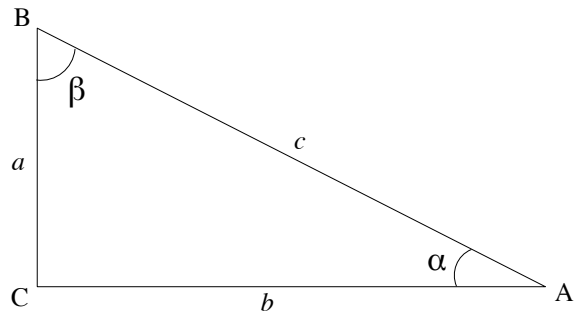


1. Trigonométrie dans le triangle rectangle

On considère un triangle ABC , rectangle en C .

Par convention, on note angles et côtés comme sur la figure ci-contre.

Remarque : Lorsque les triangles ont les mêmes angles, c'est-à-dire lorsque les triangles sont semblables, le rapport de leurs côtés correspondants reste constant. On peut donc considérer des rapports comme des objets d'étude.



Définitions

- D.1** Dans un triangle rectangle, le rapport du côté adjacent d'un angle à l'hypoténuse est appelé *cosinus* de cet angle. Cela se note : $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$.
- D.2** Dans un triangle rectangle, le rapport du côté opposé d'un angle à l'hypoténuse est appelé *sinus* de cet angle. Cela se note : $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
- D.3** Dans un triangle rectangle, le rapport du côté opposé d'un angle au côté adjacent à cet angle est appelé *tangente* de cet angle. Cela se note : $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$.

Exercices

1.
 - a) En considérant un triangle rectangle isocèle, établir les valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente de l'angle de 45° .
 - b) En considérant le fait que la hauteur d'un triangle équilatéral partage ce dernier en deux triangles rectangles identiques, établir les valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente des angles de 30° et 60° .
 - c) En s'appuyant sur les valeurs du côté d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1, établir les valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente de l'angle de $22,5^\circ$.
2. Démontrer que:

a) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

b) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

3. Dans un triangle rectangle donné on sait que $\tan(\vartheta) = 2$, où ϑ est un des angles de ce triangle.
- Construire un angle de mesure ϑ .
 - Calculer les valeurs exactes de $\sin(\vartheta)$ et $\cos(\vartheta)$.
4. a) Construire un triangle ABC , rectangle en C sachant que $\sin(\alpha) = 0,4$.
- Quelle est la valeur exacte de $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$?
 - Quelles sont les dimensions de ce triangle sachant que son aire est de 10 cm^2 ?
5. Une des principales difficultés, lors des premières conceptualisations de ces notions de sinus, cosinus et tangente d'un angle, a été de connaître avec précision la valeur de ces rapports pour des angles quelconques. L'exercice qui suit a pour but de montrer une méthode qui permet de connaître les valeurs exactes de ces rapports pour la bisection des angles.

Dans un cercle de rayon 1 on considère la figure ci-dessous. Montrer que:

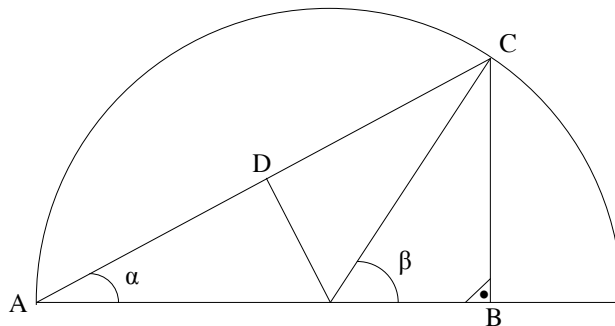
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Indications: a) Que vaut β ? b) Que vaut $\cos(2\alpha)$?

c) Etablir de deux façons différentes le $\cos(\alpha)$ et conclure.

d) Utiliser ce résultat pour calculer les valeurs exactes de $\cos(15^\circ)$, $\cos(7,5^\circ)$, et de $\cos(22,5^\circ)$.

e) Dédire de ces résultats les valeurs exactes de $\sin(75^\circ)$, $\sin(82,5^\circ)$, $\sin(67,5^\circ)$, $\sin(15^\circ)$, $\sin(7,5^\circ)$, et $\sin(22,5^\circ)$.



2. Le cercle trigonométrique

2.1 Introduction

Euler (1748)

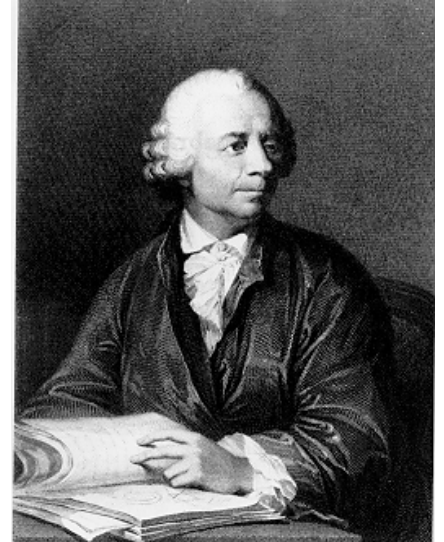
(...) Supposons donc que le rayon du cercle ou le sinus total = 1, il paroît assez clair que la circonférence de ce cercle vaut environ 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446 +... Pour abréger j'écrirai π au lieu de ce nombre, de sorte que π = à la demi circonférence d'un cercle dont le rayon = 1 ; ou π sera la longueur d'un arc de 180 degrés.

127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je suppose toujours le rayon = 1 ; on a coutume de considérer plus particulièrement les sinus & cosinus de cet arc z . Pour représenter dans la suite le sinus d'un arc z , j'écrirai $\sin(Az)$, ou simplement $\sin(z)$. Et pour représenter le cosinus j'écrirai $\cos(Az)$, ou seulement $\cos(z)$. Ainsi comme π exprime un arc de 180° , $\sin(0 \cdot \pi) = 0$;

$$\cos(0 \cdot \pi) = 1 ; \quad \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) = 1 ; \quad \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) = 0 ; \quad \sin(\pi) = 0 ; \quad \cos(\pi) = -1 ;$$

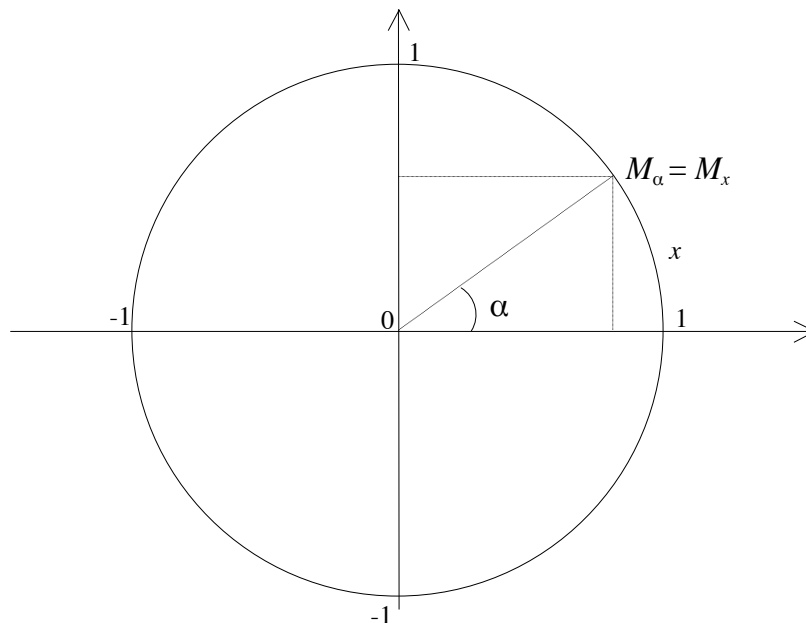
$$\sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = -1 ; \quad \cos\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 0 ; \quad \sin(2 \cdot \pi) = 0 ; \quad \cos(2 \cdot \pi) = 1. \text{ Tous les sinus \&}$$

cosinus sont donc renfermés dans les limites + 1 & - 1. (Euler L., *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, 1748)



Léonhard Euler (1707 – 1783)

Définition : D.4 Un cercle *trigonométrique*, est un cercle de rayon 1, centré à l'origine des axes de coordonnées, sur lequel on a défini un sens positif de rotation, le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Sur ce cercle se déplace un point M . L'origine de son mouvement est le point $\langle 1 ; 0 \rangle$.

Question : Combien de données sont-elles nécessaires pour déterminer sans ambiguïté la position exacte du point M ? Quelle est la nature mathématique de ces données ?

Exercice

6. Indiquer avec précision la position des points suivants

$$M_0; M_{-\pi}; M_{30^\circ}; M_{115^\circ}; M_{-720^\circ}; M_{-\frac{\pi}{2}}; M_{\frac{7\pi}{8}}; M_{128\pi}; M_{\frac{3\pi}{2}}; M_{-180^\circ}; M_{-\frac{7\pi}{3}}; M_{-90^\circ}.$$

Cet angle peut être mesuré à l'aide de plusieurs unités. Nous en utiliserons deux : le *degré* et le *radian*.

Définitions : **D.5** Le *degré* est une unité pour la mesure des angles. Un degré, que l'on note 1° , est la 360° partie d'un angle plein.

D.6 Le *radian* est une unité pour la mesure des angles. Un radian, que l'on note $1[\text{rad}]$, correspond à un angle qui intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de longueur égale au rayon¹.

Remarque : **R.1** Il y a 2π radians dans un angle plein.

Exercices

7. a) Convertir en degrés les angles donnés ci-dessous par leur mesure en radians :

$$\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; 4\pi; -\frac{7\pi}{10}; \frac{15\pi}{4}; 1; x.$$

b) Convertir en radians les angles donnés ci-dessous en degrés.

$$45^\circ; 150^\circ; -240^\circ; -1050^\circ; 1^\circ; \alpha^\circ.$$

8. La Terre est conçue comme sphérique dès le début du V^e siècle avant J.-C. Cette conception est l'œuvre de l'école pythagoricienne et peut-être due à Pythagore lui-même. C'est à Eratosthène (275-195 av. J.-C.), mathématicien, géographe et conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, que l'on doit une des premières estimations de la circonférence terrestre. Il s'appuya sur l'observation que le soleil était exactement au *zénith* (c'est-à-dire à la perpendiculaire) au moment du solstice d'été à Syène, ville au bord du Nil (dont le nom actuel est Assouan). Ce moment de l'année étant connu avec

¹ Lorsque l'unité degré n'est pas précisée l'angle considéré est exprimé en radian sans autre indication de mesure. Ainsi un angle de 1 signifie un angle de $1[\text{rad}]$.

précision, il constata qu'un obélisque dressé verticalement dans le sol faisait à Alexandrie (située au nord de Syène et approximativement sur la même longitude) une ombre que l'on pouvait mesurer et qui correspondait à un angle de $7^{\circ}12'$. Il mesura à l'aide d'un *bématiste*², la distance qui sépare Alexandrie d'Assouan et qui correspond environ à 800 de nos kilomètres.

Faire un schéma de cette situation et calculer avec ces données la circonférence de la Terre.

9. Calculer, à 1 mm près, le diamètre d'un cercle sur lequel
 - a) Un arc de 1° mesure 2 mm.
 - b) Un arc de $0,04^{\circ}$ mesure 0,03 mm.

10. Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $1,5^{\circ}$. Quelle est la distance qui sépare ces deux points sachant que le rayon moyen de la Terre est de 6370 km ?

2.2 Définition du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle

Définitions : **D.7** On appelle *cosinus d'un angle*, la 1^{ère} coordonnée d'un point M situé sur un cercle, centré à l'origine des coordonnées et de rayon 1. On note le cosinus d'un angle α , ou d'un angle x par $\cos(\alpha)$ ou $\cos(x)$, selon que l'angle est mesuré en degré ou en radian.

D.8 On appelle *sinus d'un angle*, la 2^e coordonnée d'un point M situé sur un cercle, centré à l'origine des coordonnées et de rayon 1. On note le sinus d'un angle α , ou d'un angle x par $\sin(\alpha)$ ou $\sin(x)$, selon que l'angle est mesuré en degré ou en radian.

D.9 On appelle *tangente d'un angle*, le rapport du sinus au cosinus de cet angle chaque fois que le cosinus n'est pas nul. On note la tangente d'un angle α , ou d'un angle x par $\tan(\alpha)$ ou $\tan(x)$, selon que l'angle est mesuré en degré ou en radian. On a donc $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ou $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. L'inverse de la tangente

d'un angle s'appelle *cotangente*. On a donc $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

² Marcheur au pas régulier qui suivait les armées dans leur conquête afin de fournir des mesures aussi précises que possible de la grandeur des territoires conquis.

Exercices

11. Calculer les valeurs exactes des *cosinus*, *sinus* et *tangente* des angles suivants en s'aidant des résultats de l'exercice 1.

$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; -90^\circ; 720^\circ; 112,5^\circ; -\frac{\pi}{24}; 180^\circ.$$

12. Démontrer, en s'aidant du cercle trigonométrique, les égalités suivantes.

a) $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout x réel

b) $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout x réel.

c) $\tan(-x) = -\tan(x)$ pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2}$.

d) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

e) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

f) $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\tan(\pi + x) = \tan(x)$.

g) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\cot(x)$

h) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$.

i) $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x)$ où $k \in \mathbb{Z}$ $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x)$ où $k \in \mathbb{Z}$

k) $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan(x)$ où x un réel différent de $k \cdot \frac{\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

13. Résoudre les équations suivantes, en donnant les solutions exactes exprimées en radians et en degrés, et placer ces solutions sur un cercle trigonométrique.

a) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ b) $\sin(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\cot(4x) = 0$ f) $\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ h) $\tan\left(\frac{3x - \pi}{6}\right) = 1$ i) $\cos(6x + \pi) = 0$

14. Vrai ou Faux. Justifier la réponse par un calcul approprié.

a) $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

b) $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{1}{\cos^2(\beta)} = \tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)$

c) $(\cos(x) - \sin(x))^2 = 2 - (\cos(x) + \sin(x))^2$

d) $\tan(t) + \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)} = \frac{1}{\cos(t)}$.

2.3 Propriétés des sinus, cosinus et tangente

On peut tirer de l'exercice 14 les trois résultats suivants :

$$\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k \cdot 2\pi \\ x = \pi - y + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un entier quelconque}$$

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k \cdot 2\pi \\ x = -y + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un entier quelconque}$$

$$\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x = y + k \cdot \pi \quad \text{où } k \text{ est un entier quelconque}$$

$$\cot(x) = \cot(y) \Leftrightarrow x = y + k \cdot \pi \quad \text{où } k \text{ est un entier quelconque}$$

15. A l'aide des résultats ci-dessus trouver les solutions exactes des équations suivantes

a) $\sin(3t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

b) $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = \tan(2t)$

c) $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $\cot\left(\frac{5x}{8} - \frac{3\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

e) $\sin\left(\frac{5x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

f) $\tan\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \cot(3t) = 0$

g) $\cos^2(x) = \frac{1}{4}$

i) $\cot^2(2x) + 1 = 0$

k) $2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = 0$

m) $3\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$

h) $\sin^2(2x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

j) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$

l) $\tan^4(x) - 4\tan^2(x) + 3 = 0$

3. Les fonctions trigonométriques

Tout nombre réel x peut représenter la mesure, exprimée en radian, d'un angle quelconque. Les définitions des *cosinus*, *sinus*, *tangente* et *cotangente* d'un angle permettent donc de définir les fonctions trigonométriques suivantes.

Définitions: D.10 La fonction *sinus* est définie par:

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

D.11 La fonction *cosinus* est définie par :

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$$

D.12 La fonction *tangente* est définie par :

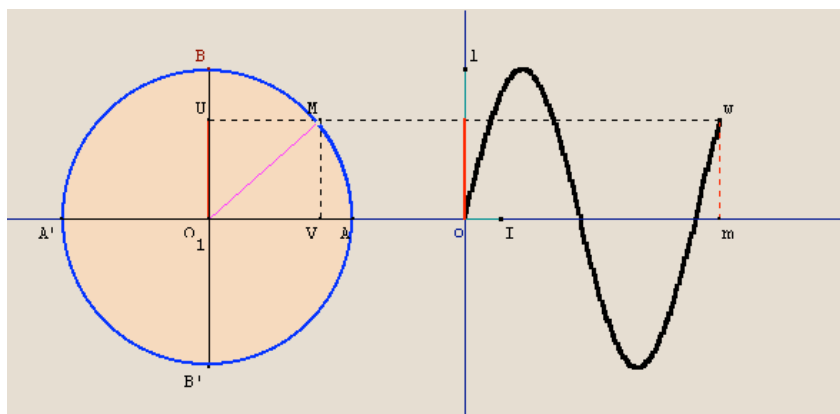
$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R} - \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) \end{cases}$$

Exercices

16. La figure ci-dessous donne une partie du graphique de la fonction *sinus*.

a) Prolonger ce graphique pour les angles négatifs.

b) Etablir de la même manière le graphique des fonctions *cosinus* et *tangente* pour des angles compris entre -2π et 2π .



17. Représenter les graphes des fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \sin(x) - 1$$

$$f_2 : x \mapsto \cos(x) + 2$$

$$f_3 : x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_4 : x \mapsto 2\cos(x + \pi)$$

$$f_5 : x \mapsto -3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2} + 1$$

18. Calculer les périodes des fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \sin(2x)$$

$$f_2 : x \mapsto 3\tan(x)$$

$$f_3 : x \mapsto 4\sin(3x)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f_5 : x \mapsto \tan(3x)$$

$$f_6 : x \mapsto \sin(2x) + \cos(2x)$$

19. Représenter les graphes des fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \sin(2x) - 1$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

$$f_3 : x \mapsto 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$$

Propriétés

P.1 Les fonctions *cos* et *sin* sont des fonctions périodiques de période 2π , c'est-à-dire $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x)$ pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier k .

P.2 Les fonctions *tan* et *cot* sont des fonctions périodiques de période π , c'est-à-dire $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan(x)$ et $\cot(x + k \cdot \pi) = \cot(x)$ pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier k .

P.3 La fonction $\cos : \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow [-1; 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ est bijective et admet une réciproque appelée *arccosinus*, définie par :

$$\arccos : \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] \\ x \mapsto \arccos(x) \end{cases}, \text{ avec } \cos(x) = y \Leftrightarrow \arccos(y) = x.$$

P.4 La fonction $\sin : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$ est bijective et admet une réciproque appelée *arcsinus*, définie par :

$$\arcsin : \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ x \mapsto \arcsin(x) \end{cases}, \text{ avec } \sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x.$$

P.5 La fonction $\tan : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) \end{cases}$ est bijective et admet une réciproque appelée *arctangente*, définie par :

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \arctan(x) \end{cases}, \text{ avec } \tan(x) = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x.$$

Corollaire Ces propriétés permettent la résolution générale des équations trigonométriques à l'aide de tables ou de calculatrices. Les formules générales de résolutions de ces équations trigonométriques sont les suivantes :

$$\text{C.1} \quad \sin(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \\ -1 \leq a \leq 1$$

$$\text{C.2} \quad \cos(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\arccos(a) + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \pi \quad \text{et} \\ -1 \leq a \leq 1$$

$$\text{C.3} \quad \tan(x) = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k \cdot \pi \quad \text{pour } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{et } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{C.4} \quad \cot(x) = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot}(a) + k \cdot \pi \quad \text{pour } 0 < x < \pi \quad \text{et } a \in \mathbb{R}.$$

Exercice

20. Résoudre à l'aide de la calculatrice les équations trigonométriques suivantes

a) $\sin(t) = 0,8473$

b) $\tan(x) = -0,9042$

c) $\cos(t) = 1,352$

d) $\tan(5t) = 3,492$

e) $\cot\left(\frac{3x}{7}\right) = -4,892$

f) $3\sin\left(\frac{5x-2}{4}\right) = -2$

4. Trigonométrie dans le triangle quelconque

Théorème du *cosinus*

Si ABC est un triangle quelconque, annoté selon l'usage, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \end{array} \right.$$

Démonstration

Théorème du *sinus*

Si ABC est un triangle quelconque, annoté selon l'usage, alors $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

Démonstration

21. Soit un triangle ABC quelconque, annoté selon l'usage.

Démontrer que l'aire de ce triangle s'obtient par le calcul suivant $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$.

22. Soit ABC un triangle quelconque annoté selon l'usage. Démontrer, en partant du résultat précédent, et en utilisant le *théorème du cosinus*, la formule de *Héron* d'Alexandrie (I^{er} siècle ap. J.-C.) permettant de calculer l'aire du triangle ABC en utilisant les seules longueurs des côtés:

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \text{ où } p \text{ est le demi périmètre du triangle } ABC.$$

23. Résoudre³ (réponses arrondies au centième) les triangles ABC si l'on sait que:

- a) $a = 70,24$; $b = 82,12$; $\gamma = 30,69^\circ$ b) $\alpha = 67,66^\circ$; $\beta = 85,93^\circ$; $c = 78,54$
c) $a = 85,80$; $c = 57,29$; $\beta = 117,81^\circ$ d) $\beta = 58,25^\circ$; $\gamma = 39,38^\circ$; $a = 20,46$
e) $\alpha = 26,77^\circ$; $\gamma = 87,39^\circ$; $c = 46,09$ f) $a = 35,42$; $b = 77,68$; $c = 109,62$
g) $a = 41,94$; $b = 96,92$; $c = 107,26$ h) $\beta = 30,65^\circ$; $a = 98,06$; $b = 364,04$
i) $a = 68,87$; $b = 35,57$; $c = 81,46$ j) $\beta = 15,48^\circ$; $a = 345,45$; $b = 229,14$
k) $a = 66,85$; $b = 38,73$; $\gamma = 116,99^\circ$ l) $\gamma = 11,15^\circ$; $b = 136,63$; $c = 153,37$
m) $a = 6$; $b = 5$; $\gamma = 30^\circ$ n) $a = 70,24$; $b = 82,12$; $c = 11,88$

Pour les situations suivantes les réponses doivent être exprimées en valeurs exactes.

- o) $a = \sqrt{2}$; $b = 1$; $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ p) $b = 4$; $c = 8$; $\beta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$
q) $a = 5$; $c = 4$; $\gamma = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ r) $a = 6$; $b = 6$; $\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$
s) $a = 1 + \sqrt{3}$; $b = \sqrt{2}$; $\beta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ t) $\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$; $\beta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$; $\gamma = \frac{7\pi}{12} \text{ rad}$

24. Un observateur se trouve à l'intérieur d'une cour rectangulaire $ABCD$ en un point P de la diagonale AC , à 32 m du point A . Le côté AB mesure 65 m, et l'observateur voit le côté BC sous un angle de $48,85^\circ$. Calculer la longueur BC .

³ Résoudre un triangle signifie déterminer toutes les données de ce triangle à savoir : la longueur des trois côtés, la valeur des trois angles et, parfois, l'aire de ce triangle.

25. Un observateur voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur, sachant que le rayon terrestre moyen est de 6370 km ?

26.

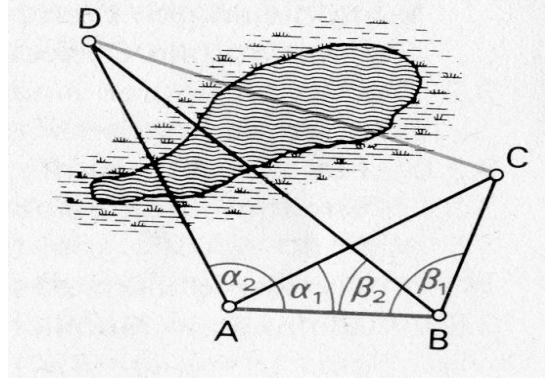
Quel est la mesure de la distance CD sachant que $AB = 700$ m,

$$\alpha_1 = 50,4^\circ,$$

$$\alpha_2 = 129^\circ,$$

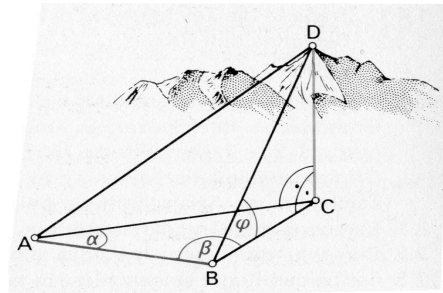
$$\beta_1 = 116,2^\circ \text{ et}$$

$$\beta_2 = 39,1^\circ ?$$



27.

Que mesure la hauteur CD de la montagne, dans la figure ci-contre, sachant que AB mesure 500 m, $\alpha = 67,5^\circ$ et $\beta = 83,7^\circ$ et $\phi = 48,3^\circ$?



28. Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on fait le choix d'une base AB de longueur 450m. On mesure les angles BAC ($35,4^\circ$), ABC ($105,8^\circ$), ainsi que l'angle d'élévation sous lequel on voit le sommet C depuis A ($23,5^\circ$). Quelle est l'altitude du sommet C de la montagne si l'on sait que l'altitude du point A est de 920 m au-dessus du niveau de la mer.
29. Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on fait le choix d'une base AB de longueur 200m. On mesure les angles BAC ($117,5^\circ$), ABC ($47,42^\circ$), ainsi que l'angle entre AB et l'horizontale ($38,3^\circ$). Quelle est l'altitude du sommet C de la montagne si l'on sait que l'altitude du point A, extrémité inférieure de la base, est de 823 m au-dessus du niveau de la mer.

- 30.** En géométrie analytique on considère presque toujours que le système d'axes est orthonormé, c'est-à-dire que chacun des axes est muni d'une norme (pas forcément la même du reste) et que ces axes sont disposés de manière perpendiculaires dans le plan. Cette situation simplifie les calculs notamment celui de la distance entre deux points.
- a)** Etablir la formule de la distance entre deux points dans un système orthonormé.
 - b)** Faire de même dans un système d'axes où ces derniers font entre eux un angle de 45°
 - c)** Généraliser cette situation pour un angle $0 < \alpha < 90^\circ$.

5. Réponses aux exercices

1. a) $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan(45^\circ) = 1$;
 b) $\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$; $\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$.
 c) $\sin(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\cos(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$; $\tan(22,5^\circ) = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
3. b) $\sin(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
4. b) $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{21}}{5}$ et $\tan(\alpha) = \frac{2\sqrt{21}}{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ c) $\sqrt{5}$; $\frac{2\sqrt{105}}{21}$; $\frac{5\sqrt{105}}{21}$.
5. d) $\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos(7,5^\circ) = \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}$; $\cos(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.
 e) $\sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin(82,5^\circ) = \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}$; $\sin(67,5^\circ) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$;
 $\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\sin(7,5^\circ) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$; $\sin(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
7. a) 30° ; 120° ; 720° ; -126° ; 675° ; $\frac{180^\circ}{\pi}$; $\frac{180 \cdot x^\circ}{\pi}$.
 b) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{35\pi}{6}$; $\frac{\pi}{180}$; $\frac{\alpha \cdot \pi}{180}$.
8. $800 \cdot 50 = 40'000$ km !
9. a) 229 mm
 b) 85,94 mm.
10. 166,8 km.

11. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
 $\cos(-90^\circ) = 0; \sin(-90^\circ) = -1; \tan(-90^\circ) \notin \mathbb{R}$
 $\cos(720^\circ) = 1; \sin(720^\circ) = 0; \tan(720^\circ) = 0$
 $\cos(112,5^\circ) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \sin(112,5^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \tan(112,5^\circ) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
 $\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}; \sin\left(-\frac{\pi}{24}\right) = -\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}; \tan\left(-\frac{\pi}{24}\right) = -\frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$
 $\cos(180^\circ) = -1; \sin(180^\circ) = 0; \tan(180^\circ) = 0$

13. a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
b) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } t = \frac{5\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 6\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 6\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
e) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
f) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \pm \frac{3\pi}{2} + k \cdot 4\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
g) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{11\pi}{8} + k \cdot 3\pi \text{ ou } t = \frac{19\pi}{8} + k \cdot 3\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
h) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
i) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

15. a) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ ou } t = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- b) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- c) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{12\pi}{13} \text{ ou } t = \frac{7\pi}{10} + k \cdot \frac{12\pi}{5} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{15\pi}{31} + k \cdot \frac{24\pi}{31} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- e) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{9\pi}{7} + k \cdot \frac{12\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{9\pi}{13} + k \cdot \frac{12\pi}{13} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- f) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- g) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- h) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- i) $S = \emptyset$
- j) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- k) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- l) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- m) $S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} .$

18. $\pi; \pi; \frac{2\pi}{3}; 4\pi; \frac{\pi}{3}; \pi .$

20. a) $57,92^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ ou } 122,08^\circ + k \cdot 360^\circ$

b) $137,88^\circ + k \cdot 180^\circ$

c) Pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

d) $14,80^\circ + k \cdot 36^\circ$

e) $-26,96^\circ + k \cdot 420^\circ$

f) $3,5 + k \cdot 5,03 \text{ ou } -0,18 + k \cdot 5,03$

- 23.**
- a) $\alpha \cong 58,79^\circ$ $\beta \cong 90,52^\circ$ $c \cong 41,92$ $S \cong 1472$
- b) $\gamma \cong 26,41^\circ$ $a \cong 163,32$ $b \cong 176,13$ $S \cong 6397,56$
- c) $\alpha \cong 37,95^\circ$ $\gamma \cong 24,24^\circ$ $b \cong 123,41$ $S \cong 2173,87$
- d) $\alpha = 82,37^\circ$ $b = 17,55$ $c = 13,10$ $S = 113,9324$
- e) $\beta \cong 65,84^\circ$ $b \cong 42,10$ $a \cong 20,78$ $S \cong 436,95$
- f) $\alpha \cong 9,52^\circ$ $\beta \cong 21,26^\circ$ $\gamma \cong 149,22^\circ$ $S \cong 703,98$
- g) $\alpha \cong 22,99^\circ$ $\beta \cong 64,52^\circ$ $\gamma \cong 92,48^\circ$ $S \cong 2030,5$
- h) $\alpha \cong 7,89^\circ$ $\gamma \cong 141,46^\circ$ $c \cong 444,95$ $S \cong 11121,63$
- i) $\alpha \cong 56,98^\circ$ $\beta \cong 25,66^\circ$ $\gamma \cong 97,36^\circ$ $S \cong 1214,77$
- j) Deux solutions : $\alpha_1 \cong 23,73^\circ$ $\gamma_1 \cong 140,79^\circ$ $c_1 \cong 542,69$ $S_1 \cong 25018,35$
 $\alpha_2 = 156,27^\circ$ $\gamma_2 = 8,25^\circ$ $c_2 = 123,15$ $S_2 = 5677,1514$
- k) $\alpha = 40,78^\circ$ $\beta = 22,23^\circ$ $c = 91,21$ $S = 1153,5553$
- l) $\beta = 9,92^\circ$ $\alpha = 158,93^\circ$ $a = 285,13$ $S = 3766,7224$
- m) $c \cong 3,01$ $\alpha \cong 93,74^\circ$ $\beta \cong 56,26^\circ$ $S = 7,5$ $\alpha_1 = \frac{5\pi}{12}$ $\gamma_1 = \frac{5\pi}{12}$ $c_1 = 1 + \sqrt{3}$ $S_1 = \frac{4 + \sqrt{3}}{4}$
- n) $\beta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma = 0^\circ$
- o) $\beta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ $\gamma = \frac{7\pi}{12} \text{ rad}$ $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ $S = \frac{2\sqrt{3} - 2}{8}$
- p) $\gamma = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ $a = 4\sqrt{3}$ $S = 8\sqrt{3}$
- q) Il n'existe aucun triangle répondant à ces données car $\sin(\alpha) = \frac{5\sqrt{3}}{8} > 1$
- r) $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ $c = 6\sqrt{3}$ $S = 9\sqrt{3}$
- s) Deux solutions : $\alpha_1 = \frac{5\pi}{12}$ $\gamma_1 = \frac{5\pi}{12}$ $c_1 = 1 + \sqrt{3}$ $S_1 = \frac{4 + \sqrt{3}}{4}$
 $\alpha_2 = \frac{7\pi}{12}$ $\gamma_2 = \frac{\pi}{4}$ $c_2 = 2$ $S_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$
- t) Il y a une infinité de triangles satisfaisant à ces données qui sont tous semblables donc dont les côtés sont proportionnels : $b = \sqrt{2} \cdot a$ $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \cdot a$

24. 33,25 m.
25. 1182,588 km.
26. $AD \cong 2140,95\text{m}$ $AC \cong 2710,19\text{m}$ $CD \cong 3104\text{m}$.
27. $CD \cong 1076,2\text{m}$
28. 1195,5 m.
29. 1055,04 m.
30. a) Si $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ alors $\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
- b) $\overline{AB} = \sqrt{\left((b_1 - a_1) + \cos(45^\circ) \cdot (b_2 - a_2)\right)^2 + \sin^2(45^\circ)(b_2 - a_2)^2}$.
- c) $\overline{AB} = \sqrt{\left((b_1 - a_1) + \cos(\alpha) \cdot (b_2 - a_2)\right)^2 + \sin^2(\alpha)(b_2 - a_2)^2}$.