

1- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée (**ln**), la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle $] 0 ; + \infty [$

2- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow Df =]0 ; +\infty[$
- Si $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = \ln [u(x)] \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R} ; u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = \ln \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R} ; \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R} ; u(x) \neq 0\}$

3- Propriétés Remarquables :

$\forall a > 0$ et $\forall b > 0$, on a les propriétés suivantes:

- $P_1 : \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $P_6 : \ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$
- $P_2 : \ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln a - \ln b$ $P_7 : \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $P_3 : \ln \left(\frac{1}{a} \right) = - \ln a$ $P_8 : \ln e^a = a$ et $e^{\ln a} = a$
- $P_4 : \ln(a)^n = n \ln a$ $P_9 : \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$
- $P_5 : \ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ $P_{10} : \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $P_{11} : \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$

4- Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \qquad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0 \qquad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \qquad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad (\text{Nombre dérivé de la fonction } \ln \text{ au point } 1)$$

$$x \rightarrow 0 \qquad x \rightarrow 1$$

5- Dérivées logarithmiques:

La dérivée logarithmique d'une fonction u , est la dérivée de $\ln|u|$

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si $f(x) = \ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si $f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln(u(x) \cdot v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \frac{u'(x)}{u(x)}$

6- Primitives remarquables :

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions :
 $x \rightarrow \ln x$ et $x \rightarrow \ln(ax + b)$. Ainsi on retiendra :

$$\text{Si } f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + k$$

$$\text{Si } f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax + b) - x + k$$