

Géométrie dans l'espace

Classe : TSE

Durée :

1. Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

2. Compétence :

Composantes,
Manifestations

3. Contenus

Etude sur des exemples de translations, homothéties, symétries orthogonales par rapport à un plan, par rapport à une droite ; définition d'une rotation d'axe D. Projections affines ; les similitudes.

4. Ressources éducatives

* ressources humaines : Enseignant ; Apprenants....

* ressources matérielles : livres ; matériels géométriques ; craies ; Bic ; tableau ; etc.

* ressources financières.

5. Stratégies d'animation :

Méthodes, techniques,... (Travail en groupe ; la recherche collective des idées)

6. Déroulement des activités

. Pré évaluation :

ABC est un triangle inscrit dans un cercle (Γ) de centre O, H est un orthocentre, I milieu du segment $[BC]$.

1. On considère le point M du plan tel que : $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

a) Démontrer que : $\vec{AM} = 2\vec{OI}$; en déduire que le point M appartient à la hauteur issue de A

b) Démontrer que les points M et H sont confondus.

2. Soit P la symétrie du point H par rapport à la droite (BC).

a) Déterminer l'image du point P par la transformation définie par : $f = t_{\vec{HA}} \circ S_{(BC)}$.

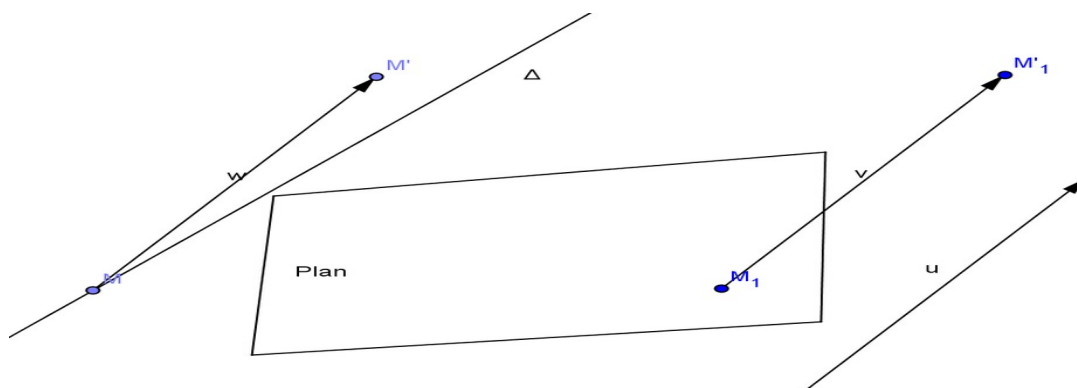
b) Déterminer la droite (Δ) telle que $t_{\vec{HA}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)}$.

c) En déduire que le point P est sur le cercle (Γ).

3. placer ces points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

I. Translation

1. **Définition** : la translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation qui à chaque point M de E (du plan P ou de la droite Δ), associe le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$



2. Propriétés:

- Si t est une translation de vecteur $\vec{u}$, alors pour tous points M et M_1 de E (du plan P ou de la droite Δ), avec $t(M) = M'$ et $t(M_1) = M'_1$ on a $\overline{MM_1} = \overline{M'M'_1}$
- Si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$ où $t_{\vec{u} + \vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$
- Pour tout $\vec{u} \in E$, $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

3. Expression analytique d'une translation

Si t est une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$; $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ tel que $t(M) =$

$$M' \text{ alors } \overline{MM'} = \vec{u} \iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases} \text{ expression analytique de } t_{\vec{u}}$$

4. Ecriture complexe d'une translation

Théorème 1 : La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b est la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z + b$ avec $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$; $b = a + id$
 $z' = z + b$ (écriture complexe d'une translation)

5. Propriétés : Image de figures géométriques par la translation t

- L'image d'une droite est une droite parallèle.
- L'image d'un plan est un plan parallèle.
- L'image d'un cercle d'un plan P est un cercle de même rayon.
- L'image d'une sphère est une sphère de même rayon.
- Le segment $[AB]$ a pour image le segment $[f(A) f(B)]$;

6. Propriété de conservation :

- La nature des triangles (isocèle, rectangle, équilatéral) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée
- Le milieu d'un segment (conservation du milieu) et le centre de gravité d'un triangle, le barycentre sont conservés.
- Les points de contact ou d'intersection sont conservés.
- Les translations conservent les aires, les longueurs, les volumes, les angles géométriques et orientés, l'alignement ;
- Les isométries conservent le produit scalaire ;

NB : Si t une translation de l'espace de vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \neq 0$ alors t n'admet pas de point invariant.

II. Homothétie :

1. Définition :

L'homothétie de centre Ω et de rapport k le réel non nul est la transformation notée $h_{(\Omega, k)}$ qui, à chaque point de M de E (du plan P ou de la droite D) associe le point M' tel que $\overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$

- Si $k = 1$ l'homothétie est l'application identique id_E (id_P ou id_D)
- Si $k = -1$ l'homothétie est la symétrie centrale de centre Ω

2. Propriétés :

- Si $k \neq 1$; Ω est le seul point fixe de $h_{(\Omega, k)}$ et Ω, M et M' sont alignés ;
- La transformation réciproque de $h_{(\Omega, k)}$ notée $h_{(\Omega, \frac{1}{k})}^{-1}$ est $h_{(\Omega, \frac{1}{k})}$;
- Si A et B sont deux points du plan d'images respectives A' et B' par $h_{(\Omega, k)}$ alors $\overline{A'B'} = k \overline{AB}$ donc $A'B' = |k| AB$;
- Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par $|k|$, les aires par k^2 et le volume par k^3

3. Propriétés : Images de figures géométriques par l'homothétie

- L'image d'une droite (AB) est une droite (h(A),h(B)) parallèle à (AB) ;
- L'image d'un plan est un plan parallèle.
- L'image d'un cercle de centre O et de rayon R d'un plan P est un cercle de centre h(O) et de rayon $|k|R$;
- L'image d'une sphère de rayon R est une sphère de rayon $|k|R$;
- Le segment [AB] a pour image le segment [h(A) h(B)] ;

4. propriétés de conservation

Les homothéties conservent :

- a) le parallélisme ;
- b) l'orthogonalité ;
- c) les milieux ;
- d) les barycentres ;
- e) les angles orientés ;

5. Expression analytique des homothéties

Si h est une homothétie de centre $\Omega \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et de rapport k ; $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ tel

que $h(M) = M'$ alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \iff \begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$ p, q et r $\in \mathbb{R}$ expression analytique de $h_{(\Omega, k)}$

6. Ecriture complexe des homothéties

Théorème 2 : L'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' - \omega = k(z - \omega)$;

Théorème 3 : La transformation d'écriture complexe $z' = kz + b$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est

1. l'identité si $k = 1$ et $b = 0$;
2. une translation si $k = 1$ et $b \neq 0$;
3. une homothétie de rapport k si $k \neq 1$;

III. Composée d'homothéties et de translations

1. Composée toh

Soient t la translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et h l'homothétie d'écriture complexe $z' = kz + b_2$. h associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = kz + b_2$ et t associe au point M' d'affixe z' le point M'' d'affixe $z'' = z' + b_1 = kz + b_1 + b_2$

Théorème 4 : toh associe donc à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = az + b_1 + b_2$,
t oh est donc une homothétie de rapport k

2. Composée hot

Soient t la translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et h l'homothétie d'écriture complexe $z' = kz + b_2$. t associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = z + b_1$; h associe au point M' le point M'' d'affixe $z'' = kz' + b_2 = k(z + b_1) + b_2 = kz + (kb_1 + b_2)$

Théorème 5 : hot est donc la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = kz + (ab_1 + b_2)$. hot est donc une homothétie de rapport k:

Théorème 6 : La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport k est une homothétie de rapport k:

3. Composée de deux homothéties

Théorème 7 : Soient h_1 et h_2 deux homothéties d'écritures complexes respectives $z' = k_1z + b_1$ et $z' = k_2z + b_2$. $h_1 \circ h_2$ associe à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = k_1(k_2z + b_2) + b_1 = k_1k_2z + (k_1b_2 + b_1)$. Donc, si $k_1k_2 = 1$: $h_1 \circ h_2$ est une translation sinon, c'est une homothétie de rapport k_1k_2

Remarque :

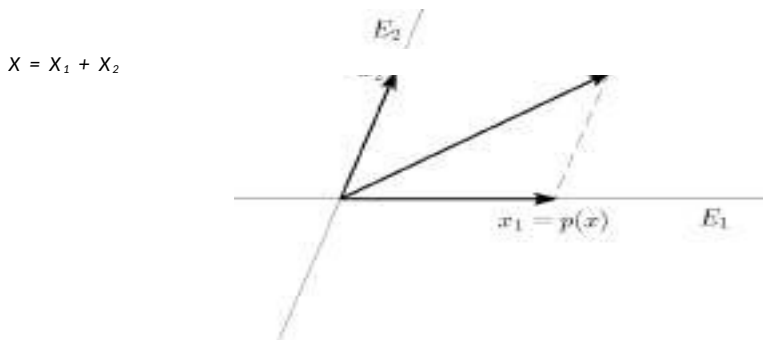
- En général, $h_2 \circ h_1 \neq h_1 \circ h_2$;
- Si h_1 et h_2 ont des centres distincts et si $h_1 \circ h_2$ est une homothétie, les centres de h_1 , h_2 et $h_1 \circ h_2$ sont alignés. En effet, si h_1 et h_2 ont pour centres respectifs Ω_1 et Ω_2 , la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ est

globalement invariante par h_1 et par h_2 donc par $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$: Elle passe donc par le centre de la composée

VI. Projections affines (Projecteurs) :

- Définition :** Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit $p : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 \end{cases}$

L'application p est bien définie et est appelée *projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2* .



Projection sur E_1 parallèlement à E_2

2. Propriétés des projecteurs

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit p le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors :

- p est linéaire : $p \in L(E)$.
- $\text{Ker } p = E_2$.
- $\text{Imp } p = E_1$;
- $p(x) = x \iff x \in E_1$ (E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

3. Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in L(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $pop = p$ (c'est-à-dire si et seulement si p est *idempotente*). Dans ce cas, p est le projecteur sur $\text{Ker } p$ parallèlement à $\text{Imp } p$.

4. Expression analytique d'une projection

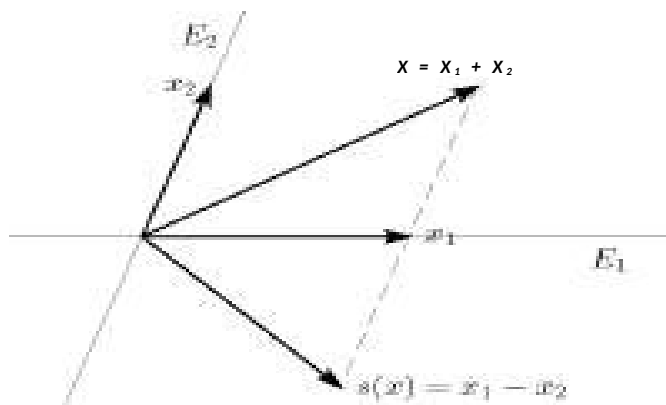
$$p(M) = M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u} \\ M' \in D \text{ ou } P \end{cases}$$

$\lambda \in R$, $\vec{u}$ est $\leq$ vecteur directeur de la droite D ou du plan P

V. Symétries axiales

- Définition :** Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit $S : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$

S est bien définie et est appelée *symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2* , ou plus simplement *symétrie*.



Symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2

2. Propriétés des symétries

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit S la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 , alors :

- a) L'application S est linéaire : $S \in L(E)$.
- b) Si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors $S = 2p - Id_E$.
- c) S est involutive, c'est-à-dire : $SoS = Id_E$.

3. Caractérisation des symétries

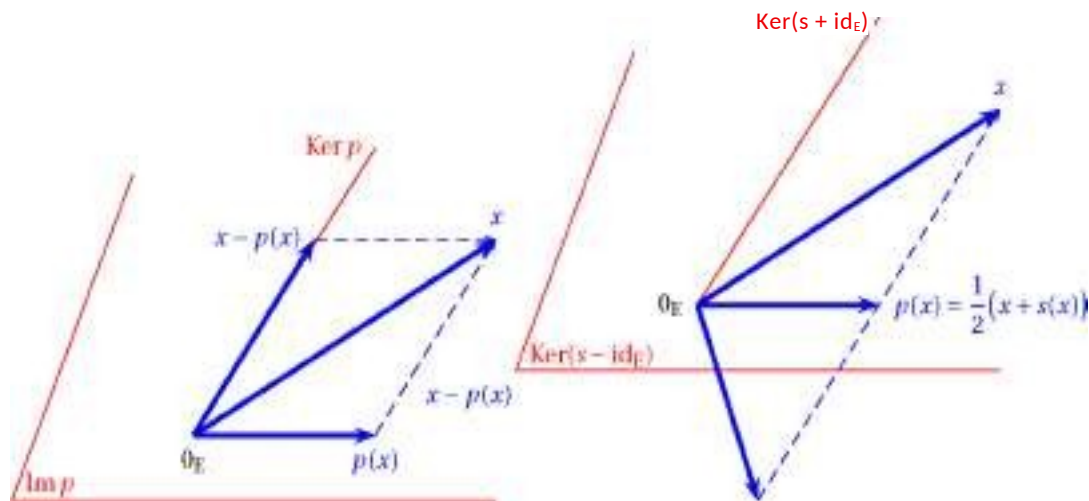
Soit $S \in L(E)$. Si S est involutive, c'est-à-dire si $SoS = Id_E$, alors S est la symétrie par rapport à $E_1 = \text{Ker}(S - Id_E)$ et parallèlement à $E_2 = \text{Ker}(S + Id_E)$

4. Expression analytique d'une symétrie orthogonale

Soit S_Δ une symétrie par rapport à une droite D ou un plan P et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D ou

vecteur normal de P . $S_\Delta(M) = M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ I \text{ milieu de } [MM'] \in D \end{cases}$ ou

$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\vec{u} \\ I \text{ milieu de } [MM'] \in P \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$



(a) Décomposition associée à un projecteur

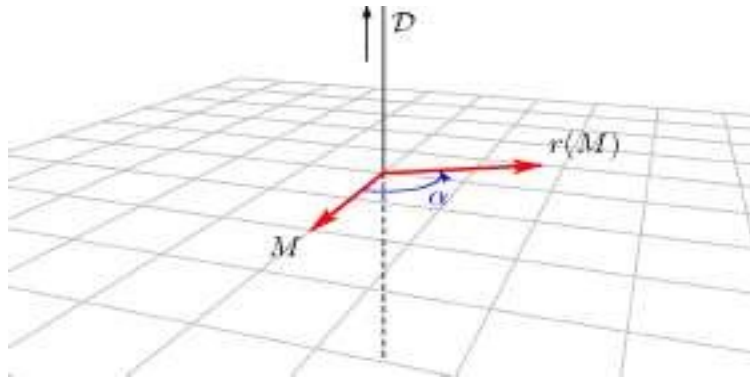
(b) Décomposition associée à une symétrie

Figure : Projecteur, symétrie

VI. Rotation d'axe D :

1. Définitions :

Définition1 : Soit D un axe orienté de E , $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation d'axe D et d'angle α** l'isométrie affine laissant invariante un point de D et de partie linéaire $r_{(D, \alpha)}$



Définition 2 : Soient $\Omega \in P$ et α un réel. La rotation de centre Ω et d'angle α , notée $r_{(\Omega, \alpha)}$ est la transformation du plan qui :

– à Ω associe Ω (point invariant)

– à tout point M différent de Ω associe le point M' tel que $\begin{cases} (\widehat{\Omega M, \Omega M'}) = \alpha [2\pi] \\ \|\Omega M\| = \|\Omega M'\| \end{cases}$

2. Proposition (écriture complexe)

Soient $\Omega \in P$ et α un réel. Soit ω l'affixe de Ω . La rotation de centre Ω et d'angle α peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout $z \in \mathbb{C}$ associe le complexe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ ou encore $z' = e^{i\alpha}z + (1 - e^{i\alpha})\omega$

Evaluation 1 : Soit E l'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(3x + y + \sqrt{6}z) \\ y' = \frac{1}{4}(x + 3y - \sqrt{6}z) \\ z' = \frac{1}{4}(-\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z) \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie ;

2) Chercher l'ensemble des points invariants. En déduire que f est une rotation.

3) Déterminer l'angle de f .

Evaluation 2 : Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) d'équation : $2x - y - z - 4 = 0$.

Solution 1

1. Montrons que f est une isométrie

Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ tels que $f(M_1) = M'_1$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$ tels que $f(M_2) = M'_2$. Montrons que $M_1M_2 = M'_1M'_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Donc f est une isométrie

2. Cherchons l'ensemble des points invariants

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(3x + y + \sqrt{6}z) \\ y = \frac{1}{4}(x + 3y - \sqrt{6}z) \\ z = \frac{1}{4}(-\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z) \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + \sqrt{6}z \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{6}(y + \sqrt{6}z) - \sqrt{6}y + 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Donc l'ensemble de points est la droite d'équation $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

Déduisons que f est une rotation

E étant un espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f une

isométrie dont l'ensemble de points est la droite d'équation $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc l'axe d'orientation de

E d'où f est une rotation

3. Déterminons l'angle de f (voir le livre pages 1080 – 1083)

Soit $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ la matrice associée à f est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Avec } \theta \text{ l'angle de rotation.}$$

Soit tr(M) trace de M,

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(A) \iff \frac{3+3+2}{4} = 2 \cos \theta + 1 \implies \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq$ vecteur directeur de l'axe de rotation d'équation $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ et $\vec{e}_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le

vecteur unitaire de $\vec{v}$;

Déterminons un vecteur orthogonal à $\vec{v}$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal à $\vec{v}$ car $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ et $\vec{e}_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $\vec{u}$

$$\text{Déterminons } r(\vec{e}_1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ puis}$$

$$\vec{e}_1 \wedge r(\vec{e}_1) \leq \text{produit vectoriel} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_3$$

$$\sin \theta \vec{e}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_3 \implies \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \begin{cases} \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{D'où } f \text{ est une rotation d'axe d'équation } \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \text{ et d'angle } \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Solution 2

Déterminons l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) d'équation : $2x - y - z - 4 = 0$.

Soient S_P la symétrie orthogonale par rapport au plan (P), $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ telle que $S_P(M) = M'$,

$\vec{u}(2, -1, -4)$ un vecteur normal au plan P et $I \in P$ et milieu de $[MM']$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\vec{u} \\ I \in P \end{cases} \iff \begin{cases} x' - x = 2k \\ y' - y = -k \\ z' - z = -k \\ 2\left(\frac{x' + x}{2}\right) - \left(\frac{y' + y}{2}\right) - \left(\frac{z' + z}{2}\right) - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + 2k \\ y' = y - k \\ z' = z - k \end{cases}$$

$$2(x + 2k + x) - (y - k + y) - (z - k + z) - 8 = 0 \implies k = \frac{1}{3}(-2x + y + z + 4)$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 8) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z - 4) \\ z' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z - 4) \end{cases} \text{ expression analytique de } P$$

Similitudes

Classe : TSE

Durée :

1. Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

2. Compétence :

**Composantes,
Manifestations**

1. Contenus :

I – Généralités

II - Ecriture complexe d'une similitude

III - Propriétés géométriques

IV - Classification des similitudes directes, formes réduites

V - Triangles semblables

4. Ressources éducatives

* ressources humaines : Enseignant ; Apprenants....

* ressources matérielles : livres ; matériels géométriques ; craies ; Bic ; tableau ; etc.

* ressources financières.

5. Stratégies d'animation :

Méthodes, techniques,... (Travail en groupe ; la recherche collective des idées)

6. Déroulement des activités

. **Pré évaluation** : Le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2, S_A la symétrie de centre A (-3, 1).

1) Ecrire les expressions analytiques de h et S_A , puis celle de la transformation $S_A \circ h$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_A \circ h$.

I. Généralités :

1. Définitions :

➤ **Similitude**

Soit k un réel strictement positif.

Une similitude de rapport k est une transformation du plan f telle que :

$f(M)f(N) = kMN$ pour tout point M, pour tout point N.

On dit que f multiplie les distances par k .

➤ **Isométrie**

• Une isométrie est une similitude de rapport 1.

• Une isométrie f conserve les distances :

$f(M)f(N) = MN$ pour tout point M, pour tout point N.

2. Exemples

• Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport k

• Une rotation, une translation, une réflexion sont des isométries.

• La composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie est une similitude de rapport $|k|$

3. Propriétés

• La transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$

• La composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$.

• Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie, la similitude et l'homothétie ayant le même rapport

4. Similitudes et angles

Une similitude conserve les angles géométriques :

Si A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C' alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$

Une similitude est directe ou bien indirecte.

a) Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles orientés.

Ainsi, pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' on a : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$

b) Similitude indirecte

Une similitude indirecte change le sens des angles orientés.

Ainsi, pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' on a : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$

5. Déplacements et antidéplacements

- Une similitude directe de rapport 1 est une isométrie directe ou déplacement.
- Une similitude indirecte de rapport 1 est une isométrie indirecte ou antidéplacement.

Exemples

- Toute homothétie est une similitude directe.
- Toute rotation, toute translation est un déplacement.
- Toute réflexion est un antidéplacement.
- La composée d'une réflexion et d'une homothétie est une similitude indirecte.

II. Ecriture complexe d'une similitude

1. Ecriture complexe d'une similitude directe

Soit f une similitude directe. Il existe un unique complexe non nul a et un unique complexe b tels que, pour tout point M d'affixe z et tout point M' d'affixe z' , M' est l'image de M par f si et seulement si : $z' = az + b$.

Le rapport de f est alors $|a|$

L'égalité $z' = az + b$ est l'écriture complexe de la similitude directe f .

Un déplacement a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta} z + b$

2. Ecriture complexe d'une similitude indirecte

Soit f une similitude indirecte.

Il existe un unique complexe non nul a et un unique complexe b tels que, pour tout point M d'affixe z et tout point M' d'affixe z' , M' est l'image de M par f si et seulement si :

$z' = a\bar{z} + b$. Le rapport de f est alors $|a|$

L'égalité $z' = a\bar{z} + b$ est l'écriture complexe de la similitude indirecte f .

Un antidéplacement a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta} \bar{z} + b$

Exemples

- $z' = z + 3$ est l'écriture complexe de la translation dont le vecteur a pour affixe 3.
- $z' = -2z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -2 .
- $z' = iz$ est l'écriture complexe du quart de tour direct de centre O.
- $z' = \bar{z}$ est l'écriture complexe de la réflexion d'axe (Ox).
- $z' = -2i\bar{z} + 3$ est la composée des quatre similitudes ci-dessus (dans un ordre bien précis...)

III. Propriétés géométriques

- Une similitude transforme une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite, un segment en un segment, un cercle en un cercle.
- Une similitude conserve le parallélisme, l'orthogonalité, les contacts, les barycentres.

IV. Classification des similitudes directes, forme réduite

1. Classification

On considère une similitude directe f d'écriture complexe $z' = az + b$ (a complexe non nul et b complexe).

- Lorsque $a = 1$, f est la translation dont le vecteur a pour affixe b ;
- l'ensemble des points fixes de f est vide lorsque b est non nul ;
- sinon tout point est invariant (f est l'identité du plan).

• Lorsque a est différent de 1, f admet un point fixe et un seul, le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et f est la composée commutative :

- de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$;
- de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$.

On pose $k = |a|$ et on désigne par ω l'affixe de Ω et par θ un argument de a .

Alors : $f = h_{\Omega, k} \circ r_{\Omega; \theta} = r_{\Omega; \theta} \circ h_{\Omega; k}$

L'écriture complexe de la similitude directe est $z' - \omega = k e^{i\theta} (z - \omega)$

On dit que f est la similitude directe de centre, Ω de rapport k et d'angle θ

2. Exemples

a) Donner l'écriture complexe d'une similitude directe de centre Ω (1+2i) de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$

b) La similitude directe d'écriture complexe $z' = -2iz + 1 - i$. Déterminer ses caractéristiques

3. Propriétés géométriques d'une similitude directe de centre Ω

Soit f une similitude directe de centre, Ω de rapport k et d'angle θ

Pour tout point M d'image M' par f on a : $\Omega M' = k \Omega M$ et $(\widehat{\Omega M}; \widehat{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$

Pour tout point A d'image A' et tout point B d'image B' par f on a :

$A'B' = kAB$ et $(\widehat{AB}; \widehat{A'B'}) = \theta [2\pi]$

V. Triangles semblables

On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Il existe une similitude f telle que $A' = f(A)$; $B' = f(B)$; $C' = f(C)$

- $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

- $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$;

- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$

Lorsque ces propositions sont satisfaites, on dit que les triangles sont semblables.

Evaluation :

Exercice1 : un plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x, y)$ de ce plan

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $|(1+i)z - 2i| = 2$
2. Quelle est la nature de la transformation F qui à chaque point M d'affixe z fait correspondre M' d'affixe $z' = (1+i)z - 2i$.
3. Déterminer les éléments géométriques de cette transformation.

Exercice 2 : Dans le plan complexe orienté, muni du repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct, on considère la transformation T qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2(1-i)\bar{z} + \frac{7i}{2}$.

1. Démontrer que T est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie dont le centre Ω appartient à l'axe Δ de la symétrie.
2. Déterminer Ω , Δ et le rapport de l'homothétie.