

Chapitre 7

Fonctions exponentielles

Du niveau de base au niveau concours

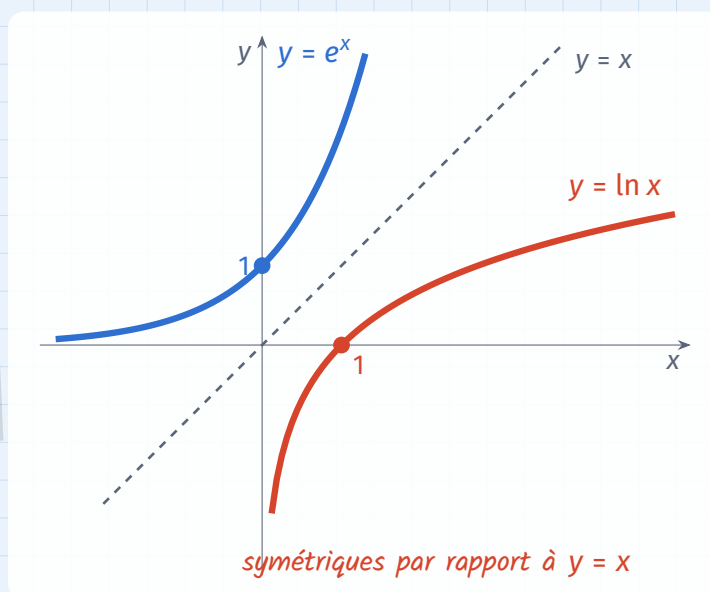
À connaître par cœur

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$e^x \geq 1 + x \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Défi de concours

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1	La fonction exponentielle	5
2	Propriétés algébriques	6
3	Équations, inéquations, systèmes	7
4	Dérivée, étude et courbe	8
5	Limites et croissances comparées	8
6	Dérivée de e^u , primitives	10
7	Exponentielle de base a	11
8	Fonctions puissances x^α	12
9	Études complètes	13
9.1	Une asymptote oblique et un minimum caché	13
9.2	Un prolongement et une demi-tangente	14
10	Inégalités et suites	15
11	Les pièges classiques	16
12	Les astuces des concours	17
13	L'essentiel du chapitre en une page	19
14	Niveau 1 · Bases	20
15	Niveau 2 · Bac	21
16	Niveau 3 · Approfondissement	23
17	Niveau 4 · Concours	24
18	Équations et inéquations	26
19	Limites et croissances comparées	28
20	Dérivées et primitives	30
21	Puissances réelles et base a	32

22 Études de fonctions	34
23 Défis de concours	36
24 Corrigés du niveau 1	38
25 Corrigés du niveau 2	40
26 Corrigés du niveau 3	44
27 Corrigés du niveau 4	46
28 Corrigés : équations, inéquations	49
29 Corrigés : limites	52
30 Corrigés : dérivées et primitives	56
31 Corrigés : puissances et base a	60
32 Corrigés : études de fonctions	63
33 Corrigés : défis de concours	68

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Équations et inéquations, Limites et croissances comparées, Dérivées et primitives, Puissances réelles et base a , Études de fonctions, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|---|
| ☐ passer de $\ln$ à $\exp$: $\ln x = y \iff x = e^y$; | ☐ dériver e^u et primitiver $u' e^u$; |
| ☐ démontrer les propriétés algébriques ; | ☐ primitiver $(ax + b) e^{\lambda x}$ par identification ; |
| ☐ résoudre équations, inéquations, systèmes ; | ☐ calculer avec a^x et x^a ; |
| ☐ démontrer $(e^x)' = e^x$ et $e^x \geq 1 + x$; | ☐ étudier une fonction, tracer sa courbe ; |
| ☐ écrire une tangente, utiliser la convexité ; | ☐ prolonger, trouver une demi-tangente ; |
| ☐ démontrer les limites de référence ; | ☐ démontrer que $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$; |
| ☐ lever une forme indéterminée avec $\exp$; | ☐ étudier une suite récurrente ou implicite. |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 La fonction exponentielle

Définition : exponentielle népérienne

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (chapitre 5) : c'est une **bijection** de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **exponentielle** (népérienne), notée $\exp$:

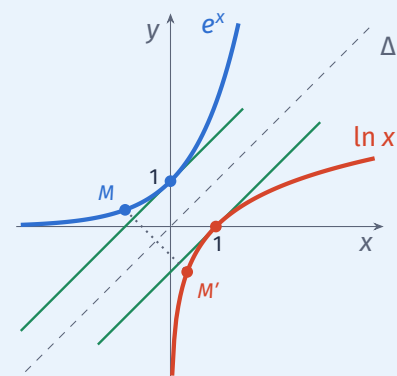
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[,$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$\exp(x) = y \iff x = \ln y.$$

Premières propriétés

- $\exp(x) > 0$ pour tout réel x ; $\exp(0) = 1$ ($\ln 1 = 0$) et $\exp(1) = e$ ($\ln e = 1$).
- $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\exp(\ln y) = y$ pour tout $y > 0$.
- $\exp$ est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- Dans un repère orthonormé, les courbes de $\exp$ et de $\ln$ sont **symétriques** par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



$M(a, e^a)$ et $M'(e^a, a)$; les tangentes $y = x + 1$ et $y = x - 1$ se correspondent aussi

Démonstration. C'est le théorème de la bijection réciproque (chapitre 1) : la réciproque d'une bijection continue strictement croissante de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, et ses limites aux bornes sont les bornes 0 et $+\infty$. Directement : si $A > 0$ et $x > \ln A$, alors $\exp(x) > \exp(\ln A) = A$. Enfin $M(a, b) \in C_{\exp} \iff b = \exp(a) \iff a = \ln b \iff M'(b, a) \in C_{\ln}$.

La notation e^x

Pour tout **rationnel** r : $\ln(e^r) = r \ln e = r$ (chapitre 5), donc $\exp(r) = e^r$: la fonction $\exp$ **prolonge** à $\mathbb{R}$ les puissances rationnelles du nombre e . On note donc, pour **tout** réel x : $e^x = \exp(x)$.

Désormais $e^{\sqrt{2}}$, e^π ont un sens, et pour **tout** réel y : $\ln x = y \iff x = e^y$; $\ln x < y \iff 0 < x < e^y$.

Exemple : utiliser la réciproque

- $\ln(2x+1) = \sqrt{3} \ (x > -\frac{1}{2}) \iff 2x+1 = e^{\sqrt{3}} \iff x = \frac{e^{\sqrt{3}} - 1}{2}$ (une équation impossible à résoudre au chapitre 5).
- $g(x) = e^{\ln x} + \ln(e^{-x})$ n'est définie que pour $x > 0$, et alors $g(x) = x - x = 0$: g est nulle sur $]0, +\infty[$, mais ce n'est **pas** la fonction nulle de $\mathbb{R}$. Le domaine fait partie de la fonction.
- $f(x) = \ln(1+x^2)$ est continue et strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: bijection de I sur $J = [0, +\infty[$. Pour $y \geq 0$ et $x \geq 0$: $\ln(1+x^2) = y \iff x^2 = e^y - 1 \iff x = \sqrt{e^y - 1}$ (car $e^y - 1 \geq 0$). Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$ sur $[0, +\infty[$.

2 Propriétés algébriques**Théorème fondamental**

Pour tous réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

(l'exponentielle transforme les sommes en produits).

Démonstration. Les réels $e^a \times e^b$ et e^{a+b} sont strictement positifs, et $\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b = \ln(e^{a+b})$. Comme $\ln$ est **injective** (strictement croissante), $e^a \times e^b = e^{a+b}$.

Conséquences (a, b réels, $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q}$)

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{na}$$

$$(e^a)^r = e^{ra}$$

$$\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$$

Démonstrations. $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$; $e^{a-b} \times e^b = e^a$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $(e^a)^{n+1} = e^{na} \times e^a = e^{(n+1)a}$; si $n < 0$: $(e^a)^n = \frac{1}{(e^a)^{-n}} = \frac{1}{e^{-na}} = e^{na}$. Si $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) : $(e^{ra})^q = e^{pa} = (e^a)^p$, donc e^{ra} est

l'unique réel **positif** dont la puissance q -ième vaut $(e^a)^p$, c'est-à-dire $(e^a)^{\frac{p}{q}}$. **Cohérence** : pour $a = 1$, on retrouve que e^r (valeur de exp) est bien la puissance rationnelle du nombre e : la notation e^x respecte toutes les règles de calcul sur les exposants.

Exemple : calculer, simplifier

- $A = \frac{e^{3x+1} (e^{-x})^2}{e^{x-2}} = e^{3x+1-2x-(x-2)} = e^3$ pour tout réel x .
- $e^{2 \ln 3 - \ln 2} = \frac{(e^{\ln 3})^2}{e^{\ln 2}} = \frac{9}{2}$; $e^{-\frac{1}{2} \ln 4} = \frac{1}{\sqrt{e^{\ln 4}}} = \frac{1}{2}$; $\ln \frac{e^5}{\sqrt[3]{e}} = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$.
- Pour tout réel x (multiplier en haut et en bas par e^x) : $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$, qui est donc dans $] -1, 1[$.
- **Un produit devient une somme** : $P_n = e^{\frac{1}{n^2}} \times e^{\frac{2}{n^2}} \times \dots \times e^{\frac{n}{n^2}} = e^{\frac{1+2+\dots+n}{n^2}} = e^{\frac{n+1}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ (continuité de exp).

Remarque. Lien avec le chapitre 6. Le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ vérifie la même règle $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$: c'est ce qui justifie la notation. On pose $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ (a, b réels) : complexe de module e^a et d'argument b ; en combinant les deux règles, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tous complexes z et z' .

3 Équations, inéquations, systèmes

Comparer, résoudre (a, b, k réels)

$$e^a = e^b \iff a = b$$

$$e^a < e^b \iff a < b$$

$$e^a \leq e^b \iff a \leq b$$

Si $k \leq 0$: $e^x = k$ et $e^x < k$ n'ont **aucune** solution, $e^x > k$ est vraie pour tout x . Si $k > 0$: $e^x = k \iff x = \ln k$ et $e^x < k \iff x < \ln k$.

Méthode : résoudre avec des exponentielles

1. Écrire le domaine (chaque $\ln(\dots)$ exige $(\dots) > 0$, chaque dénominateur doit être non nul).
 2. Se ramener à $e^A = e^B$, $e^A \leq e^B$ ou $e^A = k$, puis comparer les exposants. 3. Si e^x , e^{2x} , e^{-x} ... apparaissent ensemble : poser $X = e^x > 0$ ($e^{2x} = X^2$; multiplier par $e^x > 0$ chasse e^{-x} sans changer le sens d'une inégalité). 4. Revenir à $x = \ln X$ pour les seules racines $X > 0$.

Exemple : équations et inéquations

- $e^{x^2} \times e^x = e^6 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x \in \{-3, 2\}$.
- $e^{x+\frac{4}{x}} \leq e^5$ ($x \neq 0$) $\iff x + \frac{4}{x} - 5 \leq 0 \iff \frac{(x-1)(x-4)}{x} \leq 0$; un tableau de signes donne $S =]-\infty, 0[\cup [1, 4]$.
- $e^{3x} - 4e^{2x} + e^x + 6 = 0$: $X^3 - 4X^2 + X + 6 = 0$, de racine évidente -1 : $(X+1)(X-2)(X-3) = 0$. $X = -1$ est impossible ($X > 0$), donc $S = \{\ln 2, \ln 3\}$.
- $3e^x + 4e^{-x} \leq 8 \iff 3X^2 - 8X + 4 \leq 0$ (on a multiplié par $X > 0$) $\iff (3X-2)(X-2) \leq 0 \iff \frac{2}{3} \leq e^x \leq 2$: $S = [\ln \frac{2}{3}, \ln 2]$.
- $\ln(e^x + 3) = 2x$ (définie sur $\mathbb{R}$) $\iff e^x + 3 = e^{2x} \iff X^2 - X - 3 = 0$; seule $X = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ est positive : $S = \{\ln \frac{1+\sqrt{13}}{2}\}$.
- **Domaines** : $\ln(1 - e^{-x})$ existe $\iff e^{-x} < 1 \iff x > 0$; $\frac{1}{e^{2x} - e}$ existe $\iff 2x \neq 1 \iff x \neq \frac{1}{2}$.

Exemple : deux systèmes

$$\begin{cases} e^x - e^{-y} = 1 \\ e^{x-y} = 12 \end{cases} \quad X = e^x > 0, Y = e^{-y} > 0.$$

$X - Y = 1$ et $XY = 12$: $X(X-1) = 12$, soit $X^2 - X - 12 = (X-4)(X+3) = 0$. $X = 4$ et $Y = 3$: $S = \{(2 \ln 2, -\ln 3)\}$.

$$\begin{cases} 2 \ln x - 3e^y = -4 \\ e^y \ln x = 2 \end{cases} \quad X = \ln x, Y = e^y > 0.$$

$X = \frac{3Y-4}{2}$, puis $(3Y-4)Y = 4$, soit $3Y^2 - 4Y - 4 = (3Y+2)(Y-2) = 0$. $Y = 2, X = 1$: $S = \{(e, \ln 2)\}$.

4

Dérivée, étude et courbe

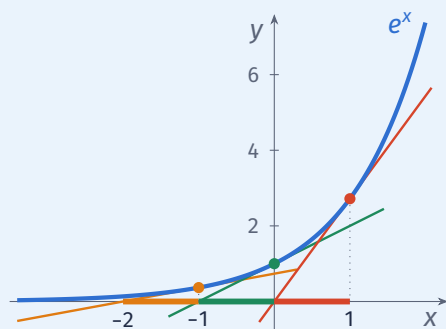
Théorème

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(e^x)' = e^x.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = e^x > 0$. La fonction $\ln$ est dérivable en y et $\ln'(y) = \frac{1}{y} \neq 0$. D'après le théorème de dérivation de la fonction réciproque (chapitre 2), $\exp = \ln^{-1}$ est dérivable en x et $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/e^x} = e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)'$		+	
e^x	0	1	$+\infty$



tangentes en $-1, 0, 1$: chacune coupe (Ox) une unité à gauche du point de contact

- **Variations :** $(e^x)' = e^x > 0$; exp croît de 0 à $+\infty$: $y = 0$ est **asymptote** en $-\infty$; en $+\infty$, $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$ (section 5) : **branche parabolique** de direction (Oy) .
- **Convexité :** $(e^x)'' = e^x > 0$: $C_{\exp}$ est **convexe**, donc au-dessus de toutes ses tangentes.
- **Tangente en a :** $y = e^a(x - a) + e^a = e^a(x - a + 1)$. En 0 : $y = x + 1$. Elle coupe (Ox) en $x = a - 1$: pour tracer la tangente en $M(a, e^a)$, on joint M au point $(a - 1, 0)$ (« sous-tangente » de longueur 1).

L'inégalité fondamentale

Pour tout réel x : $e^x \geq 1 + x$, avec égalité **si et seulement si** $x = 0$. Plus généralement, pour tous réels x et a : $e^x \geq e^a(x - a + 1)$.

Démonstration. $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ a pour dérivée $e^x - 1$, < 0 sur $]-\infty, 0[$ et > 0 sur $]0, +\infty[$: φ a un minimum strict en 0 , et $\varphi(0) = 0$. Puis on applique ce résultat à $x - a$ et on multiplie par $e^a > 0$.

Remarque. Avec $x = \ln t$ ($t > 0$), $e^{x-1} \geq x$ devient $\ln t \leq t - 1$: les inégalités fondamentales des chapitres 5 et 7 sont **la même**, lue sur deux courbes symétriques.

Exemple : combien de tangentes à $C_{\exp}$ passent par un point $P(p, q)$?

La tangente en a passe par $P \iff q = e^a(p + 1 - a)$. Soit $\varphi(a) = e^a(p + 1 - a)$: $\varphi'(a) = e^a(p - a)$. Donc φ croît strictement sur $]-\infty, p]$, de 0 (limite en $-\infty$, car $a e^a \rightarrow 0$, section 5, et $\varphi > 0$ pour $a < p + 1$) à $\varphi(p) = e^p$, puis décroît strictement sur $[p, +\infty[$, de e^p à $-\infty$, en s'annulant en $p + 1$. D'après le TVI et la stricte monotonie :

- $q > e^p$ (P au-dessus de la courbe) : **aucune** tangente ; $q = e^p$ (P sur la courbe) : **une** seule ;
- $0 < q < e^p$ (P entre l'axe (Ox) et la courbe) : **deux** tangentes ; $q \leq 0$: **une** seule, de point de contact $a \geq p + 1$.

Par exemple, depuis O : la tangente en 1 , $y = ex$; depuis $(1, 0)$: la tangente en 2 , $y = e^2(x - 1)$.

5

Limites et croissances comparées

Limites de référence ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

Démonstrations.

- **Bornes :** section 1. **Nombre dérivé :** $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = e^0 = 1$.
- $\frac{e^x}{x}$ en $+\infty$. Soit $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$: $\psi'(x) = e^x - x \geq 1 > 0$ (car $e^x \geq 1 + x$), donc $\psi(x) \geq \psi(0) = 1 > 0$. Ainsi $e^x > \frac{x^2}{2}$, puis $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ pour $x > 0$: par comparaison, $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$.
- **Puissances.** Avec $X = \frac{x}{n} \rightarrow +\infty$: $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^X}{nX}\right)^n = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^X}{X}\right)^n \rightarrow +\infty$, donc $x^n e^{-x} = \frac{1}{e^x/x^n} \rightarrow 0$. En $-\infty$, avec $t = -x \rightarrow +\infty$: $x^n e^x = (-1)^n t^n e^{-t} \rightarrow 0$.

Remarque. Autre preuve, par le chapitre 5 : $\frac{e^x}{x^n} = e^{x-n \ln x} = e^{x(1-n \frac{\ln x}{x})}$, et l'exposant tend vers $+\infty$ car $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$.

Croissances comparées

En $+\infty$: $\ln x \ll x^n \ll e^x$ (chacun est négligeable devant le suivant) ; en $-\infty$, e^x écrase toute puissance de x .

Composée : si $u \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $e^u \rightarrow e^\ell$; si $u \rightarrow +\infty$, alors $e^u \rightarrow +\infty$; si $u \rightarrow -\infty$, alors $e^u \rightarrow 0$.

Méthode : lever une forme indéterminée

Somme ou quotient d'exponentielles : factoriser par le terme dominant (e^{kx} de plus grand k en $+\infty$, de plus petit k en $-\infty$). $e^{\text{petit}} - 1$: faire apparaître $\frac{e^X - 1}{X}$ avec $X \rightarrow 0$. **Changement de variable :** $t = -x$, $t = \frac{1}{x}$, $t = \sqrt{x}$... $\ln(\dots e^x \dots)$: factoriser **dans** le $\ln$.

Exemple : huit limites rédigées

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x^3}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times \frac{1 - x^3 e^{-2x}}{1 + x e^{-x}} = +\infty$ (on factorise par e^{2x} en haut, par e^x en bas).
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 e^{-t} = 0$ (avec $t = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x^2} = t^4$).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) \frac{x}{\sin x} = (2 + 1) \times 1 = 3$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1 \quad (X = \sin x \rightarrow 0, \text{ et } X \neq 0 \text{ pour } 0 < |x| < \pi).$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) \right) = 1 \quad (\text{factoriser par } x e^x \text{ dans le ln}).$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x}} - x^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t (1 - t^4 e^{-t}) = +\infty \quad (t = \sqrt{x}, x^2 = t^4).$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{3x} - e^x} = \frac{1}{2}, \quad \text{car} \quad \frac{e^{3x} - e^x}{x} = 3 \times \frac{e^{3x} - 1}{3x} - \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3 - 1 = 2.$

6 Dérivée de e^u , primitives

Théorème

Si u est dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.

Les primitives de $u' e^u$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $a \neq 0$, les primitives de e^{ax+b} sont les fonctions $\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$.

Démonstration. Dérivée d'une composée (chapitre 2) : $(\exp \cdot u)' = u' \times \exp' \cdot u = u' e^u$; la partie « primitives » en découle (chapitre 5, section 1).

Remarque. Comme $e^u > 0$, $(e^u)'$ a le signe de u' : e^u a les mêmes variations que u . Et $(e^u)'' = (u'' + u'^2) e^u$.

Exemple : dériver

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= e^x \sin x : f_1'(x) = e^x(\sin x + \cos x) & f_2(x) &= e^{\sqrt{x^2+1}} : f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}} \\
 f_3(x) &= \arctan(e^x) : f_3'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} & f_4(x) &= e^x \ln x \quad (x > 0) : f_4'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \\
 f_5(x) &= e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (x \neq 1) : f_5'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} & f_6(x) &= (x^2 - 2x) e^x : f_6'(x) = (x^2 - 2) e^x \\
 f_6 &\text{ est donc croissante sur }]-\infty, -\sqrt{2}] \text{ et sur } [\sqrt{2}, +\infty[, \text{ décroissante sur } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]; f_5 \text{ décroît} \\
 &\text{ sur }]-\infty, 1[\text{ et sur }]1, +\infty[, \text{ comme } u(x) = \frac{x+1}{x-1}.
 \end{aligned}$$

Exemple : primitives : reconnaître $u' e^u$, $u' u^n$, $\frac{u'}{1+u^2}$

- $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[: F(x) = 2 e^{\sqrt{x}} \quad ; \quad \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R} : F(x) = e^{\arctan x}.$
- $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{u'}{1+u^2} \text{ avec } u = e^x : F(x) = \arctan(e^x) \text{ sur } \mathbb{R}.$

$$\bullet e^x (1 + e^x)^3 = u' u^3 \text{ avec } u = 1 + e^x : F(x) = \frac{(1 + e^x)^4}{4} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Méthode : primitives de $(ax + b)e^{\lambda x}$ par identification

On cherche $F(x) = (ax + \beta)e^{\lambda x}$ (même degré que le polynôme) : $F'(x) = (\lambda ax + a + \lambda \beta)e^{\lambda x}$, puis on identifie les coefficients. Pour $\lambda = 1$: une primitive de $(ax + b)e^x$ est $(ax + b - a)e^x$.

Exemple : identifier

- $(1 - 3x)e^x$ ($a = -3, b = 1$) : $F(x) = (4 - 3x)e^x$; la primitive qui s'annule en 0 est $(4 - 3x)e^x - 4$.
- $x(x - 1)e^{2x}$: avec $F(x) = (ax^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$, $F'(x) = (2ax^2 + (2a + 2\beta)x + \beta + 2\gamma)e^{2x}$. On identifie avec $x^2 - x$: $2a = 1$, $2a + 2\beta = -1$, $\beta + 2\gamma = 0$, d'où $a = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ et $F(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 e^{2x}$. **Contrôle** : $F'(x) = (x - 1)e^{2x} + (x - 1)^2 e^{2x} = x(x - 1)e^{2x}$.

7 Exponentielle de base a

Définition : la fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)

Pour tout réel x , on pose $a^x = e^{x \ln a}$.

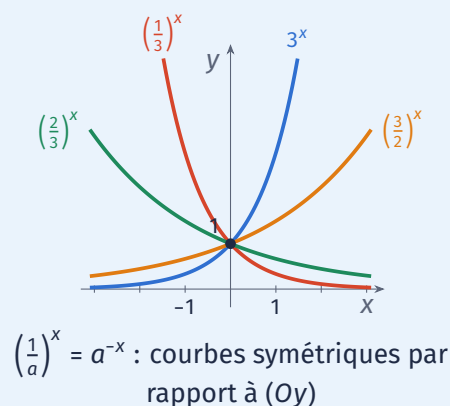
Cohérence : pour r rationnel, $\ln(a^r) = r \ln a$, donc la puissance rationnelle a^r vaut bien $e^{r \ln a}$. Pour $a = e$, on retrouve e^x ; $1^x = 1$; $a^x > 0$ et $\ln(a^x) = x \ln a$. Si $a \neq 1$: $a^x = y \iff x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y$ ($y > 0$) : $x \mapsto a^x$ est la réciproque de $\log_a$ (chapitre 5).

Règles, dérivée ($a, b > 0$; x, y réels)

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad (ab)^x = a^x b^x$$

$x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $(a^x)' = \ln a \times a^x$ et $(a^u)' = u' \ln a \times a^u$.

- $a > 1$ ($\ln a > 0$) : **strictement croissante**, de 0 (en $-\infty$) à $+\infty$ (en $+\infty$) ;
- $0 < a < 1$ ($\ln a < 0$) : **strictement décroissante**, de $+\infty$ (en $-\infty$) à 0 (en $+\infty$) ;
- $a = 1$: constante, égale à 1.



Démonstrations. $a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a}$; $(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{xy \ln a}$; $(e^{x \ln a})' = \ln a \times e^{x \ln a}$ a le signe de $\ln a$. Enfin $(a^x)'' = (\ln a)^2 a^x > 0$ si $a \neq 1$: les courbes sont **convexes**. Pour $a > 1$, avec $X = x \ln a$: $\frac{a^x}{x^n} = \frac{e^X}{X^n} \rightarrow +\infty$: a^x l'emporte sur toute puissance de x .

Exemple : calculer avec des bases quelconques

- $2^{2x+1} - 5 \times 2^x + 2 = 0$: $X = 2^x > 0$, $2X^2 - 5X + 2 = (2X - 1)(X - 2) = 0$, donc $2^x = \frac{1}{2}$ ou $2^x = 2$: $S = \{-1, 1\}$.
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} \geq \left(\frac{9}{4}\right)^x$: comme $\frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, c'est $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$, et $t \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^t$ est **décroissante** :
 $x^2 - 1 \leq -2x \iff x^2 + 2x - 1 \leq 0$: $S = [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$.
- $(\pi^x)' = \ln \pi \times \pi^x$; $(2^{\sqrt{x}})' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{1,01^x} = 0$, bien que $1,01^{1000} \approx 2,1 \times 10^4$ soit très inférieur à $1000^{100} = 10^{300}$.

La base e est la seule qui convienne

Soit $a > 0$. On a $a^x \geq 1 + x$ pour tout réel x **si et seulement si** $a = e$.

Démonstration. Si $a = e$, c'est l'inégalité fondamentale. Réciproquement, $\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \times \ln a \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln a$ si $a \neq 1$ (et 0 si $a = 1$). Si $a^x \geq 1 + x$ pour tout x : pour $x > 0$, $\frac{a^x - 1}{x} \geq 1$; pour $x < 0$, $\frac{a^x - 1}{x} \leq 1$. Par passage à la limite en 0^+ et en 0^- : $\ln a \geq 1$ et $\ln a \leq 1$, donc $\ln a = 1$ et $a = e$. Géométriquement : parmi les courbes de $x \mapsto a^x$, seule celle de $\exp$ admet $y = x + 1$ pour tangente en 0.

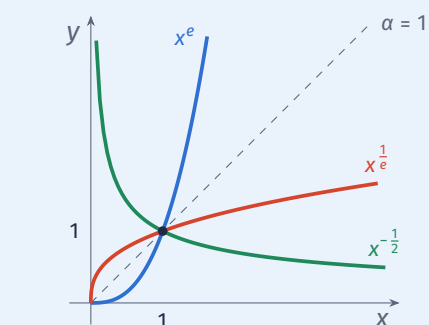
8 Fonctions puissances x^α **Définition : puissance d'exposant réel**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ (c'est la section 7, la variable étant cette fois dans la base).

Pour α rationnel, on retrouve les puissances connues ; $x^{\sqrt{2}}$, x^π n'ont de sens que pour $x > 0$.

Propriétés ($x, y > 0$; α, β réels)

- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
- **Dérivée** : $(x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \boxed{\alpha x^{\alpha-1}}$; $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ ($u > 0$) ; pour $\alpha \neq -1$, une primitive de x^α sur $]0, +\infty[$ est $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- $\alpha > 0$: croissante, de 0 (en 0^+) à $+\infty$; $\alpha < 0$: décroissante, de $+\infty$ à 0. Si $\alpha \neq 0$, c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, de réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.
- **Convexité** : $(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$: convexe si $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$, concave si $0 < \alpha < 1$.



x^e et $x^{\frac{1}{e}}$: réciproques, symétriques par rapport à $y = x$

Prolongement en 0 et demi-tangente ($\alpha > 0$)

Comme $x^\alpha \rightarrow 0$ en 0^+ , on prolonge par continuité en posant $0^\alpha = 0$. Le taux $\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1}$ tend vers 0 si $\alpha > 1$ (**demi-tangente horizontale**), vaut 1 si $\alpha = 1$, et tend vers $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$ (**demi-tangente verticale**).

Comparaison et croissances comparées (α, β réels > 0)

Position : si $0 < x < 1$, $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$; si $x > 1$, $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha < x^\beta$ (car $\alpha \mapsto e^{\alpha \ln x}$ est monotone, selon le signe de $\ln x$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$$

Démonstrations. Avec $X = x^{\alpha/\beta} \rightarrow +\infty$: $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\ln X}{X}\right)^\beta \rightarrow 0$; en 0^+ , on pose $t = \frac{1}{x}$. Enfin $\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = e^{\alpha \ln x - \beta x} = e^{-x(\beta - \alpha \frac{\ln x}{x})} \rightarrow 0$.

Exemple : avec des exposants irrationnels

- $x^{\sqrt{2}} = 2$ ($x > 0$) $\iff x = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $x^\pi < x^3 \iff 0 < x < 1$ (position, avec $3 < \pi$).
- $\left((1+x^2)^\pi\right)' = 2\pi x(1+x^2)^{\pi-1}$; une primitive de $\frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = x^{-\sqrt{2}}$ sur $]0, +\infty[$ est $\frac{x^{1-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}$.
- **Un irrationnel puissance un irrationnel peut être rationnel :** $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.
Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, le couple $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ convient ; sinon, le couple $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ convient !

9

Études complètes**Méthode : le plan d'étude d'une fonction avec exp**

1. Domaine. 2. Limites aux bornes (croissances comparées), prolongements, dérivabilité aux bornes. 3. Signe de f' : comme $e^u > 0$, on factorise par l'exponentielle ; le facteur restant est souvent étudié par une **fonction auxiliaire**. 4. Branches infinies et positions. 5. f'' : convexité, inflexions. 6. Tracé.

9.1 Une asymptote oblique et un minimum caché

Exemple : $f(x) = (x-1)(1-e^{-x}) = x-1 - (x-1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

1. **Branches infinies.** En $+\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$, et $f(x) - (x-1) = -(x-1)e^{-x} = -xe^{-x} + e^{-x} \rightarrow 0$: la droite $\Delta : y = x-1$ est **asymptote oblique**. **Position :** $f(x) - (x-1)$ a le signe de $1-x$: C_f est au-dessus de Δ sur $]-\infty, 1[$, au-dessous sur $]1, +\infty[$; elle la coupe en $A(1, 0)$. En $-\infty$

: $x - 1 \rightarrow -\infty$ et $1 - e^{-x} \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$, et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 - e^{-x}) \rightarrow -\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy).

2. Variations, par une fonction auxiliaire. $f'(x) = 1 - e^{-x} + (x - 1)e^{-x} = 1 + (x - 2)e^{-x} = e^{-x}g(x)$ avec $g(x) = e^x + x - 2$. g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($g'(x) = e^x + 1 > 0$), de $-\infty$ à $+\infty$: elle s'annule en un **unique** réel α . Comme $g(0,44) \approx -0,007$ et $g(0,45) \approx 0,018$: $\alpha \in]0,44; 0,45[$. $f' < 0$ sur $]-\infty, \alpha[$, $f' > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

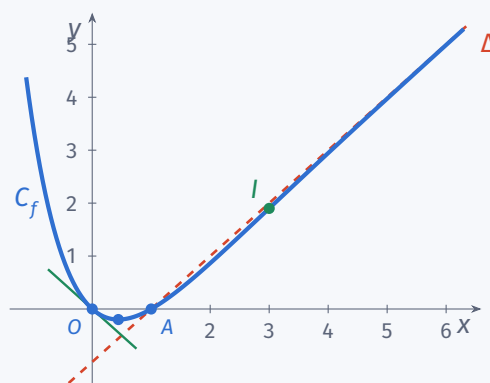
3. Valeur exacte du minimum. $g(\alpha) = 0$ donne $e^\alpha = 2 - \alpha$, donc $e^{-\alpha} = \frac{1}{2 - \alpha}$ et $f(\alpha) =$

$$(\alpha - 1)\left(1 - \frac{1}{2 - \alpha}\right) = \frac{-(1 - \alpha)^2}{2 - \alpha} \approx -0,20.$$

4. Convexité, points remarquables. $f''(x) = e^{-x} - (x - 2)e^{-x} = (3 - x)e^{-x}$: C_f est convexe sur $]-\infty, 3]$, concave sur $[3, +\infty[$; $I(3, 2 - 2e^{-3}) \approx (3; 1,90)$ est un point d'inflexion. $f(x) = 0 \iff x = 1$ ou $e^{-x} = 1$: C_f coupe (Ox) en O et en A, avec les tangentes $y = -x$ (en O) et $y = \left(1 - \frac{1}{e}\right)(x - 1)$ (en A).

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{(1-\alpha)^2}{2-\alpha}$	$+\infty$

$f(\alpha) \approx -0,20$: minimum de f sur $\mathbb{R}$



■ 9.2 Un prolongement et une demi-tangente

Exemple : $g(x) = (x + 1)e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, et $g(0) = 0$

1. Continuité en 0. $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ en 0^+ , donc $e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 = g(0)$: g est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Dérivabilité en 0. Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = (1 + t)e^{-t} \rightarrow 0$ (croissances comparées). g est dérivable à droite en 0, $g'_d(0) = 0$: C_g admet en O une **demi-tangente horizontale**.

3. Variations. Pour $x > 0$: $g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x + 1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} > 0$: g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $g(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

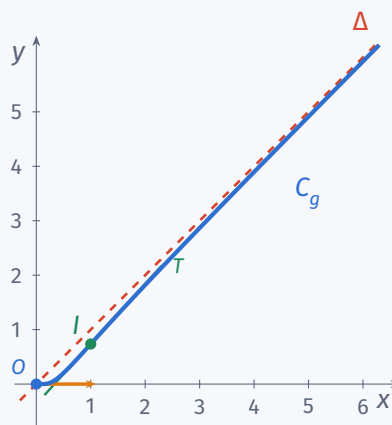
4. Asymptote et position. $g(x) - x = x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + e^{-\frac{1}{x}}$, et avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: $x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{e^{-t} - 1}{-t} \rightarrow -1$. Donc $g(x) - x \rightarrow -1 + 1 = 0$: la droite $\Delta : y = x$ est **asymptote** en $+\infty$. Pour $x > 0$, l'inégalité stricte $e^{\frac{1}{x}} > 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ donne $(x + 1)e^{-\frac{1}{x}} < x$: C_g est **au-dessous** de Δ .

5. Inflexion. $g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ donne $g''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1 - x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$: convexe sur $]0, 1]$, concave sur $[1, +\infty[$; $I\left(1, \frac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion, de tangente

$$T : y = \frac{3}{e}(x-1) + \frac{2}{e} = \frac{3x-1}{e}.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	+	
$g(x)$	0	$\frac{2}{e}$	$+\infty$

$$\frac{2}{e} \approx 0,74 ; \quad \frac{3}{e} \approx 1,10$$



10 Inégalités et suites

Encadrement de e

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Démonstration (par l'exponentielle). $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$ (inégalité stricte, $\frac{1}{n} \neq 0$) ; on élève à la puissance n (nombres positifs) : $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. De même $e^{-\frac{1}{n+1}} > 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, donc $e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n+1}{n}$, puis $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Avec $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = u_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$: $0 < e - u_n < v_n - u_n = \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n} \rightarrow 0$. Pour $n = 10$: $2,593 \dots < e < 2,853 \dots$

Théorème : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$

Pour tout réel x et tout entier $n > |x|$: $e^x \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Démonstration. Comme $n > |x|$, les réels $1 + \frac{x}{n}$ et $1 - \frac{x}{n}$ sont strictement positifs. **Majoration :** $0 < 1 + \frac{x}{n} \leq e^{\frac{x}{n}}$, puis on élève à la puissance n . **Minoration :** de même $0 < 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-\frac{x}{n}}$, donc $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$, et

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \geq e^x \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq e^x \left(1 - \frac{x^2}{n}\right),$$

par l'inégalité de Bernoulli $(1+h)^n \geq 1+nh$ ($h = -\frac{x^2}{n^2} \geq -1$, chapitre 3). Les gendarmes concluent. Ainsi $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$ et $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^2$.

Exemple : une suite récurrente et l'IAF : $u_0 = -1$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$

Soit $f(x) = e^x - 2$ et $I = [-2, -1]$.

1. Stabilité. f est croissante, $f(-2) = e^{-2} - 2 \approx -1,86$ et $f(-1) = e^{-1} - 2 \approx -1,63$: $f(I) = [f(-2), f(-1)] \subset I$, donc $u_n \in I$ pour tout n (récurrence).

2. Point fixe. $h(x) = e^x - 2 - x$ vérifie $h'(x) = e^x - 1 < 0$ sur I ; $h(-2) = e^{-2} > 0$ et $h(-1) = e^{-1} - 1 < 0$: l'équation $f(x) = x$ a une **unique** solution $\ell \in]-2, -1[$ ($\ell \approx -1,8414$).

3. Convergence. Sur I , $|f'(x)| = e^x \leq e^{-1}$; l'IAF entre u_n et ℓ (tous deux dans I) donne $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{e} |u_n - \ell|$, puis par récurrence

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{e^n} \leq \frac{1}{e^n} \quad (\text{car } u_0, \ell \in I, \text{ intervalle de longueur } 1).$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, et $|u_n - \ell| < 10^{-3}$ dès que $e^n > 1000$, soit $n \geq 7$.

Exemple : une suite implicite : $x_n^n e^{x_n} = 1$

1. Existence. Pour $n \geq 1$, $\varphi_n(x) = x^n e^x$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ ($\varphi'_n(x) = (n+x)x^{n-1}e^x > 0$), de 0 à $+\infty$: il existe un **unique** $x_n > 0$ tel que $\varphi_n(x_n) = 1$. Comme $\varphi_n(1) = e > 1$: $0 < x_n < 1$.

2. Monotonie. $\varphi_{n+1}(x_n) = x_n \varphi_n(x_n) = x_n < 1 = \varphi_{n+1}(x_{n+1})$, et φ_{n+1} est croissante : $x_n < x_{n+1}$. La suite (x_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge.

3. Limite. En prenant le $\ln$: $n \ln x_n + x_n = 0$, donc $x_n = e^{-\frac{x_n}{n}}$ et $e^{-\frac{1}{n}} < x_n < 1$: $\lim x_n = 1$.

4. Vitesse. $n(1 - x_n) = n\left(1 - e^{-\frac{x_n}{n}}\right) = x_n \times \frac{e^{-h_n} - 1}{-h_n}$ avec $h_n = \frac{x_n}{n} \rightarrow 0$: $\lim n(1 - x_n) = 1$, soit $x_n \approx 1 - \frac{1}{n}$. ($x_1 \approx 0,567$, $x_{10} \approx 0,913$, $x_{100} \approx 0,990$.)

11

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
$e^a \times e^b = e^{ab}$	$e^a \times e^b = e^{a+b}$; c'est $(e^a)^b$ qui vaut e^{ab}
$\ln(e^x + e^y) = x + y$	$\ln(e^x e^y) = x + y$; le $\ln$ d'une somme ne se sépare pas
$(e^x)^x = e^{x^x}$ et $2^{3^2} = (2^3)^2$	$(e^x)^x = e^{x^2}$; $2^{3^2} = 2^9 = 512$ mais $(2^3)^2 = 64$: a^{b^c} se lit $a^{(b^c)}$
$x \mapsto e^{\ln x}$ et $x \mapsto \ln(e^x)$ sont la même fonction	même expression x , mais domaines $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$
$X = e^x$: $X^2 + X - 2 = 0$ donne $S = \{0, \ln(-2)\}$	$X = -2$ est rejeté car $X > 0$: $S = \{0\}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff x < 2$	la base est < 1 : $t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^t$ décroît, et c'est $x > 2$
$(e^u)' = e^u$ ou $(e^u)' = e^{u'}$	$(e^u)' = u' e^u$
$(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$	ni a^x , ni x^a : $(e^{x \ln x})' = (1 + \ln x) x^x$
une primitive de $x e^x$ est $\frac{x^2}{2} e^x$	c'est $(x-1)e^x$ (identification) : on ne primitive pas un produit facteur par facteur

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ (« $1^\infty = 1$ »)	« 1^∞ » est indéterminé : $e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \rightarrow e^1 = e$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = -\infty$	la limite vaut 0 (croissances comparées)
$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$	$+\infty$ en 0^+ , mais 0 en 0^- : pas de limite en 0
$\frac{e^x}{x^3} \rightarrow +\infty$, donc $e^x > x^3$ pour tout $x > 0$	faux : $e^2 \approx 7,39 < 8 = 2^3$; une limite ne dit rien pour un x donné
$x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha > 0$ réel) est dérivable en 0	seulement si $\alpha \geq 1$; demi-tangente verticale si $0 < \alpha < 1$
$x \mapsto a^x$ est croissante pour tout $a > 0$	seulement si $a > 1$; décroissante si $0 < a < 1$, constante si $a = 1$

12 Les astuces des concours

★ Astuce de concours : $e^x \geq 1 + x$ encadre un produit

Pour $t > -1$: $e^{\frac{t}{1+t}} \leq 1 + t \leq e^t$ (à droite, l'inégalité fondamentale ; à gauche, elle donne $e^{-\frac{t}{1+t}} \geq 1 - \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t}$, et on inverse). C'est l'encadrement $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$ du chapitre 5, lu « à l'envers ».

Application : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. À droite : $P_n \leq e^{\sum \frac{k}{n^2}} = e^{\frac{n+1}{2n}}$ (section 2). À gauche, $\frac{k/n^2}{1 + k/n^2} = \frac{k}{n^2 + k} \geq \frac{k}{n^2 + n}$, d'où $P_n \geq e^{\sum \frac{k}{n^2 + n}} = e^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\sqrt{e} \leq P_n \leq e^{\frac{n+1}{2n}}$ et $\lim P_n = \sqrt{e}$.

★ Astuce de concours : poser $X = e^x$, puis isoler le paramètre

Pour quels réels m a-t-on $e^{2x} - m e^x + 1 > 0$ pour tout réel x ? Quand x décrit $\mathbb{R}$, $X = e^x$ décrit tout $]0, +\infty[$ (bijection) : la condition s'écrit $X^2 - mX + 1 > 0$ pour tout $X > 0$, soit $m < X + \frac{1}{X}$ pour tout $X > 0$. Or $X + \frac{1}{X} - 2 = \frac{(X-1)^2}{X} \geq 0$, avec égalité pour $X = 1$: le minimum de $X + \frac{1}{X}$ sur $]0, +\infty[$ vaut 2 et il est **atteint**. Réponse : $m < 2$ (pour $m = 2$, l'expression $(e^x - 1)^2$ s'annule en 0).

★ Astuce de concours : les fonctions hyperboliques (définies dans l'énoncé)

On pose $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ (section 2) : comparer avec $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ (chapitre 6). Tout se vérifie en revenant à e^x : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = e^x e^{-x} = 1$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.

- th est continue, strictement croissante, de -1 à 1 : bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$, et $y = \operatorname{th} x \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$.

- **Une identité par la dérivée :** $(2 \arctan e^x)' = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ et $(\arctan(\operatorname{sh} x))' = \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Ces fonctions diffèrent d'une constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$; en 0 : $\frac{\pi}{2}$ et 0. Donc

$$\arctan(\operatorname{sh} x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \text{ pour tout réel } x.$$

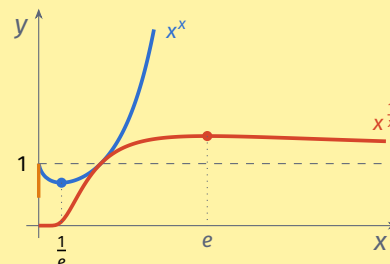
★ **Astuce de concours : x^x et $x^{1/x}$: une seule étude pour deux fonctions**

$g(x) = x^x = e^{x \ln x}$ sur $]0, +\infty[$: $g'(x) = (1 + \ln x)x^x$, minimum $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,69$. Comme $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ ,

$g(x) \rightarrow 1$: on prolonge par $g(0) = 1$, et $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \times \ln x \rightarrow 1 \times (-\infty)$: **demi-tangente verticale** en $(0, 1)$.

$h(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$: $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\ln x}{x}}$, donc $h(x) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}$. Sans

calcul : h croît sur $]0, e]$, décroît sur $[e, +\infty[$, de maximum $h(e) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{\frac{1}{e}} \approx 1,44$; $h \rightarrow 0$ en 0^+ et $h \rightarrow g(0) = 1$ en $+\infty$.



★ **Astuce de concours : comparer a^b et b^a**

Pour $a, b > 0$: $a^b < b^a \iff a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}}$ (élever à la puissance $\frac{1}{ab} > 0$) $\iff h(a) < h(b)$, avec h ci-dessus.

- $e < 3 < \pi$ et h décroît sur $[e, +\infty[$: $h(3) > h(\pi)$, donc $3^\pi > \pi^3$ (31,54 contre 31,01).
- $\sqrt{2} < \sqrt{3} < e$ et h croît sur $]0, e]$: $h(\sqrt{2}) < h(\sqrt{3})$, donc $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ (1,82 contre 2,17).
- **Toutes les solutions réelles de $a^b = b^a$, $0 < a < b$.** On pose $b = ta$ ($t > 1$) : $a^{ta} = (ta)^a \iff a^t = ta \iff a^{t-1} = t$, d'où

$$a = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad b = t^{\frac{t}{t-1}} \quad (t > 1). \quad \text{Pour } t = 1 + \frac{1}{n} : \quad a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$n = 1$: $2^4 = 4^2$; $n = 2$: $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}$. Et quand $t \rightarrow 1^+$, a et b tendent vers e (section 10) : on retrouve le sommet de h .

★ **Astuce de concours : une limite cache un nombre dérivé**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1} = g'(1) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\pi - 1}{x} = \pi \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} = \varphi'(0) = 2 - 1 = 1$$

(nombres dérivés en 1 de $x \mapsto x^x$ et de $x \mapsto x^\pi$, puis en 0 de $\varphi(x) = e^{\sin 2x} - e^{\sin x}$, qui vérifie $\varphi(0) = 0$). Plus subtil : $\psi(x) = e^x - x^e$ vérifie $\psi(e) = 0$ et $\psi'(e) = e^e - e \times e^{e-1} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{x - e} = 0$: les courbes de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto x^e$ sont **tangentes** au point (e, e^e) .

13

L'essentiel du chapitre en une page

Définition (réciproque de ln)

$$e^x = y \iff x = \ln y \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0); \quad e^x > 0.$$

$$\ln(e^x) = x \text{ sur } \mathbb{R}; \quad e^{\ln y} = y \text{ sur }]0, +\infty[.$$

$e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2,718$; courbes de exp et ln symétriques par rapport à $y = x$.

Algèbre (a, b réels, $r \in \mathbb{Q}$)

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^r = e^{ra} \quad \sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}.$$

Équations, inéquations

$$e^a = e^b \iff a = b \quad e^a < e^b \iff a < b$$

$e^x = k$: aucune solution si $k \leq 0$, $x = \ln k$ si $k > 0$.

Poser $X = e^x$ avec $X > 0$; multiplier par $e^x > 0$.

Dérivée, courbe

$(e^x)' = e^x$ (dérivée de la réciproque); convexe.

Tangente en a : $y = e^a(x - a + 1)$; en 0: $y = x + 1$.

$$e^x \geq 1 + x \quad (\text{égalité si et seulement si } x = 0).$$

Limites usuelles ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

En $+\infty$: $\ln x \ll x^n \ll e^x$.

$$u \rightarrow -\infty \Rightarrow e^u \rightarrow 0; \quad u \rightarrow \ell \Rightarrow e^u \rightarrow e^\ell.$$

Dérivées et primitives (u dérivable sur I)

$(e^u)' = u' e^u$: e^u a les variations de u .

$$u' e^u \mapsto e^u \quad e^{ax+b} \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b} \quad (a \neq 0)$$

$$(ax+b)e^x \mapsto (ax+b-a)e^x \quad (\text{identification}).$$

Étude d'une fonction

Domaine; limites, prolongements; signe de f' (on factorise par $e^u > 0$, fonction auxiliaire); asymptotes et positions; f'' ; tracé.

Base a ($a > 0$)

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a^x)' = \ln a \times a^x$$

croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$.

$$a^x \geq 1 + x \text{ pour tout } x \iff a = e.$$

Puissances ($x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$)

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\alpha > 0$: $0^\alpha = 0$; demi-tangente en 0 horizontale si

$\alpha > 1$, verticale si $0 < \alpha < 1$.

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Suites

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}; \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x.$$

$$\text{IAF: } |f'| \leq k < 1 \text{ sur } I \text{ stable} \Rightarrow |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Astuces

$$t > -1: \quad e^{\frac{t}{1+t}} \leq 1 + t \leq e^t.$$

$$a^b < b^a \iff a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}}; \quad x^{\frac{1}{x}} \text{ est maximal en } e.$$

$$u^v = e^{v \ln u}; \quad x^x \text{ est minimal en } \frac{1}{e}.$$

Une limite $\frac{0}{0}$: peut-être un nombre dérivé.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

14 Niveau I • Bases

Exercice 1 Règles de calcul ★

corrigé p. 38

- Simplifier : $A = e^{\frac{1}{2} \ln 9 + \ln 2}$, $B = \ln \sqrt{e^3} - \ln \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $C = e^{-\ln(\ln 9)} \ln 3$, $D = \left(e^{\frac{1}{3} \ln 5}\right)^6$ et, pour x réel : $f(x) = e^x \ln(e^{-x})$, $g(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x - 1}$ ($x \neq 0$), $h(x) = \ln(e^{2x} + e^x) - \ln(1 + e^{-x})$.
- Montrer que $e^a + e^b \geq 2e^{\frac{a+b}{2}}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), avec égalité si et seulement si $a = b$, et en déduire que $e^x + e^{x^2} > 2e^{\frac{1}{8}}$ ($x \in \mathbb{R}$). Comparer $e^{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ et $e^{\sqrt{10}}$, puis $e^\pi e^{-3}$ et $\sqrt[7]{e}$ ($\pi < \frac{22}{7}$).

Exercice 2 Équations, inéquations, systèmes ★

corrigé p. 38

Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) à d) (domaine d'abord), puis dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes (S_1) : $e^{2x} - e^{2y} = 15$ et $e^x - e^y = 3$; (S_2) : $e^x e^y = e^3$ et $\ln x + \ln y = \ln 2$.

a) $e^{3x} + e^{2x} - 4e^x - 4 = 0$ b) $e^x - 2 \leq 3e^{-x}$ c) $\ln(e^x - 1) \leq x - \ln 2$ d) $\sqrt{e^x + 2} = e^{\frac{x}{2}} + 1$

Exercice 3 Limites usuelles ★

corrigé p. 38

Calculer, en précisant l'outil utilisé :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^3}{x e^x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1+x}} - e}{x}$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 Dérivées et primitives ★

corrigé p. 39

- Dériver : a) $\frac{e^x}{1+x^2}$ (sens de variation ?) ; b) $x^2 e^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) ; c) $e^{\frac{x}{1+x^2}}$; d) $e^{-x} \sqrt{1 + e^{2x}}$.
- Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$ (sur $]0, +\infty[$ pour c)) :

a) $x^2 e^{x^3}$ b) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ c) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ d) $\sin(2x) e^{\sin^2 x}$ e) $\frac{1}{1 + e^x}$ f) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- Trouver les réels a et b tels que $F(x) = e^{2x}(a \cos x + b \sin x)$ soit une primitive de $e^{2x} \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Base a et puissances réelles ★

corrigé p. 39

- Résoudre : a) $3^{x+1} - 3^{1-x} = 8$; b) $2^x \times 5^{x-1} = 20$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^x$; d) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ ($x > 0$).
- Pour quels m la fonction $x \mapsto (2m-1)^x$ est-elle strictement décroissante sur $\mathbb{R}$? Dériver $x^\pi + \pi^x$, $x^{\sqrt{x}}$.
- Soit $h(x) = x^{\sqrt{3}}$ et $k(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ ($x > 0$), $h(0) = k(0) = 0$: dérivabilité en 0 ? position des courbes ?

Exercice 6 Une première étude ★

corrigé p. 39

Soit $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ sur $\mathbb{R}$, et C_f sa courbe.

- Limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$; interpréter.
- Montrer que $f'(x) = (x+3)(x-1)e^x$; tableau de variations, signe de f , tangente T en 0.
- Montrer que C_f a deux points d'inflexion. Nombre de solutions de $f(x) = m$ ($m \in \mathbb{R}$) ?

Exercice 7 L'exponentielle complexe ★

corrigé p. 40

Pour $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), on pose $e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ (prolongement de $\exp$ et de $e^{i\theta}$).

- Montrer que $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ et $e^z \neq 0$ pour tous complexes z, z' .
- Montrer que $e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$, puis que $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$; b) $e^z = -e$; c) $e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$.

Exercice 8 Suites et exponentielle ★

corrigé p. 40

- Soit $u_n = e^{2-3n}$: montrer que (u_n) est géométrique ; calculer $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $\lim S_n$. Limites de : a) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$; b) $\frac{e^n}{n^n}$; c) $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$; d) $\frac{2^{n+n^2}}{3^n}$.
- Soit $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = e^{v_n} - 1$. Montrer que $-1 \leq v_n \leq 0$, que (v_n) est croissante (utiliser $e^t \geq 1 + t$), puis qu'elle converge vers 0.

15

Niveau 2 • Bac**Exercice 9** Limites : le bon outil ★★

corrigé p. 40

Calculer (pour c) et e), penser aux accroissements finis ; pour f), à une somme géométrique) :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x} - e}{4x - \pi} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\ln(e^{2x} + e^x) - 2x \right) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} & \text{f) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \end{array}$$

Exercice 10 Problème : la fonction $(x-2)e^x + x + 2$ ★★

corrigé p. 40

Partie I. Soit $g(x) = (x-1)e^x + 1$. Étudier g ; en déduire que $g \geq 0$, avec égalité seulement en 0.**Partie II.** Soit $f(x) = (x-2)e^x + x + 2$ sur $\mathbb{R}$, C_f sa courbe (repère orthonormé) et $\Delta : y = x + 2$.

- Limite de f en $-\infty$; montrer que Δ est asymptote à C_f en $-\infty$; position de C_f par rapport à Δ ? Limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$; interpréter.
- Montrer que $f'(x) = g(x)$; variations et signe de f . Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la concavité de C_f ; montrer que O est un point d'inflexion à tangente horizontale. En quel point B la tangente est-elle parallèle à Δ ? Tracer Δ et C_f ($e \approx 2,72$).

- La réciproque f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? en $3 - e$ (calculer alors $(f^{-1})'(3 - e)$?)
- Déduire de 2. que $e^x \leq \frac{2+x}{2-x}$ si $0 \leq x < 2$ (et $\geq$ si $x \leq 0$), puis que $e \leq 3$ et $\sqrt{e} \leq \frac{5}{3}$.

Exercice 11 Problème : la fonction $\ln(2 + e^{-x})$ et une suite ★★

corrigé p. 41

Soit $f(x) = \ln(2 + e^{-x})$ sur $\mathbb{R}$, C_f sa courbe (repère orthonormé) et $\Delta : y = -x$.

- Limite de f en $+\infty$; interpréter (position ?). Montrer que $f(x) = -x + \ln(1 + 2e^x)$; en déduire la limite en $-\infty$, et que Δ est asymptote à C_f en $-\infty$ (position ?).
- Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{1+2e^x}$; variations, convexité, tangente en 0. Tracer C_f et ses asymptotes.
- Montrer que $f(x) = x \iff e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$; en déduire l'unique solution $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.
- Soit $I = [\ln 2, \ln 3]$. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$ pour tout $x \in I$.
- Soit $u_0 = \ln 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \in I$, puis que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ (on a $\alpha - \ln 2 \approx 0,188$).
Limite de (u_n) ? Trouver n_0 tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-6}$ pour $n \geq n_0$.

Exercice 12 Problème : la fonction $x e^{\arctan x}$ ★★

corrigé p. 42

Soit $g(x) = x e^{\arctan x}$ sur $\mathbb{R}$, C sa courbe, $D : y = e^{\frac{\pi}{2}}(x - 1)$ et $D' : y = e^{-\frac{\pi}{2}}(x - 1)$.

- Limites de g en $\pm\infty$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\arctan t} - 1}{t} = -1$.
- Avec $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ ($x > 0$), montrer que D est asymptote à C en $+\infty$; de même, D' en $-\infty$.
- À l'aide de $e^u \geq 1 + u$ et de $\arctan t < t$ ($t > 0$), montrer que C est au-dessus de D sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que $g'(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2} e^{\arctan x}$ et $g''(x) = \frac{x+2}{(1+x^2)^2} e^{\arctan x}$. Variations, tangente en O , point d'inflexion. Tracer D , D' et C ($e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4,81$, $e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,21$, $e^{-\arctan 2} \approx 0,33$).

Exercice 13 Base a : équations et tangentes ★★

corrigé p. 42

- Résoudre : a) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$; b) $x^{\ln x} \geq e^4$; c) $x^{\log_2 x} = 16x^3$; d) $2^x 3^y = 12$ et $3^x 2^y = 18$.
- Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Montrer que la courbe de $x \mapsto a^x$ a une seule tangente passant par O , et que son point de contact est sur la droite $y = e$.

Exercice 14 Puissances réelles : deux inégalités ★★

corrigé p. 43

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

- Étudier $\varphi(t) = 1 + t^\alpha - (1+t)^\alpha$ sur $[0, +\infty[$; en déduire que $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ pour tous $a, b \geq 0$ (et si $\alpha > 1$?).
- Étudier $\psi(x) = x^\alpha + (1-x)^\alpha$ sur $[0, 1]$; en déduire que $a^\alpha + b^\alpha \leq 2^{1-\alpha}(a+b)^\alpha$ pour tous $a, b \geq 0$.
- Montrer que $\sqrt[3]{x+y} \leq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \leq \sqrt[3]{4(x+y)}$ pour $x, y \geq 0$, et que $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

Exercice 15 Les courbes de $\exp$ et de $\ln$ ★★

corrigé p. 43

Soient E et L les courbes de $\exp$ et de $\ln$ (repère orthonormé), symétriques par rapport à $\Delta : y = x$. On rappelle que $e^x - x \geq 1$ et $x - \ln x \geq 1$, avec égalité si et seulement si $x = 0$, resp. $x = 1$.

- Soient $A(a, e^a) \in E$ et $B(b, \ln b) \in L$. Montrer que A et B sont de part et d'autre de Δ , puis que $AB \geq \sqrt{2}$ (la distance de $M(x, y)$ à Δ est $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$). Cas d'égalité ?
- Soit $y > 0$. Étudier $x \mapsto e^x - xy$ sur $\mathbb{R}$; en déduire que $xy \leq e^x + y \ln y - y$ pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, avec égalité si et seulement si $y = e^x$ (interpréter).

Exercice 16 Une suite implicite ★★

corrigé p. 43

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\varphi_n(x) = e^{nx} - x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier φ_n ; montrer que $\varphi_n(x) = 0$ a exactement deux solutions $c_n < 0 < x_n$, et que $c_n < -\frac{\ln n}{n}$.
2. Montrer que $\frac{\ln 2}{n} < x_n < \frac{\ln 3}{n}$ pour $n \geq 2$. Calculer $\varphi_{n+1}(x_n)$; en déduire que (x_n) est décroissante. Limites de x_n et de nx_n ?
3. Montrer que $n(nx_n - \ln 2) \rightarrow \frac{\ln 2}{2}$. Montrer que $-2 < c_n < -2 + \frac{1}{n}$, puis que $(c_n + 2)e^{2n} \rightarrow 1$.

16

Niveau 3 · Approfondissement**Exercice 17** Une famille de courbes ★★★

corrigé p. 44

Pour $m \in \mathbb{R}^*$, soit $f_m(x) = e^x + mx^2$ sur $\mathbb{R}$, et C_m sa courbe.

1. Montrer que les courbes C_m ont un point commun, et la même tangente en ce point.
2. Montrer que C_m a un point d'inflexion si et seulement si $m < 0$ (il est alors unique), et que ces points décrivent la courbe $\Gamma : y = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$.
3. Étudier $h(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. En déduire, suivant m , le nombre de points de C_m à tangente horizontale ($m = -\frac{e}{2}$?).
4. Si $m > 0$, montrer que f_m a un minimum, atteint en $x_m < 0$, et que le point correspondant est sur la courbe $y = e^x \left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Limites de x_m quand $m \rightarrow 0^+$, quand $m \rightarrow +\infty$?

Exercice 18 Une dérivée n -ième remarquable ★★★

corrigé p. 44

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ (ainsi $f_0(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$).

1. Calculer f'_1 et f''_2 . Montrer que $f'_{n+1} = nf_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer par récurrence (sur deux rangs) que $f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$ pour $n \geq 1$ et $x \neq 0$. En déduire $\left(x^3e^{\frac{1}{x}}\right)^{(4)}$, et les limites de $f_n^{(n)}$ en 0^+ et en 0^- .

Exercice 19 La fonction $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ★★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, et $f(0) = e$.

1. Montrer que f est continue en 0. Limites de f en -1^+ et en $+\infty$?
2. À l'aide de $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ ($x > -1, x \neq 0$), montrer que f est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.
3. Montrer que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ si $x \geq 0$, et $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$ si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$; en déduire que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
4. Tracer la courbe de f et sa tangente en $(0, e)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$.

Exercice 20 Approcher e^x par des fractions rationnelles ★★★

corrigé p. 45

1. Soit $F(x) = (x^2 - 6x + 12)e^x - (x^2 + 6x + 12)$. Calculer $F(0), F'(0), F''(0)$; montrer que $F'''(x) = x^2e^x$. En déduire le signe de F , puis que $e^x > \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+12}$ pour $x > 0$.
2. Soit $G(x) = (6 - 2x)e^x - (x^2 + 4x + 6)$. Montrer que $G \leq 0$ sur $\mathbb{R}$; en déduire que $e^x \leq \frac{x^2+4x+6}{6-2x}$ pour $x < 3$. Avec $x = \frac{1}{2}$, en déduire que $2,718 < e < 2,723$ (comparer avec l'exercice 10).

Exercice 21 L'équation $\cos x = e^{-x}$ ★★★

corrigé p. 45

Soit $h(x) = \cos x - e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $h < 0$ sur $]-\infty, 0[$, et que $\cos x > 0$ si $h(x) = 0$ et $x > 0$. Montrer que h s'annule en 0 et en un seul $b_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (étudier h'' , puis h').
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que h s'annule une seule fois sur $]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi]$, en a_k , et sur $[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}[$, en b_k .
3. On pose $s_k = a_k - 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $t_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - b_k$. Montrer que $\sin s_k = e^{-a_k}$, que $s_k \rightarrow 0$, puis que $s_k e^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \rightarrow 1$. Montrer de même que $t_k e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 1$.

Exercice 22 La limite de $(1 + \frac{z}{n})^n$ dans $\mathbb{C}$ ★★★

corrigé p. 46

Soit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ (exercice 7) et, pour tout entier $n > |a|$, $w_n = 1 + \frac{z}{n}$.

1. Montrer que $|w_n|^n = \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$ tend vers e^a .
2. Montrer que $\theta_n = \arctan \frac{b}{n+a}$ est un argument de w_n , et que $n\theta_n \rightarrow b$.
3. En déduire que $(1 + \frac{z}{n})^n \rightarrow e^z$. Limites de $(1 + \frac{i\pi}{n})^n$ et de $(1 + \frac{1+i}{n})^n$?

Exercice 23 La meilleure droite pour approcher e^x ★★★

corrigé p. 46

Pour p affine, on note $E(p)$ le maximum de $|e^x - p(x)|$ sur $[0, 1]$.

1. Calculer $E(p)$ pour la tangente $p_1(x) = 1 + x$ et pour la corde $p_2(x) = 1 + (e-1)x$. Soient $c = \ln(e-1)$, $\delta = \frac{2-e+(e-1)c}{2}$ et $p^*(x) = (e-1)x + 1 - \delta$. Étudier $d(x) = e^x - p^*(x)$ sur $[0, 1]$: montrer que $d(0) = d(1) = \delta$, $d(c) = -\delta$, et $E(p^*) = \delta$ ($\delta \approx 0,106$).
2. Soit p affine. En supposant $E(p) < \delta$, étudier le signe de $r = p - p^*$ en 0, en c et en 1 ; conclure que $E(p) \geq \delta$. Montrer que p^* est la seule fonction affine telle que $E(p) = \delta$.

17

Niveau 4 • Concours**Exercice 24** La suite $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ ★★★★★

corrigé p. 46

Soit $u_0 \in]0, 1]$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. On admet : $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$ ($H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$), $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3$.

1. Montrer que (u_n) est à valeurs dans $]0, 1]$, décroissante, de limite 0.
2. Montrer que $u + \frac{u^2}{2} \leq e^u - 1 \leq u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2}$ pour $u \in [0, 1]$, puis que $1 + \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1 + \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{2}$.
3. En déduire que $\frac{1}{u_n} \geq n+1$, puis que $\frac{1}{u_n} \leq n+A + \frac{1}{2} \ln n$ ($n \geq 1$), avec $A = \frac{1}{u_0} + \frac{3}{2}$. Limite de nu_n ?
4. Montrer que $u_k \geq \frac{1}{k} - \frac{A+1}{k\sqrt{k}}$ ($k \geq 1$), puis que $\frac{1}{\ln n} \left(\frac{1}{u_n} - n\right) \rightarrow \frac{1}{2}$.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$. Montrer que $x_n - \ln n \rightarrow 0$.

Exercice 25 Quand $(1 + \frac{1}{n})^{n+x}$ décroît-elle ? ★★★★★

corrigé p. 47

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = (1 + \frac{1}{n})^{n+x}$ et, pour $t > 0$, $g_x(t) = (t+x) \ln(1 + \frac{1}{t})$.

1. Montrer que $\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} < \ln(1 + \frac{1}{t}) < \frac{2t+1}{2t(t+1)}$ pour tout $t > 0$ (pour la seconde, étudier la différence).
2. Si $x \geq \frac{1}{2}$, montrer que $g'_x < 0$ sur $]0, +\infty[$; en déduire que $(u_n(x))$ est strictement décroissante.

- Si $x < \frac{1}{2}$, montrer que $g'_x(t) > 0$ pour $t > \frac{1}{1-2x}$. Conclure ($x \geq \frac{1}{2}$ est nécessaire et suffisant).
- En déduire que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ($n \geq 1$); encadrer e avec $n = 10$.

Exercice 26 Pile ou face : une inégalité de concentration ★★★★★

corrigé p. 47

- Montrer que $\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \leq t$ pour $t \geq 0$, puis que $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}}$ pour tout réel t (étudier $\frac{t^2}{2} - \ln \frac{e^t + e^{-t}}{2}$).
- Pour chacune des 2^n suites $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, soit $S(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que $\sum_{\varepsilon} e^{tS(\varepsilon)} = (e^t + e^{-t})^n$ (récurrence sur n).
- Soit $a > 0$ et N_a le nombre de ε tels que $S(\varepsilon) \geq a$. Montrer que $N_a e^{ta} \leq (e^t + e^{-t})^n$ ($t > 0$), puis que $N_a \leq 2^n e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
- Majorer la proportion des suites de 100 lancers d'une pièce ayant au moins 70 « pile ».

Exercice 27 La limite de $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$ ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{1^n + 2^n + \dots + n^n}{n^n}$.

- Montrer que $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout réel x , et que $1 - x \geq e^{-x-x^2}$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
- En écrivant $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n$, montrer que $S_n < \frac{e}{e-1}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n \geq e^{-\frac{p^2}{n}} \sum_{j=0}^p e^{-j}$ pour $n \geq 2p$. En déduire que $\lim S_n = \frac{e}{e-1}$.

Exercice 28 Les exponentielles sont « indépendantes » ★★★★★

corrigé p. 48

- Justifier que $P(x)e^{ax} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (P polynôme, $a < 0$), et qu'un polynôme de limite 0 est nul.
- Soient $a_1 < \dots < a_m$ réels, $P_1, \dots, P_m$ polynômes et $A \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^m P_k(x)e^{a_k x} = 0$ pour tout $x \geq A$. Montrer (récurrence sur m) que $P_1 = \dots = P_m = 0$.
- En déduire qu'il n'existe pas de polynômes $P, Q \neq 0$ tels que $Q(x)e^x = P(x)$ pour $x \geq A$, ni tels que $Q(x) \ln x = P(x)$ pour $x > 0$ (poser $x = e^t$).
- Montrer que $x \mapsto e^{x^2}$ ne peut pas s'écrire $\sum_{k=1}^m P_k(x)e^{a_k x}$ sur un intervalle $[A, +\infty[$.

Exercice 29 Les polynômes d'Hermite ★★★★★

corrigé p. 49

- Soit $\varphi(x) = e^{-x^2}$. Montrer que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)e^{-x^2}$, où $H_0 = 1$ et $H_{n+1} = 2xH_n - H'_n$. Calculer H_1, H_2, H_3 ; degré, terme dominant, parité de H_n ?
- Montrer que $H'_n = 2nH_{n-1}$ pour $n \geq 1$, puis que $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$. Calculer $H_{2p}(0)$ ($p \in \mathbb{N}$).
- Si g est dérivable sur $]-\infty, b]$ et $g(b) = 0 = \lim_{-\infty} g$, montrer que g' s'annule sur $]-\infty, b[$.
- Avec $g_n(x) = H_n(x)e^{-x^2}$ ($g'_n = -g_{n+1}$), montrer que H_n a n racines réelles distinctes ($n \geq 1$).

Exercice 30 L'équation $e^z = z$ dans $\mathbb{C}$ ★★★★★

corrigé p. 49

- Avec $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ (exercice 7), montrer que $e^z = z$ n'a pas de solution réelle, que $\bar{z}$ est solution si z l'est, et que $a + ib$ est solution si et seulement si $e^a \cos b = a$ et $e^a \sin b = b$.
- Montrer que, si $b > 0$, $a + ib$ est solution si et seulement si $\sin b > 0$, $a = \ln \frac{b}{\sin b}$ et $\varphi(b) = 0$, où $\varphi(b) = \frac{b \cos b}{\sin b} - \ln \frac{b}{\sin b}$.
- Montrer que φ s'annule sur $\left]2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ ($k \in \mathbb{N}$); en déduire une infinité de solutions z_k , avec $|z_k| \rightarrow +\infty$.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

18 Équations et inéquations

Toujours en trois temps : (1) le domaine ; (2) la transformation par $e^a = e^b \iff a = b$, $e^a < e^b \iff a < b$, $e^x = k \iff x = \ln k$ (seulement si $k > 0$) ; (3) devant e^{2x} , e^{-x} , e^{3x} ..., on pose $X = e^x$ avec $X > 0$. Quand aucun calcul n'aboutit, on étudie une fonction : la stricte monotonie donne l'unicité, et $e^t \geq 1 + t$ (égalité seulement pour $t = 0$) règle bien des cas.

Exercice 31 Le domaine d'abord ★

corrigé p. 49

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$\text{a) } e^{2x^2-3} = e^{-5x} \quad \text{b) } e^{\sqrt{x}} = e^{x-2} \quad \text{c) } e^{\ln(x^2)} = 4x - 3 \quad \text{d) } \ln(e^{2x} - e^x) = \ln 6$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$\text{e) } e^{x^2-2x} < e^3 \quad \text{f) } (e^x - 2)(e^{-x} - 3) \geq 0 \quad \text{g) } \sqrt{e^{2x} - 3} < e^x - 1$$

3. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \sqrt{e^{2x} - e^{x+1}} \quad f_2(x) = \ln(1 - e^{x^2-4}) \quad f_3(x) = \frac{1}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice 32 Poser $X = e^x$ ★

corrigé p. 50

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$\text{a) } e^{2x} - 2e^x - 8 = 0 \quad \text{b) } e^{3x} - 7e^x + 6 = 0 \quad \text{c) } 2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0 \quad \text{d) } e^x - e^{-x} = \frac{3}{2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$\text{e) } 3e^x + 2e^{-x} \leq 5 \quad \text{f) } e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1 > 0 \quad \text{g) } \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \leq e^x$$

Exercice 33 Systèmes et équations mixtes ★★

corrigé p. 50

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants.

$$(S_1) \begin{cases} e^{2x} + e^{2y} = 10 \\ x + y = \ln 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} e^{2x} - 3e^{x+y} + 2e^{2y} = 0 \\ x + 2y = \ln 4 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} e^x + e^y = e^{x+y} \\ x - y = 2 \ln 2 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln(1 + e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = 2 \ln 3$; b) $\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) = \ln 3$.

Exercice 34 Équations à paramètre ★★

corrigé p. 51

1. Soit m un réel. On considère l'équation (E_m) : $(m - 1)e^{2x} - 2m e^x + m + 3 = 0$.

a) Résoudre (E_1) , puis $(E_{\frac{3}{2}})$ et (E_{-3}) .

b) Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de (E_m) (on utilisera le discriminant, la somme et le produit des racines du trinôme associé).

2. On suppose que (E_m) admet deux solutions x_1 et x_2 . Montrer que $x_1 + x_2 = \ln \frac{m+3}{m-1}$. Déterminer m pour que $x_1 + x_2 = -\ln 2$, puis résoudre (E_m) pour cette valeur.

Exercice 35 Quand la monotonie résout l'équation ★★★

corrigé p. 51

1. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $e^{x-1} + \ln x = 1$, puis l'inéquation $e^{x-1} + \ln x < 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x + e^{-x} = 2 + x^2$, puis l'inéquation $e^x + e^{-x} > 2 + x^2$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \geq 1 + x^2$.

4. À l'aide du cas d'égalité dans $e^t \geq 1 + t$, résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^{\sin x} = 1 + \sin x$; b) $e^{x^2-1} = x^2$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x = 1 + y \\ e^y = 1 + x \end{cases}$.

Exercice 36 L'équation $e^x = x^n$ ★★★

corrigé p. 52

Soit n un entier naturel non nul. On note (E_n) l'équation $e^x = x^n$, d'inconnue réelle x .

1. Montrer que (E_n) n'a aucune solution dans $]-\infty, 0]$ si n est impair, et qu'elle en a exactement une si n est pair (étudier $x \mapsto e^x - x^n$ sur $]-\infty, 0]$).

2. a) Montrer que, pour $x > 0$: $(E_n) \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}$.

b) Étudier la fonction $u : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire le nombre de solutions strictement positives de (E_n) selon n .

3. Donner le nombre total de solutions de (E_n) selon n (distinguer $n = 1$, $n = 2$, $n \geq 3$ impair, $n \geq 4$ pair).

4. On prend $n = 3$. Montrer que les solutions $a < b$ de (E_3) vérifient $1 < a < 2$ et $4 < b < 5$ ($e^2 \approx 7,39$, $e^4 \approx 54,6$, $e^5 \approx 148,4$), puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x > x^3$ (en fonction de a et b).

19

Limites et croissances comparées

En $+\infty$, e^x l'emporte sur toute puissance de x , qui l'emporte elle-même sur toute puissance de $\ln x$: on factorise le terme dominant. Près d'un point, on reconnaît un nombre dérivé (dont $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$) ; au-delà, on encadre à l'aide d'inégalités démontrées par l'étude d'une fonction.

Exercice 37 Croissances comparées ★

corrigé p. 52

- Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-ax} = 0$.
- Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^5}{e^x + x^5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x + x)^3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{x^2}) \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{x + 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{e^{\sqrt{\ln x}}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x^{10}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4 + e^{\frac{x}{2}}} \end{array}$$

Exercice 38 Nombres dérivés cachés ★

corrigé p. 53

En reconnaissant un nombre dérivé, ou en se ramenant à $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, calculer :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - 1}{\sin 2x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(e^{2x} - 1)}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2} - e^x}{x - 1} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x)}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{2}\right) & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{\frac{1}{x}}}{x - 1} \end{array}$$

Exercice 39 Branches infinies ★★

corrigé p. 54

Pour chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$: limites aux bornes, branches infinies de la courbe et, le cas échéant, position par rapport aux asymptotes.

- $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 1} - x$.
- $g(x) = x \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ (étudier d'abord la parité de g).
- $h(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ (montrer que $h(x) - (e^x - 1) \rightarrow 0$ en $+\infty$ et préciser la position de la courbe de h par rapport à la courbe $\Gamma : y = e^x - 1$).
- $k(x) = \ln(1 + x^2 e^x)$.

Exercice 40 Prolongements et demi-tangentes ★★

corrigé p. 54

- Soit $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de f , ses limites en $\pm\infty$, puis sa dérivabilité à droite et à gauche en 0. Interpréter graphiquement.
- Soit $g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ si $x > 0$, et $g(0) = 0$. Étudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0, puis la branche infinie de sa courbe en $+\infty$. Montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ (on étudiera $h(x) = (2x - 1)e^x + 1$).

3. Soit $k(x) = (1-x)e^{\frac{x}{x-1}}$ si $x < 1$, et $k(1) = 0$.

- Étudier la continuité et la dérivabilité de k à gauche en 1 (on pourra poser $u = \frac{1}{x-1}$). Interpréter.
- Montrer que la droite $\Delta : y = -ex$ est asymptote à la courbe de k en $-\infty$, et préciser leur position relative.

Exercice 41 Formes 1^∞ et échelle de croissance ★★★

corrigé p. 55

1. En écrivant $u^v = e^{v \ln u}$ ($u > 0$), calculer :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (3e^x - 2)^{\frac{1}{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + e^x + e^{2x}}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

2. **Le défi de la couverture.** On admet (exercice 19) que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour tout $x \geq 0$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$.

3. Pour deux fonctions f et g strictement positives au voisinage de $+\infty$, on note $f \ll g$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

a) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a(x) - b(x)) = -\infty$, alors $e^a \ll e^b$. Montrer aussi que si $b(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{a(x)}{b(x)} \rightarrow 0$, alors $a(x) - b(x) \rightarrow -\infty$.

b) En déduire, sur $]1, +\infty[$, la chaîne : $x^{100} \ll e^{(\ln x)^3} \ll e^{\sqrt[3]{x}} \ll e^{\frac{x}{\ln x}} \ll e^x$.

c) Où placer, dans cette chaîne, les fonctions $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto e^{x^{0,9}}$?

Exercice 42 Encadrer pour conclure ★★★

corrigé p. 56

On rappelle (chapitre 5) que $\frac{v}{1+v} \leq \ln(1+v) \leq v$ pour tout réel $v > -1$, et que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $1 + t \leq e^t \leq 1 + t e^t$.

2. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}} + e^{\frac{2}{n^2}} + \dots + e^{\frac{n}{n^2}}$. Montrer que $\frac{n+1}{2n} \leq S_n - n \leq e^{\frac{1}{n}} \frac{n+1}{2n}$, puis calculer $\lim (S_n - n)$.

3. Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right)^2$. Calculer $\lim v_n$ et $\lim n v_n$.

4. Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \left(2 - e^{\frac{k}{n^2}} \right) = \left(2 - e^{\frac{1}{n^2}} \right) \left(2 - e^{\frac{2}{n^2}} \right) \dots \left(2 - e^{\frac{n}{n^2}} \right)$. Justifier que $P_n > 0$, puis montrer que $\lim P_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

20 Dérivées et primitives

Dériver avec $(e^u)' = u'e^u$; pour primitiver, reconnaître $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$, $\frac{u'}{1+u^2}$, quitte à transformer l'expression (diviser par e^x , décomposer), ou chercher une primitive de forme imposée et identifier. Une primitive se vérifie toujours en la dérivant.

Exercice 43 Dériver avec l'exponentielle ★

corrigé p. 56

1. Justifier que f est dérivable sur l'ensemble I indiqué, puis calculer $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$$\text{a) } f(x) = e^x \arctan x, I = \mathbb{R} \quad \text{b) } f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}, I =]-1, 1[\quad \text{c) } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, I = \mathbb{R}^*$$

$$\text{d) } f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}), I = \mathbb{R} \quad \text{e) } f(x) = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1), I =]0, +\infty[$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}, I =]0, +\infty[\quad \text{g) } f(x) = e^{x-e^x}, I = \mathbb{R} \quad \text{h) } f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}, I = \mathbb{R}$$

2. Soit $f(x) = e^x \cos x$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $f'(x) = \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, puis montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$. Calculer $f^{(4)}$ en fonction de f .

Exercice 44 Reconnaître la bonne forme ★

corrigé p. 57

1. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I indiqué.

$$\text{a) } \frac{\ln x}{x} e^{(\ln x)^2},]0, +\infty[\quad \text{b) } \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{x-\frac{1}{x}},]0, +\infty[\quad \text{c) } x e^{x^2} \cos(e^{x^2}), \mathbb{R}$$

$$\text{d) } \frac{e^x}{\cos^2(e^x)},]-\infty, \ln \frac{\pi}{2}[\quad \text{e) } \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}, \mathbb{R} \quad \text{f) } e^x \sin(e^x), \mathbb{R} \quad \text{g) } \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}, \mathbb{R}$$

$$\text{h) } \frac{e^x}{(1+e^x) \ln(1+e^x)}, \mathbb{R} \quad \text{i) } e^x \sqrt{e^x + 3}, \mathbb{R}$$

2. Vérifier que $\frac{e^{3x}}{e^x + 1} = e^{2x} - e^x + \frac{e^x}{e^x + 1}$, puis déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de cette fonction telle que $F(0) = 0$.

Exercice 45 Identifier, décomposer ★★

corrigé p. 58

- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x^2 - 1)e^{-2x}$ de la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$.
- Déterminer les réels a et b tels que $G(x) = (a\sqrt{x} + b)e^{\sqrt{x}}$ soit une primitive de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer les réels a et b tels que $H(x) = (ax + b)e^{x^2}$ soit une primitive de $x \mapsto (2x^2 + 2x + 1)e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ pour tout réel $x \notin \{-1, 1\}$.
 - En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}$ (multiplier haut et bas par e^x).

Exercice 46 La réciproque de $x e^{\frac{x^2}{2}}$ ★★

corrigé p. 58

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}$.

1. Étudier la parité de f , ses limites en $\pm\infty$; calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis étudier les variations et la concavité de f . Donner la tangente en O .
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; on note g sa réciproque. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(0)$, $g'(0)$, $g(\sqrt{e})$ et $g'(\sqrt{e})$.
3. Montrer que, pour tout $y \neq 0$: $g'(y) = \frac{g(y)}{y(1+g(y)^2)}$.
4. Montrer que $0 \leq g(y) \leq y$ pour tout $y \geq 0$, puis que la courbe de g est concave sur $[0, +\infty[$.
5. a) Montrer que, pour tout $y > 0$: $g(y)^2 = 2 \ln y - 2 \ln g(y)$.
b) En déduire que, pour $y \geq \sqrt{e}$: $2 \ln y - \ln(2 \ln y) \leq g(y)^2 \leq 2 \ln y$, puis calculer $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{\sqrt{2 \ln y}}$.

Exercice 47 La fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ ★★★

corrigé p. 59

1. a) Montrer que la fonction $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ a le signe de x sur $\mathbb{R}$.
b) En étudiant $\omega(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + (1+x)e^{-x}$, montrer que $1 + x + \frac{x^2}{2}e^x - e^x$ a le signe de x sur $\mathbb{R}$.
c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
2. Soit $\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$, et $\varphi(0) = 1$. Montrer que φ est continue et dérivable en 0, et donner la tangente T à sa courbe au point d'abscisse 0.
3. Calculer $\varphi'(x)$ pour $x \neq 0$, et montrer que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer enfin que $\varphi'(x) \rightarrow \varphi'(0)$ quand $x \rightarrow 0$.
4. Calculer les limites de φ en $\pm\infty$; montrer que la droite $y = -x$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et préciser leur position. Vérifier que $\varphi(-x) = \varphi(x) + x$; que peut-on dire de $x \mapsto \varphi(x) + \frac{x}{2}$?

Exercice 48 Primitives de $P(x)e^x$ ★★★

corrigé p. 60

Dans cet exercice, P désigne un polynôme de degré $n \geq 0$, et $P^{(k)}$ sa dérivée k -ième ($P^{(0)} = P$).

1. Montrer que, pour tout polynôme R : $(R e^x)' = (R + R') e^x$ et $(R e^{-x})' = (R' - R) e^{-x}$.
2. On pose $Q = P - P' + P'' - \dots + (-1)^n P^{(n)}$.
a) Montrer que $Q + Q' = P$, et en déduire une primitive de $x \mapsto P(x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que si R est un polynôme tel que $(R e^x)' = P e^x$, alors $R = Q$ (comparer les degrés de $D = R - Q$ et de $D + D'$).
3. Déterminer une primitive de $x \mapsto x^3 e^x$, puis de $x \mapsto (x^2 + 3x + 1) e^x$.
4. Montrer de même que $-(P + P' + \dots + P^{(n)}) e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto P(x)e^{-x}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la primitive de $x \mapsto x^n e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F_n(0) = 0$. Expliciter F_2 , puis montrer que $F_n(x) = n! - n! e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

21 Puissances réelles et base a

Tout se ramène à $a^x = e^{x \ln a}$ et $x^a = e^{a \ln x}$: on passe au logarithme pour résoudre, on encadre pour conclure.

Exercice 49 Équations, inéquation et système en base a ★

corrigé p. 60

- Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $2^x + 4^x = 8^x$; b) $2^x \times 3^{x^2} = 6$.
- a) Montrer que $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$. b) Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $x^{\ln 2} + 2^{\ln x} = 16$.
- Vérifier que $6^x - 2^{x+1} - 3^{x+1} + 6 = (2^x - 3)(3^x - 2)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $6^x - 2^{x+1} - 3^{x+1} + 6 \geq 0$ (on comparera $\log_3 2$ et $\log_2 3$).
- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système
$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$$

Exercice 50 La fonction $x \mapsto (x-1)3^x$ ★

corrigé p. 61

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)3^x$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

- En écrivant $x3^x = \frac{1}{\ln 3} (x \ln 3) e^{x \ln 3}$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- Montrer que $f'(x) = 3^x(1 + (x-1)\ln 3)$. Vérifier que $3^{\frac{1}{\ln 3}} = e$, puis montrer que f admet un minimum égal à $-\frac{3}{e \ln 3}$, atteint en $x_0 = 1 - \frac{1}{\ln 3}$. Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer $f''(x)$; montrer que C_f admet un unique point d'inflexion I , d'abscisse $1 - \frac{2}{\ln 3}$, et calculer son ordonnée.
- Donner une équation de la tangente T à C_f au point $A(1, 0)$, puis tracer T et C_f ($\ln 3 \approx 1,1$).
- Discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 51 La suite $u_{n+1} = 2^{u_n} - 1$ ★★

corrigé p. 61

Soit $\varphi(x) = 2^x - 1 - x$ pour $x \in \mathbb{R}$, et (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 2^{u_n} - 1$.

- Étudier les variations de φ ; vérifier que son minimum est atteint en $x^* = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$ et que $0 < x^* < 1$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, et en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant x .
- On suppose $0 < u_0 < 1$. Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout n , que (u_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers 0.
- Soit $q(x) = \frac{2^x - 1}{x}$ pour $x > 0$. a) En étudiant $N(x) = (x \ln 2 - 1)2^x + 1$, montrer que q est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} q(x)$. b) On pose $k = q(u_0)$. Montrer que $k < 1$ et que $\ln 2 \cdot u_n < u_{n+1} \leq k u_n$ pour tout n . En déduire que $(\ln 2)^n u_0 \leq u_n \leq k^n u_0$, et calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- Ici $u_0 = \frac{1}{2}$. Calculer k ; trouver N tel que $u_n \leq 10^{-6}$ pour $n \geq N$, et montrer que $u_n > 10^{-6}$ pour $n \leq 35$ ($\ln k \approx -0,188$, $\ln(\ln 2) \approx -0,367$, $\ln(2 \cdot 10^{-6}) \approx -13,12$).
- Étudier le comportement de (u_n) lorsque $u_0 > 1$, puis lorsque $u_0 < 0$.

Exercice 52 Une somme de racines k -ièmes de 2 ★★

corrigé p. 62

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(2^{\frac{1}{k}} - 1\right)$ et $H'_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$; on rappelle (chapitre 5) que $\lim H'_n = \ln 2$.

1. Montrer que $t \leq e^t - 1 \leq t e^t$ pour tout réel t (pour la seconde inégalité, utiliser $e^{-t} \geq 1 - t$).
2. En déduire que $\frac{\ln 2}{k} \leq 2^{\frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{\ln 2}{k} 2^{\frac{1}{n+1}}$ pour $n+1 \leq k \leq 2n$, puis que $\ln 2 \cdot H'_n \leq S_n \leq 2^{\frac{1}{n+1}} \ln 2 \cdot H'_n$.
Conclure : $\lim S_n = (\ln 2)^2$.
3. Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right) = \ln a \cdot \ln 2$ (distinguer $a > 1$ et $0 < a < 1$).
4. Soit $T_n = \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{1}{k}} - 1\right)$. Montrer, à l'aide de $\ln(1+u) \leq u$, que $T_n \geq \ln 2 \cdot \ln(n+1)$. Limite de (T_n) ?

Exercice 53 Sommes de puissances réelles ★★★

corrigé p. 62

Soit α un réel tel que $\alpha > -1$ et $\alpha \neq 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha = 1 + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$.

1. Soit $k \geq 1$ un entier. En appliquant le théorème des accroissements finis à $t \mapsto t^{\alpha+1}$ sur $[k, k+1]$, montrer que : si $\alpha > 0$, $(\alpha+1)k^\alpha \leq (k+1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)(k+1)^\alpha$ (encore vrai pour $k=0$) ; si $-1 < \alpha < 0$, les deux inégalités sont renversées.
2. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$, puis que $\lim \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$.
3. On suppose $-1 < \alpha < 0$. Montrer que $\frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{n^{\alpha+1}+\alpha}{\alpha+1}$, et que la conclusion de 2 subsiste.
4. Calculer $\lim \frac{1+2^{\sqrt{2}}+3^{\sqrt{2}}+\dots+n^{\sqrt{2}}}{n^{1+\sqrt{2}}}$ et $\lim \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1/\sqrt{2}}}$.

Exercice 54 Une suite implicite : $2^x + 3^x = n$ ★★★

corrigé p. 63

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x + 3^x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $2^x + 3^x = n$ admet une unique solution x_n ; calculer x_2 et montrer que $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $\log_3 \frac{n}{2} \leq x_n < \log_3 n$ pour tout $n \geq 2$. En déduire $\lim x_n$ et $\lim \frac{x_n}{\ln n}$.
3. On pose $\varepsilon_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_n}$. Montrer que $x_n = \log_3 n - \log_3(1 + \varepsilon_n)$, puis que $\lim (x_n - \log_3 n) = 0$.
4. Vérifier que $n^{\log_3 2} = 2^{\log_3 n}$, puis montrer que $\lim n^{1-\log_3 2} \varepsilon_n = 1$. En déduire la limite de $n^{1-\log_3 2} (\log_3 n - x_n)$.

22 Études de fonctions

Six études complètes ; tableaux et courbes dans les corrigés.

Exercice 55 Une asymptote oblique en $-\infty$ ★

corrigé p. 63

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + e^{2x} - 5e^x$, C_f sa courbe et Δ la droite d'équation $y = 2x$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; montrer que Δ est asymptote à C_f en $-\infty$ et étudier la position relative de C_f et Δ .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$, puis dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion I et préciser son abscisse.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $1,46 < \alpha < 1,47$ (on donne $f(1,46) \approx -0,07$ et $f(1,47) \approx 0,11$). Tracer Δ et C_f ($\ln 2 \approx 0,69$).

Exercice 56 Une fonction auxiliaire et deux zéros ★

corrigé p. 64

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 1)e^x - 3$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier ses variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β , et que $0,6 < \beta < 0,7$ ($e^{0,6} \approx 1,822$, $e^{0,7} \approx 2,014$). En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B. Soit $f(x) = x(e^x - 3)$ pour $x \in \mathbb{R}$, C_f sa courbe et D la droite d'équation $y = -3x$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; montrer que D est asymptote à C_f en $-\infty$ et préciser leur position relative.
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
4. Montrer que $f' = g$ et dresser le tableau de variations de f . Montrer que $f(\beta) = -\frac{3\beta^2}{\beta+1}$ et en déduire que $-0,87 < f(\beta) < -0,67$.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion I . Tracer D et C_f , puis discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 57 Une courbe qui traverse sa tangente ★★

corrigé p. 64

On pose $g(x) = x e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$, $h(t) = \frac{t}{1+t}$ pour $t > -1$, et $f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$; on note C_f la courbe de f .

1. Étudier les variations de g et montrer que $g(x) \geq -\frac{1}{e}$ pour tout réel x . En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que $f = h \circ g$.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; interpréter, et préciser la position de C_f par rapport à chacune de ses asymptotes.
3. Étudier les variations de h ; en déduire celles de f , et montrer que le minimum de f est $-\frac{1}{e-1}$.
4. Donner une équation de la tangente T à C_f en O . À l'aide de l'inégalité $e^{-x} \geq 1 - x$, montrer que $f(x) - x$ est du signe de $-x$. Que peut-on en déduire pour le point O ?

5. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Tracer T et C_f .

Exercice 58 La courbe de Gompertz ★★

corrigé p. 66

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-e^{-x}}$, C_f sa courbe et Γ la courbe d'équation $y = 1 - e^{-x}$.

- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; interpréter.
- a)** Montrer que $1 - u \leq e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}$ pour tout $u \geq 0$, puis que $0 \leq f(x) - (1 - e^{-x}) \leq \frac{1}{2}e^{-2x}$ pour tout réel x . Position de C_f par rapport à Γ ? **b)** En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - f(x))$.
- Calculer $f'(x)$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, déterminer $f^{-1}(y)$ et résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.
- Montrer que $f''(x) = e^{-x}(e^{-x} - 1)f(x)$. En déduire que C_f admet un point d'inflexion I , donner une équation de la tangente T en I , puis, en remarquant que $f'(x) \leq f'(0)$, étudier la position de C_f par rapport à T . Tracer Γ , T et C_f .

Exercice 59 La fonction de Langevin ★★★

corrigé p. 66

Pour tout réel x , on pose $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Soit L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(0) = 0$ et $L(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $P(x) = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$.

- Vérifier que $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ et $\operatorname{ch} \geq 1$. Montrer que L est impaire et calculer ses limites en $\pm\infty$; interpréter. Vérifier que $L(x) = \frac{P(x)}{x \operatorname{sh} x}$ pour $x \neq 0$.
- a)** Calculer $P'(x)$. Montrer que $t \leq \operatorname{sh} t \leq t e^t$ pour tout $t \geq 0$ (pour la seconde inégalité, utiliser $1 - e^{-u} \leq u$). **b)** Soit $x > 0$. En déduire que $t^2 \leq P'(t) \leq t^2 e^x$ pour $0 \leq t \leq x$, puis que $\frac{x^3}{3} \leq P(x) \leq \frac{x^3}{3} e^x$. **c)** En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P(x)}{x^3}$, puis que L est continue et dérivable en 0, avec $L'(0) = \frac{1}{3}$.
- Montrer que $L'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ pour $x \neq 0$, puis que L est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variations.
- Soit $Q(x) = x^2 \operatorname{sh} x - 3P(x)$. Calculer $Q'(x)$ et en déduire que $L(x) \leq \frac{x}{3}$ pour tout $x \geq 0$. Interpréter à l'aide de la tangente en 0, puis tracer la courbe de L .

Exercice 60 La réciproque de $x \mapsto e^x - x$ ★★★

corrigé p. 67

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

- Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On note g sa bijection réciproque ; calculer $g(1)$.
- Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $g'(y) = \frac{1}{y + g(y) - 1}$. Étudier la dérivabilité de g à droite en 1 ; interpréter graphiquement.
- Montrer que g' est décroissante sur $]1, +\infty[$; qu'en déduit-on pour la courbe C_g ?
- a)** Montrer que $e^{g(y)} = y + g(y)$, et en déduire que $g(y) \geq \ln y$ pour tout $y \geq 1$. **b)** Montrer que $e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \geq 0$, puis que $g(y) \leq \sqrt{2(y-1)}$ et $g(y) \leq \ln(2y)$ pour tout $y \geq 1$. **c)** En déduire $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{y}$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} (g(y) - \ln y)$. Interpréter à l'aide de la courbe Λ de $\ln$, puis tracer C_f , C_g , Λ et la droite $y = x$.

23

Défis de concours

Six problèmes de concours : initiative et rigueur exigées.

Exercice 61 La règle des signes pour les sommes d'exponentielles ★★★★★

corrigé p. 68

Soient $n \geq 1$, des réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et des réels **non nuls** $c_1, \dots, c_n$. On pose $F(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{a_k x}$, et on note V le nombre de **changements de signe** de $(c_1, \dots, c_n)$, c'est-à-dire le nombre d'indices k tels que $c_k c_{k+1} < 0$.

1. Soit φ dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant au moins $p \geq 2$ zéros distincts. Montrer que φ' a au moins $p - 1$ zéros distincts, et que, pour tout réel b , F et $G : x \mapsto e^{-bx} F(x)$ ont les mêmes zéros.
2. Montrer par récurrence sur V que F a au plus V zéros réels distincts. (Si $V \geq 1$, choisir j tel que $c_j c_{j+1} < 0$ et un réel $b \in]a_j, a_{j+1}[$, puis compter les changements de signe des coefficients de G' .)
3. **Applications.** **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^x + 5^x = 3^x + 4^x$. **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 + 6^x = 2^x + 3^x$; la majoration de la question 2 est-elle toujours atteinte ? **c)** Montrer que l'équation $2^x + 7^x = 3^x + 5^x$ a exactement deux solutions : 0 et un réel de $]0, 1[$.

Exercice 62 Une exponentielle et sa réciproque : trois points communs ★★★★★

corrigé p. 68

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on étudie l'équation $(E_a) : a^x = \log_a x$ ($x > 0$) ; les courbes $E_a : y = a^x$ et $L_a : y = \log_a x$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$.

1. On suppose $a > 1$. Soit x une solution de (E_a) et $y = a^x$. Montrer que $a^y = x$, puis que $x = y$: les points communs à E_a et L_a sont sur Δ .
2. Dans les questions 2 et 3, $a = \frac{1}{16}$. **a)** Vérifier que $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont solutions de (E_a) ; les points correspondants de E_a sont-ils sur Δ ? **b)** Montrer que l'équation $a^x = x$ a une unique solution réelle c , que $\frac{1}{4} < c < \frac{1}{2}$, et que c est solution de (E_a) .
3. **a)** Montrer que, pour $x > 0$: x est solution de (E_a) si et seulement si $h(x) = 0$, où $h(x) = a^{a^x} - x$. **b)** Montrer que $h'(x) = (\ln a)^2 a^{k(x)} - 1$, avec $k(x) = x + a^x$. Étudier les variations de h , puis montrer que h' s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$. **c)** Conclure : $(E_{1/16})$ a exactement trois solutions.
4. Soit $a \in [\frac{1}{e}, 1[$. Montrer que $h'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, et en déduire que (E_a) a une unique solution.

Exercice 63 Les polynômes de Bernstein de l'exponentielle ★★★★★

corrigé p. 69

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} e^{\frac{k}{n}}$ et $c_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

1. Montrer que $B_n(x) = \left(1 - x + x e^{\frac{1}{n}}\right)^n$.
2. **a)** En étudiant $\psi(x) = 1 - x + x e^t - e^{xt}$ sur $[0, 1]$ (t réel fixé), montrer que $e^x \leq B_n(x)$. **b)** À l'aide de $1 + v \leq e^v$, montrer que $B_n(x) \leq e^{c_n x}$. **c)** Montrer que $1 \leq c_n \leq e^{\frac{1}{n}}$, puis que $0 \leq B_n(x) - e^x \leq e(e^{1/n-1} - 1)$ sur $[0, 1]$. Conclure.
3. On admet que $-\frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) - u \leq -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}$ pour $u \geq 0$, et que $\frac{t^2}{2} \leq e^t - 1 - t \leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2}$ pour $t \in [0, 1]$. **a)** Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n - 1) = \frac{1}{2}$. **b)** Soit $x \in]0, 1[$ et $u_n = x(e^{\frac{1}{n}} - 1)$. Montrer que

$n(\ln B_n(x) - x) = n^2(\ln(1 + u_n) - u_n) + x n(c_n - 1)$, puis que $\lim n(\ln B_n(x) - x) = \frac{x(1-x)}{2}$. **c)** En déduire la **formule de Voronovskaïa** : $\lim n(B_n(x) - e^x) = \frac{x(1-x)}{2} e^x$.

Exercice 64 Les deux solutions de $x e^{-x} = b$ ★★★★★

corrigé p. 70

Soit b un réel tel que $0 < b < \frac{1}{e}$, et $\varphi(x) = x e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

- Étudier φ et montrer que l'équation $\varphi(x) = b$ admet exactement deux solutions y et z , avec $0 < y < 1 < z$.
- On pose $r = \frac{z}{y}$. Montrer que $z - y = \ln r$, puis que $y = \frac{\ln r}{r-1}$ et $z = \frac{r \ln r}{r-1}$.
- a)** Montrer que, pour tout $r > 1$: $\frac{2(r-1)}{r+1} < \ln r < \frac{r-1}{\sqrt{r}}$ (pour la seconde inégalité, poser $r = s^2$).
b) En déduire que $y + z > 2$ et $yz < 1$: le maximum de φ n'est pas au milieu de $[y, z]$.
- a)** Retrouver $y + z > 2$ en étudiant $\psi(t) = \varphi(1+t) - \varphi(1-t)$ sur $[0, 1]$. **b)** Soit $a \in]-\frac{1}{e}, 0[$. Montrer que l'équation $x e^x = a$ a exactement deux solutions $x_1 < x_2$, et que $x_1 + x_2 < -2$ et $x_1 x_2 < 1$.

Exercice 65 La fonction zêta près de 1 ★★★★★

corrigé p. 70

Pour $s > 1$ et $n \geq 1$, on pose $Z_n(s) = \sum_{k=1}^n k^{-s}$. On rappelle (chapitre 5) que $H_n - \ln n \rightarrow \gamma \approx 0,577$ (constante d'Euler), où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Soient $s > 1$ et $k \geq 1$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à $t \mapsto t^{1-s}$, montrer que $\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{k^{1-s} - (k+1)^{1-s}}{s-1} \leq \frac{1}{k^s}$.
- En déduire que $\frac{1 - (n+1)^{1-s}}{s-1} \leq Z_n(s) \leq 1 + \frac{1 - n^{1-s}}{s-1}$, puis que la suite $(Z_n(s))_n$ converge ; on note $\zeta(s)$ sa limite. Montrer que $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}$ et calculer $\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta(s)$.
- Pour $k \geq 1$, on pose $d_k(s) = \frac{1}{k^s} - \frac{k^{1-s} - (k+1)^{1-s}}{s-1}$ si $s > 1$, et $d_k(1) = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. **a)** Montrer que $0 \leq d_k(s) \leq \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}$ pour tout $s \geq 1$. **b)** Montrer que $D(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n d_k(s)$ existe, que $D(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ si $s > 1$, et que $D(1) = \gamma$.
- a)** Montrer que $0 \leq D(s) - \sum_{k=1}^p d_k(s) \leq \frac{1}{p+1}$ pour tout entier $p \geq 1$ et tout $s \geq 1$. **b)** Soit $k \geq 1$. Montrer que $d_k(s) \rightarrow d_k(1)$ quand $s \rightarrow 1^+$ (écrire $k^{1-s} = e^{-(s-1)\ln k}$). **c)** En déduire que $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \rightarrow \gamma$ quand $s \rightarrow 1^+$.

Exercice 66 La loi du déplacement de Wien ★★★★★

corrigé p. 71

Soit $n \geq 2$ un entier, et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x - 1}$ pour $x > 0$.

- Montrer que f_n est continue et dérivable à droite en 0, et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- Montrer que $f'_n(x)$ ($x > 0$) est du signe de $g_n(x) = n(1 - e^{-x}) - x$, puis que g_n s'annule sur $]0, +\infty[$ en un unique réel x_n , avec $n-1 < x_n < n$. En déduire que f_n est maximale en x_n .
- Soit $\psi_n(x) = n(1 - e^{-x})$. Montrer que $\psi_n([n-1, n]) \subset [n-1, n]$ et $|\psi'_n| \leq n e^{1-n}$ sur $[n-1, n]$; avec $t_0 = n$ et $t_{k+1} = \psi_n(t_k)$, montrer que $|t_k - x_n| \leq (n e^{1-n})^k$. Combien d'itérations garantissent x_5 à 10^{-6} près ?
- On pose $\delta_n = n - x_n$. Montrer que $\delta_n = n e^{-n} e^{\delta_n}$, puis que $\delta_n \rightarrow 0$, $\frac{e^n \delta_n}{n} \rightarrow 1$ et $\frac{e^{2n}}{n^2} (\delta_n - n e^{-n}) \rightarrow 1$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

24 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

1. $\frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3$, d'où $A = e^{\ln 6} = \boxed{6}$; $B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{2}$; $C = \frac{\ln 3}{\ln 9} = \frac{\ln 3}{2 \ln 3} = \boxed{\frac{1}{2}}$; $D = e^{2 \ln 5} = \boxed{25}$.

Comme $\ln(e^u) = u$: $f(x) = e^x e^{-x} = \boxed{1}$. $X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$ avec $X = e^x$: $g(x) = e^x + 2$.
 $h(x) = \ln(e^x(e^x + 1)) - \ln \frac{e^{x+1}}{e^x} = x + \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 1) + x = \boxed{2x}$.

2. $e^a + e^b - 2e^{\frac{a+b}{2}} = \left(e^{\frac{a}{2}} - e^{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$, nul si et seulement si $e^{\frac{a}{2}} = e^{\frac{b}{2}}$, soit $a = b$ (exp injective). Avec $a = x$, $b = x^2$: $\frac{x+x^2}{2} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8}$, donc $e^x + e^{x^2} \geq 2e^{\frac{x+x^2}{2}} \geq 2e^{-\frac{1}{8}}$ (exp croissante). Les deux égalités exigeraient $x = x^2$ et $x = -\frac{1}{2}$: impossible, d'où l'inégalité **stricte**.

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} < 10$ car $24 < 25$: $e^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < e^{\sqrt{10}}$. $\pi - 3 < \frac{1}{7}$ donne $e^{\pi} e^{-3} = e^{\pi-3} < \sqrt[7]{e}$.

■ Corrigé de l'exercice 2

On pose $X = e^x > 0$.

a) $X^3 + X^2 - 4X - 4 = X^2(X + 1) - 4(X + 1) = (X + 1)(X - 2)(X + 2) = 0$ et $X > 0$: $X = 2$, $S = \{\ln 2\}$.

b) En multipliant par $X > 0$: $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3) \leq 0 \iff X \leq 3$: $S =]-\infty, \ln 3]$.

c) $D : e^x > 1$, soit $x > 0$. Sur D : $\ln(e^x - 1) \leq \ln \frac{e^x}{2} \iff e^x - 1 \leq \frac{e^x}{2} \iff e^x \leq 2$: $S =]0, \ln 2]$.

d) $D = \mathbb{R}$; les deux membres sont positifs, on élève au carré : $e^x + 2 = e^x + 2e^{\frac{x}{2}} + 1 \iff e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$:
 $S = \{-2 \ln 2\}$.

(S_1) : avec $Y = e^y$, $(X - Y)(X + Y) = 15$ et $X - Y = 3$ donnent $X + Y = 5$, puis $X = 4$, $Y = 1$: $S = \{(2 \ln 2, 0)\}$.

(S_2) : $x, y > 0$; $e^{x+y} = e^3 \iff x + y = 3$ et $\ln(xy) = \ln 2 \iff xy = 2$: x et y sont les racines de $t^2 - 3t + 2 = 0$: $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 3

a) $t = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: $x^4 e^{-\sqrt{x}} = t^8 e^{-t} \rightarrow \boxed{0}$ (croissances comparées). b) On divise par e^x : $\frac{1-x^3 e^{-x}}{x+e^{-x}} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$. c) $\frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\frac{3}{2}}$. d) Nombre dérivé en 0 de $\varphi(x) = e^{\sqrt{1+x}}$: $\varphi'(x) = \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+x}}$, la limite

vaut $\varphi'(0) = \frac{e}{2}$. e) $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ : \frac{e^t-1}{t} \rightarrow 1$. f) $x \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{\ln(1+u)}{u}$ avec $u = \frac{2}{x-1} \rightarrow 0 : \rightarrow 2$, la limite est e^2 . g) $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x}$ et $\sqrt{x} \ln x = 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} \rightarrow 0 : 1$. h) $\frac{1}{x} \ln(e^x - 1) = \frac{x + \ln(1-e^{-x})}{x} \rightarrow 1 : e$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- a) $f'(x) = \frac{e^x(1+x^2)-2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} \geq 0$, nul seulement en 1 : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

b) $2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$. c) $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, d'où $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} e^{\frac{x}{1+x^2}}$. d) $-e^{-x} \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{-x}(-1-e^{2x}+e^{2x})}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.
- a) $\frac{1}{3} u' e^u$ ($u = x^3$) : $\frac{1}{3} e^{x^3}$; b) $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ($u = 1+e^{2x}$) : $\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; c) $-u' e^u$ ($u = \frac{1}{x}$) : $-e^{\frac{1}{x}}$; d) $u' e^u$ ($u = \sin^2 x$, $u' = \sin 2x$) : $e^{\sin^2 x} \sin 2x$; e) $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$: $x - \ln(1+e^x)$; f) $\frac{u'}{u}$ avec $u = e^x + e^{-x} > 0$: $\ln(e^x + e^{-x})$.
- $F'(x) = e^{2x}[(2a+b)\cos x + (2b-a)\sin x]$; on identifie : $2a+b=0$ et $2b-a=1$, soit $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$: $F(x) = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x)$.

■ Corrigé de l'exercice 5

- a) $X = 3^x > 0 : 3X - \frac{3}{X} = 8 \iff 3X^2 - 8X - 3 = (3X+1)(X-3) = 0$, $X = 3$: $S = \{1\}$. b) $\frac{10^x}{5} = 20 \iff 10^x = 10^2$: $S = \{2\}$. c) $2^{-x^2} \geq 2^{-2x} \iff -x^2 \geq -2x \iff x(x-2) \leq 0$: $S = [0, 2]$. d) En prenant $\ln : \sqrt{x} \ln x = \frac{x}{2} \ln x \iff \ln x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0 \iff x = 1$ ou $\sqrt{x} = 2$: $S = \{1, 4\}$.
- Il faut $2m-1 > 0$, et $(a^x)' = \ln a \cdot a^x < 0 \iff 0 < a < 1$: $\frac{1}{2} < m < 1$. $(x^\pi + \pi^x)' = \pi x^{\pi-1} + \ln \pi \cdot \pi^x$; $(e^{\sqrt{x} \ln x})' = \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) x^{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}$.
- $h(x) = e^{\sqrt{3} \ln x} \rightarrow 0 = h(0)$ et $\frac{h(x)}{x} = x^{\sqrt{3}-1} \rightarrow 0$: h est dérivable à droite en 0, $h'(0) = 0$ (demi-tangente **horizontale**). k est continue en 0, mais $\frac{k(x)}{x} = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}-1} \rightarrow +\infty$: demi-tangente **verticale**. Enfin $x^{\sqrt{3}} < x^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \iff \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln x < 0 \iff x < 1$: C_h est au-dessous de C_k sur $]0, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$ (elles sont symétriques par rapport à $y = x : k = h^{-1}$).

■ Corrigé de l'exercice 6

- En $-\infty : x^2 e^x \rightarrow 0$ et $3e^x \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow 0$: **asymptote** $y = 0$. En $+\infty : f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(x - \frac{3}{x}\right) e^x \rightarrow +\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy) .
- $f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x+3)(x-1)e^x$.

$f(-3) = 6e^{-3} \approx 0,30$, $f(1) = -2e \approx -5,44$. $f(x)$ a le signe de $x^2 - 3$: $f < 0$ sur $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $f > 0$ ailleurs. $f(0) = -3$, $f'(0) = -3$: $T : y = -3x - 3$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			0	+

Diagramme de variation : $f(x)$ a un maximum local en $x = -3$ (valeur $6e^{-3}$) et un minimum local en $x = 1$ (valeur $-2e$). La courbe passe par $(0, -3)$.

3. $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-3)e^x = (x^2+4x-1)e^x$ s'annule en changeant de signe en $-2 \pm \sqrt{5}$: **deux points d'inflexion**. D'après le tableau : $f(x) = m$ a 0 solution si $m < -2e$; 1 si $m = -2e$; 2 si $-2e < m \leq 0$; 3 si $0 < m < 6e^{-3}$; 2 si $m = 6e^{-3}$; 1 si $m > 6e^{-3}$.

■ Corrigé de l'exercice 7

1. Avec $z' = a' + ib'$ et $e^{ib}e^{ib'} = e^{i(b+b')}$ (chapitre 6) : $e^z e^{z'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} = e^{z+z'}$. $|e^z| = e^a |e^{ib}| = e^a > 0$, donc $e^z \neq 0$. $\overline{e^z} = e^a e^{-ib} = e^{a-ib} = e^{\bar{z}}$.
2. $e^z = 1 = e^0$: modules et arguments, $e^a = 1$ et $b \equiv 0 [2\pi]$, soit $a = 0$ et $b \in 2\pi\mathbb{Z}$: $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Comme $e^z e^{-z'} = e^{z-z'}$ et $e^{z'} \neq 0$: $e^z = e^{z'} \iff e^{z-z'} = 1 \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. (Ainsi $z \mapsto e^z$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$: $e^{2i\pi} = e^0$.)
3. a) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{3}}$: $z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. b) $-e = e^{1+i\pi}$: $z = 1 + i(\pi + 2k\pi)$. c)
 $Z = e^z$: $Z^2 - 2Z + 2 = 0 \iff Z = 1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\ln 2}{2} \pm i\frac{\pi}{4}}$: $z = \frac{\ln 2}{2} \pm i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi$.

■ Corrigé de l'exercice 8

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-3}$: suite géométrique de raison $q = e^{-3} \in]0, 1[$, de premier terme e^2 . $S_n = e^2 \frac{1-e^{-3(n+1)}}{1-e^{-3}} \rightarrow \frac{e^2}{1-e^{-3}} = \frac{e^5}{e^3-1}$. a) $t = \sqrt{n}$: $t^4 e^{-t} \rightarrow 0$; b) $\frac{e^n}{n^n} = e^{n(1-\ln n)} \rightarrow 0$; c) $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} \rightarrow 1$; d) $\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 e^{-n \ln 3} \rightarrow 0$ (croissances comparées).
2. $f(x) = e^x - 1$ est croissante et $f([-1, 0]) = [e^{-1} - 1, 0] \subset [-1, 0]$: par récurrence, $-1 \leq v_n \leq 0$. Puis $v_{n+1} - v_n = e^{v_n} - 1 - v_n \geq 0$: (v_n) croît. Croissante et majorée par 0, elle converge vers $\ell \in [-1, 0]$, et (f continue) $e^\ell - 1 = \ell$: c'est le cas d'égalité de $e^t \geq 1 + t$, donc $\ell = 0$.

25 Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- a) $\frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x} \rightarrow \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$ (nombres dérivés de a^x en 0). b) $\varphi(x) = e^{\tan x}$: $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$, $\varphi'(x) = (1 + \tan^2 x) e^{\tan x}$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e$; le quotient vaut $\frac{1}{4} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(\pi/4)}{x - \pi/4} \rightarrow \frac{e}{2}$. c) TAF pour exp sur $\left[\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right]$: $e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = e^{c_x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{e^{c_x}}{x(x+1)}$ avec $c_x \rightarrow 0$; donc $x^2(\dots) = \frac{x}{x+1} e^{c_x} \rightarrow 1$. d) $\ln(e^{2x} + e^x) - 2x = \ln(1 + e^{-x})$, et $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$ avec $u = e^{-x} \rightarrow 0$: 1. e) Pour $x \neq 0$, $\sin x \neq x$; le TAF entre $\sin x$ et x donne $e^x - e^{\sin x} = e^c(x - \sin x)$, c entre $\sin x$ et x , donc $c \rightarrow 0$: 1. f) Somme géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{n}} \neq 1$, avec $q^n = e$: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}}(e - 1) \cdot \frac{1/n}{e^{1/n}-1} \rightarrow e - 1$.

■ Corrigé de l'exercice 10

Partie I. $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$: g décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$; son minimum est $g(0) = 0$: $g(x) \geq 0$, avec égalité seulement en 0.

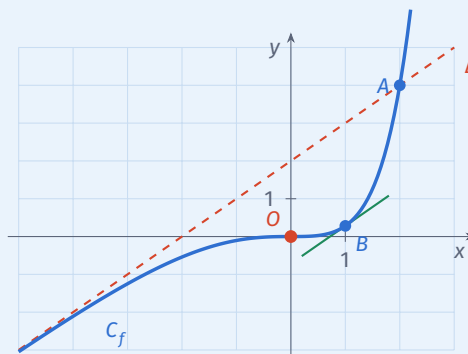
Partie II.

1. En $-\infty$: $(x-2)e^x = xe^x - 2e^x \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow -\infty$ et $f(x) - (x+2) \rightarrow 0$: Δ est asymptote.

$f(x) - (x + 2) = (x - 2)e^x$: C_f est **au-dessous** de Δ sur $]-\infty, 2[$, au-dessus sur $]2, +\infty[$; elles se coupent en $A(2, 4)$. En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)e^x + 1 + \frac{2}{x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy) .

- $f'(x) = e^x + (x-2)e^x + 1 = (x-1)e^x + 1 = g(x) \geq 0$, nul seulement en 0 : f est **strictement croissante** ; $f(0) = 0$, donc $f < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f > 0$ sur $]0, +\infty[$. Continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: f est une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- $f''(x) = g'(x) = xe^x$: C_f est concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$; O est un point d'inflexion, et $f'(0) = g(0) = 0$: la tangente en O est l'axe (Ox) , que la courbe traverse. $f'(x) = 1 \iff (x-1)e^x = 0 \iff x = 1$: $B(1, 3 - e)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

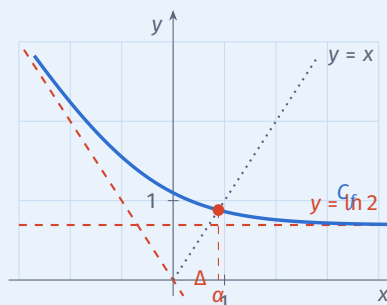


- f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Comme $f'(0) = 0$, f^{-1} n'est **pas** dérivable en 0 (tangente verticale en O à sa courbe). $3 - e = f(1)$ et $f'(1) = g(1) = 1$: $(f^{-1})'(3 - e) = \frac{1}{f'(1)} = \boxed{1}$.
- Pour $0 \leq x < 2$: $f(x) \geq 0 \iff (2-x)e^x \leq 2+x \iff e^x \leq \frac{2+x}{2-x}$ ($2-x > 0$). Pour $x \leq 0$: $f(x) \leq 0$ donne de même $e^x \geq \frac{2+x}{2-x}$. Avec $x = 1$: $\boxed{e \leq 3}$; avec $x = \frac{1}{2}$: $\boxed{\sqrt{e} \leq \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}}$.

■ Corrigé de l'exercice 11

- En $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$, $f \rightarrow \ln 2$: **asymptote** $y = \ln 2$, et $f(x) - \ln 2 = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{2}\right) > 0$: C_f est au-dessus. $2 + e^{-x} = e^{-x}(1 + 2e^x)$ donne $f(x) = -x + \ln(1 + 2e^x)$. En $-\infty$: $\ln(1 + 2e^x) \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow +\infty$ et $f(x) - (-x) \rightarrow 0$: Δ est **asymptote**, et C_f est au-dessus de Δ ($\ln(1 + 2e^x) > 0$).
- $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{2+e^{-x}} = -\frac{1}{1+2e^x} < 0$: f décroît strictement de $+\infty$ à $\ln 2$. $f''(x) = \frac{2e^x}{(1+2e^x)^2} > 0$: C_f est **convexe**.
 $f(0) = \ln 3$, $f'(0) = -\frac{1}{3}$: tangente $\boxed{y = -\frac{x}{3} + \ln 3}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$



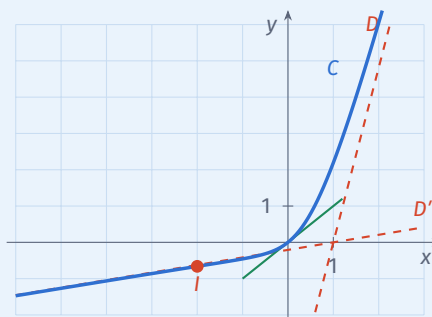
- $f(x) = x \iff 2 + e^{-x} = e^x \iff e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ (on multiplie par $e^x > 0$). Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - 2X - 1 = 0$, $X = 1 \pm \sqrt{2}$, et seul $1 + \sqrt{2}$ est positif : unique solution $\boxed{\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})} \approx 0,881$.

4. f décroît : $f(I) = [f(\ln 3), f(\ln 2)] = \left[\ln \frac{7}{3}, \ln \frac{5}{2}\right] \subset [\ln 2, \ln 3]$. Pour $x \in I$, $e^x \geq 2$, donc $|f'(x)| = \frac{1}{1+2e^x} \leq \frac{1}{5}$. Et $2 < 1 + \sqrt{2} < 3 : \alpha \in I$.
5. $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$: par récurrence, $u_n \in I$. L'IAF entre u_n et α (dans I) donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{5} |u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} |u_n - \alpha|$, d'où $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$, car $|u_0 - \alpha| = \ln \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 0,188 < \frac{1}{5}$. Donc $\lim u_n = \alpha$. Enfin $5^{n+1} > 10^6$ dès que $n+1 \geq 9$ ($5^8 = 390\,625$, $5^9 = 1\,953\,125$) : $n_0 = 8$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. En $+\infty$, $e^{\arctan x} \rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} : g \rightarrow +\infty$; en $-\infty$, $e^{\arctan x} \rightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} > 0 : g \rightarrow -\infty$. Avec $\varphi(t) = e^{-\arctan t} : \varphi(0) = 1, \varphi'(t) = -\frac{e^{-\arctan t}}{1+t^2}, \varphi'(0) = -1$: la limite est le nombre dérivé $\varphi'(0) = -1$.
2. Pour $x > 0, t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ : g(x) = e^{\frac{\pi}{2}} x e^{-\arctan t}$, donc $g(x) - e^{\frac{\pi}{2}} x = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-\arctan t} - 1}{t} \rightarrow -e^{\frac{\pi}{2}}$, soit $g(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x - 1) \rightarrow 0 : D$ est asymptote en $+\infty$. Pour $x < 0$, $\arctan$ étant impaire, $\arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$; avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^- : g(x) - e^{-\frac{\pi}{2}} x = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-\arctan t} - 1}{t} \rightarrow -e^{-\frac{\pi}{2}} : D'$ est asymptote en $-\infty$.
3. Pour $x > 0$ et $t = \frac{1}{x} : g(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x - 1) = e^{\frac{\pi}{2}} x [e^{-\arctan t} - 1 + t]$, et $e^{-\arctan t} \geq 1 - \arctan t > 1 - t : le$ crochet est > 0 , C est **au-dessus** de D sur $]0, +\infty[$.
4. $g'(x) = e^{\arctan x} + \frac{x}{1+x^2} e^{\arctan x} = \frac{x^2+x+1}{1+x^2} e^{\arctan x} > 0$ ($x^2 + x + 1$ a pour discriminant -3) : g est strictement croissante (bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) ; $g'(0) = 1$: tangente $y = x$ en O . Avec $g' = r e^{\arctan x}, r = 1 + \frac{x}{1+x^2}, r' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} : g'' = e^{\arctan x} \left(r' + \frac{r}{1+x^2}\right) = \frac{(1-x^2) + (x^2+x+1)}{(1+x^2)^2} e^{\arctan x} = \frac{x+2}{(1+x^2)^2} e^{\arctan x} :$ concave sur $]-\infty, -2]$, convexe sur $[-2, +\infty[$, inflexion $I(-2, -2e^{-\arctan 2}) \approx (-2; -0,66)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	1	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



■ Corrigé de l'exercice 13

1. a) $4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \iff \frac{3}{2} 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}} 3^x \iff \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} : S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. b) $x > 0$ et $x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2} \geq e^4 \iff (\ln x)^2 \geq 4 : S =]0, e^{-2}] \cup [e^2, +\infty[$. c) $x > 0$; en appliquant $\log_2$: $t^2 = 4 + 3t$ avec $t = \log_2 x$, d'où $t \in \{4, -1\} : S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$. d) Produit : $6^{x+y} = 216 = 6^3$; quotient : $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}$; donc $x + y = 3, x - y = 1 : (2, 1)$.
2. La tangente au point d'abscisse t a pour équation $y = (\ln a) a^t (x - t) + a^t$; elle passe par O si et seulement si $a^t(1 - t \ln a) = 0$, soit $t = \frac{1}{\ln a}$: une seule tangente, de point de contact $\left(\frac{1}{\ln a}, a^{\frac{1}{\ln a}}\right) = \left(\frac{1}{\ln a}, e^{\frac{\ln a}{\ln a}}\right) = \left(\frac{1}{\ln a}, e\right)$ (pente $e \ln a$). Pour $a = e$: la tangente $y = ex$ au point $(1, e)$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. φ est continue sur $[0, +\infty[$, $\varphi(0) = 0$, et $\varphi'(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - (1+t)^{\alpha-1}) > 0$ pour $t > 0$ ($s \mapsto s^{\alpha-1}$ décroît car $\alpha - 1 < 0$) : $\varphi \geq 0$. Si $a > 0$: $(a+b)^\alpha = a^\alpha \left(1 + \frac{b}{a}\right)^\alpha \leq a^\alpha \left(1 + \frac{b^\alpha}{a^\alpha}\right) = a^\alpha + b^\alpha$ (évident si $a = 0$). Si $\alpha > 1$, $\varphi' < 0$ et l'inégalité **s'inverse** : $(a+b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha$.
2. $\psi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - (1-x)^{\alpha-1}) > 0 \iff x < 1-x \iff x < \frac{1}{2}$: ψ croît sur $[0, \frac{1}{2}]$, décroît sur $[\frac{1}{2}, 1]$, d'où $1 = \psi(0) = \psi(1) \leq \psi \leq \psi(\frac{1}{2}) = 2^{1-\alpha}$. Pour $a+b > 0$ et $x = \frac{a}{a+b}$: $a^\alpha + b^\alpha = (a+b)^\alpha \psi(x) \leq 2^{1-\alpha}(a+b)^\alpha$.
3. $\alpha = \frac{1}{3}$: $(x+y)^{\frac{1}{3}} \leq x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}}(x+y)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4(x+y)}$. $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 2$, $b = 3$: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{10}$, et l'inégalité est stricte car $\psi(x) < 2^{1-\alpha}$ si $x \neq \frac{1}{2}$ (ici $a \neq b$).

■ Corrigé de l'exercice 15

1. $e^a - a \geq 1 > 0$: A est **au-dessus** de Δ ; $b - \ln b \geq 1 > 0$: B est **au-dessous**. Le segment $[AB]$ coupe donc Δ en un point I , et

$$AB = AI + IB \geq d(A, \Delta) + d(B, \Delta) = \frac{e^a - a}{\sqrt{2}} + \frac{b - \ln b}{\sqrt{2}} \geq \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

L'égalité impose $e^a - a = 1$ et $b - \ln b = 1$, soit $a = 0$, $b = 1$; réciproquement $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ donnent $AB = \sqrt{2}$: la **distance minimale** entre E et L vaut $\boxed{\sqrt{2}}$ (les tangentes en A et B sont parallèles à Δ).

2. $k(x) = e^x - xy$; $k'(x) = e^x - y$ s'annule en $\ln y$; k décroît puis croît, de minimum $k(\ln y) = y - y \ln y$. Donc $e^x - xy \geq y - y \ln y$, soit $\boxed{xy \leq e^x + y \ln y - y}$, avec égalité si et seulement si $x = \ln y$. **Interprétation** : la tangente à E au point $(\ln y, y)$, de pente y , a pour équation $Y = yX + y - y \ln y$; l'inégalité exprime que E est au-dessus de cette tangente.

■ Corrigé de l'exercice 16

1. $\varphi'_n(x) = ne^{nx} - 1$ s'annule en $m_n = -\frac{\ln n}{n} \leq 0$: φ_n décroît sur $]-\infty, m_n]$, croît sur $[m_n, +\infty[$, et $\varphi_n(m_n) = \frac{1+\ln n}{n} - 2 < 0$ (car $\ln n \leq n-1$). En $-\infty$: $e^{nx} \rightarrow 0$ et $-x-2 \rightarrow +\infty$; en $+\infty$: $\varphi_n(x) = e^{nx}(1 - (x+2)e^{-nx}) \rightarrow +\infty$. Par le TVI sur chaque intervalle de stricte monotonie : exactement deux zéros $c_n < m_n < x_n$. Comme $\varphi_n(0) = -1 < 0$ et $0 \geq m_n$: $x_n > 0$; et $c_n < m_n = -\frac{\ln n}{n} \leq 0$.
2. $\varphi_n\left(\frac{\ln 2}{n}\right) = -\frac{\ln 2}{n} < 0$ et $\varphi_n\left(\frac{\ln 3}{n}\right) = 1 - \frac{\ln 3}{n} > 0$ ($n \geq 2$), ces points étant dans $[m_n, +\infty[$: $\frac{\ln 2}{n} < x_n < \frac{\ln 3}{n}$. $\varphi_{n+1}(x_n) = e^{x_n}e^{nx_n} - x_n - 2 = (x_n + 2)(e^{x_n} - 1) > 0$, et φ_{n+1} est croissante sur $[0, +\infty[$ avec $\varphi_{n+1}(0) < 0$: $x_{n+1} < x_n$, (x_n) **décroît**. Par encadrement, $x_n \rightarrow 0$, puis $nx_n = \ln(x_n + 2) \rightarrow \boxed{\ln 2}$.
3. $nx_n - \ln 2 = \ln\left(1 + \frac{x_n}{2}\right)$, d'où $n(nx_n - \ln 2) = \frac{nx_n}{2} \cdot \frac{\ln(1+u)}{u}$ avec $u = \frac{x_n}{2} \rightarrow 0$: limite $\boxed{\frac{\ln 2}{2}}$. $\varphi_n(-2) = e^{-2n} > 0$ et $-2 < m_n$: $c_n > -2$. Puis $c_n + 2 = e^{nc_n} < e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$. Ainsi $nc_n < 1 - 2n$ et $0 < n(c_n + 2) = ne^{nc_n} < ne^{1-2n} \rightarrow 0$; donc $(c_n + 2)e^{2n} = e^{nc_n+2n} = e^{n(c_n+2)} \rightarrow \boxed{1}$: $c_n \approx -2 + e^{-2n}$.

26

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- $f_m(0) = 1$ et $f'_m(x) = e^x + 2mx$, $f'_m(0) = 1$: toutes les courbes passent par $(0, 1)$, avec la tangente $y = x + 1$.
- $f''_m(x) = e^x + 2m$. Si $m > 0$, $f''_m > 0$: pas d'inflexion. Si $m < 0$, f''_m s'annule en changeant de signe en un seul point, $x_0 = \ln(-2m)$: inflexion unique, d'ordonnée $e^{x_0} + mx_0^2 = e^{x_0} \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right)$ (car $m = -\frac{e^{x_0}}{2}$). Quand m décrit $]-\infty, 0[$, $x_0 = \ln(-2m)$ décrit $\mathbb{R}$: les points d'inflexion décrivent toute la courbe Γ .
- $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$: h décroît de 0^- à $-\infty$ sur $]-\infty, 0[$, décroît de $+\infty$ à e sur $]0, 1]$, croît de e à $+\infty$ sur $[1, +\infty[$. Or $f'_m(x) = 0 \iff x \neq 0$ et $h(x) = -2m$. **Bilan** : si $m > 0$, un seul point à tangente horizontale (d'abscisse négative) ; si $-\frac{e}{2} < m < 0$, aucun ; si $m = -\frac{e}{2}$, un seul (abscisse 1) ; si $m < -\frac{e}{2}$, deux. Pour $m = -\frac{e}{2}$: $f'(x) = e^x - ex \geq 0$ ($e^{x-1} \geq x$), $f'(1) = f''(1) = 0$: $\left(1, \frac{e}{2}\right)$ est un **point d'inflexion à tangente horizontale**, et f est strictement croissante.
- Si $m > 0$, f'_m est strictement croissante ($f''_m > 0$) et s'annule en l'unique $x_m < 0$ tel que $h(x_m) = -2m$: f_m décroît puis croît, **minimum** en x_m . Comme $e^{x_m} = -2mx_m$: $f_m(x_m) = e^{x_m} - \frac{x_m}{2}e^{x_m} = e^{x_m} \left(1 - \frac{x_m}{2}\right)$. La restriction de h à $]-\infty, 0[$ est une bijection continue strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, et $x_m = h^{-1}(-2m)$: $x_m \rightarrow -\infty$ quand $m \rightarrow 0^+$, et $x_m \rightarrow 0^-$ quand $m \rightarrow +\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 18

- $f'_1(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $f'_2(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$, puis $f''_2(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$. $f'_{n+1}(x) = nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} + x^n \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = nf_n(x) - x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} = nf_n(x) - f_{n-1}(x)$.
- La formule est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons-la vraie aux rangs $n - 1$ et n ($n \geq 2$). Alors $f_{n+1}^{(n+1)} = (f'_{n+1})^{(n)} = nf_n^{(n)} - (f_{n-1}^{(n-1)})'$, avec

$$\left(\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\right)' = (-1)^{n-1} \left(-\frac{n}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+2}}\right)e^{\frac{1}{x}} = (-1)^n \left(\frac{n}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}}\right)e^{\frac{1}{x}},$$

d'où $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}} - (-1)^n \left(\frac{n}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}$: la formule est vraie au rang $n + 1$.

$\left(x^3 e^{\frac{1}{x}}\right)^{(4)} = f_4^{(4)}(x) = \frac{1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$. En 0^+ , $\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}} \rightarrow +\infty$: $f_n^{(n)} \rightarrow +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; en 0^- , avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$: $|f_n^{(n)}(x)| = |t|^{n+1}e^t \rightarrow 0$.

■ Corrigé de l'exercice 19

- $f(x) = e^{\ell(x)}$ avec $\ell(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ en 0 : $f(x) \rightarrow e = f(0)$, f est continue en 0 . En -1^+ : $\ln(1+x) \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow -1$, donc $\ell \rightarrow +\infty$ et $f \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $\ell(x) \rightarrow 0$, $f \rightarrow 1$.
- $\ell'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} < 0$, donc $f' = \ell'f < 0$ sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$; avec la continuité en 0 : $f(x) > e > f(y)$ si $x < 0 < y$, et f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.
- Pour $x \geq 0$: $\psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $\psi'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$, et $\chi(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$, $\chi'(x) = \frac{x^3}{1+x} \geq 0$: $\psi, \chi \geq 0$. Pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$: ψ croît, donc $\psi(x) \leq \psi(0) = 0$; et $\theta(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}$ vérifie

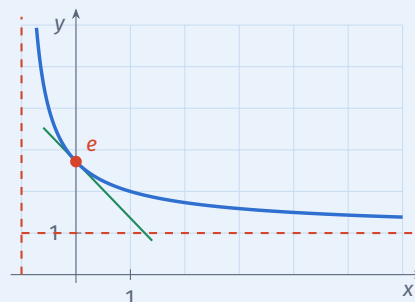
$\theta'(x) = \frac{x^2}{1+x} - 2x^2 = -\frac{x^2(1+2x)}{1+x} \leq 0$, donc $\theta(x) \geq \theta(0) = 0$. En divisant par x (attention au signe) : pour $0 < |x| \leq \frac{1}{2}$, $\ell(x) - 1 = -\frac{x}{2} + \varepsilon(x)$ avec $0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{2}{3}x^2$. Alors, avec $u = \ell(x) - 1 \rightarrow 0$ (non nul près de 0) :

$$\frac{f(x) - e}{x} = e \frac{e^u - 1}{u} \cdot \frac{u}{x}, \quad \frac{u}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(x)}{x} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \left(\left| \frac{\varepsilon(x)}{x} \right| \leq \frac{2}{3}|x| \right),$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{e}{2}$.

4. Tangente en $(0, e)$: $y = e - \frac{e}{2}x$; asymptotes $x = -1$ et $y = 1$.

Avec $x = \frac{1}{n}$: $n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = -\frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} \rightarrow -f'(0) = \frac{e}{2}$. (Avec $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$, la décroissance de f redonne aussi $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$.)



■ Corrigé de l'exercice 20

- $F(0) = 0$; $F'(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x - 2x - 6$, $F'(0) = 0$; $F''(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$, $F''(0) = 0$; $F'''(x) = (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)e^x = x^2e^x \geq 0$, nul seulement en 0. Donc F'' croît strictement : $F'' < 0$ sur $]-\infty, 0[$, $F'' > 0$ sur $]0, +\infty[$; F' a pour minimum $F'(0) = 0$; F croît strictement : $F < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $F > 0$ sur $]0, +\infty[$. Comme $x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 + 3 > 0$: $e^x > \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x + 12}$ pour $x > 0$.
- $G(0) = 0$; $G'(x) = (4 - 2x)e^x - 2x - 4$, $G'(0) = 0$; $G''(x) = (2 - 2x)e^x - 2$, $G''(0) = 0$; $G'''(x) = -2xe^x$. G'' croît sur $]-\infty, 0[$ et décroît sur $[0, +\infty[$, de maximum $G''(0) = 0$: $G'' \leq 0$, G' décroît et s'annule en 0 : G croît puis décroît, de maximum $G(0) = 0$. Donc $G \leq 0$, et pour $x < 3$ ($6 - 2x > 0$) : $e^x \leq \frac{x^2 + 4x + 6}{6 - 2x}$. Avec $x = \frac{1}{2}$: $\frac{61}{37} < \sqrt{e} \leq \frac{33}{20}$, d'où

$$2,718\,04 \approx \frac{3\,721}{1\,369} < e \leq \frac{1\,089}{400} = 2,722\,5 : \quad \boxed{2,718 < e < 2,723},$$

bien meilleur que $e \leq 3$ (exercice 10) : ce sont des **approximants de Padé** de e^x .

■ Corrigé de l'exercice 21

- Si $x < 0$: $e^{-x} > 1 \geq \cos x$, donc $h(x) < 0$. Si $h(x) = 0$, $\cos x = e^{-x} > 0$. $h(0) = 0$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $h''(x) = -\cos x - e^{-x} < 0$, donc h' décroît strictement de $h'(0) = 1$ à $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$: elle s'annule en un γ ; h croît sur $[0, \gamma]$ (donc $h > 0$ sur $]0, \gamma[$), puis décroît strictement jusqu'à $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$: un **unique** zéro $b_0 \in \left]\gamma, \frac{\pi}{2}\right[$ ($b_0 \approx 1,293$).
- Sur $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right]$, $\cos$ et $x \mapsto -e^{-x}$ croissent : h croît strictement, de $-e^{\frac{\pi}{2} - 2k\pi} < 0$ à $1 - e^{-2k\pi} > 0$: un unique zéro a_k . Sur $\left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, comme en 1. : $h'' < 0$, $h'(2k\pi) = e^{-2k\pi} > 0$, $h'\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) < 0$; h croît puis décroît, avec $h(2k\pi) > 0 > h\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$: un unique zéro b_k . (Les solutions positives sont donc 0, b_0 et les $a_k, b_k, k \geq 1$.)
- $\cos a_k = \cos\left(s_k - \frac{\pi}{2}\right) = \sin s_k$, donc $\sin s_k = e^{-a_k} \leq e^{\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \rightarrow 0$; comme $s_k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que la

réci-proque de $\sin$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue, $s_k \rightarrow 0$. Alors

$$s_k e^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{s_k}{\sin s_k} \cdot e^{-a_k + 2k\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{s_k}{\sin s_k} e^{-s_k} \rightarrow 1.$$

De même $\cos b_k = \sin t_k = e^{-b_k} = e^{-2k\pi - \frac{\pi}{2}} e^{t_k}$, d'où $t_k \rightarrow 0$ et $t_k e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{t_k}{\sin t_k} e^{t_k} \rightarrow 1$. Ainsi $a_k \approx 2k\pi - \frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$ et $b_k \approx 2k\pi + \frac{\pi}{2} - e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$ ($a_1 \approx 4,7213$, $b_1 \approx 7,8536$).

■ Corrigé de l'exercice 22

- $|w_n|^2 = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2} = 1 + v_n$ avec $v_n = \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}$, $nv_n \rightarrow 2a$. Donc $\ln |w_n|^n = \frac{n}{2} \ln(1 + v_n) = \frac{nv_n}{2} \cdot \frac{\ln(1+v_n)}{v_n} \rightarrow a$ (si $v_n = 0$, le terme est nul), et $|w_n|^n \rightarrow e^a$.
- $\operatorname{Re} w_n = 1 + \frac{a}{n} > 0$ ($n > |a|$), donc $\arg w_n \equiv \arctan \frac{\operatorname{Im} w_n}{\operatorname{Re} w_n} = \arctan \frac{b}{n+a} = \theta_n$. Si $b = 0$, $n\theta_n = 0 = b$; sinon, avec $s = \frac{b}{n+a} \rightarrow 0$: $n\theta_n = \frac{nb}{n+a} \cdot \frac{\arctan s}{s} \rightarrow b$ ($\arctan'(0) = 1$).
- $w_n^n = |w_n|^n (\cos n\theta_n + i \sin n\theta_n) \rightarrow e^a (\cos b + i \sin b) = e^z$ (continuité de $\cos$ et $\sin$, parties réelle et imaginaire). En particulier $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n \rightarrow e^{i\pi} = -1$ (formule d'Euler « par les intérêts composés ») et $\left(1 + \frac{1+i}{n}\right)^n \rightarrow e^{1+i} = e \cos 1 + ie \sin 1 \approx 1,469 + 2,287i$.

■ Corrigé de l'exercice 23

- $e^x - 1 - x$ croît sur $[0, 1]$ (dérivée $e^x - 1 \geq 0$): $E(p_1) = e - 2 \approx 0,718$. $\delta_2(x) = p_2(x) - e^x$ est concave, nulle en 0 et 1, donc positive sur $[0, 1]$, maximale où $\delta_2'(x) = e - 1 - e^x = 0$, soit en c : $E(p_2) = 1 + (e - 1)c - (e - 1) = 2\delta \approx 0,212$.
 $d(x) = e^x - (e - 1)x - 1 + \delta$: $d(0) = \delta$, $d(1) = \delta$, $d(c) = e - 2 - (e - 1)c + \delta = -2\delta + \delta = -\delta$. $d'(x) = e^x - (e - 1)$ est négative sur $[0, c]$ et positive sur $[c, 1]$: d décroît de δ à $-\delta$ puis croît jusqu'à δ , d'où $|d| \leq \delta$ et $E(p^*) = \delta \approx 0,1059$ ($c \approx 0,5413$).
- Si $E(p) < \delta$: $e^x - p(x) = d(x) - r(x)$, donc $|\delta - r(0)| < \delta$, $|\delta - r(c)| < \delta$, $|\delta - r(1)| < \delta$, soit $r(0) > 0$, $r(c) < 0$, $r(1) > 0$. Mais r est affine et $c \in]0, 1[$: $r(c) = (1 - c)r(0) + cr(1) > 0$, contradiction. Donc $E(p) \geq \delta$: p^* est la **meilleure** droite. Si $E(p) = \delta$, le même raisonnement donne $r(0) \geq 0$, $r(c) \leq 0$, $r(1) \geq 0$, et $r(c) = (1 - c)r(0) + cr(1) \geq 0$: $r(c) = 0$, puis $r(0) = r(1) = 0$, $r = 0$: $p = p^*$ (**unicité**). On retient l'erreur qui « oscille » trois fois avec la même amplitude: $p^*(x) \approx 1,718x + 0,894$.

27

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- Si $u_n \in]0, 1]$, alors $0 < u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \leq u_n \leq 1$: par récurrence (u_n) est à valeurs dans $]0, 1]$ et décroissante; elle converge vers $\ell \in [0, 1]$ avec $\ell = \ell e^{-\ell}$, soit $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$: $\ell = 0$.
- $\varphi(u) = e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}$: $\varphi'(u) = e^u - 1 - u \geq 0$, $\varphi \geq \varphi(0) = 0$. $\psi(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} - e^u$: $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0$ et $\psi'''(u) = 3 - e^u > 0$ sur $[0, 1]$, donc $\psi'' \geq 0$, $\psi' \geq 0$, $\psi \geq 0$. Enfin $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n}$, et on divise l'encadrement par $u_n > 0$.

3. En sommant de 0 à $n-1$: $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{u_0} + n \geq n+1$; donc $u_k \leq \frac{1}{k+1}$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq H_n \leq 1 + \ln n$ et $\sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2$, d'où

$$\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_0} + n + \frac{1 + \ln n}{2} + 1 = n + A + \frac{1}{2} \ln n.$$

Ainsi $\frac{n}{n+A+\frac{1}{2} \ln n} \leq nu_n \leq \frac{n}{n+1}$: $nu_n \rightarrow 1$.

4. $\ln k = 2 \ln \sqrt{k} \leq 2(\sqrt{k} - 1)$, donc $\frac{1}{u_k} \leq k + A + \frac{1}{2} \ln k \leq k + d$ avec $d = (A+1)\sqrt{k}$; et $\frac{1}{k+d} \geq \frac{1}{k} - \frac{d}{k^2}$ (la différence vaut $\frac{d^2}{k^2(k+d)}$) : $u_k \geq \frac{1}{k} - \frac{A+1}{k\sqrt{k}}$. Donc $\sum_{k=1}^{n-1} u_k \geq H_{n-1} - 3(A+1) \geq \ln n - 3(A+1)$, et, avec 2. :

$$\frac{1}{2} \ln n - \frac{3}{2}(A+1) \leq \frac{1}{u_0} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1}{u_n} - n \leq A + \frac{1}{2} \ln n, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{1}{\ln n} \left(\frac{1}{u_n} - n \right) \rightarrow \frac{1}{2}}.$$

(Autrement dit $u_n \approx \frac{1}{n + \frac{1}{2} \ln n}$.)

5. Si $x_0 \geq 0$, $u_n = e^{-x_n}$ vérifie $u_0 \in]0, 1]$ et $u_{n+1} = e^{-x_n} e^{-e^{-x_n}} = u_n e^{-u_n}$: $\ln n - x_n = \ln(nu_n) \rightarrow 0$. Si $x_0 < 0$: $x_1 = x_0 + e^{-x_0} \geq x_0 + 1 - x_0 = 1$, et la suite $(x_{n+1})_n$ relève du cas précédent : $x_{n+1} - \ln n \rightarrow 0$, donc $x_{n+1} - \ln(n+1) \rightarrow 0$. Dans tous les cas, $\boxed{x_n - \ln n \rightarrow 0}$.

■ Corrigé de l'exercice 25

1. $\ln(1+u) > u - \frac{u^2}{2}$ pour $u > 0$ (la différence a pour dérivée $\frac{u^2}{1+u} > 0$), avec $u = \frac{1}{t}$. Puis $\varphi(t) = \frac{2t+1}{2t(t+1)} - \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) - \ln(t+1) + \ln t$ a pour dérivée

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right)^2 < 0,$$

et $\varphi \rightarrow 0$ en $+\infty$: $\varphi > 0$.

2. $g'_x(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{t+x}{t(t+1)}$. Si $x \geq \frac{1}{2}$: $\frac{t+x}{t(t+1)} \geq \frac{2t+1}{2t(t+1)} > \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, donc $g'_x < 0$; $u_n(x) = e^{g_x(n)}$ est strictement décroissante.
3. Si $x < \frac{1}{2}$: $g'_x(t) > \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{t+x}{t(t+1)} = \frac{(1-2x)t-1}{2t^2(t+1)} > 0$ pour $t > \frac{1}{1-2x}$: $(u_n(x))$ est strictement croissante à partir d'un certain rang, donc **pas** décroissante. **Conclusion** : $(u_n(x))_{n \geq 1}$ décroît si et seulement si $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$.

4. $u_n\left(\frac{1}{2}\right)$ décroît strictement vers e (car $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 1$) : $u_n\left(\frac{1}{2}\right) > e$. Pour $x = 0$, $\frac{1}{1-2x} = 1$: $u_n(0)$ croît strictement vers e : $u_n(0) < e$. D'où $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$; pour $n = 10$: $\boxed{2,593 < e < 2,721}$ (amplitude $< 0,13$, contre $0,26$ avec l'exposant $n+1$).

■ Corrigé de l'exercice 26

1. Soit $T(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$: $T'(t) = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} \leq 1$ car $e^t + e^{-t} \geq 2$; donc $t - T(t)$ croît et est positif sur $[0, +\infty[$.
Puis $\varphi(t) = \frac{t^2}{2} - \ln \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(t) = t - T(t) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$: $\varphi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, et sur $\mathbb{R}$ par parité.

2. Pour $n = 1 : e^t + e^{-t}$. Une suite de longueur $n + 1$ s'écrit $(\varepsilon', \varepsilon_{n+1})$, avec $S = S(\varepsilon') + \varepsilon_{n+1}$:

$$\sum e^{tS} = \sum_{\varepsilon'} e^{tS(\varepsilon')} (e^t + e^{-t}) = (e^t + e^{-t})^{n+1}.$$

3. Les termes sont positifs : $N_a e^{ta} \leq \sum_{S(\varepsilon) \geq a} e^{tS(\varepsilon)} \leq (e^t + e^{-t})^n \leq 2^n e^{\frac{nt^2}{2}}$ (par 1.), d'où $N_a \leq 2^n e^{\frac{nt^2}{2} - ta}$ pour tout $t > 0$; le choix $t = \frac{a}{n}$ (qui minimise l'exposant) donne $N_a \leq 2^n e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
4. « Pile » = 1, « face » = -1 : au moins 70 « pile » sur 100 équivaut à $S \geq 70 - 30 = 40$. La proportion est $\frac{N_{40}}{2^{100}} \leq e^{-\frac{1600}{200}} = e^{-8} \approx 3,4 \cdot 10^{-4}$ (la valeur exacte est $\approx 3,9 \cdot 10^{-5}$). **Remarque :** de même, la proportion des suites telles que $|S| \geq cn$ est au plus $2e^{-\frac{nc^2}{2}} \rightarrow 0$: c'est une forme quantitative de la **loi des grands nombres**.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. $e^{-x} \geq 1 - x$ ($e^t \geq 1 + t$ avec $t = -x$). Sur $[0, \frac{1}{2}]$: $\chi(x) = \ln(1-x) + x + x^2$, $\chi'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0$, donc $\chi \geq \chi(0) = 0$: $1 - x \geq e^{-x-x^2}$.
2. Avec $k = n - j$: $0 \leq 1 - \frac{j}{n} \leq e^{-\frac{j}{n}}$, donc $(1 - \frac{j}{n})^n \leq e^{-j}$ et $S_n \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{-j} = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} < \frac{e}{e-1}$.
3. Pour $0 \leq j \leq p$ et $n \geq 2p$: $\frac{j}{n} \leq \frac{1}{2}$, donc $(1 - \frac{j}{n})^n \geq e^{-j-\frac{j^2}{n}} \geq e^{-j} e^{-\frac{p^2}{n}}$; en ne gardant que ces termes, $S_n \geq e^{-\frac{p^2}{n}} \sigma_p$ avec $\sigma_p = \sum_{j=0}^p e^{-j}$. Soit $L = \frac{e}{e-1}$ et $\varepsilon > 0$; comme $\sigma_p = L(1 - e^{-p-1}) \rightarrow L$, on fixe p tel que $\sigma_p > L - \varepsilon$; puis $e^{-\frac{p^2}{n}} \sigma_p \rightarrow \sigma_p$, donc $S_n > L - 2\varepsilon$ pour n assez grand. Avec $S_n < L$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + \dots + n^n}{n^n} = \frac{e}{e-1} \approx 1,582 \text{ (pour } n = 100 : S_n \approx 1,572).$$

■ Corrigé de l'exercice 28

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $X = -ax \rightarrow +\infty$: $x^k e^{ax} = (-a)^{-k} \chi^k e^{-X} \rightarrow 0$; par somme, $P(x)e^{ax} \rightarrow 0$. Un polynôme non constant tend vers $\pm\infty$, et une constante non nulle ne tend pas vers 0 : un polynôme de limite nulle est nul.
2. $m = 1$: $P_1(x) = 0$ pour tout $x \geq A$; P_1 a une infinité de racines, il est nul. Si le résultat est vrai pour $m - 1$: en divisant par $e^{a_m x}$, $P_m(x) = -\sum_{k=1}^{m-1} P_k(x)e^{(a_k - a_m)x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (1., car $a_k - a_m < 0$), donc $P_m = 0$; il reste $\sum_{k=1}^{m-1} P_k e^{a_k x} = 0$ sur $[A, +\infty[$, et l'hypothèse de récurrence conclut.
3. $Q(x)e^{1 \cdot x} - P(x)e^{0 \cdot x} = 0$ sur $[A, +\infty[$ donnerait $Q = P = 0$: contradiction. Si $Q(x) \ln x = P(x)$ pour $x > 0$, on pose $x = e^t$ ($t \in \mathbb{R}$) : avec $P = \sum_{k=0}^d p_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^d q_k X^k$, on obtient $\sum_{k=0}^d (q_k t - p_k) e^{kt} = 0$ pour tout t ; par 2. (polynômes en t , exposants $0 < 1 < \dots < d$), $q_k t - p_k = 0$, donc $q_k = p_k = 0$ et $Q = 0$: contradiction. **exp et ln ne sont pas des fractions rationnelles.**
4. Sinon, avec $b = a_m + 1$: $e^{x^2 - bx} = \sum_{k=1}^m P_k(x)e^{(a_k - b)x}$ sur $[A, +\infty[$; le membre de gauche tend vers $+\infty$ ($x^2 - bx \rightarrow +\infty$) et celui de droite vers 0 (1.) : contradiction.

■ **Corrigé de l'exercice 29**

- Réurrence : si $\varphi^{(n)} = (-1)^n H_n e^{-x^2}$, alors $\varphi^{(n+1)} = (-1)^n (H'_n - 2xH_n) e^{-x^2} = (-1)^{n+1} H_{n+1} e^{-x^2}$. On trouve $H_1 = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$, $H_3 = 8x^3 - 12x$. Si H_n est de degré n , de terme dominant $2^n x^n$, alors $2xH_n$ est de degré $n+1$ (terme dominant $2^{n+1} x^{n+1}$) et H'_n de degré $n-1$: H_{n+1} est de degré $n+1$, de terme dominant $2^{n+1} x^{n+1}$. Si $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, en dérivant $H'_n(-x) = (-1)^{n+1} H'_n(x)$, d'où $H_{n+1}(-x) = -2xH_n(-x) - H'_n(-x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)$: H_n a la parité de n .
- $H'_1 = 2 = 2H_0$. Si $H'_n = 2nH_{n-1}$: $H'_{n+1} = 2H_n + 2xH'_n - H''_n = 2H_n + 2n(2xH_{n-1} - H'_{n-1}) = 2H_n + 2nH_n = 2(n+1)H_n$. Donc $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$, et en 0 : $H_{n+1}(0) = -2nH_{n-1}(0)$, d'où

$$H_{2p}(0) = (-1)^p 2^p (2p-1)(2p-3)\cdots 3 \cdot 1 = \boxed{(-1)^p \frac{(2p)!}{p!}} \quad (\text{et } H_{2p+1}(0) = 0).$$

- Si g est nulle, c'est clair. Sinon, soit $c < b$ avec $g(c) \neq 0$, disons $g(c) > 0$ (sinon on remplace g par $-g$). Comme $\lim_{-\infty} g = 0 < g(c)$, il existe $d < c$ tel que $g(d) < g(c)$. La fonction continue g atteint sur $[d, b]$ un maximum en un point x_0 ; comme $g(x_0) \geq g(c) > \max(g(d), g(b))$, on a $x_0 \in]d, b[$, donc $g'(x_0) = 0$. (Sur $[b, +\infty[$, on applique ce résultat à $x \mapsto g(-x)$.)
- $g'_n = (H'_n - 2xH_n) e^{-x^2} = -H_{n+1} e^{-x^2} = -g_{n+1}$, et $g_n \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ (croissances comparées). $H_1 = 2x$ a une racine. Si H_n a n racines $x_1 < \cdots < x_n$ (zéros de g_n), le théorème de Rolle sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ donne $n-1$ zéros de g_{n+1} , et 3. (et son analogue) un zéro dans $]-\infty, x_1[$ et un dans $]x_n, +\infty[$: H_{n+1} , de degré $n+1$, a $n+1$ racines réelles distinctes (toutes simples, et « entrelacées » avec celles de H_n).

■ **Corrigé de l'exercice 30**

- Pour x réel, $e^x \geq 1+x > x$: pas de solution réelle. Si $e^z = z$, alors $e^{\bar{z}} = \bar{e^z} = \bar{z}$. Enfin $e^a(\cos b + i \sin b) = a + ib$ équivaut (parties réelle et imaginaire) à $e^a \cos b = a$ et $e^a \sin b = b$.
- Si $a + ib$ est solution avec $b > 0$: $e^a \sin b = b > 0$, donc $\sin b > 0$ et $a = \ln \frac{b}{\sin b}$; alors $e^a \cos b = \frac{b \cos b}{\sin b}$ doit valoir a : $\varphi(b) = 0$. Réciproquement, si $\sin b > 0$, $a = \ln \frac{b}{\sin b}$ et $\varphi(b) = 0$: $e^a \sin b = b$ et $e^a \cos b = \frac{b \cos b}{\sin b} = a$.
- φ est continue sur $]2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = -\ln(2k\pi + \frac{\pi}{2}) < 0$. Si $k = 0$: $\frac{b}{\sin b} \rightarrow 1$ quand $b \rightarrow 0^+$, donc $\varphi(b) \rightarrow 1 > 0$. Si $k \geq 1$: avec $s = \sin b \rightarrow 0^+$, $\varphi(b) = \frac{b \cos b + s \ln s}{s} - \ln b$ et $b \cos b + s \ln s \rightarrow 2k\pi > 0$, donc $\varphi \rightarrow +\infty$. Par le TVI, φ s'annule en un $b_k \in]2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}[$: $z_k = \ln \frac{b_k}{\sin b_k} + ib_k$ est solution (ainsi que $\bar{z}_k$). Les z_k sont distincts et $|z_k| \geq b_k > 2k\pi$: **une infinité de solutions**, avec $|z_k| \rightarrow +\infty$ ($z_0 \approx 0,318 + 1,337i$, $z_1 \approx 2,062 + 7,589i$).

28

Corrigés : équations, inéquations■ **Corrigé de l'exercice 31**

- $2x^2 - 3 = -5x \iff 2x^2 + 5x - 3 = 0 \iff (2x-1)(x+3) = 0$: $S = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$.
- Domaine : $x \geq 0$. Avec $s = \sqrt{x} \geq 0$: $s = s^2 - 2 \iff (s-2)(s+1) = 0$, donc $s = 2$ et $S = \{4\}$.
- $e^{\ln(x^2)}$ n'existe que si $x^2 > 0$, soit $x \neq 0$; elle vaut alors x^2 . $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$: $S = \{1, 3\}$.

- d) Domaine : $e^{2x} > e^x \iff 2x > x \iff x > 0$. Avec $X = e^x : X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2) = 0, X = 3$, et $\ln 3 > 0$: $S = \{\ln 3\}$.
2. e) $x^2 - 2x < 3 \iff (x - 3)(x + 1) < 0$: $S =]-1, 3[$.
- f) $e^x - 2 \geq 0 \iff x \geq \ln 2$ et $e^{-x} - 3 \geq 0 \iff -x \geq \ln 3 \iff x \leq -\ln 3$. Comme $-\ln 3 < \ln 2$, les deux facteurs sont négatifs (ou nuls) sur $[-\ln 3, \ln 2]$ et de signes contraires ailleurs : $S = [-\ln 3, \ln 2]$.
- g) Domaine : $e^{2x} \geq 3$, soit $x \geq \frac{1}{2} \ln 3$; alors $e^x \geq \sqrt{3} > 1$ et les deux membres sont positifs : $e^{2x} - 3 < (e^x - 1)^2 \iff -3 < -2e^x + 1 \iff e^x < 2$. Comme $\frac{1}{2} \ln 3 < \ln 2$: $S = \left[\frac{1}{2} \ln 3, \ln 2\right]$.
3. $e^{2x} - e^{x+1} = e^x (e^x - e) \geq 0 \iff x \geq 1$: $D_1 = [1, +\infty[$. $1 - e^{x^2-4} > 0 \iff x^2 - 4 < 0$: $D_2 =]-2, 2[$.
- f_3 : il faut $x \neq 0$ et $e^x \neq e^{\frac{1}{x}}$, soit $x \neq \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $x^2 \neq 1$: $D_3 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

■ Corrigé de l'exercice 32

On pose $X = e^x$; X décrit $]0, +\infty[$ et $x = \ln X$.

- a) $X^2 - 2X - 8 = (X - 4)(X + 2) = 0$, et $X > 0$: $X = 4$, $S = \{2 \ln 2\}$.
- b) $X^3 - 7X + 6 = (X - 1)(X^2 + X - 6) = (X - 1)(X - 2)(X + 3)$, donc $X \in \{1, 2\}$: $S = \{0, \ln 2\}$.
- c) Avec $Y = e^{2x} > 0$: $2Y^2 - 5Y + 2 = (2Y - 1)(Y - 2) = 0$, donc $e^{2x} = \frac{1}{2}$ ou $e^{2x} = 2$: $S = \left\{-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2}\right\}$.
- d) En multipliant par $2X > 0$: $2X^2 - 3X - 2 = (2X + 1)(X - 2) = 0$, donc $X = 2$: $S = \{\ln 2\}$.
- e) En multipliant par $X > 0$: $3X^2 - 5X + 2 = (3X - 2)(X - 1) \leq 0 \iff \frac{2}{3} \leq X \leq 1$: $S = \left[\ln \frac{2}{3}, 0\right]$.
- f) $X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)^2(X + 1)$; comme $X + 1 > 0$, l'inéquation équivaut à $X \neq 1$: $S = \mathbb{R}^*$.
- g) Il faut $X \neq 1$, soit $x \neq 0$. Si $0 < X < 1$ ($x < 0$), le membre de gauche est négatif et $X > 0$: l'inéquation est vraie. Si $X > 1$ ($x > 0$), elle équivaut à $X + 2 \leq X(X - 1)$, soit $X^2 - 2X - 2 \geq 0$, de racines $1 \pm \sqrt{3}$: $X \geq 1 + \sqrt{3}$. $S =]-\infty, 0[\cup \left[\ln(1 + \sqrt{3}), +\infty\right[$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. On pose $X = e^x > 0, Y = e^y > 0$.
- (S_1) : $XY = e^{x+y} = 3$ et $(X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY = 16$, donc $X + Y = 4$ ($X + Y > 0$). X et Y sont les racines de $t^2 - 4t + 3 = (t - 1)(t - 3)$: $S_1 = \{(0, \ln 3), (\ln 3, 0)\}$.
- (S_2) : la première équation est homogène ; en divisant par $e^{2y} > 0$ et en posant $T = e^{x-y} > 0$: $T^2 - 3T + 2 = (T - 1)(T - 2) = 0$, donc $x - y = 0$ ou $x - y = \ln 2$. Si $x = y$: $3y = \ln 4, x = y = \frac{2}{3} \ln 2$. Si $x = y + \ln 2$: $3y + \ln 2 = 2 \ln 2, y = \frac{1}{3} \ln 2, x = \frac{4}{3} \ln 2$: $S_2 = \left\{\left(\frac{2}{3} \ln 2, \frac{2}{3} \ln 2\right), \left(\frac{4}{3} \ln 2, \frac{1}{3} \ln 2\right)\right\}$.
- (S_3) : la seconde équation donne $e^x = e^{2 \ln 2} e^y = 4Y$; la première devient $4Y + Y = 4Y^2$, soit $Y(4Y - 5) = 0$, donc $Y = \frac{5}{4}$ ($Y > 0$) et $X = 5$: $S_3 = \left\{\left(\ln 5, \ln \frac{5}{4}\right)\right\}$.

2. a) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Avec $X = e^x : (1+X)\left(1+\frac{1}{X}\right) = \frac{(1+X)^2}{X} = 9 \iff X^2 - 7X + 1 = 0 \iff X = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$. Les deux racines sont positives et de produit 1, donc opposées en logarithme : $S = \left\{ -\ln \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \ln \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right\}$.
- b) Domaine : $e^x > 1$, soit $x > 0$. L'équation équivaut à $(e^x - 1)(e^x + 1) = e^{2x} - 1 = 3$, donc $e^{2x} = 4$ et $x = \ln 2 > 0$: $S = \{\ln 2\}$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. On pose $X = e^x > 0 : (E_m) \iff P_m(X) = 0$, avec $P_m(X) = (m-1)X^2 - 2mX + m+3$. Chaque racine $X > 0$ donne exactement une solution $x = \ln X$.
- a) $(E_1) : -2X + 4 = 0, X = 2 : S = \{\ln 2\}$. $(E_{\frac{3}{2}}) : \frac{1}{2}(X^2 - 6X + 9) = \frac{1}{2}(X-3)^2 = 0 : S = \{\ln 3\}$. $(E_{-3}) : -4X^2 + 6X = -2X(2X-3) = 0$, et $X \neq 0 : S = \left\{ \ln \frac{3}{2} \right\}$.
- b) Pour $m \neq 1 : \Delta' = m^2 - (m-1)(m+3) = 3 - 2m$; si $\Delta' > 0$, les racines ont pour produit $p = \frac{m+3}{m-1}$ et pour somme $s = \frac{2m}{m-1}$.
- $m > \frac{3}{2} : \Delta' < 0$, **aucune** solution. $m = \frac{3}{2} : \text{racine double } X = 3$, **une** solution.
 - $1 < m < \frac{3}{2} : p > 0$ et $s > 0$: deux racines positives, **deux** solutions.
 - $-3 < m < 1 : p < 0$: une seule racine positive, **une** solution ; $m = 1$ et $m = -3 : \text{une}$ solution (question a).
 - $m < -3 : m+3 < 0, m-1 < 0$ et $m < 0$, donc $p > 0$ et $s > 0$: **deux** solutions.

m	$]-\infty, -3[$	$[-3, 1]$	$]1, \frac{3}{2}[$	$\frac{3}{2}$	$]\frac{3}{2}, +\infty[$
nombre de solutions de (E_m)	2	1	2	1	0

2. Alors $m \neq 1$, et $X_1 = e^{x_1}, X_2 = e^{x_2}$ sont les racines de $P_m : e^{x_1+x_2} = X_1 X_2 = \frac{m+3}{m-1}$, d'où $x_1 + x_2 = \ln \frac{m+3}{m-1}$.
- $x_1 + x_2 = -\ln 2 \iff \frac{m+3}{m-1} = \frac{1}{2} \iff 2m+6 = m-1 \iff m = -7$, valeur pour laquelle (E_m) a bien deux solutions $(-7 < -3)$. $(E_{-7}) : -8X^2 + 14X - 4 = 0 \iff 4X^2 - 7X + 2 = 0 \iff X = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$ (deux racines positives) : $S = \left\{ \ln \frac{7-\sqrt{17}}{8}, \ln \frac{7+\sqrt{17}}{8} \right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. $\varphi(x) = e^{x-1} + \ln x$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (somme de deux fonctions strictement croissantes), et $\varphi(1) = 1$. Donc $\varphi(x) = 1 \iff x = 1$ et $\varphi(x) < 1 \iff x < 1 : S = \{1\}$ et $S' =]0, 1[$.
2. $\psi(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2 : \psi'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ et $\psi''(x) = e^x + e^{-x} - 2 = \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$, nul seulement en 0. Donc ψ' est strictement croissante et $\psi'(0) = 0 : \psi$ décroît strictement sur $]-\infty, 0]$, croît strictement sur $[0, +\infty[$, et son minimum est $\psi(0) = 0$. $S = \{0\}$ et $S' = \mathbb{R}^*$.

- Pour $x < 0$: $e^x < 1 \leq 1 + x^2$, l'inéquation est fautive. Pour $x \geq 0$: $\varphi(x) = e^x - 1 - x^2$ a pour dérivée $e^x - 2x$, dont le minimum (atteint en $\ln 2$) vaut $2 - 2 \ln 2 > 0$; φ est croissante et $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi \geq 0$: $S = [0, +\infty[$.
- On sait que $e^t = 1 + t \iff t = 0$. a) Avec $t = \sin x$: $\sin x = 0$, $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. b) $x^2 = 1 + (x^2 - 1)$: avec $t = x^2 - 1$, l'équation s'écrit $e^t = 1 + t$, donc $x^2 = 1$: $S = \{-1, 1\}$.
- En retranchant : $e^x - e^y = y - x$. Si $x > y$, le membre de gauche est > 0 et celui de droite < 0 : impossible ; de même si $x < y$. Donc $x = y$, puis $e^x = 1 + x$, ce qui impose $x = 0$ (égalité dans $e^t \geq 1 + t$). Réciproquement $(0, 0)$ convient : $S = \{(0, 0)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 36

- Si n est impair et $x \leq 0$: $x^n \leq 0 < e^x$, **aucune** solution. Si n est pair : $\psi(x) = e^x - x^n$ a pour dérivée $\psi'(x) = e^x - nx^{n-1} > 0$ pour $x < 0$ ($n - 1$ est impair, donc $x^{n-1} < 0$) ; ψ est continue, strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, de limite $-\infty$ en $-\infty$ ($x^n \rightarrow +\infty, e^x \rightarrow 0$), et $\psi(0) = 1 > 0$: **une seule** solution, dans $]-\infty, 0[$.

- a) Pour $x > 0$, les deux membres sont > 0 et $\ln$ est injective : $e^x = x^n \iff x = n \ln x \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}$.

- b) $u'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$: u croît sur $]0, e]$, décroît sur $[e, +\infty[$, de maximum $u(e) = \frac{1}{e}$; $u \rightarrow -\infty$ en 0^+ , $u \rightarrow 0^+$ en $+\infty$. Donc $u(x) = \frac{1}{n}$ a **deux** solutions si $\frac{1}{n} < \frac{1}{e}$, c'est-à-dire $n \geq 3$ (une dans $]1, e[$, une dans $]e, +\infty[$), et **aucune** si $n \in \{1, 2\}$ ($\frac{1}{n} \geq \frac{1}{e} > \frac{1}{e}$).

x	0	e	+\infty
u'(x)		+	-
u(x)	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

- En ajoutant les solutions négatives (question 1), le nombre total de solutions de (E_n) est :

0 si $n = 1$; 1 si $n = 2$; 2 si $n \geq 3$ est impair ; 3 si $n \geq 4$ est pair

- $\psi_3(x) = e^x - x^3$: $\psi_3(1) = e - 1 > 0$, $\psi_3(2) = e^2 - 8 < 0$, $\psi_3(4) = e^4 - 64 < 0$, $\psi_3(5) = e^5 - 125 > 0$. Par le TVI, (E_3) a une solution dans $]1, 2[$ et une dans $]4, 5[$; comme elle en a exactement deux (et aucune négative) : $1 < a < 2$ et $4 < b < 5$.

Pour $x \leq 0$: $x^3 \leq 0 < e^x$, l'inéquation est vraie. Pour $x > 0$: $e^x > x^3 \iff x > 3 \ln x \iff u(x) < \frac{1}{3}$, ce qui, d'après les variations de u ($u(a) = u(b) = \frac{1}{3}$), équivaut à $x < a$ ou $x > b$.

$S =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ ($a \approx 1,857, b \approx 4,536$).

29 Corrigés : limites

■ Corrigé de l'exercice 37

- Avec $t = ax \rightarrow +\infty$: $\frac{e^{ax}}{x^n} = a^n \frac{e^t}{t^n} \rightarrow +\infty$ (cours), puis $x^n e^{-ax} = \frac{1}{e^{ax}/x^n} \rightarrow 0$.
- a) $\frac{1 - x^5 e^{-x}}{1 + x^5 e^{-x}} \rightarrow 1$. b) $\frac{e^{3x}}{(e^x + x)^3} = \frac{1}{(1 + x e^{-x})^3} \rightarrow 1$.

c) Pour $x \leq -1$: $x^2 \geq |x|$, donc $0 \leq |x^3 e^{-x^2}| \leq |x|^3 e^{-|x|}$, qui tend vers 0 (question 1 avec $t = |x| \rightarrow +\infty$) : $\boxed{0}$.

d) $e^x - e^{x^2} = e^{x^2} (e^{x-x^2} - 1)$; $x - x^2 = x(1 - x) \rightarrow -\infty$, la parenthèse tend vers -1 : $\boxed{-\infty}$.

e) $\ln(x^2 + e^x) = x + \ln(1 + x^2 e^{-x})$, donc $\frac{\ln(x^2 + e^x)}{x+1} = \frac{1 + \frac{1}{x} \ln(1 + x^2 e^{-x})}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow \boxed{1}$.

f) Pour $x > 1$, $t = \sqrt{\ln x} \rightarrow +\infty$ et $(\ln x)^3 = t^6$: le quotient vaut $t^6 e^{-t} \rightarrow \boxed{0}$. g) Question 1 ($a = \frac{1}{10}$, $n = 10$) : $\boxed{+\infty}$.

h) $\frac{e^x}{x^4 + e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^4 e^{-\frac{x}{2}} + 1}$: le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers 1 : $\boxed{+\infty}$.

■ Corrigé de l'exercice 38

Rappel : si u est dérivable en a , alors $\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \rightarrow u'(a)$.

a) Avec $u = x^2 + x \rightarrow 0$ ($u \neq 0$ près de 0, $x \neq 0$) : $\frac{e^{x^2+x} - 1}{\sin 2x} = \frac{e^u - 1}{u} \cdot (x+1) \cdot \frac{x}{\sin 2x} \rightarrow 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

b) Avec $w = e^{2x} - 1 \rightarrow 0$ ($w \neq 0$ pour $x \neq 0$) : $\frac{\arctan w}{w} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{x} \rightarrow 1 \times 2 = \boxed{2}$.

c) $v(x) = e^{\cos x}$, $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $v'(x) = -\sin x e^{\cos x}$: limite $v'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-1}$.

d) $w(x) = e^{x^2} - e^x$, $w(1) = 0$, $w'(x) = 2xe^{x^2} - e^x$: limite $w'(1) = 2e - e = \boxed{e}$.

e) $r(x) = \ln(2 - e^x)$ est dérivable près de 0 ($e^x < 2$), $r(0) = 0$, $r'(x) = \frac{-e^x}{2 - e^x}$: limite $r'(0) = \boxed{-1}$.

f) Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: l'expression vaut $\frac{s(t) - s(0)}{t}$ où $s(t) = \ln \frac{e^t + 1}{2}$, $s(0) = 0$, $s'(t) = \frac{e^t}{e^t + 1}$: limite $s'(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

g) $e^x + e^{-x} - 2 = e^{-x} (e^{2x} - 2e^x + 1) = e^{-x} (e^x - 1)^2$, donc $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = e^{-x} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 \rightarrow \boxed{1}$.

h) $s(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}}$, $s(1) = 0$, $s'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$: limite $s'(1) = e + e = \boxed{2e}$.

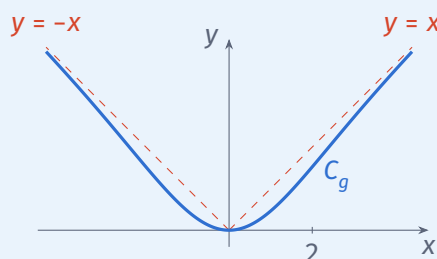
■ Corrigé de l'exercice 39

1. En $-\infty$: $\sqrt{e^{2x} + 1} \rightarrow 1$ et $-x \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow +\infty$; $f(x) - (-x + 1) = \sqrt{e^{2x} + 1} - 1 \rightarrow 0^+$: la droite $y = -x + 1$ est asymptote en $-\infty$, et C_f est au-dessus. En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} \sqrt{1 + e^{-2x}} - 1 \rightarrow +\infty$ (donc $f \rightarrow +\infty$) : **branche parabolique de direction** (Oy).

2. $g(-x) = -x \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = g(x)$: g est **paire**. De plus $g(x) \geq 0$ (x et $e^x - 1$ ont le même signe).

En $+\infty$: $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \rightarrow 1$, donc $g \rightarrow +\infty$, et

$$g(x) - x = x \frac{(e^x - 1) - (e^x + 1)}{e^x + 1} = -\frac{2xe^{-x}}{1 + e^{-x}} \rightarrow 0.$$



La droite $y = x$ est asymptote en $+\infty$, C_g au-dessous pour $x > 0$. Par parité : asymptote $y = -x$ en $-\infty$, C_g au-dessous.

3. En $-\infty$: $h \rightarrow 0^+$, asymptote $y = 0$. En $+\infty$: $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$, donc $h \rightarrow +\infty$ et $\frac{h(x)}{x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy). De plus

$$h(x) - (e^x - 1) = \frac{e^{2x} - (e^{2x} - 1)}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} \rightarrow 0^+ :$$

Γ est une **courbe asymptote** à C_h en $+\infty$, et C_h est **au-dessus** de Γ sur $\mathbb{R}$.

4. $1 + x^2 e^x \geq 1$: k est définie sur $\mathbb{R}$ et $k \geq 0$. En $-\infty$: $x^2 e^x \rightarrow 0$, donc $k \rightarrow 0$: asymptote $y = 0$. En $+\infty$:

$$k(x) = \ln(x^2 e^x) + \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2}\right) = x + 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2}\right),$$

donc $k \rightarrow +\infty$, $\frac{k(x)}{x} \rightarrow 1$ et $k(x) - x \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** la droite $y = x$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $e^{-x^2} \leq 1$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est **paire**. En $\pm\infty$: $e^{-x^2} \rightarrow 0$ et $f \rightarrow 1$: asymptote $y = 1$ (C_f au-dessous, car $f < 1$). Pour $x \neq 0$, avec $u = -x^2 \rightarrow 0^-$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}} = \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{e^u - 1}{u}}, \quad \text{donc} \quad \boxed{f'_d(0) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_g(0) = -1}.$$

f n'est pas dérivable en 0 : 0 est un **point anguleux**, de demi-tangentes $y = x$ ($x \geq 0$) et $y = -x$ ($x \leq 0$).

2. $g(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 0 \times 1 = 0 = g(0)$: g est continue à droite en 0. Mais $\frac{g(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$: g n'est pas dérivable à droite en 0, **demi-tangente verticale** en 0. En $+\infty$: $g \rightarrow +\infty$ et $\frac{g(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy).

Pour $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x \sqrt{x} - (e^x - 1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{(2x - 1)e^x + 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$; $h'(x) = (2x + 1)e^x > 0$ et $h(0) = 0$, donc $h > 0$ sur $]0, +\infty[$: g est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$.

3. a) Quand $x \rightarrow 1^-$, $u = \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, $\frac{x}{x-1} = 1 + u$ et $1 - x = -\frac{1}{u}$: $k(x) = -e \frac{e^u}{u} \rightarrow 0 = k(1)$: k est continue à gauche en 1. Puis $\frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = -e \frac{x}{x-1} = -e^{1+u} \rightarrow 0$: $k'_g(1) = 0$: demi-tangente horizontale au point $(1, 0)$.

b) Quand $x \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow 0^-$ et $-ex = -e - \frac{e}{u}$, d'où

$$k(x) + ex = -\frac{e e^u}{u} + e + \frac{e}{u} = e \left(1 - \frac{e^u - 1}{u}\right) \rightarrow e(1 - 1) = 0 :$$

Δ est asymptote en $-\infty$. Pour $u < 0$: $e^u - 1 > u$, donc $\frac{e^u - 1}{u} < 1$ (division par $u < 0$) : $k(x) + ex > 0$, la courbe est **au-dessus** de Δ sur $]-\infty, 1[$.

■ Corrigé de l'exercice 41

1. On reconnaît chaque fois un nombre dérivé dans l'exposant, puis on utilise la continuité de exp.

a) Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: $x \ln \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right) = \frac{s(t) - s(0)}{t}$, où $s(t) = \ln(e^t + t)$, $s(0) = 0$, $s'(t) = \frac{e^t + 1}{e^t + t}$, $s'(0) = 2$: la limite vaut e^2 .

b) $3e^x - 2 > 0$ près de 0 ; $r(x) = \ln(3e^x - 2)$, $r(0) = 0$, $r'(x) = \frac{3e^x}{3e^x - 2}$, $r'(0) = 3$: $\frac{r(x)}{x} \rightarrow 3$, limite e^3 .

c) $q(x) = \ln \frac{1 + e^x + e^{2x}}{3}$, $q(0) = 0$, $q'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x}}{1 + e^x + e^{2x}}$, $q'(0) = 1$: limite e .

2. Avec $x = \frac{1}{n} \in]0, 1]$ dans l'encadrement admis, multiplié par n^2 , puis en retranchant n :

$$-\frac{1}{2} \leq n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}, \quad \text{donc} \quad n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Par continuité de exp : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,607$.

3. a) $\frac{e^{a(x)}}{e^{b(x)}} = e^{a(x) - b(x)} \rightarrow 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Et $a - b = b \left(\frac{a}{b} - 1\right)$, produit d'un facteur tendant vers $+\infty$ par un facteur tendant vers -1 : $a - b \rightarrow -\infty$. ✓

b) On écrit chaque fonction sous la forme e^{exposant} : $100 \ln x$, $(\ln x)^3$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{x}{\ln x}$, x . Il suffit que la différence de deux exposants consécutifs tende vers $-\infty$:

- $100 \ln x - (\ln x)^3 = \ln x (100 - (\ln x)^2) \rightarrow -\infty$;
- $\frac{(\ln x)^3}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{\ln x}{x^{1/9}}\right)^3 \rightarrow 0$ (croissances comparées), avec $\sqrt[3]{x} \rightarrow +\infty$;
- $\frac{\sqrt[3]{x}}{x / \ln x} = \frac{\ln x}{x^{2/3}} \rightarrow 0$ et $\frac{x / \ln x}{x} = \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$, avec $\frac{x}{\ln x} \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow +\infty$.

D'après a) : $x^{100} \ll e^{(\ln x)^3} \ll e^{\sqrt[3]{x}} \ll e^{\frac{x}{\ln x}} \ll e^x$.

c) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{6}} \rightarrow 0$, $\frac{\sqrt{x}}{x^{0,9}} = x^{-0,4} \rightarrow 0$ et $\frac{x^{0,9}}{x / \ln x} = \frac{\ln x}{x^{0,1}} \rightarrow 0$ (tous ces exposants tendent vers $+\infty$) :

$$e^{\sqrt[3]{x}} \ll e^{\sqrt{x}} \ll e^{x^{0,9}} \ll e^{\frac{x}{\ln x}} \quad (\text{l'exposant } x^{0,9} \text{ ne suffit pas à rattraper } \frac{x}{\ln x}).$$

■ Corrigé de l'exercice 42

1. L'inégalité de gauche est celle du cours. Pour celle de droite, $\psi(t) = 1 + te^t - e^t$ vérifie $\psi'(t) = te^t \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et $\psi(0) = 0$, donc $\psi \geq 0$. ✓

2. Pour $1 \leq k \leq n$, $t_k = \frac{k}{n^2} \in]0, \frac{1}{n}]$, donc $1 + t_k \leq e^{t_k} \leq 1 + t_k e^{t_k} \leq 1 + t_k e^{\frac{1}{n}}$. En sommant, avec $\sum_{k=1}^n t_k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$:

$$\frac{n+1}{2n} \leq S_n - n \leq e^{\frac{1}{n}} \frac{n+1}{2n}.$$

Les deux bornes tendent vers $\frac{1}{2}$: $\lim (S_n - n) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

3. Avec les t_k de la question 2 : $t_k \leq e^{t_k} - 1 \leq t_k e^{\frac{1}{n}}$, donc $t_k^2 \leq (e^{t_k} - 1)^2 \leq t_k^2 e^{\frac{2}{n}}$. Or $\sum_{k=1}^n t_k^2 = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \leq n v_n \leq e^{\frac{2}{n}} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Les deux bornes tendent vers $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$: $\lim n v_n = \boxed{\frac{1}{3}}$, et donc $v_n = \frac{1}{n} \cdot n v_n \rightarrow \boxed{0}$.

4. Pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$: $t_k \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, donc $e^{t_k} \leq \sqrt{e} < 2$ ($e < 4$) : chaque facteur est > 0 et $P_n > 0$. Posons $w_k = e^{t_k} - 1 \in]0, e^{\frac{1}{n}} - 1]$; alors $2 - e^{t_k} = 1 - w_k$ et, avec $v = -w_k > -1$ dans le rappel :

$$-\frac{w_k}{1-w_k} \leq \ln(1-w_k) \leq -w_k, \quad \text{d'où} \quad -\frac{S_n - n}{2 - e^{\frac{1}{n}}} \leq \ln P_n \leq -(S_n - n),$$

car $\sum_k w_k = S_n - n$ et $1 - w_k \geq 2 - e^{\frac{1}{n}} > 0$. Les deux bornes tendent vers $-\frac{1}{2}$ (question 2) : $\ln P_n \rightarrow -\frac{1}{2}$

et $P_n = e^{\ln P_n} \rightarrow \boxed{e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}}$.

30

Corrigés : dérivées et primitives

■ Corrigé de l'exercice 43

1. Chaque fonction est obtenue par opérations et composées de fonctions dérivables ; sur I , les quantités sous les racines et sous le $\ln$ sont strictement positives, et les dénominateurs ($x^2 - 1$, $e^x - e^{-x}$, $e^x - x$) ne s'annulent pas.

$$\text{a) } f'(x) = \boxed{e^x \left(\arctan x + \frac{1}{1+x^2} \right)}. \quad \text{b) } \left(\frac{1}{x^2-1} \right)' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} : f'(x) = \boxed{-\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}}}.$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \boxed{\frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}} \quad (\text{car } (A-B)^2 - (A+B)^2 = -4AB \text{ et } e^x e^{-x} = 1).$$

$$\text{d) Avec } s = \sqrt{1+e^{2x}} : s' = \frac{e^{2x}}{s} \text{ et } e^{2x} = s^2 - 1, \text{ donc } f'(x) = \frac{s^2 - 1}{s(1+s)} = \frac{s-1}{s} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}}.$$

$$e) f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2}}.$$

$$f) 1 - e^{-2x} > 0 \text{ sur } I : f'(x) = \frac{2e^{-2x}}{2\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \boxed{\frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}}.$$

$$g) (x - e^x)' = 1 - e^x : f'(x) = \boxed{(1 - e^x) e^{x-e^x}} \quad (f \text{ croît sur }]-\infty, 0], \text{ décroît sur } [0, +\infty[).$$

$$h) e^x - x \geq 1 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}. f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - x) - (e^x + x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \boxed{\frac{2(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}} \quad (\text{après simplification du numérateur : } 2e^x - 2xe^x).$$

$$2. f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) \text{ et } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x), \text{ d'où } f'(x) = \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \quad \checkmark$$

La formule est vraie pour $n = 0$. Si elle l'est au rang n , en posant $\theta = x + \frac{n\pi}{4}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x (\cos \theta - \sin \theta) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cdot \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^x \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right).$$

$$\text{Pour } n = 4 : f^{(4)}(x) = 4e^x \cos(x + \pi) = -4e^x \cos x : \boxed{f^{(4)} = -4f}.$$

■ Corrigé de l'exercice 44

1. On note F une primitive (à une constante près).

$$a) u = (\ln x)^2, u' = \frac{2 \ln x}{x} : f = \frac{1}{2} u' e^u, \quad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} e^{(\ln x)^2}}.$$

$$b) u = x - \frac{1}{x}, u' = 1 + \frac{1}{x^2} : \boxed{F(x) = e^{x - \frac{1}{x}}}.$$

$$c) u = e^{x^2}, u' = 2xe^{x^2} : f = \frac{1}{2} u' \cos u, \quad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} \sin(e^{x^2})}.$$

$$d) \text{ Sur } I, u = e^x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f = \frac{u'}{\cos^2 u},$$

$$\boxed{F(x) = \tan(e^x)}.$$

$$e) e^{2x} + 2e^x + 2 = 1 + (e^x + 1)^2 : \text{forme } \frac{u'}{1 + u^2} \text{ avec } u = e^x + 1, \quad \boxed{F(x) = \arctan(e^x + 1)}.$$

f) Forme

$$u' \sin u : \boxed{F(x) = -\cos(e^x)}.$$

$$g) u = 1 + e^x > 0 : f = u' u^{-\frac{1}{3}}, \quad \boxed{F(x) = \frac{3}{2} (1 + e^x)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1 + e^x)^2}}.$$

$$h) u = \ln(1 + e^x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (car } 1 + e^x > 1), u' = \frac{e^x}{1 + e^x} : f = \frac{u'}{u}, \quad \boxed{F(x) = \ln(\ln(1 + e^x))}.$$

$$i) u = e^x + 3 : f = u' \sqrt{u}, \quad \boxed{F(x) = \frac{2}{3} (e^x + 3) \sqrt{e^x + 3}}.$$

$$2. (e^{2x} - e^x)(e^x + 1) + e^x = e^{3x} + e^{2x} - e^{2x} - e^x + e^x = e^{3x}. \quad \checkmark \text{ Donc } F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + \ln(1 + e^x) + C, \text{ et } F(0) = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 + C = 0 :$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $F'(x) = [(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c)]e^{-2x} = [-2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c]e^{-2x}$. On identifie avec $x^2 - 1$: $-2a = 1$, $2a - 2b = 0$, $b - 2c = -1$, d'où $a = b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$:

$$F(x) = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1)e^{-2x}.$$

2. $G'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + (a\sqrt{x} + b)\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{a}{2} + \frac{a+b}{2\sqrt{x}}\right)$. Il faut $\frac{a}{2} = 1$ et $a + b = 0$: $G(x) = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ (comparer avec l'exercice 43, question 1.e).

3. $H'(x) = ae^{x^2} + 2x(ax + b)e^{x^2} = (2ax^2 + 2bx + a)e^{x^2}$; on identifie : $2a = 2$, $2b = 2$, $a = 1$: $H(x) = (x + 1)e^{x^2}$.

4. a) $1 = a(X + 1) + b(X - 1)$ pour tout X ; $X = 1$ donne $a = \frac{1}{2}$, $X = -1$ donne $b = -\frac{1}{2}$: $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

- b) Avec $X = e^x$: $\frac{e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, de la forme $\frac{1}{2}\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$ avec $u = e^x - 1 > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $v = e^x + 1 > 0$: $\frac{1}{2} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

5. $\frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} = \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$, de la forme $\frac{u'}{u^2}$: $x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$.

■ Corrigé de l'exercice 46

1. $f(-x) = -f(x)$: f est **impaire** ; $f \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $f \rightarrow -\infty$ en $-\infty$.

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + x \cdot xe^{\frac{x^2}{2}} = (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}} > 0, \quad f''(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}} + (1 + x^2)xe^{\frac{x^2}{2}} = x(x^2 + 3)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; sa courbe est concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$: O est un point d'inflexion, de tangente $y = x$ ($f'(0) = 1$).

2. f est continue, strictement croissante, de limites $-\infty$ et $+\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme f' ne s'annule pas, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. $g(0) = 0$, $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$; $f(1) = \sqrt{e}$, donc $g(\sqrt{e}) = 1$ et $g'(\sqrt{e}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

3. Pour $y \neq 0$, $x = g(y) \neq 0$ et $y = xe^{\frac{x^2}{2}}$, donc $e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{y}{x}$ et $g'(y) = \frac{1}{(1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{x}{y(1 + x^2)} = \frac{g(y)}{y(1 + g(y)^2)}$. ✓

4. Pour $x \geq 0$: $e^{\frac{x^2}{2}} \geq 1$, donc $f(x) \geq x$. Pour $y \geq 0$: $g(y) \geq g(0) = 0$ et $y = f(g(y)) \geq g(y)$: $0 \leq g(y) \leq y$.

Sur $[0, +\infty[$, f' est croissante ($f'' \geq 0$) et positive, et g est croissante : $y \mapsto f'(g(y))$ est croissante, donc $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ est décroissante : la courbe de g est **concave** sur $[0, +\infty[$ (symétrique, par rapport à $y = x$, de la partie convexe de la courbe de f).

5. a) Pour $y > 0$, $g(y) > 0$ et $\ln y = \ln g(y) + \frac{g(y)^2}{2}$: $g(y)^2 = 2 \ln y - 2 \ln g(y)$. ✓
 b) Pour $y \geq \sqrt{e}$: $g(y) \geq g(\sqrt{e}) = 1$, donc $\ln g(y) \geq 0$ et $g(y)^2 \leq 2 \ln y$. Alors $\ln g(y) \leq \frac{1}{2} \ln(2 \ln y)$, d'où $g(y)^2 \geq 2 \ln y - \ln(2 \ln y)$. ✓
 Avec $t = 2 \ln y \rightarrow +\infty$: $1 - \frac{\ln t}{t} \leq \frac{g(y)^2}{2 \ln y} \leq 1$, et $\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$; comme $g(y) > 0$: $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{\sqrt{2 \ln y}} = \boxed{1}$.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. a) $\varphi_1(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$: $\varphi_1'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$, nul seulement en 0 ; φ_1 est strictement croissante et $\varphi_1(0) = 0$: elle a le signe de x . ✓
 b) $\omega'(x) = x + e^{-x} - (1+x)e^{-x} = x(1 - e^{-x}) \geq 0$ (x et $1 - e^{-x}$ ont le même signe), nul seulement en 0, et $\omega(0) = 0$: ω a le signe de x . Or $1 + x + \frac{x^2}{2}e^x - e^x = e^x \omega(x)$. ✓
 c) Soit $q(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$. D'après a) et b) : pour $x > 0$, $\frac{1}{2} \leq q(x) \leq \frac{e^x}{2}$; pour $x < 0$, $\frac{e^x}{2} \leq q(x) \leq \frac{1}{2}$.
 Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

2. $\varphi(x) = \frac{1}{(e^x - 1)/x} \rightarrow 1 = \varphi(0)$: φ est continue en 0. Puis

$$\frac{\varphi(x) - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = -q(x) \cdot \frac{x}{e^x - 1} \rightarrow -\frac{1}{2} : \quad \boxed{\varphi'(0) = -\frac{1}{2}}, \quad \boxed{T : y = 1 - \frac{x}{2}}.$$

3. Pour $x \neq 0$: $\varphi'(x) = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{n(x)}{(e^x - 1)^2}$ avec $n(x) = (1 - x)e^x - 1$. Or $n'(x) = -xe^x$: n est maximale en 0, où elle vaut 0, donc $n(x) < 0$ pour $x \neq 0$. Ainsi $\varphi' < 0$ sur $\mathbb{R}$ (et $\varphi'(0) < 0$) : φ est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

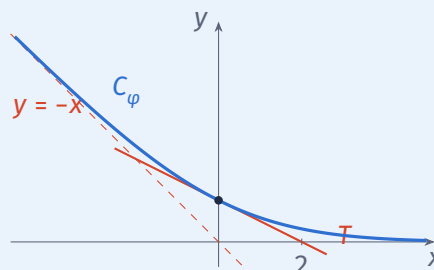
De plus $n(x) = (e^x - 1 - x) - x(e^x - 1)$, donc $\frac{n(x)}{x^2} = q(x) - \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, et $\varphi'(x) = \frac{n(x)}{x^2} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^2 \rightarrow -\frac{1}{2} = \varphi'(0)$: φ' est continue en 0.

4. En $+\infty$: $\varphi(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \rightarrow 0$ (asymptote $y = 0$). En $-\infty$: $e^x - 1 \rightarrow -1$, donc $\varphi \rightarrow +\infty$, et

$$\varphi(x) + x = \frac{xe^x}{e^x - 1} \rightarrow 0$$

($xe^x \rightarrow 0$) : la droite $y = -x$ est asymptote en $-\infty$; pour $x < 0$, $\frac{xe^x}{e^x - 1} > 0$: la courbe est **au-dessus**.

$\varphi(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{xe^x}{e^x - 1} = \varphi(x) + x$. Avec $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{x}{2}$: $\psi(-x) = \varphi(x) + x - \frac{x}{2} = \psi(x)$: ψ est **paire**.



■ Corrigé de l'exercice 48

1. $(Re^x)' = R'e^x + Re^x = (R + R')e^x$ et $(Re^{-x})' = R'e^{-x} - Re^{-x} = (R' - R)e^{-x}$. ✓
2. a) $Q' = P' - P'' + \dots + (-1)^n P^{(n+1)}$ et $P^{(n+1)} = 0$ (P est de degré n). Dans $Q + Q'$, les termes $\pm P^{(k)}$, $k \geq 1$, se simplifient deux à deux : $Q + Q' = P$. D'après 1, $(Qe^x)' = Pe^x$: $x \mapsto Q(x)e^x$ est une primitive de Pe^x .
b) $D = R - Q$ vérifie $(De^x)' = 0$, donc $D + D' = 0$. Si $D \neq 0$, de degré d , alors D' est nul ou de degré $< d$, et $D + D'$ est de degré d : il n'est pas nul, contradiction. Donc $D = 0$ et $R = Q$. ✓
3. $P = x^3$: $Q = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$, primitive $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$. $P = x^2 + 3x + 1$: $Q = (x^2 + 3x + 1) - (2x + 3) + 2 = x^2 + x$, primitive $(x^2 + x)e^x$.
4. Avec $\tilde{Q} = -(P + P' + \dots + P^{(n)})$: $\tilde{Q}' = -(P' + \dots + P^{(n)})$, donc $\tilde{Q}' - \tilde{Q} = P$, et $(\tilde{Q}e^{-x})' = Pe^{-x}$ d'après 1. ✓
5. $P = x^2$: $F_2(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$ et $F_2(0) = -2 + C = 0$: $F_2(x) = 2 - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.
Pour $P = x^n$: $P^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j}$, donc $\sum_{j=0}^n P^{(j)} = n! \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ (avec $k = n - j$). Ainsi $F_n(x) = C - n! e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, et $F_n(0) = C - n! = 0$:

$$F_n(x) = n! - n! e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

et, comme $x^k e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!.$$

31

Corrigés : puissances et base a

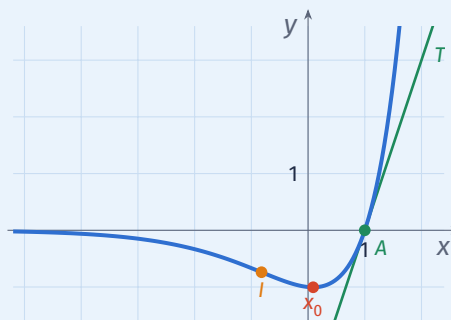
■ Corrigé de l'exercice 49

1. a) Avec $X = 2^x > 0$: $4^x = X^2$ et $8^x = X^3$, et l'équation s'écrit $X + X^2 = X^3 \iff X(X^2 - X - 1) = 0 \iff X^2 - X - 1 = 0$ (car $X \neq 0$). Ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, et seule $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) est positive : $2^x = \varphi \iff x = \log_2 \varphi = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,694$.
b) Les deux membres sont strictement positifs ; en passant au logarithme : $x \ln 2 + x^2 \ln 3 = \ln 6 = \ln 2 + \ln 3$, soit $\ln 3 x^2 + \ln 2 x - (\ln 2 + \ln 3) = 0$. Le réel 1 est racine évidente, et le produit des racines vaut $-\frac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 3} = -\frac{\ln 6}{\ln 3}$: $S = \{1, -\log_3 6\}$.
2. a) $a^{\ln b} = e^{\ln b \ln a} = e^{\ln a \ln b} = b^{\ln a}$. b) Pour $x > 0$, $x^{\ln 2} = 2^{\ln x}$: l'équation devient $2 \times 2^{\ln x} = 16$, soit $2^{\ln x} = 8 = 2^3$, donc $\ln x = 3$: $x = e^3$.
3. $(2^x - 3)(3^x - 2) = 6^x - 2 \times 2^x - 3 \times 3^x + 6$ ✓. Puis $2^x - 3 \geq 0 \iff x \geq \log_2 3$ et $3^x - 2 \geq 0 \iff x \geq \log_3 2$, avec $\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} < 1 < \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$. Le produit est positif lorsque les deux facteurs ont le même signe : $S =]-\infty, \log_3 2] \cup [\log_2 3, +\infty[$.
4. Avec $X = 2^x > 0$ et $Y = 3^y > 0$: $X + Y = 17$ et $4X - 3Y = 5$, d'où $7X = 56$, $X = 8$, $Y = 9$: $(x, y) = (3, 2)$.

■ Corrigé de l'exercice 50

1. En $-\infty$: $3^x = e^{x \ln 3} \rightarrow 0$ et, avec $T = x \ln 3 \rightarrow -\infty$, $x 3^x = \frac{1}{\ln 3} T e^T \rightarrow 0$; donc $f(x) = x 3^x - 3^x \rightarrow 0$: la droite $y = 0$ est **asymptote** en $-\infty$, et C_f est au-dessous ($f(x) < 0$ pour $x < 1$). En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) 3^x \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy).
2. $(3^x)' = \ln 3 \cdot 3^x$ donne $f'(x) = 3^x + (x-1) \ln 3 \cdot 3^x = 3^x(1 + (x-1) \ln 3)$, du signe de $1 + (x-1) \ln 3$, qui s'annule en $x_0 = 1 - \frac{1}{\ln 3} \approx 0,09$: f décroît sur $]-\infty, x_0]$ et croît sur $[x_0, +\infty[$. Comme $3^{\frac{1}{\ln 3}} = e^{\frac{\ln 3}{\ln 3}} = e$: $f(x_0) = -\frac{1}{\ln 3} \times 3 \times 3^{-\frac{1}{\ln 3}} = \boxed{-\frac{3}{e \ln 3}} \approx -1,005$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{3}{e \ln 3}$	$+\infty$



3. $f''(x) = \ln 3 \cdot 3^x(1 + (x-1) \ln 3) + 3^x \ln 3 = \ln 3 \cdot 3^x(2 + (x-1) \ln 3)$ s'annule en changeant de signe en $x_1 = 1 - \frac{2}{\ln 3} \approx -0,82$ (C_f concave avant, convexe après) : unique point d'inflexion $I\left(1 - \frac{2}{\ln 3}, -\frac{6}{e^2 \ln 3}\right)$, car $f(x_1) = -\frac{2}{\ln 3} \times 3 \times \left(3^{\frac{1}{\ln 3}}\right)^{-2} = -\frac{6}{e^2 \ln 3} \approx -0,74$.
4. $f(1) = 0$ et $f'(1) = 3$: $\boxed{T : y = 3x - 3}$. Courbe ci-dessus.
5. f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$ (de 0, non atteint, à $f(x_0)$), strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$ (de $f(x_0)$ à $+\infty$). L'équation $f(x) = m$ a donc : **aucune** solution si $m < -\frac{3}{e \ln 3}$; **une** si $m = -\frac{3}{e \ln 3}$ ($x = x_0$) ; **deux** si $-\frac{3}{e \ln 3} < m < 0$; **une** si $m \geq 0$ (dans $[1, +\infty[$).

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $\varphi'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 1$ est strictement croissante et s'annule si et seulement si $2^x = \frac{1}{\ln 2}$, soit $x = x^* = \frac{\ln(1/\ln 2)}{\ln 2} = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$. Comme $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$ (car $\ln 4 > 1$), on a $1 < \frac{1}{\ln 2} < 2$, d'où $0 < x^* < 1$. φ décroît sur $]-\infty, x^*]$ et croît sur $[x^*, +\infty[$; $\varphi(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ et $\varphi(1) = 2 - 1 - 1 = 0$. Étant strictement monotone sur chacun de ces intervalles, φ ne s'annule qu'en 0 et 1 : $\boxed{\varphi < 0 \text{ sur }]0, 1[, \quad \varphi > 0 \text{ sur }]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[}$.
2. $h(x) = 2^x - 1$ est strictement croissante, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$: $h([0, 1]) = [0, 1]$ et, par récurrence, $0 < u_n < 1$. Puis $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) < 0$: (u_n) est strictement décroissante, minorée par 0, donc converge vers $\ell \in [0, u_0]$; par continuité de h , $\ell = h(\ell)$, soit $\varphi(\ell) = 0$, donc $\ell \in \{0, 1\}$ et $\boxed{\ell = 0}$.
3. a) $q'(x) = \frac{x \ln 2 \cdot 2^x - (2^x - 1)}{x^2} = \frac{N(x)}{x^2}$, avec $N(0) = 0$ et $N'(x) = \ln 2 \cdot 2^x + (x \ln 2 - 1) \ln 2 \cdot 2^x = x(\ln 2)^2 2^x > 0$ sur $]0, +\infty[$: $N > 0$, donc q est strictement croissante. Et $q(x) = \frac{2^x - 2^0}{x - 0} \rightarrow (2^x)'(0) = \boxed{\ln 2}$.
- b) $k = q(u_0) < q(1) = 1$. Comme q croît et tend vers $\ln 2$ en 0^+ , on a $q(x) > \ln 2$ pour $x > 0$; et $0 < u_n \leq u_0$ donne $\ln 2 < q(u_n) \leq k$. Or $u_{n+1} = q(u_n) u_n$: $\ln 2 \cdot u_n < u_{n+1} \leq k u_n$, puis, par récurrence, $\boxed{(\ln 2)^n u_0 \leq u_n \leq k^n u_0}$. Enfin $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q(u_n) \rightarrow \boxed{\ln 2}$ puisque $u_n \rightarrow 0^+$.

4. $k = \frac{\sqrt{2}-1}{1/2} = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0,828$. $u_n \leq \frac{k^n}{2} \leq 10^{-6} \iff n \ln k \leq \ln(2 \cdot 10^{-6}) \iff n \geq \frac{-13,12}{-0,188} \approx 69,8$
: $\boxed{N = 70}$ convient. Et $u_n \geq \frac{(\ln 2)^n}{2} > 10^{-6} \iff n < \frac{-13,12}{-0,367} \approx 35,7$: $u_n > 10^{-6}$ pour $n \leq 35$. (La vitesse réelle est celle de $(\ln 2)^n$: en fait $u_n \leq 10^{-6}$ dès $n \geq 38$.)
5. Si $u_0 > 1$: $h(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$, donc $u_n > 1$ et $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > 0$: (u_n) est croissante ; si elle convergeait, sa limite $\ell \geq u_0 > 1$ vérifierait $\varphi(\ell) = 0$, impossible : $\boxed{u_n \rightarrow +\infty}$. Si $u_0 < 0$: $h(]-\infty, 0[) \subset]-1, 0[$, donc $u_n < 0$ et $\varphi(u_n) > 0$: (u_n) est croissante, majorée par 0, de limite $\ell \leq 0$ telle que $\varphi(\ell) = 0$: $\boxed{u_n \rightarrow 0}$. (Si $u_0 \in \{0, 1\}$, la suite est constante.)

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $e^t \geq 1 + t$ donne $e^t - 1 \geq t$. Avec $-t$: $e^{-t} \geq 1 - t$, et en multipliant par $e^t > 0$: $1 \geq e^t - t e^t$, soit $e^t - 1 \leq t e^t$.
2. Avec $t = \frac{\ln 2}{k} > 0$: $\frac{\ln 2}{k} \leq 2^{\frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{\ln 2}{k} 2^{\frac{1}{k}} \leq \frac{\ln 2}{k} 2^{\frac{1}{n+1}}$, car $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}$. En sommant pour k de $n+1$ à $2n$: $\ln 2 \cdot H'_n \leq S_n \leq 2^{\frac{1}{n+1}} \ln 2 \cdot H'_n$. Comme $2^{\frac{1}{n+1}} \rightarrow 2^0 = 1$ et $H'_n \rightarrow \ln 2$, les deux bornes tendent vers $(\ln 2)^2$: $\boxed{\lim S_n = (\ln 2)^2}$.
3. Soit $t_k = \frac{\ln a}{k}$, de sorte que $a^{\frac{1}{k}} - 1 = e^{t_k} - 1 \in [t_k, t_k a^{\frac{1}{k}}]$. Si $a > 1$: $t_k > 0$ et $a^{\frac{1}{k}} \leq a^{\frac{1}{n+1}}$, d'où, comme en 2, $\ln a \cdot H'_n \leq \sum \leq a^{\frac{1}{n+1}} \ln a \cdot H'_n$. Si $0 < a < 1$: $t_k < 0$ et $a^{\frac{1}{k}} \geq a^{\frac{1}{n+1}}$, donc $t_k a^{\frac{1}{k}} \leq t_k a^{\frac{1}{n+1}}$: on obtient le même encadrement. Dans les deux cas, les bornes tendent vers $\ln a \cdot \ln 2$:
$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right) \rightarrow \ln a \cdot \ln 2}.$$
4. $2^{\frac{1}{k}} - 1 \geq \frac{\ln 2}{k} \geq \ln 2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln 2 (\ln(k+1) - \ln k)$; en sommant (télescopage) : $T_n \geq \ln 2 \cdot \ln(n+1)$, donc $\boxed{T_n \rightarrow +\infty}$.

■ Corrigé de l'exercice 53

1. $\phi(t) = t^{\alpha+1}$ est continue sur $[k, k+1]$ (et sur $[0, 1]$ si $\alpha > 0$), dérivable à l'intérieur avec $\phi'(t) = (\alpha+1)t^\alpha$. Le TAF donne $c \in]k, k+1[$ tel que $(k+1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1} = (\alpha+1)c^\alpha$. Si $\alpha > 0$, $t \mapsto t^\alpha$ est croissante : $k^\alpha \leq c^\alpha \leq (k+1)^\alpha$ (avec $0^\alpha = 0$ pour $k = 0$) ; si $-1 < \alpha < 0$, elle est décroissante et les inégalités se renversent. On conclut en multipliant par $\alpha+1 > 0$.
2. On somme l'inégalité de droite pour $k = 0, \dots, n-1$: $n^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)S_n$; celle de gauche pour $k = 1, \dots, n$ (télescopage) : $(\alpha+1)S_n \leq (n+1)^{\alpha+1} - 1$. En divisant par $(\alpha+1)n^{\alpha+1}$:

$$\frac{1}{\alpha+1} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right],$$

$$\text{et } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = e^{(\alpha+1)\ln(1+\frac{1}{n})} \rightarrow 1, n^{-(\alpha+1)} \rightarrow 0 : \boxed{\lim \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}}.$$

3. Ici $(\alpha+1)(k+1)^\alpha \leq (k+1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)k^\alpha$ ($k \geq 1$). En sommant la droite pour $k = 1, \dots, n$: $(n+1)^{\alpha+1} - 1 \leq (\alpha+1)S_n$; la gauche pour $k = 1, \dots, n-1$: $(\alpha+1)(S_n - 1) \leq n^{\alpha+1} - 1$, soit $S_n \leq \frac{n^{\alpha+1} + \alpha}{\alpha+1}$. Après division par $n^{\alpha+1}$, les bornes $\frac{1}{\alpha+1} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - n^{-(\alpha+1)} \right]$ et $\frac{1}{\alpha+1} [1 + \alpha n^{-(\alpha+1)}]$ tendent vers $\frac{1}{\alpha+1}$ (car $\alpha+1 > 0$) : la conclusion subsiste.

4. Avec $\alpha = \sqrt{2}$: la limite vaut $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}-1}$. Avec $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1, 0[$: la limite vaut $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \boxed{2+\sqrt{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. f est continue, $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x + \ln 3 \cdot 3^x > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$: f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, et $n > 0$ a un unique antécédent x_n . $f(0) = 2$ donne $\boxed{x_2 = 0}$; et $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$ avec f croissante donne $x_n < x_{n+1}$.
2. Pour $n \geq 2$, $x_n \geq x_2 = 0$, donc $0 < 2^{x_n} \leq 3^{x_n}$, et $n = 2^{x_n} + 3^{x_n}$ donne $3^{x_n} < n \leq 2 \times 3^{x_n}$, soit $\boxed{\log_3 \frac{n}{2} \leq x_n < \log_3 n}$. Ainsi $x_n \rightarrow +\infty$, et $\frac{\ln n - \ln 2}{\ln 3 \ln n} \leq \frac{x_n}{\ln n} < \frac{1}{\ln 3}$ donne $\boxed{\frac{x_n}{\ln n} \rightarrow \frac{1}{\ln 3}}$.
3. $n = 3^{x_n} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{x_n}\right) = 3^{x_n}(1 + \varepsilon_n)$, d'où $\log_3 n = x_n + \log_3(1 + \varepsilon_n)$. Comme $x_n \rightarrow +\infty$ et $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\varepsilon_n = e^{x_n \ln \frac{2}{3}} \rightarrow 0$, donc $\boxed{x_n - \log_3 n = -\log_3(1 + \varepsilon_n) \rightarrow 0}$.
4. $n^{\log_3 2} = e^{\ln n \frac{\ln 2}{\ln 3}} = e^{\frac{\ln n}{\ln 3} \ln 2} = 2^{\log_3 n}$. Alors

$$n^{1-\log_3 2} \varepsilon_n = \frac{n}{3^{x_n}} \times \frac{2^{x_n}}{2^{\log_3 n}} = (1 + \varepsilon_n) 2^{x_n - \log_3 n} \rightarrow 1 \times 2^0 = 1.$$

Enfin $\log_3 n - x_n = \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln 3}$, donc $n^{1-\log_3 2} (\log_3 n - x_n) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \cdot n^{1-\log_3 2} \varepsilon_n \rightarrow \boxed{\frac{1}{\ln 3}}$, car $\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

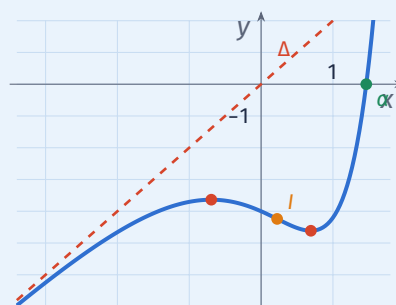
32

Corrigés : études de fonctions

■ Corrigé de l'exercice 55

1. En $-\infty$: $e^{2x} \rightarrow 0$ et $e^x \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow -\infty$, et $f(x) - 2x = e^x(e^x - 5) \rightarrow 0$: Δ est **asymptote** en $-\infty$. Comme $e^x > 0$, $f(x) - 2x$ a le signe de $e^x - 5$: C_f est au-dessous de Δ sur $]-\infty, \ln 5[$, au-dessus sur $]\ln 5, +\infty[$, et la coupe en $(\ln 5, 2 \ln 5)$.
2. $f(x) = 2x + e^{2x}(1 - 5e^{-x}) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{e^{2x}}{x}(1 - 5e^{-x}) \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) .
3. Avec $X = e^x$: $f'(x) = 2 + 2e^{2x} - 5e^x = 2X^2 - 5X + 2 = (2X - 1)(X - 2) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$, qui s'annule en $-\ln 2$ et $\ln 2$: f croît sur $]-\infty, -\ln 2]$, décroît sur $[-\ln 2, \ln 2]$, croît sur $[\ln 2, +\infty[$, avec $f(-\ln 2) = -2 \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} = -2 \ln 2 - \frac{9}{4} \approx -3,64$ et $f(\ln 2) = 2 \ln 2 + 4 - 10 = 2 \ln 2 - 6 \approx -4,61$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-2\ln 2 - \frac{9}{4}$	$2\ln 2 - 6$	$+\infty$	

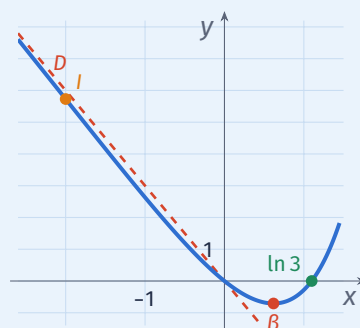


- $f''(x) = 4e^{2x} - 5e^x = e^x(4e^x - 5)$ s'annule en changeant de signe en $\ln \frac{5}{4}$ seulement : **unique point d'inflexion** $I\left(\ln \frac{5}{4}, 2 \ln \frac{5}{4} - \frac{75}{16}\right) \approx (0,22; -4,24)$.
- Sur $]-\infty, \ln 2]$, $f \leq f(-\ln 2) < 0$: pas de zéro. Sur $[\ln 2, +\infty[$, f est continue et strictement croissante de $2 \ln 2 - 6 < 0$ à $+\infty$: elle s'annule une seule fois, en α , et $f(1,46) < 0 < f(1,47)$ donne $1,46 < \alpha < 1,47$. Courbe ci-dessus.

■ Corrigé de l'exercice 56

- En $-\infty$: $(x+1)e^x = xe^x + e^x \rightarrow 0$, donc $g \rightarrow -3$; en $+\infty$: $g \rightarrow +\infty$. $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$: g décroît sur $]-\infty, -2]$ et croît sur $[-2, +\infty[$, avec $g(-2) = -3 - e^{-2}$.
- Sur $]-\infty, -2]$, g décroît de -3 (limite) à $g(-2)$: $g < 0$. Sur $[-2, +\infty[$, g est continue et strictement croissante de $g(-2) < 0$ à $+\infty$: elle s'annule une seule fois, en β . $g(0,6) \approx 1,6 \times 1,822 - 3 \approx -0,08 < 0$ et $g(0,7) \approx 1,7 \times 2,014 - 3 \approx 0,42 > 0$: $0,6 < \beta < 0,7$. Ainsi $g < 0$ sur $]-\infty, \beta[$ et $g > 0$ sur $]\beta, +\infty[$.
- En $-\infty$: $xe^x \rightarrow 0$, donc $f(x) = xe^x - 3x \rightarrow +\infty$ et $f(x) - (-3x) = xe^x \rightarrow 0$: D est **asymptote**. $xe^x < 0$ pour $x < 0$: C_f est au-dessous de D sur $]-\infty, 0[$, au-dessus sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = e^x - 3 \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) .
- $f'(x) = e^x - 3 + xe^x = g(x)$: f décroît sur $]-\infty, \beta]$ et croît sur $[\beta, +\infty[$. Comme $g(\beta) = 0$, $e^\beta = \frac{3}{\beta+1}$, d'où $f(\beta) = \beta \left(\frac{3}{\beta+1} - 3 \right) = -\frac{3\beta^2}{\beta+1}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{t+1}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (dérivée $\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$), donc $\frac{0,36}{1,6} < \frac{\beta^2}{\beta+1} < \frac{0,49}{1,7}$, et $-0,87 < -0,865 < f(\beta) < -0,675 < -0,67$.

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\beta)$	$+\infty$



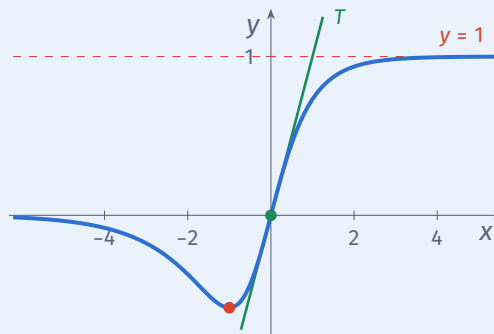
- $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $e^x = 3$: $S = \{0, \ln 3\}$. $f'' = g'$ s'annule en changeant de signe en -2 seulement : unique point d'inflexion $I(-2, 6 - 2e^{-2})$. D'après le tableau, $f(x) = m$ a **aucune** solution si $m < f(\beta)$, **une** si $m = f(\beta)$ ($x = \beta$), **deux** si $m > f(\beta)$.

■ Corrigé de l'exercice 57

- $g'(x) = (x+1)e^x$: g décroît sur $]-\infty, -1]$, croît sur $[-1, +\infty[$, de minimum $g(-1) = -\frac{1}{e} > -1$. Or $x + e^{-x} = e^{-x}(1 + xe^x) = e^{-x}(1 + g(x)) > 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$, et (en multipliant haut et bas par e^x) $f(x) = \frac{xe^x}{1+xe^x} = h(g(x))$.
- En $+\infty$: $g \rightarrow +\infty$ et $h(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \rightarrow 1$: **asymptote** $y = 1$, et $f(x) - 1 = -\frac{1}{1+g(x)} < 0$: C_f est au-dessous. En $-\infty$: $g(x) = xe^x \rightarrow 0$ et h est continue en 0 : $f \rightarrow h(0) = 0$, **asymptote** $y = 0$; pour $x < 0$, $f(x) < 0$: C_f est au-dessous.

3. $h'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$: h est croissante, donc $f = h \circ g$ a les variations de g (et $f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$). Le minimum est $f(-1) = h\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{-1/e}{1-1/e} = \boxed{-\frac{1}{e-1}} \approx -0,58$.
4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$: $T : y = x$. Puis $f(x) - x = \frac{x-x(x+e^{-x})}{x+e^{-x}} = \frac{x(1-x-e^{-x})}{x+e^{-x}}$. Comme $e^{-x} \geq 1-x$ avec égalité seulement en 0, $1-x-e^{-x} < 0$ pour $x \neq 0$: $f(x) - x$ a le signe de $-x$. C_f est au-dessus de T sur $] -\infty, 0[$ et au-dessous sur $] 0, +\infty[$: elle **traverse sa tangente** en O , qui est donc un **point d'inflexion**.
5. f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, avec $f(-1) = -\frac{1}{e-1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$: bijection de $[-1, +\infty[$ sur $J = \boxed{\left[-\frac{1}{e-1}, 1\right]}$.

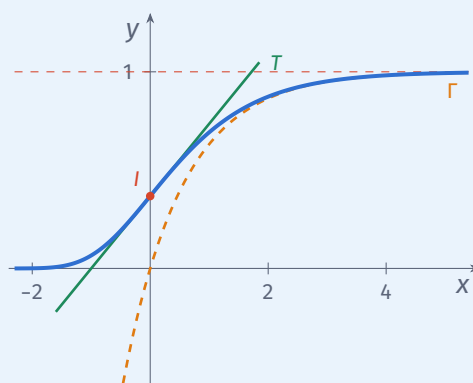
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 $+$
$f(x)$	0		1
		$-\frac{1}{e-1}$	



■ Corrigé de l'exercice 58

- En $-\infty : e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow 0$: **asymptote** $y = 0$. En $+\infty : e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow e^0 = 1$: **asymptote** $y = 1$.
- a)** $e^{-u} \geq 1 - u$ découle de $e^t \geq 1 + t$. Soit $\chi(u) = 1 - u + \frac{u^2}{2} - e^{-u} : \chi(0) = 0$ et $\chi'(u) = -1 + u + e^{-u} \geq 0$, donc $\chi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Avec $u = e^{-x} > 0 : 1 - e^{-x} \leq f(x) \leq 1 - e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) - (1 - e^{-x}) \leq \frac{1}{2}e^{-2x} : C_f$ est **au-dessus** de Γ . **b)** $e^x(1 - f(x)) = 1 - e^x(f(x) - (1 - e^{-x})) \in [1 - \frac{1}{2}e^{-x}, 1]$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - f(x)) = 1 : 1 - f(x) \llcorner \text{se comporte comme} \gg e^{-x}$, et C_f et Γ sont très proches en $+\infty$.
- $f'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}} = e^{-x} f(x) > 0 : f$ est continue et strictement croissante de 0 à 1 : bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Pour $y \in]0, 1[: f(x) = y \iff -e^{-x} = \ln y \iff e^{-x} = -\ln y (> 0) \iff x = -\ln(-\ln y) : f^{-1}(y) = -\ln(-\ln y)$, et $f(x) = \frac{1}{2} \iff x = -\ln(\ln 2) \approx 0,37$.
- $f''(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (e^{-x} - 1) f(x)$, du signe de $e^{-x} - 1$: positive sur $]-\infty, 0[$, négative sur $]0, +\infty[$: point d'inflexion $I(0, \frac{1}{e})$, et $f'(0) = \frac{1}{e} : T : y = \frac{x+1}{e}$. f' croît sur $]-\infty, 0[$ et décroît sur $]0, +\infty[$, donc $f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{e}$; ainsi $d(x) = f(x) - \frac{x+1}{e}$ est décroissante ($d' = f' - \frac{1}{e} \leq 0$) et $d(0) = 0 : C_f$ est au-dessus de T sur $]-\infty, 0[$, au-dessous sur $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	1

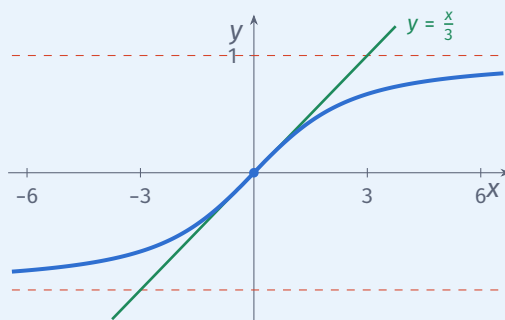


■ Corrigé de l'exercice 59

- $\text{ch}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$, $\text{sh}' = \text{ch}$, et $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = 1$; $\text{ch } x \geq \sqrt{e^x e^{-x}} = 1$. ch est paire, sh et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont impaires : L est **impaire**. En $+\infty : \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \rightarrow 1$, donc $L \rightarrow 1$, et $L \rightarrow -1$ en $-\infty$: asymptotes $y = 1$ et $y = -1$. Enfin $L(x) = \frac{x \text{ch } x - \text{sh } x}{x \text{sh } x} = \frac{P(x)}{x \text{sh } x}$.
- a)** $P'(x) = \text{ch } x + x \text{sh } x - \text{ch } x = x \text{sh } x$. La fonction $t \mapsto \text{sh } t - t$ a pour dérivée $\text{ch } t - 1 \geq 0$ et s'annule en 0 : $\text{sh } t \geq t$ pour $t \geq 0$. Et $\text{sh } t = \frac{e^t}{2} (1 - e^{-2t}) \leq \frac{e^t}{2} \cdot 2t = t e^t$.
b) Pour $0 \leq t \leq x : P'(t) = t \text{sh } t \in [t^2, t^2 e^t] \subset [t^2, t^2 e^x]$. Les fonctions $t \mapsto P(t) - \frac{t^3}{3}$ et $t \mapsto \frac{t^3}{3} e^x - P(t)$ sont donc croissantes sur $[0, x]$ et nulles en 0 : en $t = x$, $\frac{x^3}{3} \leq P(x) \leq \frac{x^3}{3} e^x$.
c) Par encadrement, $\frac{P(x)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}$ quand $x \rightarrow 0^+$. De plus $\frac{\text{sh } x}{x} \rightarrow \text{sh}'(0) = \text{ch } 0 = 1$. Pour $x > 0 : \frac{L(x) - L(0)}{x} = \frac{P(x)}{x^3} \cdot \frac{x}{\text{sh } x} \rightarrow \frac{1}{3}$, et par imparité $\frac{L(x)}{x} = \frac{L(-x)}{-x} \rightarrow \frac{1}{3}$ aussi en 0^- . Donc L est dérivable (donc continue) en 0 : $L'(0) = \frac{1}{3}$.

3. $\left(\frac{\text{ch}}{\text{sh}}\right)' = \frac{\text{sh}^2 - \text{ch}^2}{\text{sh}^2} = -\frac{1}{\text{sh}^2}$, d'où $L'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 x}$. Pour $x > 0$, $t \mapsto \text{sh } t - t$ est strictement croissante ($\text{ch } t > 1$ pour $t \neq 0$), donc $\text{sh } x > x > 0$ et $L'(x) > 0$. L' est paire (L impaire) et $L'(0) = \frac{1}{3}$: $L' > 0$ sur $\mathbb{R}$, L est **strictement croissante**, de -1 à 1 .
4. $Q'(x) = 2x \text{sh } x + x^2 \text{ch } x - 3x \text{sh } x = x(x \text{ch } x - \text{sh } x) = \boxed{x P(x)} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ (car $P(x) \geq \frac{x^3}{3}$), et $Q(0) = 0$: $Q \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $x \text{sh } x > 0$ et $3P(x) \leq x^2 \text{sh } x$ donnent $\boxed{L(x) = \frac{P(x)}{x \text{sh } x} \leq \frac{x}{3}}$. La tangente en O est $y = \frac{x}{3}$: la courbe est au-dessous sur $[0, +\infty[$, au-dessus sur $]-\infty, 0]$ (im-parité).

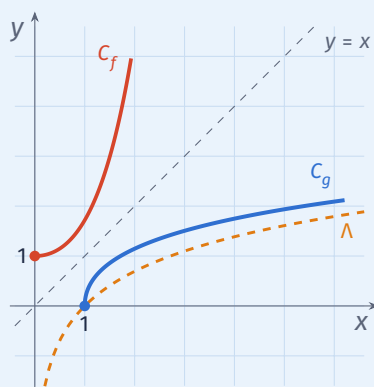
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$L'(x)$	$+$	$\frac{1}{3}$	$+$
$L(x)$	-1	0	1



Remarque. En physique, L décrit l'aimantation d'un matériau paramagnétique (théorie de Langevin) ; pour x petit, $L(x) \approx \frac{x}{3}$: c'est la **loi de Curie**.

■ Corrigé de l'exercice 60

- $f'(x) = e^x - 1 > 0$ sur $]0, +\infty[$: f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$; $f(0) = 1$ et $f(x) = e^x (1 - xe^{-x}) \rightarrow +\infty$: bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, et $\boxed{g(1) = 0}$.
- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f' \neq 0$: g est dérivable sur $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$ et $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{e^{g(y)} - 1}$. Or $f(g(y)) = y$ s'écrit $e^{g(y)} = y + g(y)$, d'où $\boxed{g'(y) = \frac{1}{y + g(y) - 1}}$. En 1 : avec $t = g(y) \rightarrow 0^+$ quand $y \rightarrow 1^+$, $\frac{g(y)-g(1)}{y-1} = \frac{t}{f(t)-f(0)}$, et $\frac{f(t)-f(0)}{t} \rightarrow f'(0) = 0$ par valeurs positives : le quotient tend vers $+\infty$. g n'est pas dérivable à droite en 1 : C_g a une **demi-tangente verticale** en $(1, 0)$ (symétrique de la tangente horizontale de C_f en $(0, 1)$).
- g est croissante, donc $e^{g(y)} - 1$ est croissante et strictement positive, et $g' = \frac{1}{e^{g(y)} - 1}$ est **décroissante** : g est **concave**, C_g est au-dessous de ses tangentes.
- a)** $e^{g(y)} = y + g(y) \geq y$ (car $g \geq 0$), d'où $g(y) \geq \ln y$. **b)** $\chi(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$ vérifie $\chi(0) = 0$ et $\chi'(t) = e^t - 1 - t \geq 0$: $\chi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Avec $t = g(y) \geq 0$: $y = e^t - t \geq 1 + \frac{t^2}{2}$, donc $\boxed{g(y) \leq \sqrt{2(y-1)}}$. Puis $g(y) = \ln(y + g(y)) \leq \ln(y + \sqrt{2(y-1)}) \leq \ln(2y)$, car $\sqrt{2(y-1)} \leq y \iff 2y - 2 \leq y^2 \iff (y-1)^2 + 1 \geq 0$.
c) $g(y) \geq \ln y$ donne $\boxed{g \rightarrow +\infty}$; $0 \leq \frac{g(y)}{y} \leq \frac{\sqrt{2(y-1)}}{y} \rightarrow 0$; et $g(y) - \ln y = \ln \frac{y+g(y)}{y} = \ln \left(1 + \frac{g(y)}{y}\right) \rightarrow \boxed{0}$. Les courbes C_g et Λ sont **asymptotes** en $+\infty$, C_g étant au-dessus de Λ (car $g(y) > 0$ pour $y > 1$).



33

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

- Soient $x_1 < \dots < x_p$ des zéros de φ . Le théorème de Rolle sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ fournit $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $\varphi'(c_i) = 0$; les intervalles étant disjoints, les $p-1$ réels c_i sont distincts. Comme $e^{-bx} > 0$, $G(x) = 0 \iff F(x) = 0$.
- Récurrence sur V (pour tous n, a_k, c_k). Si $V = 0$, tous les c_k ont le même signe, et $F(x)$, somme de termes de ce signe, ne s'annule pas. Soit $V \geq 1$, la propriété étant vraie pour $V-1$ changements de signe. Avec j et b comme indiqué, $G(x) = \sum c_k e^{(a_k-b)x}$ et $G'(x) = \sum d_k e^{(a_k-b)x}$, où $d_k = c_k(a_k-b) \neq 0$, les exposants $a_k - b$ restant strictement croissants. Pour $k \leq j$, $a_k - b < 0$: d_k a le signe de $-c_k$; pour $k \geq j+1$, d_k a le signe de c_k . Les changements de signe de (d_k) à l'intérieur de $\{1, \dots, j\}$ et de $\{j+1, \dots, n\}$ sont ceux de (c_k) , et entre j et $j+1$ il n'y en a plus : $\text{signe}(d_j) = -\text{signe}(c_j) = \text{signe}(c_{j+1}) = \text{signe}(d_{j+1})$. Donc G' a $V-1$ changements de signe, et au plus $V-1$ zéros. Si F (donc G) avait $V+1$ zéros distincts, G' en aurait au moins V (question 1) : contradiction. F a au plus V zéros.
- a) $F(x) = e^{x \ln 2} - e^{x \ln 3} - e^{x \ln 4} + e^{x \ln 5}$: coefficients $(1, -1, -1, 1)$ dans l'ordre des exposants, $V = 2$; or 0 et 1 sont solutions ($2 = 2$ et $7 = 7$) : $S = \{0, 1\}$.
 b) $1 - 2^x - 3^x + 6^x$ a aussi $V = 2$, mais $1 - 2^x - 3^x + 6^x = (2^x - 1)(3^x - 1)$, produit de deux facteurs du signe de x , ne s'annule qu'en 0 : $S = \{0\}$. La majoration n'est donc pas toujours atteinte.
 c) $F(x) = 2^x - 3^x - 5^x + 7^x$: $V = 2$, donc au plus deux solutions. $F(0) = 0$; $F'(0) = \ln 2 - \ln 3 - \ln 5 + \ln 7 = \ln \frac{14}{15} < 0$, et $\frac{F(x)}{x} \rightarrow F'(0)$ en 0^+ : il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $F(x_0) < 0$. Comme $F(1) = 1 > 0$, le TVI donne un zéro dans $]x_0, 1[$ ($\approx 0,212$). Il y a donc **exactement deux** solutions.

■ Corrigé de l'exercice 62

- $y = \log_a x$ donne $a^y = x$. Si $x < y$, alors $a^x < a^y$ ($a > 1$), soit $y < x$: absurde ; de même si $x > y$. Donc $x = y = a^x$: le point (x, a^x) est sur Δ .
- a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{1/4} = \frac{1}{2}$ et $\log_{1/16} \frac{1}{4} = \frac{-2 \ln 2}{-4 \ln 2} = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{1/2} = \frac{1}{4}$ et $\log_{1/16} \frac{1}{2} = \frac{-\ln 2}{-4 \ln 2} = \frac{1}{4}$. Les points $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, symétriques l'un de l'autre, ne sont pas sur Δ : pour $a < 1$, la question 1 tombe en défaut !
 b) $x \mapsto a^x - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ($a < 1$), positive en $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$) et négative en $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$) : un unique zéro $c \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$ ($c \approx 0,364$). Et $a^c = c$ donne $\log_a c = c = a^c$.

3. a) Pour $x > 0$, $t \mapsto a^t$ étant injective : $a^x = \log_a x \iff a^{a^x} = a^{\log_a x} = x \iff h(x) = 0$.
- b) $h'(x) = \ln a \cdot (\ln a \cdot a^x) a^{a^x} - 1 = (\ln a)^2 a^{x+a^x} - 1 = (\ln a)^2 a^{k(x)} - 1$. $k'(x) = 1 + \ln a \cdot a^x = 1 - \ln 16 \cdot 16^{-x}$ est strictement croissante et s'annule en $x_1 = \frac{\ln(\ln 16)}{\ln 16} \approx 0,37$: k décroît sur $]-\infty, x_1]$ et croît sur $[x_1, +\infty[$. Comme $t \mapsto a^t$ est strictement décroissante, h' est strictement croissante sur $]-\infty, x_1]$ et strictement décroissante sur $[x_1, +\infty[$: elle s'annule au plus une fois sur chacun, donc **au plus deux fois**.
- c) Si h avait quatre zéros distincts, h' en aurait trois (Rolle, comme en 61.1) : impossible. h s'annule en $\frac{1}{4} < c < \frac{1}{2}$: $(E_{1/16})$ a **exactement trois** solutions, $\frac{1}{4}$, c et $\frac{1}{2}$.
4. Si $\frac{1}{e} \leq a < 1$, alors $-1 \leq \ln a < 0$ et $(\ln a)^2 \leq 1$. Pour $x > 0$, $k(x) = x + a^x > 0$ donc $a^{k(x)} < 1$, et $h'(x) < (\ln a)^2 - 1 \leq 0$: h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule au plus une fois. Or le point fixe c_a de $x \mapsto a^x$ (dans $]0, 1[$, comme en 2b) est solution : (E_a) a une **unique** solution.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. Formule du binôme : $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x e^{\frac{1}{n}}\right)^k (1-x)^{n-k} = \left(x e^{\frac{1}{n}} + 1 - x\right)^n$.
2. a) $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et $\psi''(x) = -t^2 e^{xt} \leq 0$: ψ' décroît ; si $t \neq 0$, Rolle donne $c \in]0, 1[$ avec $\psi'(c) = 0$, donc ψ croît sur $[0, c]$ et décroît sur $[c, 1]$: $\psi \geq \min(\psi(0), \psi(1)) = 0$ (si $t = 0$, $\psi = 0$). Avec $t = \frac{1}{n}$: $e^{\frac{x}{n}} \leq 1 - x + x e^{\frac{1}{n}}$, et, en élevant à la puissance n : $e^x \leq B_n(x)$.
- b) $1 - x + x e^{\frac{1}{n}} = 1 + v$ avec $v = x(e^{\frac{1}{n}} - 1) \geq 0$, et $1 + v \leq e^v$: $B_n(x) \leq e^{nv} = e^{c_n x}$.
- c) On a $t \leq e^t - 1 \leq t e^t$ (de $e^t \geq 1 + t$ et de $e^{-t} \geq 1 - t$) ; avec $t = \frac{1}{n}$: $1 \leq c_n \leq e^{\frac{1}{n}}$. Pour $x \in [0, 1]$: $0 \leq B_n(x) - e^x \leq e^x (e^{(c_n-1)x} - 1) \leq e (e^{c_n-1} - 1) \leq e (e^{1/n-1} - 1)$, qui tend vers 0 et ne dépend pas de x : B_n converge vers $\exp$ **uniformément** sur $[0, 1]$.
3. a) $n(c_n - 1) = n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{e^{t-1}-t}{t^2}$ avec $t = \frac{1}{n} \in]0, 1]$: ce quotient est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{t}{2}$, donc $n(c_n - 1) \rightarrow \frac{1}{2}$.
- b) $\ln B_n(x) = n \ln(1 + u_n)$ et $n^2 u_n = n x c_n$, donc $n(\ln B_n(x) - x) = n^2(\ln(1 + u_n) - u_n) + n x c_n - n x$, ce qui est l'identité voulue. Or $n u_n = x c_n \rightarrow x$, et l'encadrement admis donne

$$-\frac{(n u_n)^2}{2} \leq n^2(\ln(1 + u_n) - u_n) \leq -\frac{(n u_n)^2}{2} + \frac{(n u_n)^3}{3n},$$

dont les deux bornes tendent vers $-\frac{x^2}{2}$. Avec a) : $n(\ln B_n(x) - x) \rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x(1-x)}{2}$.

c) Soit $v_n = \ln B_n(x) - x \geq 0$ (question 2a) ; $n v_n \rightarrow \frac{x(1-x)}{2}$, donc $v_n \rightarrow 0$. Comme $v_n \leq e^{v_n} - 1 \leq v_n e^{v_n}$: $n v_n e^x \leq n(B_n(x) - e^x) = n(e^{v_n} - 1)e^x \leq n v_n e^{v_n} e^x$, et les deux bornes tendent vers $\frac{x(1-x)}{2} e^x$.

Ainsi l'erreur $B_n(x) - e^x$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ (pour $n = 100$ et $x = \frac{1}{2}$: $n(B_n - \sqrt{e}) \approx 0,2062$, contre $\frac{\sqrt{e}}{8} \approx 0,2061$).

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $\varphi'(x) = (1-x)e^{-x}$: φ croît de 0 à $\frac{1}{e}$ sur $[0, 1]$, puis décroît de $\frac{1}{e}$ vers 0 (limite) sur $[1, +\infty[$. Comme $0 < b < \frac{1}{e}$, φ étant continue et strictement monotone sur chaque intervalle, il y a une solution $y \in]0, 1[$ et une seule $z \in]1, +\infty[$.
2. $ye^{-y} = ze^{-z} > 0$ donne, par passage au logarithme, $\ln y - y = \ln z - z$, soit $z - y = \ln \frac{z}{y} = \ln r$. Avec $z = ry$: $(r-1)y = \ln r$, d'où $y = \frac{\ln r}{r-1}$ et $z = \frac{r \ln r}{r-1}$ ($r > 1$).
3. a) $A(r) = \ln r - \frac{2(r-1)}{r+1}$: $A(1) = 0$ et $A'(r) = \frac{1}{r} - \frac{4}{(r+1)^2} = \frac{(r-1)^2}{r(r+1)^2} > 0$, donc $A > 0$ sur $]1, +\infty[$. $B(s) = s - \frac{1}{s} - 2 \ln s$: $B(1) = 0$ et $B'(s) = \frac{(s-1)^2}{s^2} > 0$, donc $B(s) > 0$ pour $s > 1$; avec $r = s^2$, $s - \frac{1}{s} = \frac{r-1}{\sqrt{r}}$ et $2 \ln s = \ln r$.
b) $y + z = \frac{(r+1) \ln r}{r-1} > \frac{(r+1)}{r-1} \cdot \frac{2(r-1)}{r+1} = 2$ et $yz = \frac{r(\ln r)^2}{(r-1)^2} < \frac{r}{(r-1)^2} \cdot \frac{(r-1)^2}{r} = 1$: $y + z > 2$ et $yz < 1$. Le milieu $\frac{y+z}{2}$ est à droite du point 1 où φ est maximale.
4. a) $\psi(t) = (1+t)e^{-1-t} - (1-t)e^{-1+t}$: $\psi(0) = 0$ et $\psi'(t) = -te^{-1-t} + te^{-1+t} = \frac{t}{e}(e^t - e^{-t}) > 0$ sur $]0, 1]$, donc $\psi > 0$ sur $]0, 1]$. Avec $t = 1 - y \in]0, 1[$: $\varphi(2-y) > \varphi(y) = \varphi(z)$. Or $2-y$ et z sont dans $]1, +\infty[$ où φ est strictement décroissante : $2-y < z$, soit $y + z > 2$.
b) Si $xe^x = a < 0$, alors $x < 0$ et $(-x)e^{-(-x)} = -a$: les solutions sont les opposées des solutions de $\varphi(X) = b$ avec $b = -a \in]0, \frac{1}{e}[$, soit $x_2 = -y \in]-1, 0[$ et $x_1 = -z < -1$. Donc $x_1 + x_2 = -(y+z) < -2$ et $x_1 x_2 = yz < 1$.

■ Corrigé de l'exercice 65

1. $\phi(t) = t^{1-s}$, $\phi'(t) = (1-s)t^{-s}$: le TAF donne $c \in]k, k+1[$ tel que $k^{1-s} - (k+1)^{1-s} = (s-1)c^{-s}$, et $(k+1)^{-s} < c^{-s} < k^{-s}$ ($t \mapsto t^{-s}$ décroît) ; on divise par $s-1 > 0$.
2. On somme l'inégalité de droite pour $k = 1, \dots, n$ (télescopage) : $\frac{1-(n+1)^{1-s}}{s-1} \leq Z_n(s)$; celle de gauche pour $k = 1, \dots, n-1$: $Z_n(s) - 1 \leq \frac{1-n^{1-s}}{s-1}$. La suite $(Z_n(s))_n$ est croissante et majorée par $1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$: elle converge, et comme $(n+1)^{1-s} \rightarrow 0$ ($1-s < 0$) : $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}$. Ainsi $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$, et $(s-1)\zeta(s) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 1^+$.
3. a) Pour $s > 1$, c'est la question 1. Pour $s = 1$, le TAF appliqué à $\ln$ donne $\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$, d'où le même encadrement.
b) Les sommes partielles $\sum_{k=1}^n d_k(s)$ sont croissantes ($d_k \geq 0$) et majorées par $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^s} \leq 1$: elles convergent. Pour $s > 1$, $\sum_{k=1}^n d_k(s) = Z_n(s) - \frac{1-(n+1)^{1-s}}{s-1} \rightarrow \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$; pour $s = 1$, $\sum_{k=1}^n d_k(1) = H_n - \ln(n+1) = (H_n - \ln n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \gamma$.
4. a) Pour $n > p$: $0 \leq \sum_{k=p+1}^n d_k(s) \leq \frac{1}{(p+1)^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{p+1}$ (télescopage) ; on fait tendre n vers $+\infty$.
b) Avec $\sigma = s-1 \rightarrow 0^+$: $\frac{k^{1-s} - (k+1)^{1-s}}{s-1} = \frac{e^{-\sigma \ln k} - e^{-\sigma \ln(k+1)}}{\sigma} \rightarrow -\ln k + \ln(k+1)$ (car $\frac{e^{-\sigma c} - 1}{\sigma} \rightarrow -c$), et $k^{-s} \rightarrow \frac{1}{k}$: $d_k(s) \rightarrow \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = d_k(1)$.
c) D'après a), $D(s) - D(1) = (R_p(s) - R_p(1)) + \sum_{k=1}^p (d_k(s) - d_k(1))$, où $R_p = D - \sum_{k \leq p} d_k \in \left[0, \frac{1}{p+1}\right]$; donc $|D(s) - \gamma| \leq \frac{1}{p+1} + \left|\sum_{k=1}^p (d_k(s) - d_k(1))\right|$. Soit $\varepsilon > 0$: on fixe p tel que $\frac{1}{p+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, puis (b, somme finie)

s assez proche de 1 pour que le second terme soit $< \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $\boxed{\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \rightarrow \gamma}$ (par exemple $\zeta(1,01) - 100 \approx 0,578$).

■ Corrigé de l'exercice 66

1. Pour $x > 0$: $f_n(x) = x^{n-1} \cdot \frac{x}{e^x-1}$ et $\frac{x}{e^x-1} \rightarrow 1$ en 0 : $f_n(x) \rightarrow 0 = f_n(0)$ ($n \geq 2$). Puis $\frac{f_n(x)}{x} = x^{n-2} \cdot \frac{x}{e^x-1}$ tend vers 1 si $n = 2$, vers 0 si $n \geq 3$: f_n est dérivable à droite en 0. En $+\infty$: $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x} \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} \rightarrow 0$ (croissances comparées).
2. $f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(e^x-1) - x^n e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{x^{n-1} e^x g_n(x)}{(e^x-1)^2}$, du signe de $g_n(x)$. $g'_n(x) = ne^{-x} - 1$ s'annule en $\ln n$: g_n croît sur $[0, \ln n]$ (avec $g_n(0) = 0$, donc $g_n > 0$ sur $]0, \ln n]$), puis décroît strictement vers $-\infty$: elle s'annule une seule fois, en $x_n > \ln n$. Or $\ln n \leq n-1$, $g_n(n-1) = 1 - ne^{1-n} > 0$ (car $e^{n-1} > 1 + (n-1) = n$) et $g_n(n) = -ne^{-n} < 0$: $\boxed{n-1 < x_n < n}$. f_n croît sur $[0, x_n]$, décroît ensuite : maximum en x_n .
3. ψ_n est croissante, $\psi_n(n) = n - ne^{-n} \in [n-1, n]$ et $\psi_n(n-1) = n - ne^{1-n} \geq n-1$: $\psi_n([n-1, n]) \subset [n-1, n]$. Sur cet intervalle, $|\psi'_n(x)| = ne^{-x} \leq ne^{1-n} = q < 1$. Les t_k restent dans $[n-1, n]$ et $x_n = \psi_n(x_n)$; l'IAF donne $|t_{k+1} - x_n| \leq q |t_k - x_n|$, d'où $|t_k - x_n| \leq q^k |n - x_n| \leq q^k$. Pour $n = 5$: $q = 5e^{-4} \approx 0,092$ et $q^6 \approx 6 \times 10^{-7} < 10^{-6}$: **six itérations** suffisent ($x_5 \approx 4,965$).
4. $g_n(x_n) = 0$ s'écrit $n - x_n = ne^{-x_n}$, soit $\delta_n = ne^{-n} e^{\delta_n}$. Comme $0 < \delta_n < 1$: $0 < \delta_n < e \cdot ne^{-n} \rightarrow 0$. Puis $\frac{e^n \delta_n}{n} = e^{\delta_n} \rightarrow 1$, et $\delta_n - ne^{-n} = ne^{-n} (e^{\delta_n} - 1)$ donne $\frac{e^{2n}}{n^2} (\delta_n - ne^{-n}) = \frac{e^n \delta_n}{n} \cdot \frac{e^{\delta_n} - 1}{\delta_n} \rightarrow 1 \times 1 = \boxed{1}$.

Remarque. Loi de Wien. La luminance spectrale du corps noir s'écrit, en longueur d'onde, $B_\lambda \propto f_5\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)$: son maximum est atteint pour $\frac{hc}{\lambda kT} = x_5 \approx 4,965$, soit $\lambda_{\max} T = \frac{hc}{kx_5} \approx 2,898 \times 10^{-3}$ m·K. En fréquence, c'est f_3 qui intervient ($x_3 \approx 2,821$).

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Équations et inéquations	31 à 36	/ 6	
Thème B · Limites et croissances comparées	37 à 42	/ 6	
Thème C · Dérivées et primitives	43 à 48	/ 6	
Thème D · Puissances réelles et base a	49 à 54	/ 6	
Thème E · Études de fonctions	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Maths Olympiad