

SUITES NUMERIQUES

◆ *Généralités sur les suites numériques :*

- La suite (u_n) est croissante si pour tout $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite (u_n) est décroissante si pour tout $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite (u_n) est p -périodique, p entier positif, si pour tout $n, u_{n+p} = u_n$
- Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :
 - ✓ Comparaison de $u_{n+1} - u_n$ à 0

Soit (u_n) est une suite:

$$\begin{cases} \text{Si } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

- ✓ Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Soit (u_n) est une suite à termes strictement positifs:

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

- La suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

Suites majorées – suites minorées – suites bornées

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n , $u_n \leq M$
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n , $u_n \geq m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée
- La suite (u_n) est bornée $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Si pour tout } n, m \leq u_n \leq M \\ \circ \text{ Si pour tout } n, |u_n| \leq M \end{array} \right.$

◆ Suites arithmétiques :

La suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$

- Définition :

$$u_{n+1} = u_n + r ; r \text{ étant la raison de la suite arithmétique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 + nr \\ u_n = u_1 + (n-1)r \\ u_n = u_p + (n-p)r \end{cases} \text{ en général}$$

- Somme des termes consécutifs :

$$\begin{cases} \circ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right) \text{ en général} \\ \circ 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite arithmétique (u_n) converge si et seulement si sa raison $r = 0$

♦ Suites géométriques :

La suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout n , $u_{n+1} = qu_n$

- Définition :

$$u_{n+1} = qu_n ; q \text{ étant la raison de la suite géométrique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ en général} \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs : ($q \neq 1$)

$$\begin{cases} \circ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ en général} \\ \circ 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite géométrique (u_n) converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$

◆ *Démonstration par récurrence :*

Pour démontrer que pour tout entier $n \geq n_0$, une propriété P_n est vraie, il faut :

- **Initialisation** : vérifier que P_{n_0} est vraie
- **Hérédité** : supposer que P_n est vraie pour un certain $n \geq n_0$ et démontrer que P_{n+1} est vraie
- **Conclusion** : pour tout $n \geq n_0$, P_n est vraie

◆ *Limite de suites : suites convergentes – suites divergentes :*

- Une suite convergente vers un réel ℓ est une suite qui admet une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- Une suite divergente vers $\pm\infty$ est une suite qui admet une limite $\pm\infty$ quand n tend vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \pm\infty$
- Une suite divergente tout court est une suite qui n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$

◆ *Convergence des suites monotones :*

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

◆ *Théorèmes de comparaison :*

Théorème 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \circ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Théorème 1 (bis) :

$$\left. \begin{array}{l} \circ |u_n - \ell| \leq v_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Théorème 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \circ u_n \geq v_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ u_n \leq w_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$