

COURBES PARAMETREES DU PLAN

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On veut étudier la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} ; t \in I$$

◆ *Equation cartésienne :*

En posant $x = x(t)$ et $y = y(t)$; l'équation obtenue en éliminant (si possible) la variable t entre x et y est appelée équation cartésienne de la courbe (Γ)

◆ *Comparaison de $M(t)$ et $M(u(t))$:*

On note $M(t) (x(t) ; y(t))$ et donc $M(u(t)) (x(u(t)) ; y(u(t)))$

$t \mapsto u(t)$ étant une fonction de t ; comparons $M(t)$ et $M(u(t))$

Résultat	Conclusion
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t) = M(u(t))$
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère
$\begin{cases} x(u(t)) = y(t) \\ y(u(t)) = x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
$\begin{cases} x(u(t)) = -y(t) \\ y(u(t)) = -x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$

◆ *Réduction de l'intervalle d'étude :*

- **Comparaison de $M(t)$ et $M(t + p)$:**

$$\begin{cases} x(t + p) = x(t) \\ y(t + p) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t) = M(t + p) \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de période commune } p$$

Une étude sur un intervalle de longueur p permet de tracer complètement (Γ)

- **Comparaison de $M(t)$ et $M(-t)$:**

✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}\right]$ est de longueur p

✓ $\left[-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}\right] = \left[-\frac{p}{2} ; 0\right] \cup \left[0 ; \frac{p}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0 ; \frac{p}{2}\right], -t \in \left[-\frac{p}{2} ; 0\right]$

✓ $M(-t) = S_{(?)}(M(t))$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $M(t)$ et $M\left(\frac{p}{2} + t\right)$:**

- ✓ L'intervalle $[0 ; p]$ est de longueur p

- ✓ $[0 ; p] = \left[0 ; \frac{p}{2}\right] \cup \left[\frac{p}{2} ; p\right]$ et $\forall t \in \left[0 ; \frac{p}{2}\right], \left(\frac{p}{2} + t\right) \in \left[\frac{p}{2} ; p\right]$

- ✓ $M\left(\frac{p}{2} + t\right) = S_{(?)}(M(t))$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(M(t))$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $M(t)$ et $M\left(\frac{p}{2} - t\right)$:**

- ✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$ est de longueur p

- ✓ $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right] = \left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right] \cup \left[\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$ et $\forall t \in \left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right], \left(\frac{p}{2} - t\right) \in \left[\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$

- ✓ $M\left(\frac{p}{2} - t\right) = S_{(?)}(M(t))$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(M(t))$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right]$

◆ *Tableau conjoint des variations :*

Supposons que l'intervalle d'étude réduit trouvé est $[a ; b]$

- Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$
- Etudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle $[a ; b]$
- Pour chaque valeur particulière t_0 de t trouvée, calculer les quatre quantités $x'(t_0)$; $y'(t_0)$; $x(t_0)$ et $y(t_0)$
- Compléter le tableau ci-dessous par les signes $x'(t)$ et $y'(t)$ ainsi que les flèches indiquant les variations de x et y

t	a	t_0	t_1	...	b
$x'(t)$	$x'(a)$	$x'(t_0)$	$x'(t_1)$		$x'(b)$
$y'(t)$	$y'(a)$	$y'(t_0)$	$y'(t_1)$		$y'(b)$
$x(t)$	$x(a)$	$x(t_0)$	$x(t_1)$		$x(b)$
$y(t)$	$y(a)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$		$y(b)$

◆ *Notion de tangentes au point $M(t_0)$:*

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors $(T): x = x(t_0)$ (verticale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors $(T): y = y(t_0)$ (horizontale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors $(T): y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$ (oblique)
- Le cas $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ est hors programme

◆ *Points d'intersection avec les axes du repère :*

- **Avec l'axe des abscisses :** Chercher $M(t)(x(t); y(t))$ tel que $y(t) = 0$
- **Avec l'axe des ordonnées :** Chercher $M(t)(x(t); y(t))$ tel que $x(t) = 0$

◆ *Les étapes du tracé de la courbe (Γ) :*

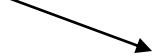
- Tracer un repère ($O ; \vec{i}, \vec{j}$) (respecter l'unité graphique si elle est donnée)
- Placer les points $M(a) ; M(t_0) ; M(t_1) ; \dots ; M(b)$ et tracer en chacun de ces points la tangente à la courbe
- Respecter l'évolution du tracer selon le tableau conjoint
De $M(a)$ vers $M(t_0)$; de $M(t_0)$ vers $M(t_1)$; de $M(t_1)$ vers $\dots$ vers $M(b)$

1^{er} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

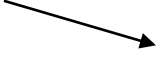
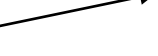
On se déplace
vers la droite
et vers le haut

2^{ème} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

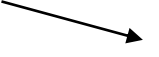
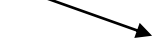
On se déplace
vers la droite
et vers le bas

3^{ème} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

On se déplace
vers la gauche
et vers le haut

4^{ème} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

On se déplace
vers la gauche
et vers le bas