

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

◆ *Egalité de deux vecteurs et Relation de Chasles :*

- *Egalité* : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme
- *Relation de Chasles* : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

◆ *Colinéarité :*

- *Définition*

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

- *Parallélisme*

$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

- *Appartenance à une droite et alignement*

✓ $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

✓ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

◆ *Plans de l'espace et coplanarité :*

- *Définition*

Trois points non alignés A, B, C définissent un plan noté (ABC)

- *Coplanarité*

- ✓ Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ou si et seulement si, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$
- ✓ Les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ou si et seulement si, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

◆ *Produit scalaire et orthogonalité :*

- *Définition*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- *Orthogonalité*

- ✓ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- ✓ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

- ✓ ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

◆ *Géométrie analytique :*

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- Le milieu I de $[AB]$ est tel que $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et $k\vec{u}$ sont tels que $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$
- Si le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé alors :
 - ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 - ✓ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

◆ *Produit Vectoriel :*

- *Définition*

✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

- *Propriétés*

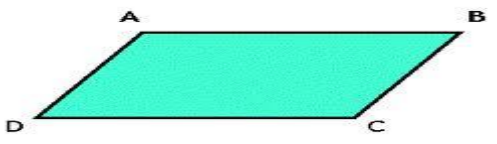
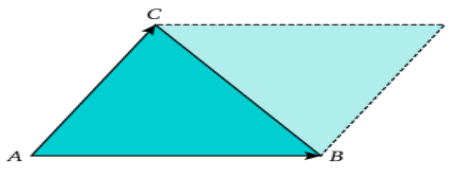
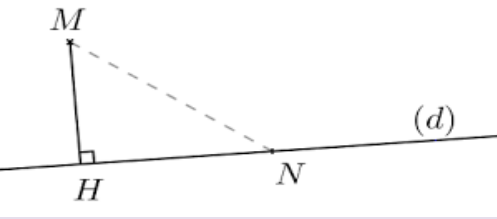
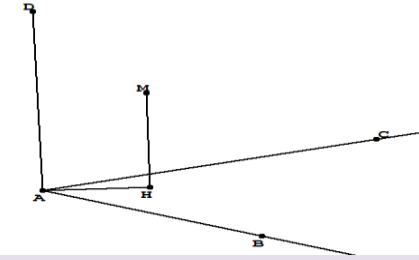
✓ $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

✓ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

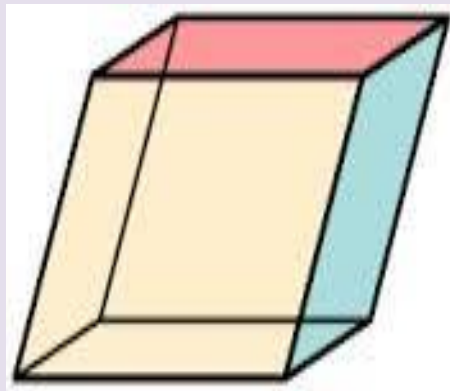
✓ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

♦ *Applications du produit vectoriel :*

Aires – Distances - Volumes :

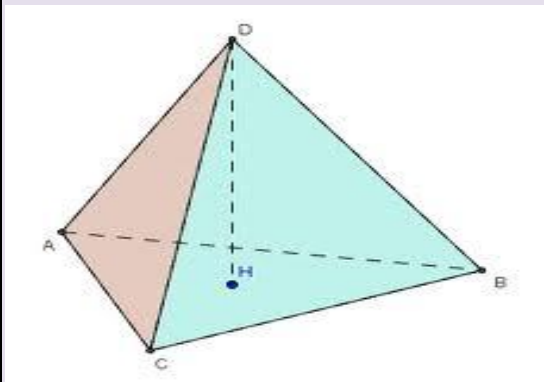
Aire d'un Parallélogram me		$\mathcal{A}_{ABCD} = \ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\ \times ua$
Aire d'un Triangle		$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ }{2} \times ua$
Distance d'un point à une droite		$d(M ; (AB)) = MH = \frac{\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\ }{\ \overrightarrow{AB}\ }$
Distance d'un point à un plan		$d(M ; (ABC)) = MH = \frac{ \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) }{\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ }$

Volume d'un parallélépipède



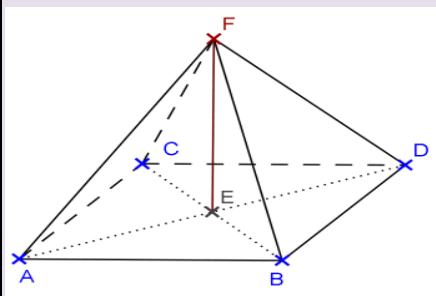
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDEFGH} &= \mathcal{A}_{ABCD} \times d(E ; (ABCD)) \times uv \\ &= \|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\| \times uv \end{aligned}$$

Volume d'un tétraèdre



$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d(D ; (ABC)) \times uv \\ &= \frac{1}{6} \|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\| \times uv \end{aligned}$$

Volume d'une pyramide



$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDE} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times d(F ; (ABCD)) \times uv \\ &= \frac{1}{3} \|\overrightarrow{FE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\| \times uv \end{aligned}$$