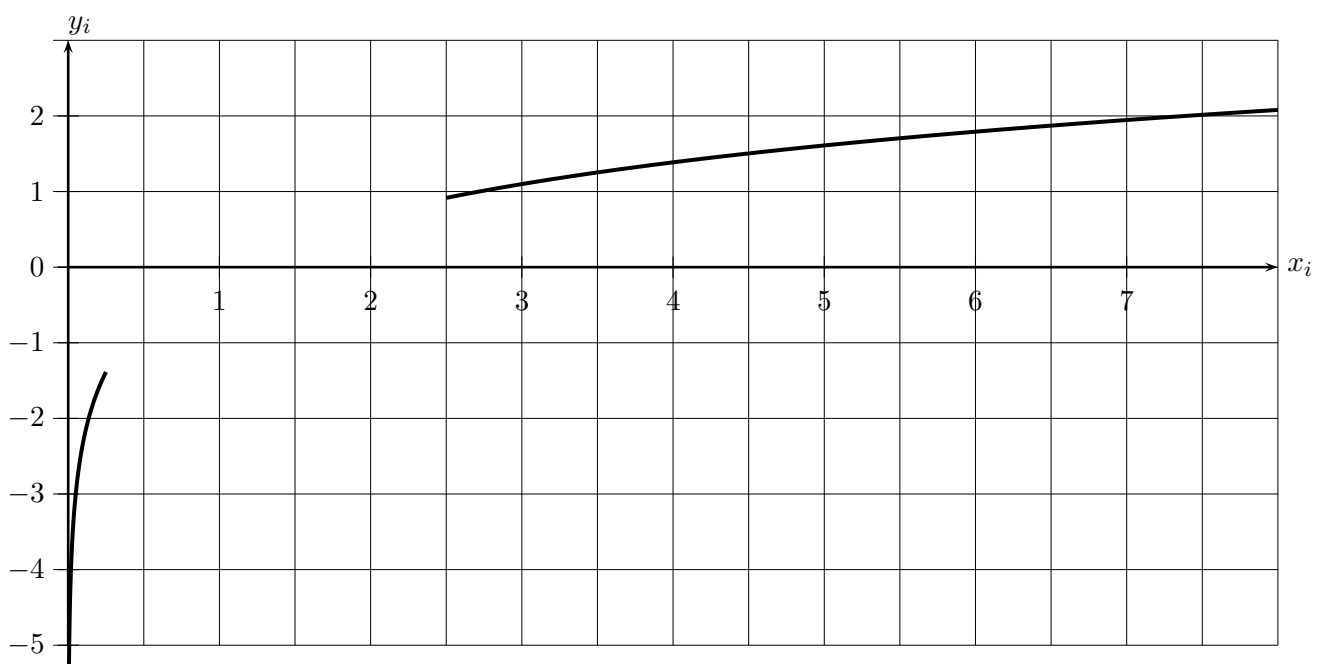
2. Donner un tableau de variation de f pour $x > 0$ signe de $f'(x)$ compris.

C. représentation graphique

1. Compléter le tableau de valeurs à 0,1 près

x	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8
$\ln x$				0,4		1,1		1,6	1,8	1,9	2,1

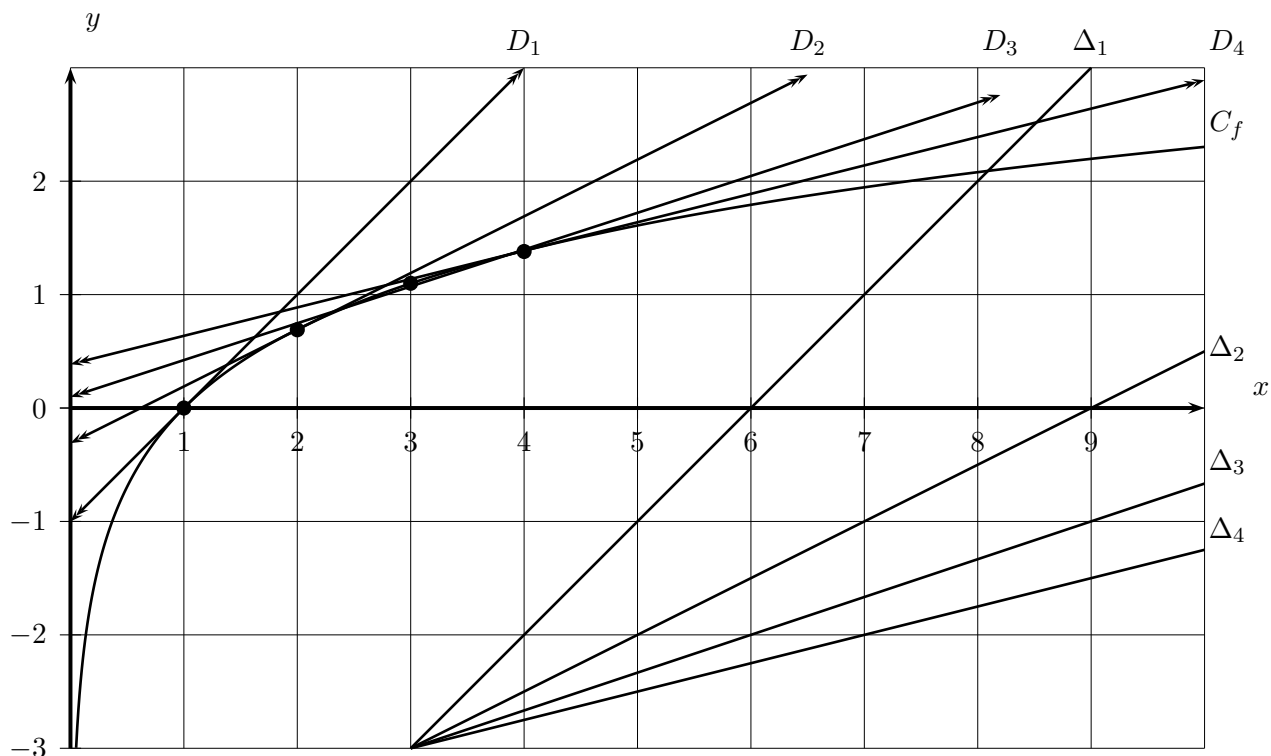
2. Compléter le graphique



3. déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f en $x = 1$ et construire cette tangente.

corrigé activité

- A. voici une partie de la courbe de la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$.
sont aussi représentées les droites tangentes D_1 en $x = 1$, D_2 en $x = 2$, D_3 en $x = 3$ et D_4 en $x = 4$.
de même que les droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 et Δ_4 respectivement parallèles à D_1 , D_2 , D_3 et D_4 .



1. rappeler ce que représente graphiquement le nombre $f'(1)$ et déterminer sa valeur en détaillant le calcul.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la droite D_1 , tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$.
pour le déterminer, il suffit de calculer le coefficient directeur de la droite D_1 donc de Δ_1 car $D_1 \parallel \Delta_1$.

avec les points $A(3; -3)$ et $B(9; 3)$, on a : $a = f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-3)}{9 - 3} = 1$

2. compléter le tableau de valeurs suivant grâce au graphique.

x	1	2	3	4
$f'(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

calculs :

pour $x = 2$, sur Δ_2 , avec les points $A(3; -3)$ et $C(9; 0)$, on a : $a = f'(2) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - (-3)}{9 - 3} = \frac{1}{2}$

pour $x = 3$, sur Δ_3 , avec les points $A(3; -3)$ et $D(9; -1)$, on a : $a = f'(3) = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-1 - (-3)}{9 - 3} = \frac{1}{3}$

pour $x = 4$, sur Δ_4 , avec les points $A(3; -3)$ et $E(7; -2)$, on a : $a = f'(4) = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{-2 - (-3)}{7 - 3} = \frac{1}{4}$

3. conjecturer alors une formule acceptable : $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

B. Etude des variations

1. A partir du signe de la dérivée, déterminer le sens de variation de f pour $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donc $f'(x) > 0$ pour $x > 0$. ($1 > 0$ et $x > 0$ donc $\frac{1}{x} > 0$)
donc f est strictement croissante pour $x > 0$

Remarque : pour l'annulation, $\frac{1}{x} = 0 \iff 1 = 0$ ce qui est absurde donc $f'(x) = 0$ n'a pas de solution et f' ne s'annule pas.

2. Donner un tableau de variation de f pour $x > 0$ signe de $f'(x)$ compris.

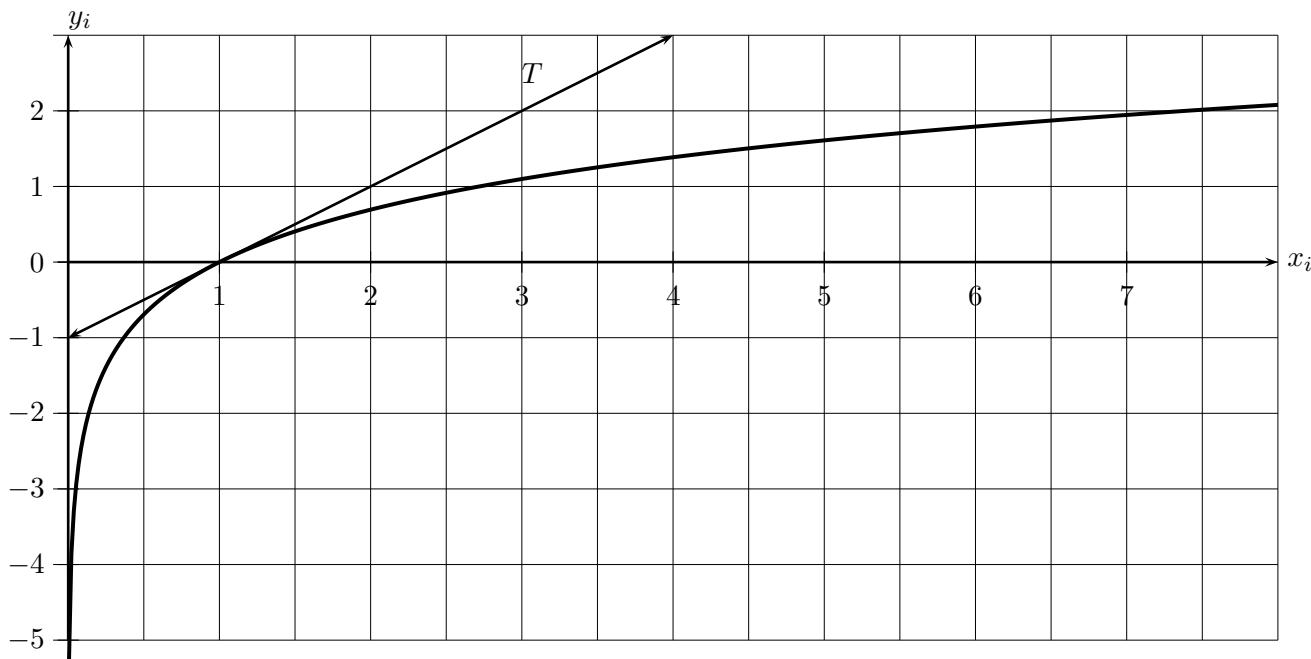
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$\nearrow$

C. représentation graphique

1. Compléter le tableau de valeurs à 0,1 près

x	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8
$\ln x$	-1,4	-0,7	0	0,4	0,7	1,1	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1

2. Compléter le graphique



3. déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f en $x = 1$ et construire cette tangente.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

avec

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

et

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

donc

$$y = 1(x - 1) + 0$$

donc

$$y = x - 1$$

2.2 à retenir

propriété 1 : (dérivée)

- (1) si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$

(2) si $f = \ln u$ où u est une fonction dérivable alors $f' = \frac{u'}{u}$ pour $u > 0$

2.3 exercices

exercice 5 :

calculer la dérivée dans chaque cas.

(a) $f(x) = 3x + 1 + \ln x$

(c) $f(x) = -x + 2 + 3\ln x$

(b) $g(x) = 2x^2 - 1 - 4\ln x$

(d) $h(x) = 6x^3 - 10x^2 + 20x - 16 + \frac{1}{x} - 6\ln x$

exercice 6 :

calculer la dérivée dans chaque cas

(a) $f(x) = 2x(1 - \ln x)$

(c) $f(x) = x^2(3 - \ln x)$

(b) $g(x) = \frac{x - \ln x}{x}$

(d) $g(x) = \frac{\ln x}{2x + 1}$

(e) $g(x) = -x^2 + 2(\ln x)^2$

exercice 7 :

soit : $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$ pour $x > 0$

(a) calculer $f'(x)$

(b) en déduire les variations de f

(c) déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$

exercice 8 :

$f(x) = -x + 4 + 2\ln x$ pour $x > 0$

(a) calculer $f'(x)$

(b) en déduire les variations de f

(c) déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$

exercice 9 :

$f(x) = 2x^2 + 1 - 9\ln x$ pour $x > 0$

(a) calculer $f'(x)$

(b) en déduire les variations de f

(c) déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$

2.4 corrigés exercices

corrigé exercice 5 :

calculer la dérivée dans chaque cas.

(a) $f(x) = 3x + 1 + \ln x$

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x + 1}{x}$$

(b) $g(x) = 2x^2 - 1 - 4\ln x$

$$g'(x) = 4x - 4 \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 4}{x}$$

(c) $f(x) = -x + 2 + 3\ln x$

$$f'(x) = -1 + 3 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-x + 3}{x}$$

(d) $h(x) = 6x^3 - 10x^2 + 20x - 16 + \frac{1}{x} - 6\ln x$

$$h'(x) = 18x^2 - 20x + 20 + \frac{-1}{x^2} - 6 \times \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = 18x^2 - 20x + 20 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}$$

$$h'(x) = \frac{18x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 1 - 6x}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{18x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 6x - 1}{x^2}$$

corrigé exercice 6 :

1. $f(x) = 2x(1 - \ln x)$

$$f = uv \text{ donc } f' = u'v + uv'$$

avec

$$u = 2x \implies u' = 2$$

et

$$v = 1 - \ln x \implies v' = -\frac{1}{x}$$

donc

$$f'(x) = 2(1 - \ln x) + 2x \times \frac{-1}{x}$$

$$f'(x) = 2(1 - \ln x) - 2$$

$$f'(x) = 2 - 2\ln x - 2$$

$$f'(x) = -2\ln x$$

2. $g(x) = \frac{x - \ln x}{x}$

$$g = \frac{u}{v} \text{ donc } g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$$u = x - \ln x \implies u' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

et

$$v = x \implies v' = 1$$

donc

$$g'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} \times x - (x - \ln x) \times 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{x - 1 - x + \ln x}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-1 + \ln x}{x^2}$$

3. $f(x) = x^2(3 - \ln x)$

$$f = uv \text{ donc } f' = u'v + uv'$$

avec

$$u = x^2 \implies u' = 2x$$

et

$$v = 3 - \ln x \implies v' = -\frac{1}{x}$$

donc

$$f'(x) = 2x(3 - \ln x) + x^2 \times \frac{-1}{x}$$

$$f'(x) = 2x(3 - \ln x) - x$$

$$f'(x) = 6x - 2x\ln x - x$$

$$f'(x) = 5x - 2x\ln x$$

$$f'(x) = x(5 - 2\ln x)$$

$$4. \ g(x) = \frac{\ln x}{2x+1}$$

$$g = \frac{u}{v} \text{ donc } g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$$u = \ln x \implies u' = \frac{1}{x}$$

et

$$v = 2x+1 \implies v' = 2$$

donc

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (2x+1) - (\ln x) \times 2}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2 + \frac{1}{x} - 2\ln x}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x+1 - 2x\ln x}{x(2x+1)^2}$$

$$5. \ g(x) = -x^2 + 2(\ln x)^2$$

$$g(x) = -x^2 + 2(u^2)$$

$$g'(x) = -2x + 2uu' \text{ avec } u = \ln x \text{ donc } u' = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = -2x + 2 \times \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 + 2\ln x}{x}$$

corrigé exercice 7 :

$$f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \text{ pour } x > 0$$

$$(a) \quad f'(x) = 2x - 0 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

(b) en déduire les variations de f

- annulation de $f'(x) : \frac{2x^2 - 2}{x} = 0 \iff 2x^2 - 2 = 0$

de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $b = 0$ donc Δ non nécessaire, on isole x .

$$2x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = \frac{2}{2} = 1 \iff x = -\sqrt{1} = -1 \text{ ou } x = \sqrt{1} = 1 \text{ donc } f'(x) \text{ s'annule en } x = 1 \text{ car } -1 \text{ est hors domaine de définition.}$$

- signe de $f'(x)$ pour $x > 0$

$$\frac{2x^2 - 2}{x} \text{ est du signe de } 2x^2 - 2 \text{ car } x > 0$$

on utilise la règle du signe de $ax^2 + bx + c$

x	0	1	$+\infty$
$2x^2 - 2$	-	0	+

- variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		↘ 0 ↗	

$$f(1) = 1^2 - 1 - 2\ln 1 = 0$$

(c) déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

avec

$$f(1) = 1^2 - 1 - 2\ln 1 = 0$$

et

$$f'(1) = \frac{2 \times 1^2 - 2}{1} = 0$$

donc

$$y = 0(x - 1) + 0$$

donc

$$y = 0$$

corrigé exercice 8 :

$$f(x) = -x + 4 + 2\ln x \text{ pour } x > 0$$

$$(a) \quad f'(x) = -1 + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{-x + 2}{x}$$

(b) en déduire les variations de f

- annulation de $f'(x) : \frac{-x + 2}{x} = 0 \iff -x + 2 = 0 \iff x = 2$

- signe de $f'(x) = \frac{-x + 2}{x}$ pour $x > 0$

on utilise un tableau de signes :

x	0	2	$+\infty$
$-x + 2$		+	-
x	0	+	+
$f'(x)$		+	-

annulations
 $-x + 2 = 0 \iff x = 2$
 $x = 0$

- variations de f pour $x > 0$:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		3,4	
		↗	↘

$$f(2) = -2 + 4 + 2\ln 2 \simeq 3,4$$

(c) déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

avec

$$f(1) = -1 + 4 + 2\ln 1 = 3$$

et

$$f'(1) = \frac{-1 + 2}{1} = 1$$

donc

$$y = 1(x - 1) + 3$$

donc

$$y = x + 2$$

corrigé exercice 9 :

$$f(x) = 2x^2 + 1 - 9\ln x \text{ pour } x > 0$$

(a) $f'(x) = 4x - 9 \times \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 9}{x}$

(b) en déduire les variations de f

• annulation de $f'(x) : \frac{4x^2 - 9}{x} = 0 \iff 4x^2 - 9 = 0$

de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $b = 0$ donc Δ non nécessaire, on isole x .

$$4x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ ou } x = 1,5$$

donc $f'(x)$ s'annule en $x = 1,5$ car $-1,5$ est hors domaine de définition.

• signe de $f'(x)$ pour $x > 0$

$\frac{4x^2 - 9}{x}$ est du signe de $4x^2 - 9$ car $x > 0$

on utilise la règle du signe de $ax^2 + bx + c$

x	0	1,5	$+\infty$
$4x^2 - 9$	-	0	+

• variations de f :

x	0	1,5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		$\simeq 1,85$	

$$f(1,5) = 2 \times 1,5^2 + 1 - 9\ln 1,5 \simeq 1,85$$

(c) déterminer l'équation de la tangente en $x = 1,5$

$$y = f'(1,5)(x - 1,5) + f(1,5)$$

avec

$$f(1,5) = 5,5 - 9\ln 1,5 \simeq 1,85$$

et

$$f'(1,5) = \frac{4 \times 1,5^2 - 9}{1,5} = 0$$

donc

$$y = 0(x - 1) + 5,5 - 9\ln 1,5$$

donc

$$y = 5,5 - 9\ln 1,5 \simeq 1,85$$

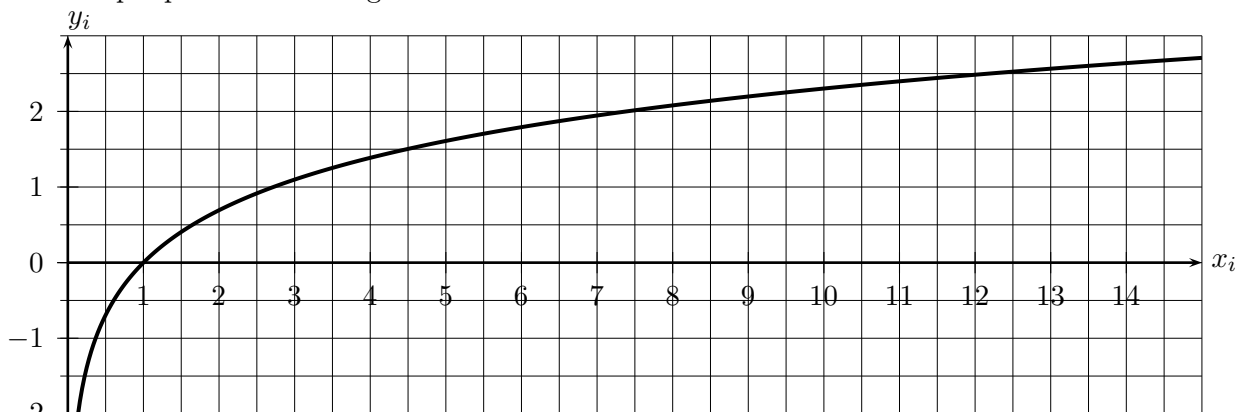
3 équations et Inéquations avec logarithme népérien.

3.1 activité

A. Equations de la forme : $\ln x = a$

1. Résoudre l'équation $\ln x = 2$:

a. Graphiquement à 10^{-1} grâce à la courbe donnée ci dessous.



b. Numériquement à 10^{-2} grâce au tableau de valeurs de la calculatrice.

x		
$\ln x$		

c. Algébriquement grâce aux propriétés suivantes ($a > 0$, $b > 0$) : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \ln e = 1 \\ \bullet \ln a^b = b \ln a \\ \bullet \ln a = \ln b \iff a = b \end{array} \right.$
(Aide : $2 = 2 \times 1$), résolution en valeur exacte puis à 10^{-4} près.

2. Soit $a > 0$ un nombre réel positif strict, montrer que : $\ln x = a \iff x = e^a$

3. En déduire une résolution algébrique de chacune des équations suivantes puis vérifier graphiquement.

- $\ln x = 2,5$
- $\ln x = -2$
- $2\ln x + 2 = 0$
- $10(\ln x + 1) - 10 = 0$

B. Inéquations de la forme $\ln x > a$

- Déduire des variations de la fonction $\ln$ et du 1.c. l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x > 2$
- Grâce à la propriété : ($a > 0$, $b > 0$) : $a > b \iff \ln a > \ln b$, montrer que : $\ln x > a \iff x > e^a$
- En déduire les ensembles de solutions des inéquations suivantes. (*penser au domaine de définition*)
 - $\ln x > 10$
 - $\ln x < 10$
 - $\ln x < -10$
 - $\ln x > 0$

C. Equations de la forme $e^x = a$

- Quel que soit le nombre réel $x \in \mathbb{R}$ on a : $\ln(e^x) = \dots = \dots = \dots$
- en déduire l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes
 - $e^x = 2$
 - $e^x + 5 = 5$
 - $10 - 2e^x = 14$
 - $e^x > 3$
 - $e^x < 3$
 - $e^x < -3$

3.2 corrigé activité

A. Equations

1. Résoudre l'équation $\ln x = 2$:

a. Graphiquement à 10^{-1} grâce à la courbe donnée ci dessous, on trouve : $\ln x = 2 \iff x \simeq 7,5$



b. à 10^{-2} grâce à la calculatrice.

x	7,38	7,39
$\ln x$	$\simeq 1,99$	$\simeq 2,0001$

donc $\ln x = 2 \iff x \simeq 7,38$

c. Algébriquement grâce aux propriétés suivantes ($a > 0$, $b > 0$) :

- $\ln e = 1$
- $\ln a^b = b \ln a$
- $\ln a = \ln b \iff a = b$

(Aide : $2 = 2 \times 1$), résolution en valeur exacte puis à 10^{-4} près.

$$\ln x = 2$$

$$\iff \ln x = 2 \times 1$$

$$\iff \ln x = 2 \ln e$$

$$\iff \ln x = \ln(e^2)$$

$$\iff x = e^2$$

$$\iff x \simeq 7,3891 \quad \text{donc } S = \{e^2\}$$

2. Soit $a > 0$ un nombre réel positif strict, montrer que : $\ln x = a \iff x = e^a$

(de même que ci dessus avec $\ln x = 2$)

3. En déduire une résolution algébrique de chacune des équations suivantes puis vérifier graphiquement.

a. $\ln x = 2,5 \iff x = e^{2,5}$ donc $S = \{e^2, 5\}$

b. $\ln x = -2 \iff x = e^{-2}$ donc $S = \{e^{-2}\}$

c. $2 \ln x + 2 = 0 \iff \ln x = \frac{-2}{2} = -1 \iff x = e^{-1}$ donc $S = \{e^{-1}\}$

d. $10(\ln x + 1) - 10 = 0 \iff 10 \ln x + 10 - 10 = 0 \iff \ln x = \frac{0}{10} = 0 \iff x = e^0 = 1$ donc $S = \{1\}$

B. Inéquations

1. Déduire des variations de la fonction $\ln$ et du 1.c. l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x > 2$

$$\iff \ln x > 2 \times 1$$

$$\iff \ln x > 2 \ln e$$

$$\iff \ln x > \ln(e^2)$$

$$\iff x > e^2 \text{ donc } S =] e^2 ; +\infty [$$

2. Grâce à la propriété : ($a > 0$, $b > 0$) : $a > b \iff \ln a > \ln b$, montrer que : $\ln x > a \iff x > e^a$ (de même que ci dessus)

3. En déduire les ensembles de solutions des inéquations suivantes. (*penser au domaine de définition*)

a. $\ln x > 10 \iff x > e^{10}$ donc $S =] e^{10} ; +\infty [$

b. $\ln x < 10 \iff 0 < x < e^{10}$ donc $S =] 0 ; e^{10} [$

c. $\ln x < -10 \iff 0 < x < e^{-10}$ donc $S =] 0 ; e^{-10} [$

d. $\ln x > 0 \iff x > e^0$ donc $S =] 1 ; +\infty [$

3.3 à retenir

propriété 2 : (équations et inéquations avec logarithme népérien)

- (1) $\boxed{\ln x = \ln y \iff x = y}$ pour tout $x > 0$ et $y > 0$
- (2) $\boxed{\ln x > \ln y \iff x > y}$ pour tout $x > 0$ et $y > 0$
- (3) $\boxed{\ln x = a \iff x = e^a}$ pour tout nombre réel a
- (4) $\boxed{\ln x > a \iff x > e^a}$ pour tout nombre réel a
- (5) $\boxed{\ln x < a \iff 0 < x < e^a}$ pour tout nombre réel a
- (6) $\boxed{\ln(e^x) = x}$ pour tout nombre réel x

Remarque :

cette propriété permet de résoudre des (in)équations où apparaît le logarithme népérien.

propriété 3 : (équations et inéquations avec exponentiel)

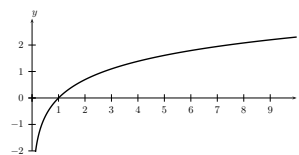
- (1) $\boxed{e^x = e^y \iff x = y}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
- (2) $\boxed{e^x > e^y \iff x > y}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
- (3) $\boxed{e^x = a \iff x = \ln a}$ pour tout nombre réel positif strict $a > 0$
- (4) $\boxed{e^x > a \iff x > \ln a}$ pour tout nombre réel positif strict $a > 0$
- (5) $\boxed{e^x < a \iff 0 < x < \ln a}$ pour tout nombre réel positif strict $a > 0$
- (6) $\boxed{e^{\ln x} = x}$ pour tout nombre réel positif strict $x > 0$

Remarque :

cette propriété permet de résoudre des (in)équations où apparaît un exponentiel.

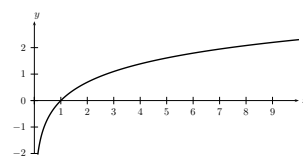
propriété 4 : (signe d'un logarithme népérien)

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

 $\left\{ \begin{array}{l} \ln x < 0 \iff x \in]0; 1[\\ \ln x = 0 \iff x = 1 \\ \ln x > 0 \iff x \in]1; +\infty[\end{array} \right.$


propriété 5 : (continuité et variations d'un logarithme népérien)

x	0	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

 $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto \ln x \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*} \\ x \mapsto \ln x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*} \end{array} \right.$


3.4 exercices

exercice 10 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $(\ln x)(2 + \ln x) = 0$

(b) $(\ln x)^2 = 1$

(c) $(\ln x)^2 - 4 = 0$

(d) $2\ln x + 3 = 0$

exercice 11 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 5 = 0$

(b) $(\ln x)^2 = \ln x + 2$

exercice 12 :

résoudre chacune des équations suivantes

(a) $\ln(x - 3) - \ln(2x + 5) = 0$

(b) $\ln(x + 3) - \ln(2x - 1) = 0$

(c) $\ln(x + 3) + \ln(5 - x) = \ln 3 + \ln 5$

exercice 13 :

résoudre chacune des inéquations suivantes.

(a) $\ln(-3x + 2) \leq \ln 3$

(b) $\ln(5 - 2x) \geq 0$

(c) $\ln x \geq 0$

(d) $\ln x \leq -2$

exercice 14 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $e^{x-3} = 1$

(b) $e^{-x-2} = e$

(c) $e^{x-3} = e^{2x+1}$

exercice 15 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $1 - e^x \geq 0$

(b) $2 - e^{-2x+1} \leq 0$

(c) $3e^{-x} - 2 \geq 0$

(d) $e^{0,5x+1} \geq 1$

exercice 16 : (D'après sujet Nouvelle Calédonie 2009)

partie I : ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$ et dont la représentation graphique est donnée en annexe

1. résoudre l'équation $f(x) = 0$ (les valeurs exactes sont demandées)
2. (a) déterminer le signe de l'expression $5(1 - X)(X - 2)$ suivant les valeurs du réel X
(b) en déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel de l'intervalle $[1 ; 15]$ dans un tableau
3. (a) on note f' la fonction dérivée de la fonction f .
calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{5(3 - 2 \ln x)}{x}$
(b) en déduire les variations de f (on précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint)
4. donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ puis donner une valeur approchée arrondie à 0,01 près de ces solutions.

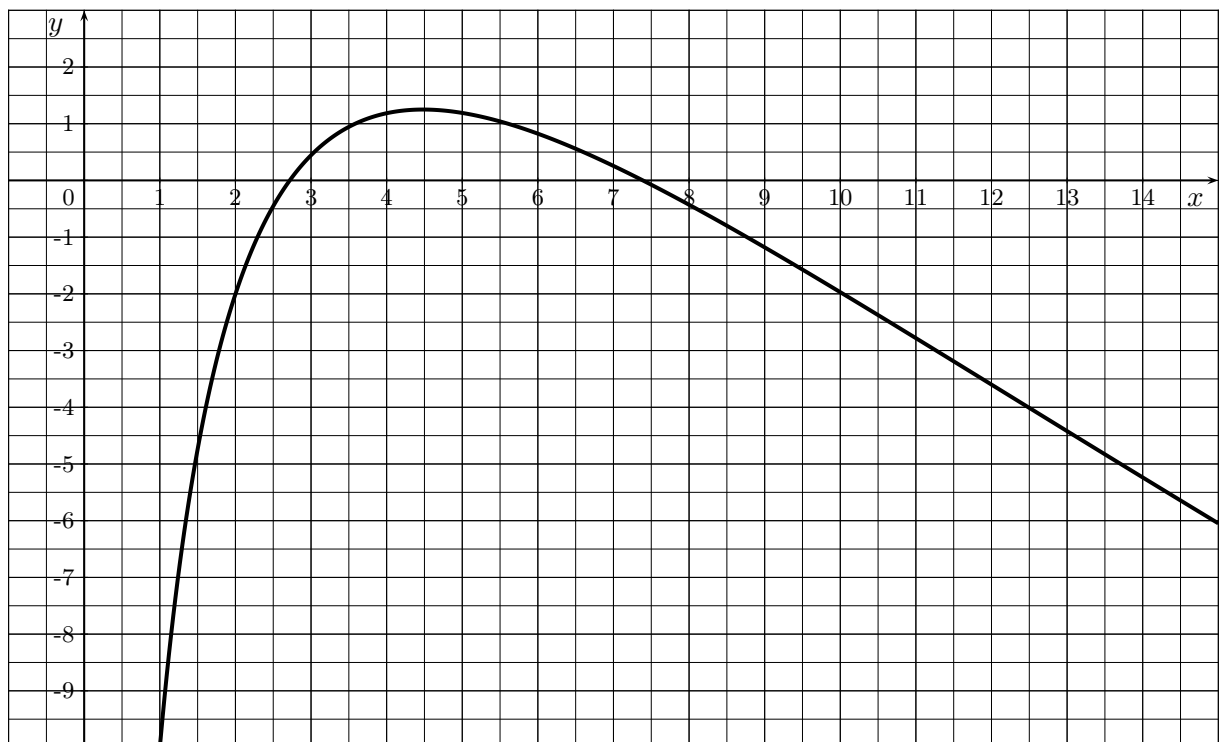
partie II : APPLICATION

Une entreprise fabrique et revend des jouets.

$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 15, f désignant la fonction étudiée dans la partie I

1. déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
interpréter concrètement le résultat de la question I. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1000 euros.
combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.

annexe 2



exercice 17 : (exercice avec ajustement affine et changement de variable)

Une entreprise a une évolution de son chiffre d'affaire donnée par le tableau suivant.

où t_i désigne le rang de l'année à partir de 1985 et c_i désigne le chiffre d'affaire en milliers d'euros.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
Chiffre d'affaire : c_i	10	11,2	12,2	13,6	15,2	16,8

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points.

On effectue le changement de variable $y_i = \ln c_i$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

- (a) Compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3} .

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln c_i$	2,303					

- (b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3} .
- (c) A l'aide du résultat précédent :
- exprimer c en fonction de t sous la forme $c(t) = A \times B^t$ où A et B seront donnés à 10^{-3}
 - Donner une estimation du chiffre d'affaire en 2020 arrondi à 10^{-1} .
 - Déterminer l'année pour laquelle le chiffre d'affaire atteint 30 000 euros.

3.5 corrigés exercices

corrigé exercice 10 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $(\ln x)(2 + \ln x) = 0$

domaine de définition : cette équation n'a de sens que si $x > 0$ car $\ln x$ n'existe que si $x > 0$

donc, dans $D_f =] 0 ; +\infty [$ on a :

$$(\ln x)(2 + \ln x) = 0$$

$$\iff \ln x = 0 \text{ ou } 2 + \ln x = 0$$

$$\iff x = e^0 \text{ ou } \ln x = -2$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = e^{-2}$$

$$\boxed{S = \{e^{-2}; 1\}}$$

(b) $(\ln x)^2 = 1$

dans $D_f =] 0 ; +\infty [$ on a :

$$(\ln x)^2 = 1$$

$$\iff \ln x = -\sqrt{1} = -1 \text{ ou } \ln x = \sqrt{1} = 1$$

$$\iff x = e^{-1} \text{ ou } x = e^1$$

$$\boxed{S = \{e^{-1}; e^1\}}$$

(c) $(\ln x)^2 - 4 = 0$

dans $D_f =] 0 ; +\infty [$ on a :

$$(\ln x)^2 - 4 = 0$$

$$\iff (\ln x)^2 = 4 \iff \ln x = -\sqrt{4} = -2 \text{ ou } \ln x = \sqrt{4} = 2$$

$$\iff x = e^{-2} \text{ ou } x = e^2$$

$$\boxed{S = \{e^{-2}; e^2\}}$$

(d) $2\ln x + 3 = 0$

dans $D_f =] 0 ; +\infty [$ on a :

$$2\ln x + 3 = 0$$

$$\iff \ln x = \frac{-3}{2}$$

$$\iff x = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$S = \left\{ e^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

corrigé exercice 11 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 5 = 0$

dans $D_f =] 0 ; +\infty [$ on a :

procédons à un changement de variable, pour cela, posons $X = \ln x$

$$2(\ln x)^2 - 3\ln x - 5 = 0 \iff 2X^2 - 3X - 5 = 0$$

il suffit de résoudre cette équation du second degré, Δ est adapté car a, b et c sont différents de zéro tous les trois.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0 \text{ donc il y a deux solutions.}$$

$$X = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2,5 \text{ ou } X = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -1$$

or $X = \ln x$

il suffit donc de résoudre

$$\ln x = 2,5 \text{ ou } \ln x = -1$$

soit

$$x = e^{2,5} \text{ ou } x = e^{-1}$$

$$S = \{e^{2,5}, e^{-1}\}$$

(b) $(\ln x)^2 = \ln x + 2$

dans $D_f =] 0 ; +\infty [$ on a :

$$(\ln x)^2 = \ln x + 2 \iff (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$$

procédons à un changement de variable, pour cela, posons $X = \ln x$

$$(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \iff X^2 - X - 2 = 0$$

il suffit de résoudre cette équation du second degré, Δ est adapté car a, b et c sont différents de zéro tous les trois.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0 \text{ donc il y a deux solutions.}$$

$$X = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2 \text{ ou } X = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$$

or $X = \ln x$

il suffit donc de résoudre

$$\ln x = 2 \text{ ou } \ln x = -1$$

soit

$$x = e^2 \text{ ou } x = e^{-1}$$

$$\boxed{S = \{e^2, e^{-1}\}}$$

corrigé exercice 12 :

(a) $\ln(x - 3) - \ln(2x + 5) = 0$

cette équation n'a de sens que si :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 2x + 5 > 0$$

$$\iff x > 3 \text{ et } x > -2,5$$

$$\iff x > 3$$

$$\text{donc } D_f =]3 ; +\infty [$$

dans D_f on a :

$$\ln(x - 3) - \ln(2x + 5) = 0$$

$$\iff \ln(x - 3) = \ln(2x + 5)$$

$$\iff x - 3 = 2x + 5$$

$$\iff x = -8$$

$$\text{or } -8 \notin]3 ; +\infty [$$

donc

$$\boxed{S = \{\} = \phi}$$

cette équation n'a aucune solution.

(b) $\ln(x + 3) - \ln(2x - 1) = 0$

cette équation n'a de sens que si :

$$x + 3 > 0 \text{ et } 2x - 1 > 0$$

$$\iff x > -3 \text{ et } x > 0,5$$

$$\iff x > 0,5$$

$$\text{donc } D_f =]0,5 ; +\infty [$$

dans D_f on a :

$$\ln(x+3) - \ln(2x-1) = 0$$

$$\iff \ln(x+3) = \ln(2x-1)$$

$$\iff x+3 = 2x-1$$

$$\iff x = 4$$

$$\boxed{S = \{4\}}$$

(c) $\ln(x+3) + \ln(5-x) = \ln 3 + \ln 5$

cette équation n'a de sens que si :

$$x+3 > 0 \text{ et } 5-x > 0$$

$$\iff x > -3 \text{ et } x < 5$$

$$\text{donc } D_f =]-3 ; 5[.$$

dans D_f on a :

$$\ln(x+3) + \ln(5-x) = \ln 3 + \ln 5$$

$$\iff \ln(x+3)(5-x) = \ln 15$$

$$\iff (x+3)(5-x) = 15$$

$$\iff -x^2 + 2x = 0$$

équation du second degré où Δ n'est pas nécessaire car $c = 0$, on met x en facteur

$$\iff x(-x+2) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

$$\boxed{S = \{0; 2\}}$$

corrigé exercice 13 :

(a) $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$

Cette inéquation n'a de sens que si

$$-3x+2 > 0$$

$$\iff x < \frac{2}{3}$$

$$\text{donc } D_f =]-\infty ; \frac{2}{3}[.$$

dans D_f on a :

$$\ln(-3x+2) \leq \ln 3$$

$$\Longleftrightarrow -3x + 2 \leq 3$$

$$\Longleftrightarrow -3x \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

donc

$$S = \left[-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} \right[$$

(b) $\ln(5 - 2x) \geq 0$

Cette inéquation n'a de sens que si

$$5 - 2x > 0$$

$$\Longleftrightarrow x < \frac{5}{2}$$

$$\text{donc } D_f =] -\infty ; \frac{5}{2} [.$$

dans D_f on a :

$$\ln(5 - 2x) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow 5 - 2x \geq e^0$$

$$\Longleftrightarrow -2x \geq -4$$

$$\Longleftrightarrow x \leq 2$$

donc

$$S =] -\infty ; 2 [$$

(c) $\ln x \geq 0$

Cette inéquation n'a de sens que si

$$x > 0$$

$$\text{donc } D_f =] 0 ; +\infty [.$$

dans D_f on a :

$$\ln x \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow x \geq e^0$$

$$\Longleftrightarrow x \geq 1$$

donc

$$S = [1 ; +\infty [$$

(d) $\ln x \leq -2$

Cette inéquation n'a de sens que si

$$x > 0$$

$$\text{donc } D_f =]0 ; +\infty[.$$

dans D_f on a :

$$\ln x \leq -2$$

$$\iff x \leq e^{-2}$$

donc

$$S =]0 ; e^{-2}[$$

corrigé exercice 14 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $e^{x-3} = 1 \iff x - 3 = \ln 1 = 0 \iff x = 3$ soit $S = \{3\}$

(b) $e^{-x-2} = e \iff -x - 2 = 1 \iff x = -3$ soit $S = \{-3\}$

(c) $e^{x-3} = e^{2x+1} \iff x - 3 = 2x + 1 \iff -4 = x$ soit $S = \{-4\}$

corrigé exercice 15 :

résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $1 - e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff \ln 1 \geq x$ soit $S =]-\infty ; 0]$

(b) $2 - e^{-2x+1} \leq 0 \iff 2 \leq e^{-2x+1} \iff \ln 2 \leq -2x + 1 \iff x \leq \frac{1 - \ln 2}{2}$ soit $S =]-\infty ; \frac{1 - \ln 2}{2}]$

(c) $3e^{-x} - 2 \geq 0$

(d) $e^{0,5x+1} \geq 1$

corrigé exercice 16 : (D'après sujet Nouvelle Calédonie 2009)

partie I : ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$ et dont la représentation graphique est donnée en annexe

1. $f(x) = 0$

$$\iff 5(1 - \ln x)(\ln x - 2) = 0$$

$$\iff (1 - \ln x)(\ln x - 2) = \frac{0}{5} = 0$$

$$\iff (1 - \ln x) = 0 \text{ ou } (\ln x - 2) = 0$$

$$\iff \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = 2$$

$$\iff x = e^1 \text{ ou } x = e^2$$

$$\boxed{S = \{e, e^2\}}$$

2. (a) on utilise un tableau de signes :

X	$-\infty$	1	2	$+\infty$	annulations
5	+		+	+	
$1 - X$	+	0	-	-	$X = 1$
$X - 2$	-		-	0	$X = 2$
$5(1 - X)(X - 2)$	-	0	+	0	-

(b) d'où le tableau de signes :

x	1	e	e^2	15	annulations
5	+		+	+	
$1 - \ln x$	+	0	-	-	$x = e$
$\ln x - 2$	-		-	0	$x = e^2$
$5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$	-	0	+	0	-

3. (a) $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$

on reconnaît que f est de la forme $f = 5uv$ donc $f' = 5(u'v + uv')$

$$\text{avec : } \begin{cases} u = 1 - \ln x \implies u' = -\frac{1}{x} = \frac{-1}{x} \\ v = \ln x - 2 \implies v' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{d'où } f'(x) = 5 \left[\frac{-1}{x} \times (\ln x - 2) + (1 - \ln x) \times \frac{1}{x} \right]$$

$$f'(x) = 5 \left[\frac{-1 \times (\ln x - 2) + (1 - \ln x)}{x} \right]$$

$$f'(x) = 5 \left[\frac{-\ln x + 2 + 1 - \ln x}{x} \right]$$

$$f'(x) = 5 \left[\frac{3 - 2 \ln x}{x} \right] = \boxed{f'(x) = \frac{5(3 - 2 \ln x)}{x}}$$

x	1	$e^{1,5}$	15	annulations
5	+		+	
$3 - 2 \ln x$	+	0	-	$3 - 2 \ln x = 0 \iff x = e^{1,5}$
x	+		+	$x = 0$
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	-10	1,25	$\simeq -6,04$	$f(1) = 5(1 - \ln 1)(\ln 1 - 2) = -10$
le maximum de f vaut 1,25 pour $x = e^{1,5}$				

4. l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions

A l'aide de la calculatrice, à 10^{-2} près

x	3,58	3,59
$f(x)$	$\simeq 0,99$	$\simeq 1,004$
comparaison à 1	< 1	> 1

donc $3,58 < \beta < 3,59$

et

x	5,60	5,61
$f(x)$	$\simeq 1,002$	$\simeq 0,997$
comparaison à 1	> 1	< 1

donc $5,60 < \beta < 5,61$

partie II : APPLICATION

1. à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte sont comprises entre $e \simeq 2,718$ centaines et $e^2 \simeq 7,389$ centaines
donc entre 272 et 738 jouets

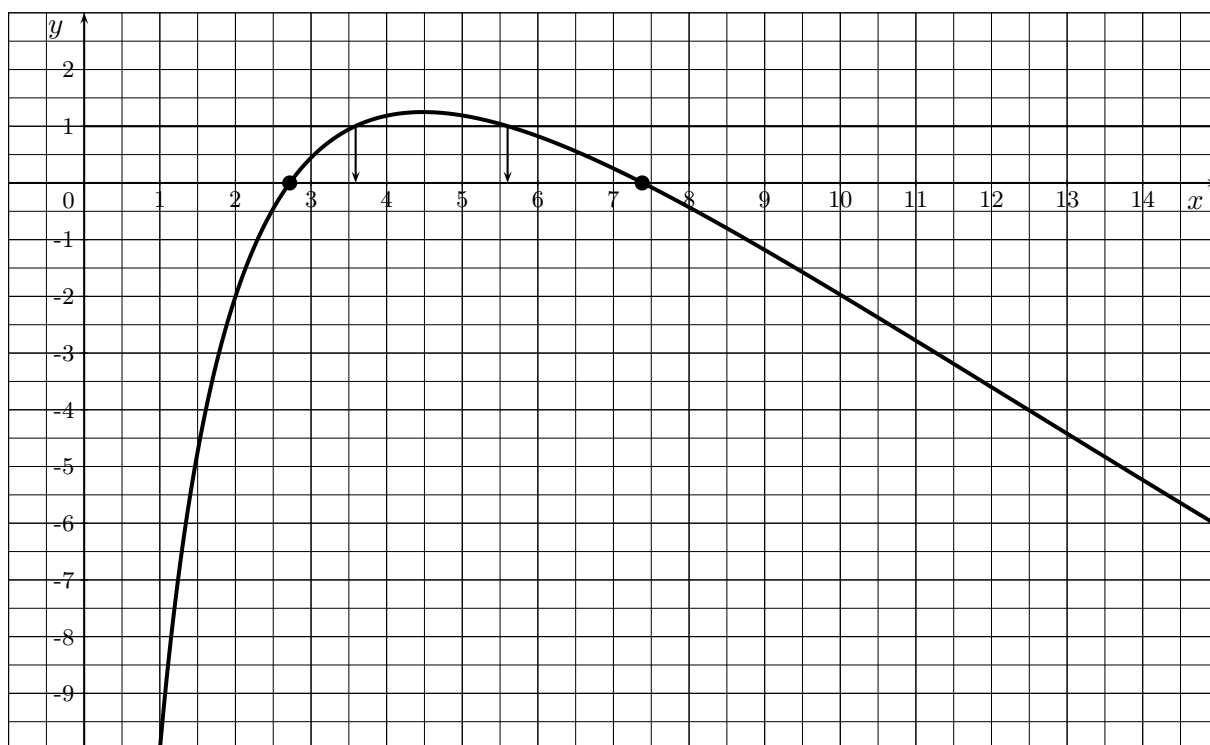
interprétation concrète du le résultat de la question I. 2.

le bénéfice est positif pour une production comprise entre 272 et 738 jouets

la courbe de la fonction f est au dessus de l'axe des abscisses.

2. cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1000 euros il faut alors fabriquer entre entre 359 et 560 jouets pour que $f(x) > 1$

annexe 2



corrigé exercice 17 : corrigé exercice avec ajustement affine et changement de variable(a) tableau à 10^{-3}

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln c_i$	2,303	2,416	2,501	2,61	2,721	2,821

(b) à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$, où a et b sont arrondis à 10^{-3} est : $y = 0,021t + 2,304$

(c) A l'aide du résultat précédent :

$$\text{i. } \begin{cases} y = \ln c \\ y = 0,021t + 2,304 \end{cases}$$

$$\implies \ln c = 0,021t + 2,304$$

$$\implies c = e^{0,021t+2,304}$$

$$\implies c = e^{0,021t} \times e^{2,304}$$

$$\implies c \simeq e^{0,021t} \times 10,014$$

$$\implies c \simeq (e^{0,021})^t \times 10,014$$

$$\implies c \simeq 1,021^t \times 10,014 \implies c \simeq 10,014 \times 1,021^t$$

ii. estimation du chiffre d'affaire en 2020 arrondi à 10^{-1} est calculé ainsi

$$\text{en 2020 : } t = 2020 - 1985 = 35$$

$$\text{donc : } y = 0,021 \times 35 + 2,304 \simeq 3,039$$

$$\text{donc : } \ln c = 3,039$$

$$\text{donc : } c = e^{3,039} \simeq \boxed{20,9} \text{ milliers d'euros en 2020}$$

$$\text{ou bien : } c \simeq 10,014 \times 1,021^{35} \simeq \boxed{20,7}$$

iii. l'année pour laquelle le chiffre d'affaire atteint 30 000 euros est calculée ainsi :

$$c = 30$$

$$\text{donc : } y = \ln c = \ln 30$$

$$\text{donc : } 0,021t + 2,304 = \ln 30$$

$$\text{donc : } t = \frac{\ln 30 - 2,304}{0,021} \simeq 52,2$$

$$\text{donc : l'année est } 1985 + 52 = \boxed{2037}$$

ou bien :

$$10,014 \times 1,021^t = 30 \iff 1,021^t = \frac{30}{10,014} \iff t \times \ln(1,021) = \ln\left(\frac{30}{10,014}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{30}{10,014}\right)}{\ln(1,021)} \simeq 52,8 \text{ donc l'année est } 1985 + 52 = \boxed{2037}$$

4 études de fonctions avec logarithme népérien.

4.1 exercices

exercice 18 : (avec une fonction auxiliaire)

- soit la fonction φ telle que $\varphi(x) = -x + 3 + 3\ln x$ sur $]3; 15]$
 - étudier les variations de φ et dresser son tableau de variations.
 - montrer que φ s'annule une seule fois sur $]3; 15]$ et donner la valeur d'annulation α à 0,1 près.
 - déduire de a. et b. le signe de φ sur $]3; 15]$
- soit la fonction f telle que $f(x) = 5 + \frac{x \ln x}{3 - x}$ sur $]3; 15]$
 - montrer que f' a le même signe que φ sur $]3; 15]$ et en déduire les variations de f sur $]3; 15]$
 - dresser le tableau de variations de f
- si x est le nombre d'objets fabriqués et vendus par un artisan, le bénéfice correspondant est donné par $f(x)$ exprimé en milliers d'euros.
 - combien doit-il fabriquer et vendre d'objets pour maximiser son bénéfice ?

exercice 19 :

- soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{5 \ln x}{x^2}$ pour $x \in [0; 10]$
 - montrer que $f'(x) = \frac{5(1 - 2 \ln x)}{x^3}$
 - en déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
 - montrer que $f(x) = 0,5$ admet une seule solution α sur $[2; 10]$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} près
- f donne le bénéfice mensuel des ventes d'une entreprise (*en millions d'euros*) en fonction du nombre de milliers d'objets vendus x ou x est d'au plus 10 milliers.
 - quelle production maximise le bénéfice ? quelle est le bénéfice maximal ?
 - pour quelles productions le bénéfice est-il de 0,5 millions d'euros ?
 - pour quelles productions le bénéfice est-il positif ? (*justifier clairement*)

exercice 20 : (un sujet de bac : 2010)

Partie A Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3 \ln(x + 1) - 1,75 - 3 \ln 2$$

- calculer $f(0)$ et $f(1)$
- démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$

$$f'(x) = \frac{-0,5(x + 2)(x - 5)}{x + 1}.$$

- étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 10]$
 - Déterminer les variations de la fonction f sur $[0; 10]$
 - Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 0,1 du maximum de f sur $[0; 10]$
- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5; 10]$ une solution unique x_0
 - Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut 10^{-1} de x_0

Partie B

à l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.

On note x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers).

On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10

Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction f définie sur $[0; 10]$ par :

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3 \ln(x + 1) - 1,75 - 3 \ln 2.$$

Déduire de la **partie A** les réponses aux questions suivantes

(les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près).

On explicitera la méthode utilisée.

- (a) Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?
- (b) Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100 euros près).

exercice 21 : exercice avec ajustement affine et changement de variable

Une entreprise a une évolution de son chiffre d'affaire donnée par le tableau suivant.

où t_i désigne le rang de l'année à partir de 1985 et c_i désigne le chiffre d'affaire en milliers d'euros.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
Chiffre d'affaire : c_i	10	11,2	12,2	13,6	15,2	16,8

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points.

On effectue le changement de variable $y_i = \ln c_i$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3} .

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln c_i$	2,303					

2. on admet que la droite d'équation $y = 0,021t + 2,304$, où a et b sont arrondis à 10^{-3} près réalise un bon ajustement affine de y en fonction de t
3. A l'aide du résultat précédent :
 - (a) Donner une estimation du chiffre d'affaire en 2020 arrondi à 10^{-1} .
 - (b) Déterminer l'année pour laquelle le chiffre d'affaire atteint 30 000 euros.

4.2 corrigés exercices

corrigé exercice 18 :

1. soit la fonction φ telle que $\varphi(x) = -x + 3 + 3\ln x$ sur $[3; 15]$

(a) variations de φ et tableau de variations.

dérivée

$$\varphi(x) = -x + 3 + 3\ln x$$

$$\varphi'(x) = -1 + 3 \times \frac{1}{x} = \frac{-x + 3}{x}$$

annulation et signe de la dérivée sur $[3; 15]$

$\frac{-x + 3}{x}$ est une fraction dont on peut consigner le signe dans un tableau de signes.

x	3	15	Annulations :
$-x + 3$	0	-	$-x + 3 = 0 \iff x = 3$
x		-	$x = 0$
$\frac{-x + 3}{x}$	0	-	

tableau variations de φ sur $[3; 15]$

x	3	15
$\varphi'(x)$	0	-
$\varphi(x)$	$\ln 27 \simeq 3,3$ $\searrow$ $-12 + 3\ln 15 \simeq -8,7$	

$$\varphi(3) = -3 + 3 + 3\ln 3 = \ln 27 \simeq 3,3 \quad \varphi(15) = -15 + 3 + 3\ln 3 \simeq -8,7$$

- (b) montrer que φ s'annule une seule fois sur $[3; 15]$
on justifie ce fait par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \varphi(3) \simeq 3,3 > 0 \\ \bullet \varphi(15) \simeq -8,7 < 0 \\ \bullet \varphi \text{ est continue sur } [3; 15] \text{ en tant somme de fontions continues} \\ \bullet \varphi \text{ est strictement décroissante sur } [3; 15] \end{array} \right.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une solution unique α dans $[3; 15]$

la calculatrice permet d'obtenir

x	9,8	9,9
$\varphi(x)$	0,04	-0,02

on a donc $\alpha \simeq 9,8$

- (c) on déduit de a. et b. le signe de φ sur $[3; 15]$

x	3	$\alpha \simeq 9,8$	15
$\varphi(x)$	+	0	-

2. soit la fonction f telle que $f(x) = 5 + \frac{x\ln x}{3-x}$ sur $]3; 15]$

(a) dérivée

$$f = 5 + \frac{u}{v} \text{ donc } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$$u = x\ln x \implies u' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$v = 3 - x \implies v' = -1$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1) \times (3 - x) - (x \ln x) \times (-1)}{(3 - x)^2} = \frac{3 \ln x - x \ln x + 3 - x + x \ln x}{(3 - x)^2} = \frac{\varphi(x)}{(3 - x)^2}$$

annulation et signe de la dérivée sur $]3; 15]$

$\frac{\varphi(x)}{(3 - x)^2}$ est une fraction dont on peut consigner le signe dans un tableau de signes.

or le numérateur est du signe de $\varphi(x)$ qui a été déterminé ci dessus
 et le dénominateur $(3 - x)^2$ est un carré donc positif
 donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$, d'où :

tableau variations de f sur $]3; 15]$

x	3	$\alpha \simeq 9,8$	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\simeq 1,71$ $(-\infty) \nearrow \quad \searrow \quad \simeq 1,61$		

$$f(15) = 5 + \frac{15 \ln 15}{3 - 15} \simeq 1,61$$

3. si x est le nombre d'objets fabriqués et vendus par un artisan, le bénéfice correspondant est donné par $f(x)$ exprimé en milliers d'euros.
- (a) il doit fabriquer et vendre 10 d'objets pour maximiser son bénéfice car :
- $$f(9) = 1,704 < f(10) = 1,710$$

corrigé exercice 19 :

1. soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{5\ln x}{x^2}$

(a) montrons que $f'(x) = \frac{5(1-2\ln x)}{x^3}$:

$$f = \frac{u}{v} \implies f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u = 5\ln x \implies u' = 5 \times \frac{1}{x} = \frac{5}{x} \\ v = x^2 \implies v' = 2x \end{cases}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{\frac{5}{x} \times x^2 - (5\ln x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{5x - 10x\ln x}{x^4} = \frac{5x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{5(1-2\ln x)}{x^3}$$

(b) annulation et signe de $f'(x)$:

$f'(x)$ est du signe de $(1-2\ln x)$ car $5 > 0$ et $x^3 > 0$ du fait que $x \in]0; +\infty[$

or

$$1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < 0,5 \iff x < e^{0,5}$$

et

$$1 - 2\ln x < 0 \iff \ln x < 0,5 \iff x > e^{0,5}$$

d'où le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de $f(x)$ ci dessous.

x	0	$e^{0,5} \simeq 1,6$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \simeq 0,92$	$\searrow 0$

$$f(e^{0,5}) = \frac{5\ln(e^{0,5})}{(e^{0,5})^2} = \frac{2,5}{e} \simeq 0,92$$

(c) montrons que $f(x) = 0,5$ admet une seule solution α sur $[2; 10]$

- $f(2) \simeq 0,86$ et $0,86 > 0,5$
- $f(10) \simeq 0,12$ et $0,12 < 0,5$
- f est continue sur $[2; 10]$ en tant que quotient de fonctions continues
- f est strictement décroissante sur $[2; 10]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ possède une solution unique α dans $[2; 10]$

un encadrement de α à 10^{-2} près.

la calculatrice permet d'obtenir

x	3,56	3,57
$f(x)$	0,50095	0,49

donc $\alpha \simeq 3,56$

- (a) la production qui maximise le bénéfice est de $e^{0,5} \simeq 1,649$ milliers d'objets et le bénéfice maximal est d'environ 0,92 millions d'euros
- (b) le bénéfice est de 0,5 millions d'euros pour une production d'environ 3,56 milliers d'objets mais aussi pour une production d'environ 1,138 milliers d'objets (*calculatrice*)

(c) $f(x) > 0 \iff \frac{5\ln x}{x^2} > 0$

or $5 > 0$ et $x^2 \geq 0$

donc $f(x)$ est du signe de $\ln x$

et nous savons que

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

donc le bénéfice est positif à partir d'une production de 1 millier d'objets

corrigé exercice 20 :

Partie A

(a) $f(0) = -0,25 \times 0^2 + 2 \times 0 + 3 \ln(0+1) - 1,75 - 3 \ln 2 = -1,75 - 3 \ln 2 \simeq -3,83$

$$f(1) = -0,25 \times 1^2 + 2 \times 1 + 3 \ln(1+1) - 1,75 - 3 \ln 2 = 0$$

(b) démontrons que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$: $f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3 \ln(x+1) - 1,75 - 3 \ln 2$$

$$f'(x) = -0,5x + 2 + 3 \times \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(-0,5x+2)(x+1)+3}{x+1} = \frac{-0,5x^2+1,5x+5}{x+1}$$

$$\text{or } \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1} = \frac{-0,5x^2+1,5x+5}{x+1}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$$

i et ii

i. signe de $f'(x)$ sur $[0; 10]$ et variations de f

x	0	5	10
$-0,5$	-		-
$x+2$	+		+
$x-5$	-	0	+
$x+1$	+		+
$f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$	+		-
$f(x)$	-3,83	5,3	-1,63

annulations

$$x+2=0 \iff x=-2$$

$$x-5=0 \iff x=5$$

$$x+1=0 \iff x=-1$$

ii. valeur exacte du maximum de f sur $[0; 10]$:

$$f(5) = -0,25 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 \ln(5+1) - 1,75 - 3 \ln 2$$

$$f(5) = 2 + 3 \ln 6 - 3 \ln 2 = 2 + 3(\ln 6 - \ln 2) = 2 + 3 \ln 3 = 2 + \ln 27 \simeq 5,3 \text{ à } 0,1 \text{ près.}$$

(c) i et ii : l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5; 10]$ une solution unique x_0

on justifie ce fait par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(10) < 0 \\ \bullet f(5) > 0 \\ \bullet f \text{ est continue sur } [5; 10] \text{ en tant que fonction continue} \\ \bullet f \text{ est strictement décroissante sur } [5; 10] \end{array} \right.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique x_0 dans $[5; 10]$

la calculatrice permet d'obtenir

x	9,3	9,4
$f(x)$	0,14	-0,09

on a donc $x_0 \simeq 9,4$

Partie B

(a) le supermarché doit vendre entre 1 et 9,3 milliers de guirlandes pour réaliser un bénéfice sur ce produit.

en effet : $f(1) = 0$ et le sens de variations de f permettent de conclure que $f(x) > 0 \iff x \in]1; x_0[$

(b) 5000 guirlandes assurent un bénéfice maximal de 5300 euros à 100 euros près.

corrigé exercice 21 : corrigé exercice avec ajustement affine et changement de variable

1. tableau à 10^{-3} .

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln c_i$	2,303	2,416	2,501	2,61	2,721	2,821

2. à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$, où a et b sont arrondis à 10^{-3} est : $y = 0,021t + 2,304$.

3. A l'aide du résultat précédent :

a. une estimation du chiffre d'affaire en 2020 arrondi à 10^{-1} est calculé ainsi

$$\text{en 2020 : } t = 2020 - 1985 = 35$$

$$\text{donc : } y = 0,021 \times 35 + 2,304 \simeq 3,039$$

$$\text{donc : } \ln c = 3,039$$

$$\text{donc : } c = e^{3,039} \simeq 20,9 \text{ milliers d'euros en 2020}$$

b. l'année pour laquelle le chiffre d'affaire atteint 30 000 euros est calculée ainsi :

$$c = 30$$

$$\text{donc : } y = \ln c = \ln 30$$

$$\text{donc : } 0,021t + 2,304 = \ln 30$$

$$\text{donc : } t = \frac{\ln 30 - 2,304}{0,021} \simeq 52,2$$

$$\text{donc : l'année est } 1985 + 52 = 2037$$

5 logarithme d’une fonction : $f = \ln u$

5.1 activité

1. lecture graphique :
on dispose ci dessous du graphique partiel de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$
la droite (D) est asymptote à C_u en $-\infty$ et aussi tangente à C_u en $x = -3$
on sait de plus que la fonction f est définie par $f = \ln u$

a. déterminer le domaine de définition de f

b. déterminer les valeurs exactes de :

$f(-3) =$

$f(-2) =$

$f(0) =$

c. déterminer les valeurs exactes de : (rappel : si $f = \ln u$ alors $f' = \dots$)

$f'(-3) =$

$f'(-1) =$

$f'(0) =$

d. sachant que $u > 0$ sur D_f , et que $f' = \dots$ que peut-on dire du signe de f' par rapport au signe de u' ?

e. qu'en déduire pour les variations de f par rapport aux variations de u ?

f. étudier l'annulation de f'

g. en déduire le tableau de variations de f .

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

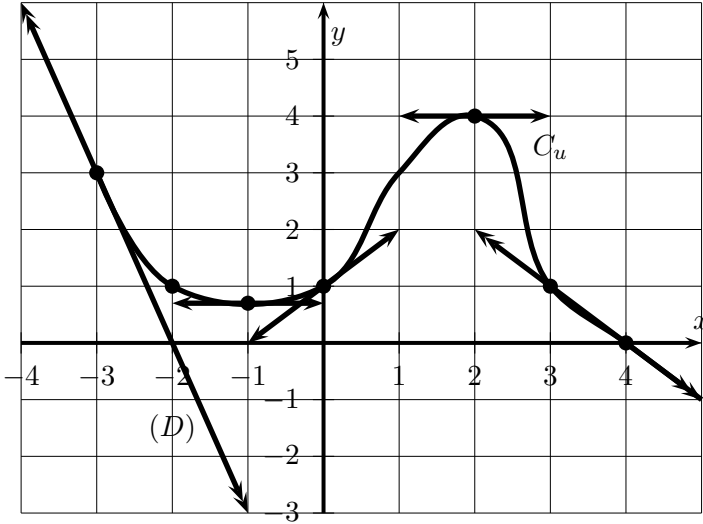
h. déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

i. déterminer $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

j. résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

k. en déduire le tableau de signes de f

x	
$f(x)$	



5.2 corrigé activité

1. lecture graphique :

on dispose ci dessous du graphique partiel de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$
la droite (D) est asymptote à C_u en $-\infty$ et aussi tangente à C_u en $x = -3$
on sait de plus que la fonction f est définie par $f = \ln u$

a. déterminer le domaine de définition de f

$\ln u$ n'existe que si $u > 0$

or

$$u(x) > 0 \iff x \in] -\infty ; 4 [$$

donc

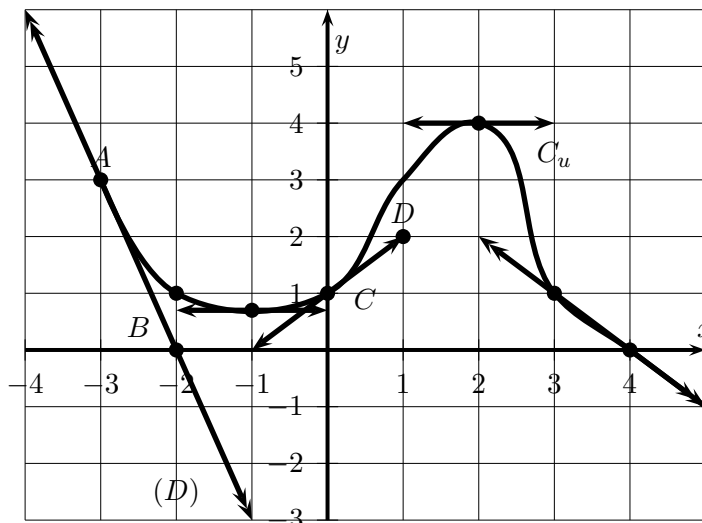
$$D_f =] -\infty ; 4 [$$

b. déterminer les valeurs exactes de :

$$f(-3) = \ln[u(-3)] = \ln[3] = \ln 3$$

$$f(-2) = \ln[u(-2)] = \ln[2] = \ln 2 = 0$$

$$f(0) = \ln[u(0)] = \ln[1] = \ln 1 = 0$$



c. déterminer les valeurs exactes de : (rappel : si $f = \ln u$ alors $f' = \frac{u'}{u}$)

$$f'(-3) = \frac{u'(-3)}{u(-3)} \quad \text{avec} \quad u'(-3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{-2 - (-3)} = -3 \quad \text{et} \quad u(-3) = 3 \quad \text{soit} \quad f'(-3) = \frac{-3}{3} = -1$$

$$f'(-1) = \frac{u'(-1)}{u(-1)} = \frac{0}{1} = 0 \quad (\text{tangente horizontale en } x = -1)$$

$$f'(0) = \frac{u'(0)}{u(0)} \quad \text{avec} \quad u'(0) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2 - 1}{1 - 0} = 1 \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{soit} \quad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

d. sachant que $u > 0$ sur D_f , et que $f' = \frac{u'}{u}$ que peut-on dire du signe de f' par rapport au signe de u' ?

puisque $u > 0$ on peut dire que f' et u' ont le même signe pour toute valeur de $x \in D_f$

e. qu'en déduire pour les variations de f par rapport aux variations de u ?

puisque f' et u' ont le même signe, f et u ont les mêmes variations.

f. étudier l'annulation de f'

$$f(x) = 0 \iff \ln[u(x)] = 0 \iff u(x) = e^0 = 1 \iff x \in \{-2 ; 0 ; 3\}$$

g. en déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-1	2	4
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$		$\ln 4$	$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$\simeq \ln(0, 8)$		

h. déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln[u(x)] = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

i. déterminer $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \ln[u(x)] = \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$$

j. résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

$$f(x) > 0 \iff \ln[u(x)] > 0 \iff u(x) > e^0 = 1 \iff x \in] -\infty ; -2 [\cup] 0 ; 3 [$$

k. en déduire le tableau de signes de f

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	-

5.3 à retenir

(1) domaine de définition : $\ln(u)$ n'existe que si $u > 0$

(2) dérivée : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

(3) variations : les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation

Remarque : (3) permet de justifier le sens de variations de $\ln u$ sans utiliser la dérivation.
(si u croît (respectivement : décroît) alors $\ln u$ croît (respectivement : décroît))

5.4 exercices

exercice 1. : un sujet de bac : 2010 :

Partie A Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3 \ln(x + 1) - 1,75 - 3 \ln 2$$

- (a) calculer $f(0)$ et $f(1)$
- (b) démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$

$$f'(x) = \frac{-0,5(x + 2)(x - 5)}{x + 1}.$$

- (c)
 - i. étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 10]$
 - ii. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0 ; 10]$
 - iii. Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 0,1 du maximum de f sur $[0 ; 10]$
- (d)
 - i. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5 ; 10]$ une solution unique x_0
 - ii. Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut 10^{-1} de x_0

Partie B

à l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.

On note x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers).

On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10

Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3 \ln(x + 1) - 1,75 - 3 \ln 2.$$

Déduire de la **partie A** les réponses aux questions suivantes

(les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près).

On explicitera la méthode utilisée.

- (a) Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?
- (b) Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100 euros près).

Partie A

(a) $f(0) = -0,25 \times 0^2 + 2 \times 0 + 3 \ln(0 + 1) - 1,75 - 3 \ln 2 = -1,75 - 3 \ln 2 \simeq -3,83$

$$f(1) = -0,25 \times 1^2 + 2 \times 1 + 3 \ln(1 + 1) - 1,75 - 3 \ln 2 = 0$$

(b) démontrons que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$: $f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3 \ln(x+1) - 1,75 - 3 \ln 2$$

$$f'(x) = -0,5x + 2 + 3 \times \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(-0,5x+2)(x+1)+3}{x+1} = \frac{-0,5x^2+1,5x+5}{x+1}$$

$$\text{or } \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1} = \frac{-0,5x^2+1,5x+5}{x+1}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$$

i et ii

i. signe de $f'(x)$ sur $[0; 10]$ et variations de f

x	0	5	10	annulations
$-0,5$	-		-	
$x+2$	+		+	$x+2=0 \iff x=-2$
$x-5$	-	0	+	$x-5=0 \iff x=5$
$x+1$	+		+	$x+1=0 \iff x=-1$
$f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$	+		-	
$f(x)$	-3,83	5,3	-1,63	

ii. valeur exacte du maximum de f sur $[0; 10]$:

$$f(5) = -0,25 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 \ln(5+1) - 1,75 - 3 \ln 2$$

$$f(5) = 2 + 3 \ln 6 - 3 \ln 2 = 2 + 3(\ln 6 - \ln 2) = 2 + 3 \ln 3 = 2 + \ln 27 \simeq 5,3 \text{ à } 0,1 \text{ près.}$$

(c) i et ii : l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5; 10]$ une solution unique x_0

on justifie ce fait par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(10) < 0 \\ \bullet f(5) > 0 \\ \bullet f \text{ est continue sur } [5; 10] \text{ en tant que fonction continue} \\ \bullet f \text{ est strictement décroissante sur } [5; 10] \end{array} \right.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique x_0 dans $[5; 10]$

la calculatrice permet d'obtenir

x	9,3	9,4
$f(x)$	0,14	-0,09

on a donc $x_0 \simeq 9,4$

Partie B

(a) le supermarché doit vendre entre 1 et 9,3 milliers de guirlandes pour réaliser un bénéfice sur ce produit.
en effet : $f(1) = 0$ et le sens de variations de f permettent de conclure que $f(x) > 0 \iff x \in]1; x_0[$

(b) 5000 guirlandes assurent un bénéfice maximal de 5300 euros à 100 euros près.

6 évaluations

6.1 corrigé devoir maison 1

corrigé Devoir Maison

Exercice 1 : (40p54)

A. Etude d'une fonction

Soit f définie par $f(x) = \frac{8\ln x}{x}$ pour $x \in [1; 10]$

1. calcul de $f'(x)$: $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = 8\ln x \Rightarrow u' = \frac{8}{x}$ et $v = x \Rightarrow v' = 1$

$$\text{d'où : } f'(x) = \frac{\frac{8}{x} \times x - 8\ln x \times 1}{x^2} = \frac{8 - 8\ln x}{x^2} = 8 \times \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2. Inéquation : $1 - \ln x \geq 0 \iff 1 \geq \ln x \iff e \geq x$

On en déduit le signe de $f'(x)$

x	1	e	10
$1 - \ln x$	+	0	-
$f'(x) = 8 \times \frac{1 - \ln x}{x^2}$	+	0	-

3. a. Variations de f :

x	1	e	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	2,943	1,842

$f(e) = \frac{8}{e}$

b. $f(e) = \frac{8}{e} \simeq 2,943$

B. Application économique

1. bénéfice maximal = 2943 euros pour 2,718 tonnes.

2. a. recette = prix d'une tonne $\times$ nombre de tonnes = $4x$

b. pourcentage du bénéfice par rapport à la recette : $p \simeq \frac{2,943}{4 \times e} \simeq 27\%$

3. a. $f(x) = R(x) - C(x)$

b. $C(x) = R(x) - f(x) = 4x - \frac{8\ln x}{x}$

c. Coût associé au bénéfice maximal : $C(e) = 4 \times e - \frac{8\ln e}{e} \simeq 7,93$

Exercice 2 : (43p263)

1. X suit une loi binomiale car :

on répète 50 tirages, avec indépendance et pour chaque tirage il n'y a que deux résultats possibles, succès ou échec. les paramètres sont $n = 50$ et $p = 0,01$

2. $p(X = 0) = C_{50}^0 \times 0,01^0 \times (1 - 0,01)^{50-0} \simeq 60,5\%$

$$p(X = 1) = C_{50}^1 \times 0,01^1 \times (1 - 0,01)^{50-1} \simeq 30,5\%$$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) \simeq 9\%$$

3. il faudrait prélever au maximum 10 pièces pour que la probabilité qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse soit d'au moins 90%, car :

$$\begin{aligned} p(X=0) \geq 0,9 &\iff Cn^0 \times 0,01^0 \times (1-0,01)^{n-0} \geq 0,9 \\ &\iff 0,99^n \geq 0,9 \iff n \leq \frac{\ln 0,9}{\ln 0,99} \iff n \leq 10,4 \implies n \leq 10 \text{ soit 10 pièces au plus} \end{aligned}$$

6.2 corrigé devoir maison 2

corrigé Devoir Maison

exercice 1 : 24 page 94

déterminer l'ensemble de définition et écrire sous la forme d'une somme de logarithmes

a. $f(x) = \ln((x^2(x-3)))$

- ensemble de définition :

$f(x) = \ln((x^2(x-3)))$ n'existe que si $x^2(x-3) > 0$.

il suffit donc d'étudier le signe de $x^2(x-3)$.

on utilise un tableau de signes.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
x^2		+	0	+	annulations $x^2 = 0 \iff x = 0$
$x-3$		-		-	$x-3 = 0 \iff x = 3$
$x^2(x-3)$		-	0	-	

conclusion : $D_f =] 3 ; +\infty [$

- écrire sous la forme d'une somme de logarithmes :

$$f(x) = \ln((x^2(x-3))) = \ln(x^2) + \ln(x-3) = 2\ln x + \ln(x-3)$$

b. $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+3}\right)$

- ensemble de définition :

$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+3}\right)$ n'existe que si $\frac{4-x}{x+3} > 0$.

il suffit donc d'étudier le signe de $\frac{4-x}{x+3}$.

on utilise un tableau de signes.

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$4-x$		+		+	annulations $4-x = 0 \iff x = 4$
$x+3$		-	0	+	$x+3 = 0 \iff x = -3$
$\frac{4-x}{x+3}$		-		+	

conclusion : $D_f =] -3 ; 4 [$

- écrire sous la forme d'une somme de logarithmes :

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+3}\right) = \ln(4-x) - \ln(x+3)$$

- a. étudier les variations de f avec $f(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$ pour $x > 0$
 b. déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de f en $x = 1$

a. $f'(x) = 2x - 0 + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x}$

• annulation de $f'(x)$: $\frac{2x^2 + 2}{x} = 0 \iff 2x^2 + 2 = 0$

de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $b = 0$ donc Δ non nécessaire, on isole x .

$2x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = \frac{-2}{2} = -1$ qui n'a pas de solution réelle donc la $f'(x)$ ne s'annule pas.

• signe de $f'(x)$ pour $x > 0$

$\frac{2x^2 + 2}{x}$ est du signe de $2x^2 + 2$ car $x > 0$

$x^2 + 2$ est positif strict car $x^2 > 0$ et $2 > 0$

donc

$f'(x) > 0$ pour $x > 0$

- variations de f : f croît strictement pour $x > 0$ car $f'(x) > 0$ pour $x > 0$
 (un tableau de signes n'est pas nécessaire)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\nearrow$	

- b. déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

avec

$f(1) = 1^2 - 1 + 2\ln 1 = 0$

et

$f'(1) = \frac{2 \times 1^2 + 2}{1} = 4$

donc

$y = 4(x - 1) + 0$

donc

$y = 4x - 4$

6.3 corrigé devoir maison 3

corrigé Devoir Maison

exercice 122 page 104

1. étude de l'offre.

a. sens de variation :

$$f(x) = 4\ln(x) + 1$$

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$\text{or } \frac{4}{x} > 0 \text{ pour } x \in [1; 8]$$

$$\text{par conséquent, } f'(x) > 0 \text{ pour } x \in [1; 8]$$

$$\text{en conclusion, } f \text{ est strictement croissante sur } x[1; 8]$$

b. équation $f(x) = 5$

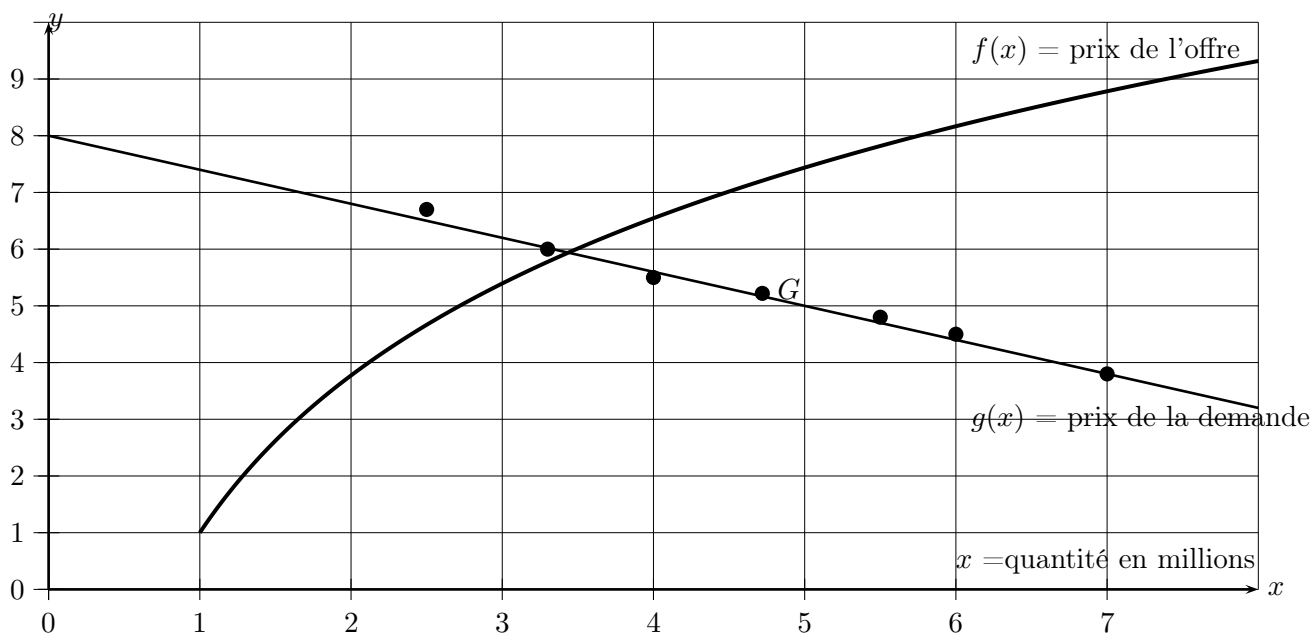
$$f(x) = 5$$

$$\Leftrightarrow 4\ln(x) + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e^1$$

c. courbe



2. étude de la demande.

a. nuage de points

un ajustement affine est justifié car les points sont relativement alignés

b. point moyen

la calculatrice donne $G(\bar{x} \simeq 4,72; \bar{y} = 5,22)$

c. droite de régression

la calculatrice donne : $p(x) = -0,6x + 8,1$ à 0,1 près.

	quantité en millions : x_i	2,5	3,3	4	5,5	6	7
d. valeurs de $g(x_i)$	prix de la demande en euros : y_i	6,7	6	5,5	4,8	4,5	3,8
	$g(x_i)$	6,6	6,12	5,7	4,8	4,5	3,9

si le prix était en francs, le coefficient directeur serait $a \simeq -3,93$ ($-0,6 \times 6,55957$)

3. étude du point d'équilibre.

a. sens de variation de h

$$h(x) = 4\ln(x) + 0,6x - 7,1$$

$$h'(x) = 4 \times \frac{1}{x} + 0,6 = \frac{4}{x} + 0,6$$

$$\text{or } \frac{4}{x} > 0 \text{ pour } x \in [1; 8] \text{ et } 0,6 > 0$$

$$\text{par conséquent, } h'(x) > 0 \text{ pour } x \in [1; 8]$$

en conclusion, h est strictement croissante (monotone) sur $x[1; 8]$

b. équation $h(x) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet h(1) \simeq -6,5 < 0 \\ \bullet h(8) \simeq 6 > 0 \\ \bullet h \text{ est continue sur } [1; 8] \text{ en tant que somme de fonctions continues} \\ \bullet h \text{ est strictement croissante sur } [1; 8] \end{array} \right.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $h(x) = 0$ possède une solution unique q dans $[1; 8]$

c. approximation de la quantité d'équilibre.

à l'équilibre on a : prix de l'offre = prix de la demande

$$\text{donc : } f(x) = g(x)$$

$$\text{donc : } 4\ln x + 1 = -0,6x + 8,1$$

$$\text{soit : } 4\ln x + 1 + 0,6x - 8,1 = 0$$

$$\text{d'où : } h(x) = 0$$

la calculatrice permet d'obtenir

x	3,49	3,50
$h(x)$	-0,0064	0,01105

on a donc $3,49 < q < 3,5$ par conséquent $q \simeq 3,5$ à 0,01 près

d. prix d'équilibre et chiffre d'affaire au prix d'équilibre.

le prix d'équilibre est environs égal à $f(3,5) \simeq 6$ euros.

le chiffre d'affaire est alors de : $3,5 \times 6 = 21$ millions d'euros.

exercice 114 page 103

1. soit la fonction φ telle que $\varphi(x) = x - 2 - 2\ln x$ sur $[2; 20]$

a. variations de φ et tableau de variations.

dérivée

$$\varphi(x) = x - 2 - 2\ln x$$

$$\varphi'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x}$$

annulation et signe de la dérivée sur $[2; 20]$

$\frac{x-2}{x}$ est une fraction dont on peut consigner le signe dans un tableau de signes.

x	2	20
$x-2$	0	+
x		+
$\frac{x-2}{x}$	0	+

Annulations :
 $x-2=0 \iff x=2$
 $x=0$

tableau variations de φ sur $[2; 20]$

x	2	20
$\varphi'(x)$	0	+
$\varphi(x)$	$\simeq -1,4$	$\nearrow \simeq 12$

- b. φ s'annule une seule fois sur $]2; 20]$

on justifie ce fait par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \varphi(2) < 0 \\ \bullet \varphi(20) > 0 \\ \bullet \varphi \text{ est continue sur }]2; 20] \text{ en tant que somme de fonctions continues} \\ \bullet \varphi \text{ est strictement croissante sur }]2; 20] \end{array} \right.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une solution unique α dans $]2; 20]$

la calculatrice permet d'obtenir

x	5,3	5,4
$\varphi(x)$	-0,03	0,02

on a donc $\alpha \simeq 5,4$

- c. on déduit de a. et b. le signe de φ sur $]2; 20]$

x	2	$\alpha \simeq 5,4$	20
$\varphi(x)$	-	0	+

2. soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x \ln x}{x-2}$ sur $]2; 20]$

- a. dérivée

$$f = \frac{u}{v} \text{ donc } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} u = x \ln x \implies u' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ v = x - 2 \implies v' = 1 \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1) \times (x - 2) - (x \ln x) \times 1}{(x - 2)^2} = \frac{x \ln x - 2 \ln x + x - 2 - x \ln x}{(x - 2)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x - 2)^2}$$

annulation et signe de la dérivée sur $]2; 20]$

$\frac{\varphi(x)}{(3-x)^2}$ est une fraction dont on peut consigner le signe dans un tableau de signes.

or le numérateur est du signe de $\varphi(x)$ qui a été déterminé ci dessus

et le dénominateur $(x-2)^2$ est un carré donc positif

donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$, d'où :

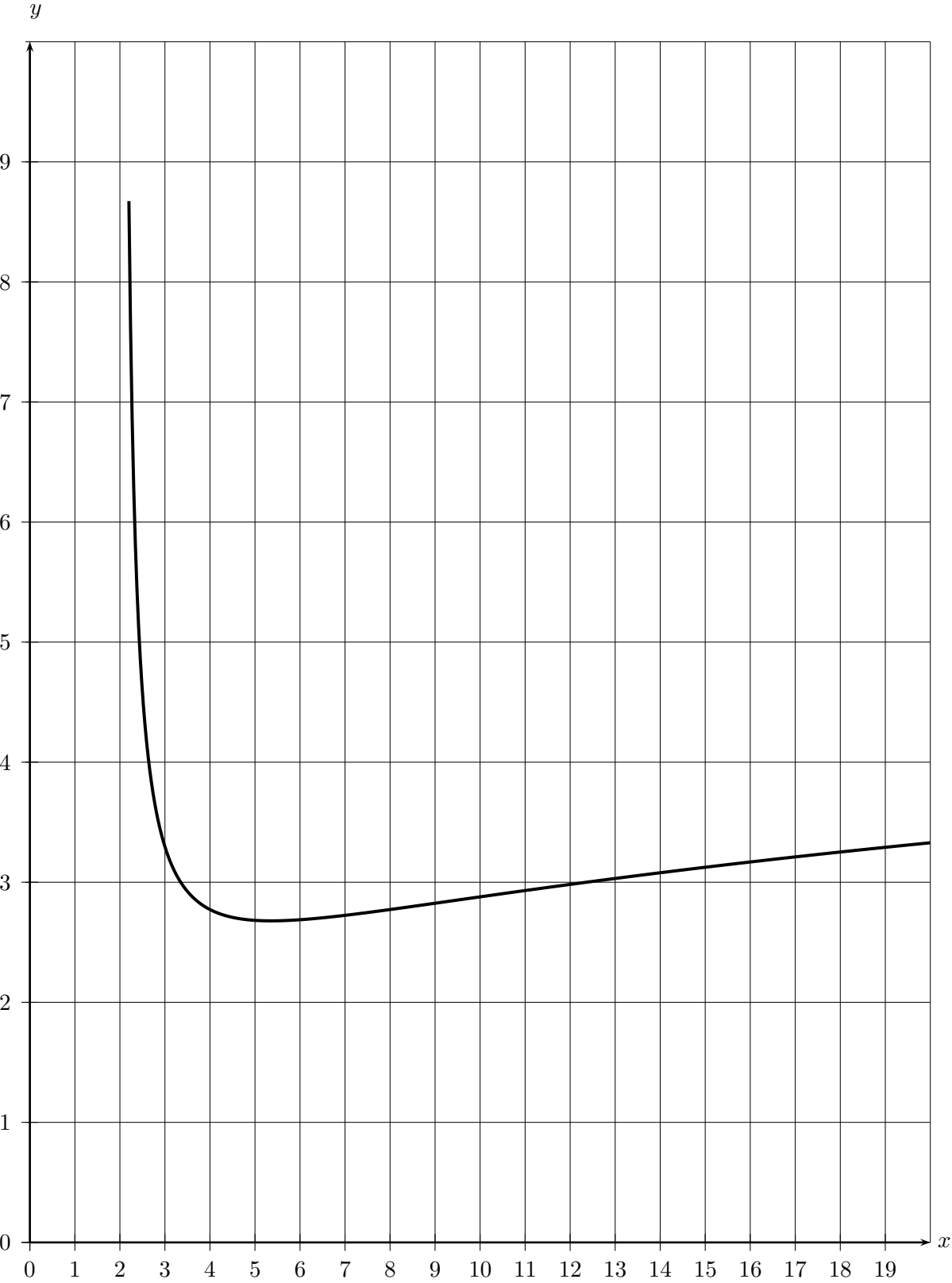
tableau variations de f sur $]2; 20]$

x	2	$\alpha \simeq 5,4$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\simeq 2,72$	$\nearrow$ $\simeq 3,32$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x \ln x}{x-2} \right) = \frac{2 \times \ln 2}{0^+} = +\infty$$

- b. la tangente est horizontale uniquement en $x = \alpha$ car la dérivée s'annule uniquement en $x = \alpha$ comme le montre le tableau de variations

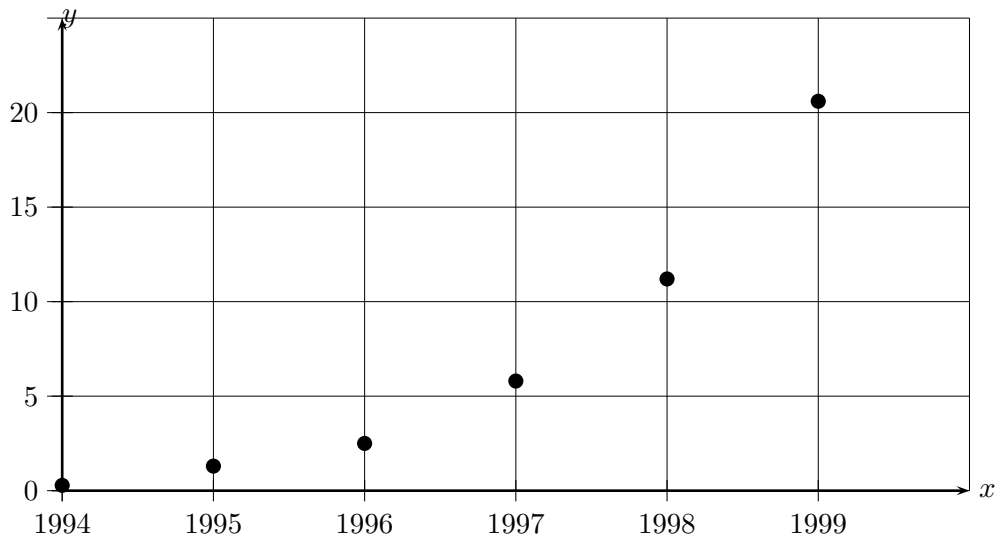
c. courbe



6.4 corrigé devoir maison 4

Exercice 1 : (Exercice 98 page 106)

(a) représentation graphique



La croissance semble de nature exponentielle

(b) $f(x) = 60$

$$\Leftrightarrow 0,18 \times 2,28^x = 60$$

$$\Leftrightarrow 2,28^x = \frac{60}{0,18}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2,28^x) = \ln\left(\frac{60}{0,18}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(2,28) = \ln\left(\frac{60}{0,18}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{60}{0,18}\right)}{\ln(2,28)} \simeq 7,04$$

C'est donc durant l'année $1994 + 7 = \boxed{2001}$ que le nombre de lignes de mobiles dépasse 60 millions

(c) $f(x) = 70$

$$\Leftrightarrow 45,65 \times e^{0,06x} = 70$$

$$\Leftrightarrow e^{0,06x} = \frac{70}{45,65}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{0,06x}) = \ln\left(\frac{70}{45,65}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,06x = \ln\left(\frac{70}{45,65}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{70}{45,65}\right)}{0,06} \simeq 7,12$$

C'est donc durant l'année $2010 + 7 = \boxed{2017}$ que le nombre de lignes de mobiles dépasse 70 millions

Exercice 2 : (Exercice 99 page 106)

1. (a) $f(x) = 0$

$$\iff \frac{2(1 + \ln x)}{x} = 0$$

$$\iff 2(1 + \ln x) = 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff 1 + \ln x = \frac{0}{2} = 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff \ln x = -1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff x = e^{-1} \text{ et } x \neq 0$$

$$\boxed{S = \{e^{-1}\}}$$

(b) $f(x) > 0$

$$\iff \frac{2(1 + \ln x)}{x} > 0$$

$$\iff 2(1 + \ln x) > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\iff 1 + \ln x > 0$$

$$\iff \ln x > -1$$

$$\iff x > e^{-1}$$

$$\boxed{S =]e^{-1}; +\infty[}$$

2. $f(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$

$$f = \frac{u}{v} \text{ donc } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$$u = 2(1 + \ln x) \implies u' = 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

et

$$v = x \implies v' = 1$$

donc

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2(1 + \ln x) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}}$$

x	0	1	$+\infty$
signe de -2	-	-	
signe de $\ln x$	-	0	+
signe de x^2	+	+	
signe de $f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$ 2 $\searrow$		

3. (a) pour avoir un bénéfice positif il faut produire au moins $e^{-1} \simeq \boxed{0,368}$ milliers d'objets

(b) pour réaliser le bénéfice maximal de $\boxed{2}$ milliers d'euros il faut $\boxed{1}$ millier d'objets

6.5 évaluation 1

Evaluation : fonction logarithme népérien

Nom :

Prénom :

- A. 1. donner si possible, grâce à la calculatrice arrondi à 10^{-3} près par excès si 5, les valeurs de :

$\ln(-3)$	$\ln 0$	$\ln 3$	$\ln(\frac{120 - 150}{3})$	$\ln(\frac{150 - 120}{3})$

2. rappeler le domaine de définition pour la fonction $\ln : D = \dots$

- B. compléter le tableau de propriétés suivant :

quels que soient les nombres $a > 0$, $b > 0$ et l'entier naturel n on a :					
• $\ln(1) =$	• $\ln(e) =$	où $e \simeq$	à 10^{-3} près		
• $\ln(ab) =$	• $\ln(a^n) =$		• $\frac{\ln a}{\ln b} =$		
• $\ln a \times \ln b =$	• $\ln(\sqrt{a}) =$		• $\ln(a + b) =$		
• $\ln(\frac{a}{b}) =$	• $\ln(a^3) =$		• $\ln(\frac{1}{a}) =$		

- C. 1. donner une démonstration logique que la valeur de $\ln 1$ est bien celle que vous proposez ci dessus :

2. a-t-on $\ln(a - b)$ et $\ln a - \ln b$ égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $b > 0$? (oui ou non + justification)

- D. simplifier au maximum x , y et z .

$$x = \ln(ab) + \ln(\frac{a}{b}) - \ln(a^2) + \ln e + \ln(\frac{1}{a}) + \ln(a^4) - \ln(a^3) + \ln(1^2)$$

$$y = \ln(e^2) + 2\ln(\sqrt{e}) - \ln(\frac{1}{e}) + \ln(\frac{2}{e}) + \ln(\frac{e}{2}) - 3$$

$$z = \ln\left(\frac{25\sqrt{5}}{9}\right) - \ln\left(\frac{3 \times 5^2}{27}\right) \quad (\text{pensez aussi au fait que : } 9 = 3^2, 25 = 5^2, 27 = 3^3)$$

E. écrire m sous la forme d'un seul logarithme d'un nombre simplifié

$$m = 2\ln 3 - \ln 5 + 3\ln 10 + \ln 0,08 - 5\ln 2$$

F. donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes en justifiant

a. $A(x) = (2x - 1)\ln(18 - 3x)$

b. $B(x) = \ln(-3x^2 + 6x)$

6.6 corrigé évaluation 1

corrigé évaluation : fonction logarithme népérien

- A. 1. donner si possible, grâce à la calculatrice arrondi à 10^{-3} près par excès si 5, les valeurs de :

$\ln(-3)$	$\ln 0$	$\ln 3$	$\ln(\frac{120-150}{3})$	$\ln(\frac{150-120}{3})$
non défini	non défini	$\simeq 1,099$	non défini	$\simeq 2,303$

2. rappeler le domaine de définition pour la fonction $\ln : D =] 0 ; +\infty [$

- B. compléter le tableau de propriétés suivant :

quels que soient les nombres $a > 0$, $b > 0$ et l'entier naturel n on a :				
• $\ln(1) = 0$	• $\ln(e) = 1$ où $e \simeq 2,718$ à 10^{-3} près			
• $\ln(ab) = \ln a + \ln b$	• $\ln(a^n) = n \ln a$	• $\frac{\ln a}{\ln b} = R.A.S.$		
• $\ln a \times \ln b = R.A.S.$	• $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$	• $\ln(a+b) = R.A.S.$		
• $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$	• $\ln(a^3) = 3 \ln a$	• $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$		

- C. 1. donner une démonstration logique que la valeur de $\ln 1$ est bien celle que vous proposez ci dessus :
quels que soient les nombres $a > 0$, $b > 0$ on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
en particulier pour $a = 1$ et $b = 1$ on a : $\ln(1 \times 1) = \ln 1 + \ln 1$
donc : $\ln 1 = 2 \ln 1$
donc : $0 = \ln 1$
2. a t-on $\ln(a-b)$ et $\ln a - \ln b$ égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $a > b > 0$? (oui ou non + justification)
non,
en effet, pour $a = 2$ et $b = 1$ on a :
 $\ln(2-1) = \ln 1 = 0$ alors que $\ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \neq 0$
donc $\ln(a-b)$ n'est pas égal à $\ln a - \ln b$ pour toutes valeurs de $a > 0$ et $a > b > 0$.

- D. simplifier au maximum x , y et z .

$$x = \ln(ab) + \ln(\frac{a}{b}) - \ln(a^2) + \ln e + \ln(\frac{1}{a}) + \ln(a^4) - \ln(a^3) + \ln(1^2)$$

$$x = \ln a + \ln b + \ln a - \ln b - 2 \ln a + 1 - \ln a + 4 \ln a - 3 \ln a + 0$$

$$x = 0$$

$$y = \ln(e^2) + 2 \ln(\sqrt{e}) - \ln(\frac{1}{e}) + \ln(\frac{2}{e}) + \ln(\frac{e}{2}) - 3$$

$$y = 2 \ln e + 2 \times \frac{1}{2} \ln e - (-\ln e) + \ln 2 - \ln e + \ln e - \ln 2 - 3 \quad y = 2 \times 1 + 1 + 1 - 3 = 1$$

$$z = \ln\left(\frac{25\sqrt{5}}{9}\right) - \ln\left(\frac{3 \times 5^2}{27}\right)$$

$$z = \ln(25\sqrt{5}) - \ln 9 - (\ln(3 \times 5^2) - \ln 27)$$

$$z = \ln 25 + \ln(\sqrt{5}) - \ln 9 - (\ln 3 + \ln(5^2) - \ln 27)$$

$$z = \ln 25 + \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 9 - \ln 3 - 2\ln 5 + \ln 27$$

$$z = \ln(5^2) + \frac{1}{2}\ln 5 - \ln(3^2) - \ln 3 - 2\ln 5 + \ln(3^3)$$

$$z = 2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 5 - 2\ln 3 - \ln 3 - 2\ln 5 + 3\ln 3$$

$$z = \frac{1}{2}\ln 5$$

E. écrire m sous la forme d'un seul logarithme d'un nombre simplifié

$$m = 2\ln 3 - \ln 5 + 3\ln 10 + \ln 0,08 - 5\ln 2$$

$$m = \ln(3^2) - \ln 5 + \ln(10^3) + \ln 0,08 - \ln(2^5)$$

$$m = \ln 9 - \ln 5 + \ln 1000 + \ln 0,08 - \ln 32$$

$$m = \ln\left(\frac{9}{5}\right) + \ln(1000 \times 0,08) - \ln 32$$

$$m = \ln\left(\frac{9}{5}\right) + \ln\left(\frac{80}{32}\right)$$

$$m = \ln\left(\frac{9}{5} \times \frac{80}{32}\right) = \ln\left(\frac{9}{5} \times \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{2}\right)$$

F. donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes en justifiant

a. $A(x) = (2x - 1)\ln(18 - 3x)$

$$\ln(18 - 3x) \text{ n'existe que si } 18 - 3x > 0$$

$$\text{or : } 18 - 3x > 0 \iff x < \frac{18}{3}$$

$$\text{donc : } D_A =]-\infty ; 6[$$

b. $B(x) = \ln(-3x^2 + 6x)$

$$\ln(-3x^2 + 6x) \text{ n'existe que si } -3x^2 + 6x > 0$$

il suffit d'étudier le signe de $-3x^2 + 6x$ qui est un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $c = 0$

• annulations : (Δ non nécessaire, on met x en facteur)

$$-3x^2 + 6x = 0 \iff x(-3x + 6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{-6}{-3} = 2$$

• signe :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-3x^2 + 6x$	-	0	+	0

$$\text{conclusion : } D_B =]0 ; 2[$$

6.7 évaluation 2

Evaluation : fonction logarithme népérien

Nom :

Prénom :

A. rappeler les résultats de cours :

si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \dots$ pour $x > 0$.

si $f = \ln u$ où u est une fonction dérivable alors $f' = \dots$ pour $u > 0$.

B. calculer la dérivée de la fonction donnée dans chacun des cas suivants.

(détailler les calculs, simplifier au maximum le résultat et mettre au même dénominateur si possible)

1. $f(x) = -5x + 4 + \ln x$

2. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 10x - 8 + \frac{1}{x} - 3\ln x$

3. $f(x) = x^2(5 - \ln x)$

4. $f(x) = \frac{4x - 4\ln x}{2x}$

C. soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 + 3 - 16\ln x$ pour $x \in [1 ; 10]$

1. étudier les variations de la fonction f : (dérivée, annulation et signe de la dérivée, tableau de variations)
2. déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$.

6.8 corrigé évaluation 2

corrigé évaluation : fonction logarithme népérien

A. rappeler les résultats ...de cours :

si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

si $f = \ln u$ où u est une fonction dérivable alors $f' = \frac{u'}{u}$ pour $u > 0$.

B. calculer la dérivée de la fonction donnée dans chacun des cas suivants.

(détailler les calculs, simplifier au maximum le résultat et mettre au même dénominateur si possible)

1. $f(x) = -5x + 4 + \ln x$

$$f'(x) = -5 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-5x + 1}{x}$$

2. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 10x - 8 + \frac{1}{x} - 3\ln x$

$$f'(x) = 9x^2 - 10x + 10 + \frac{-1}{x^2} - 3 \times \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = 9x^2 - 10x + 10 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$h'(x) = \frac{9x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 1 - 3x}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{9x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 3x - 1}{x^2}$$

3. $f(x) = x^2(5 - \ln x)$

$$f = uv \text{ donc } f' = u'v + uv'$$

avec

$$u = x^2 \implies u' = 2x$$

et

$$v = 5 - \ln x \implies v' = -\frac{1}{x}$$

donc

$$f'(x) = 2x(5 - \ln x) + x^2 \times \frac{-1}{x}$$

$$f'(x) = 2x(5 - \ln x) - x$$

$$f'(x) = 10x - 2x\ln x - x$$

$$f'(x) = 9x - 2x\ln x$$

$$f'(x) = x(9 - 2\ln x)$$

$$4. f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$$

$$g = \frac{u}{v} \text{ donc } g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec

$$u = x - \ln x \implies u' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

et

$$v = x \implies v' = 1$$

donc

$$g'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} \times x - (x - \ln x) \times 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{x-1-x+\ln x}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-1 + \ln x}{x^2}$$

C. soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 + 3 - 16\ln x$ pour $x \in [1; 10]$

1. variations de la fonction f :

$$f(x) = 2x^2 + 3 - 16\ln x$$

$$\bullet f'(x) = 4x - 16 \times \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 16}{x}$$

$$\bullet \text{ annulation de } f'(x) : \frac{4x^2 - 16}{x} = 0 \iff 4x^2 - 16 = 0$$

de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $b = 0$ donc Δ non nécessaire, on isole x .

$$4x^2 - 16 = 0 \iff x^2 = \frac{16}{4} = 4 \iff x = -\sqrt{4} = -2 \text{ ou } x = 2$$

donc $f'(x)$ s'annule en $x = 2$ car -2 est hors domaine de définition.

• signe de $f'(x)$ pour $x > 0$

$\frac{4x^2 - 16}{x}$ est du signe de $4x^2 - 16$ car $x > 0$

on utilise la règle du signe de $ax^2 + bx + c$

x	0	2	$+\infty$
$4x^2 - 16$	-	0	+

• variations de f :

x	1	2	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	5	$\searrow$ $\simeq -0,09$	$\nearrow$ $\simeq 166,2$

$$f(2) = 2 \times 2^2 + 3 - 16\ln 2 \simeq -0,09$$

$$f(1) = 2 \times 1^2 + 3 - 16 \times \ln 1 = 5$$

2. équation de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

avec

$$f(1) = 2 \times 1^2 + 3 - 16 \times \ln 1 = 5$$

et

$$f'(1) = \frac{4 \times 1^2 - 16}{1} = -12$$

donc

$$y = -12(x - 1) + 5$$

donc

$$y = -12x + 17$$

6.9 évaluation 3

Evaluation : fonction logarithme népérien

Nom :

Prénom :

exercice 1 :

1. rappelez les limites usuelles à connaître ci dessous.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x =$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x =$
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} =$ pour $n \geq 1$ entier
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$	• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x =$ pour $n \geq 1$ entier

x^n l'emporte sur $\ln x$ quand x tend vers $+\infty$ ou 0^+

2. rédigez la détermination des limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4 + \ln x)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) \ln x$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x + 1)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 4 \ln x \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right)$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2e - x \ln x)$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 1 - \ln x)$

(montrer que l'on a une forme indéterminée puis lever l'indétermination en mettant x en facteur)

exercice 2 :

1. Rappeler le cours :

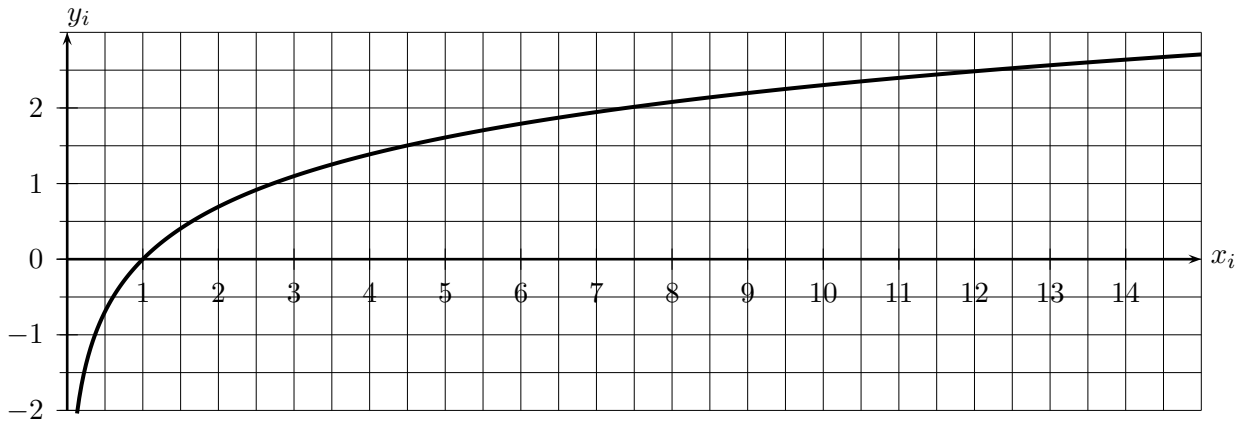
pour un nombre a quelconque : $\ln x = a \iff x =$

pour $x > 0$ et $y > 0$: $\ln x = \ln y \iff$

pour un nombre a quelconque : $\ln x < a \iff$

2. Résoudre l'équation $\ln x = 2,5$:

a. Graphiquement à 10^{-1} grâce à la courbe donnée ci dessous, on trouve : $\ln x = 2,5 \iff x \simeq$



b. à 10^{-2} grâce à la calculatrice.

x		
$\ln x$		

 donc $\ln x = 2,5 \iff x \simeq$

c. Algébriquement en valeur exacte puis à 10^{-4} près. (donner $S = \dots$)

3. Résoudre algébriquement l'inéquation : $\ln x > 2,5$: (donner $S = \dots$)

4. Résoudre algébriquement l'inéquation : $\ln x < 2,5$: (donner $S = \dots$)

5. Résoudre algébriquement l'équation : $\ln(10 - 2x) = \ln(x - 5)$: (donner $S = \dots$)

6.10 corrigé évaluation 3

corrigé évaluation : fonction logarithme népérien

exercice 1 :

1. rappelez les limites usuelles à connaître ci dessous.

$$\begin{array}{ll} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ pour } n \geq 1 \text{ entier} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 & \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \text{ pour } n \geq 1 \text{ entier} \end{array}$$

x^n l'emporte sur $\ln x$ quand x tend vers $+\infty$ ou 0^+

2. rédigez la détermination des limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (4) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty - 4 + (+\infty) = +\infty$ (par addition)

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = (1 - (+\infty)) \times (+\infty) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$
(par multiplication)

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = -\infty + 0 + 1 = -\infty$ (par addition)

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 4 \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 \ln x) = +\infty - 4 \times (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 2 \times (+\infty) - 1 - 0 = +\infty$ (par addition)

f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2e - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e) - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 2e - 0 = 2e$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty - 1 - (+\infty) = +\infty - \infty$
qui est une forme indéterminée

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = (+\infty) \times (4 - 0 - 0) = +\infty \text{ (par produit)}$$

exercice 2 :

1. Rappeler le cours :

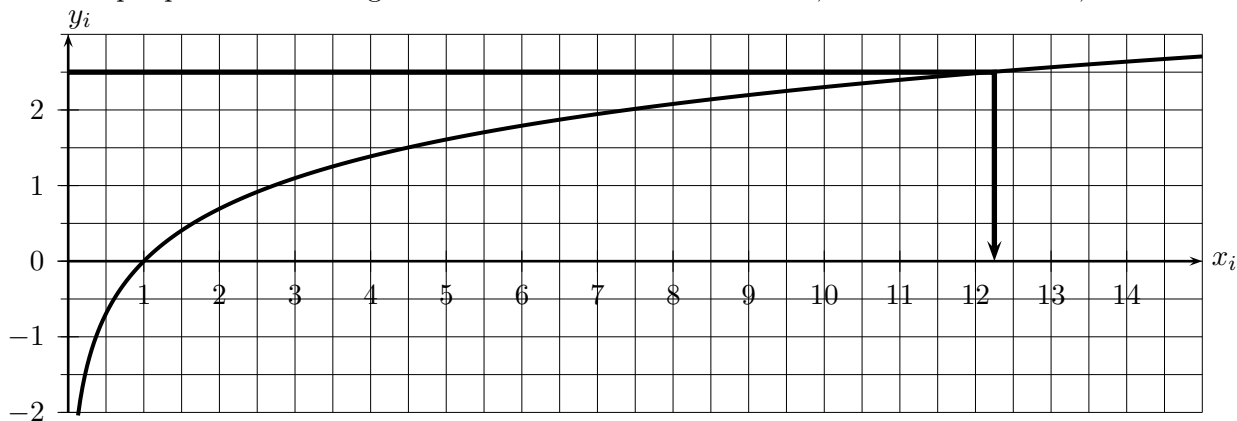
pour un nombre a quelconque : $\ln x = a \iff x = e^a$

pour $x > 0$ et $y > 0$: $\ln x = \ln y \iff x = y$

pour un nombre a quelconque : $\ln x < a \iff 0 < x < e^a$

2. Résoudre l'équation $\ln x = 2,5$:

a. Graphiquement à 10^{-1} grâce à la courbe donnée ci dessous, on trouve : $\ln x = 2,5 \iff x \simeq$



b. à 10^{-2} grâce à la calculatrice.

x	12,18	12,19
$\ln x$	2,49	2,5006

donc $\ln x = 2,5 \iff x \simeq 12,18$

c. Algébriquement en valeur exacte puis à 10^{-4} près. (donner $S = \dots$)

$$\ln x = 2,5 \iff x = e^{2,5} \simeq 12,1825 \quad \text{donc} \quad S = \{ e^{2,5} \}$$

3. Résoudre algébriquement l'inéquation : $\ln x > 2,5$: (donner $S = \dots$)

$$\ln x > 2,5 \iff x > e^{2,5} \quad \text{donc} \quad S =] e^{2,5} ; +\infty[$$

4. Résoudre algébriquement l'inéquation : $\ln x < 2,5$: (donner $S = \dots$)

$$\ln x < 2,5 \iff x < e^{2,5} \quad \text{donc} \quad S =] 0 ; e^{2,5}[$$

5. Résoudre algébriquement l'équation : $\ln(10 - 2x) = \ln(x - 5)$: (donner $S = \dots$)

cette équation n'a de sens que pour : $10 - 2x > 0$ et $x - 5 > 0$

$$\iff x < 5 \quad \text{et} \quad x > 5$$

$$\text{donc } D_f = \emptyset$$

$$\text{Dans } D_f \quad \text{on a} \quad \ln(10 - 2x) = \ln(x - 5) \iff 10 - 2x = x - 5$$

$$\iff 15 = 3x \iff x = 5$$

$$5 \notin D_f \quad \text{donc } S = \emptyset$$

6.11 corrigé évaluation 5

Evaluation : fonction logarithme népérien

Nom :

Prénom :

1. lecture graphique :

on dispose ci dessous du graphique partiel de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$

la droite (D) est asymptote à C_u en $-\infty$ et aussi tangente à C_u en $x = -2$

on sait de plus que la fonction f est définie par $f = \ln u$

a. déterminer le domaine de définition de f

$\ln u$ n'existe que si $u > 0$

or

$$u(x) > 0 \iff x \in] -\infty ; 5 [$$

donc

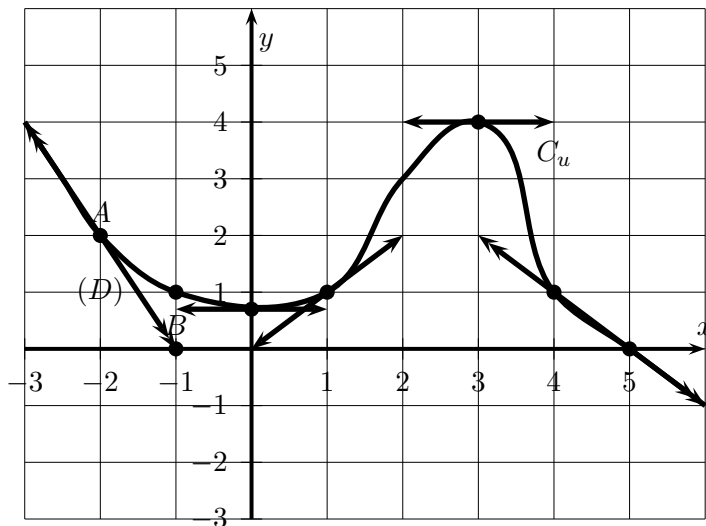
$$D_f =] -\infty ; 5 [$$

b. déterminer les valeurs exactes

et approchées à 0,01 près de :

$$f(-2) = \ln[u(-2)] = \ln 2 \simeq 0,69$$

$$f(4) = \ln[u(4)] = \ln 1 = 0$$



c. déterminer les valeurs exactes des nombre suivants : (rappeller : si $f = \ln u$ alors $f' = \frac{u'}{u}$)

$$f'(-2) = \frac{u'(-2)}{u(-2)} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{car} \quad u'(-2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{-1 - (-2)} = -2 \quad \text{et} \quad u(-2) = 2$$

$$f'(3) = \frac{u'(3)}{u(3)} = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{car} \quad u'(3) = 0 \quad \text{et} \quad u(3) = 4$$

d. sachant que $u > 0$ sur D_f , et que $f' = \frac{u'}{u}$ on peut dire que f' et u' ont le même signe

e. on en déduit que les variations de f et u sont identiques

f. étudier l'annulation de f' (donner les valeurs d'annulation en justifiant)

$$f(x) = 0 \iff \ln[u(x)] = 0 \iff u(x) = e^0 = 1 \iff x \in \{-1 ; 1 ; 4\}$$

g. en déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	3	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$
		$\simeq \ln(0,8)$	$\ln 4$		

h. déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln[u(x)] = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

i. déterminer $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \ln[u(x)] = \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$$

j. résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

$$f(x) > 0 \iff \ln[u(x)] > 0 \iff u(x) > e^0 = 1 \iff x \in] -\infty ; -1 [\cup] 1 ; 4 [$$

k. en déduire le tableau de signes de f

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-

2. rappelez les résultats de cours :

(1) domaine de définition : $\ln(u)$ n'existe que si $u > 0$

(2) dérivée : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

(3) variations : les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation

3. calculer les dérivées suivantes et réduire au même dénominateur :

a. $f(x) = 1 - x + 4 \ln(1 - x)$

$$f'(x) = -1 + 4 \times \frac{-1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{-1(1-x) - 4}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{x-5}{1-x}$$

b. $f(x) = \ln(2x-1) - 2 \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} - 2 \times \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{(2x-1)(x+1)}$$

4. donner le sens de variation de chacune des fonctions sans utiliser la dérivation

a. $f(x) = \ln(-8x+16)$ pour $x < -2$

f a le même sens de variation que u avec $u(x) = -8x+16$ qui est affine décroissante donc f est décroissante

b. $f(x) = \ln(16x-8)$ pour $x > \frac{1}{2}$

f a le même sens de variation que u avec $u(x) = 16x-8$ qui est affine croissante donc f est croissante

5. Bonus

un jeu consiste à lancer un dé équilibré à 8 faces numérotées de 1 à 8

si le score est 8 alors le joueur reçoit 20 euros sinon il ne reçoit rien

pour participer au jeu, il faut payer 4 euros

soit X le gain du joueur où : gain = argent éventuellement reçu - prix du jeu

a. valeurs possibles pour X :

$$X \in \{0-4 ; 20-4\} \text{ soit } X \in \{-4 ; 16\}$$

b. loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau

valeurs possibles : x_i	-4	16	total
probabilités : p_i	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

c. $E(X) = -4 \times \frac{7}{8} + 16 \times \frac{1}{8} = -\frac{12}{8} = -1,5$

en moyenne le gain est de -1,5 euros par partie, le jeu est à l'avantage de l'organisateur

$$V(X) = \sum x_i p_i^2 - E(X)^2$$

$$V(X) = (-4)^2 \times \frac{7}{8} + 16^2 \times \frac{1}{8} - (1,5)^2 = 43,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{43,75} \simeq 6,6$$