

Fonction logarithme népérienne

Introduction :

Histoire : A la fin du XVI siècle, les mesures astronomiques nécessaires à la navigation par exemple ou à l'étude du mouvement des planètes, engendrent des calculs compliqués et particulièrement long à effectuer à la main ; Pour simplifier les calculs on cherche à réaliser des tables numériques à deux colonnes en mettant en correspondance les nombres de telle manière que pour effectuer une multiplication, il suffira d'effectuer une addition, beaucoup plus simple !

Il s'agit de réaliser une fois pour tous ces calculs fastidieux puis de mettre les tables à disposition des calculateurs. C'est l'écossais John Neper (1550-1617) qui est le premier à établir une telle table, appelée table de logarithmes

Activité :

Soient les fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1 ; g(x) = \frac{1}{x} , h(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \text{ et } k(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessus

Solution

Soient $F ; G ; H ;$ et K les primitives des fonctions ci-dessus

$$F(x) = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x ; G(x) = ? ; H(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \text{ et } K(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x}$$

Synthèse :

On constate que la fonction g n'admet pas une primitive dans le tableau des primitives qu'on connaît.

Définition :

La fonction logarithme notée **ln** est la primitive de la fonction $:x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule pour $x = 1$

Remarque :

- $f(x) = \ln x$ et $Df =]0, +\infty[$
- $\ln 1 = 0$
- $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc f est strictement croissante

Propriétés fondamentales :

Pour tout réels $a ; b$ strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$, on a

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln a^r = r \ln a$
- $\ln a = \ln b \implies a = b$ et $\ln a < \ln b \implies a < b$ (car la fonction $\ln$ est bijective)

Il existe un réel unique dont le logarithme népérien est 1 ; on le note e et on l'appelle base des logarithme nepeperien $\ln e = 1$ avec $e \approx 2,718$.

Exemple :

- Déterminer l'ensemble des fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln(x+3)$ et $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$
- Dériver la fonction f définie par : $f(x) = 3 - x + \ln x$
- Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - x - \frac{4}{x}$ telle que $F(1) = 2$
- Résoudre l'équation $\ln(x-2) = 0$ et l'inéquation $\ln(x-2) < 0$
- Résoudre l'équation $\ln(2x+1) = \ln(3-x)$.

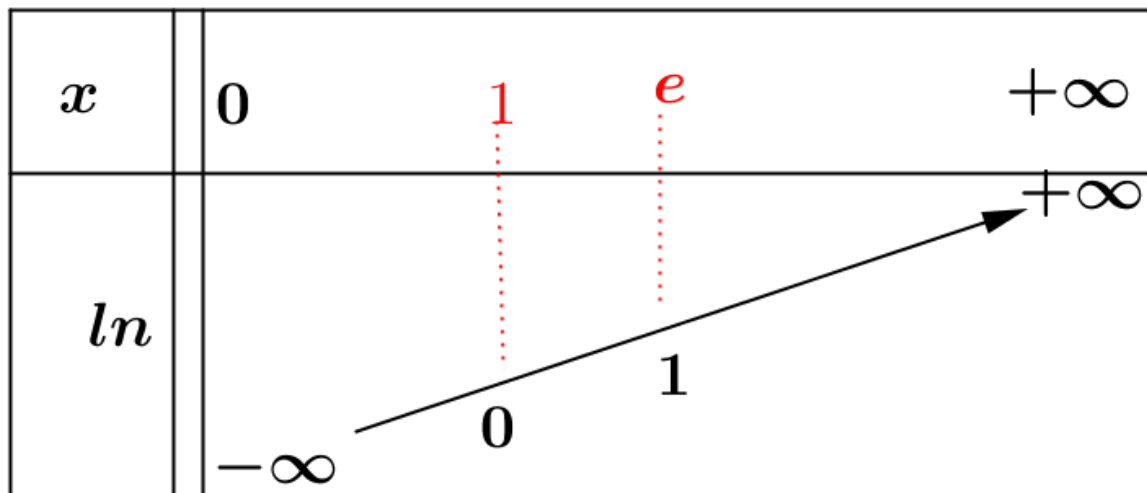
Etude de la fonction logarithme :

Théorème : $\ln$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$:

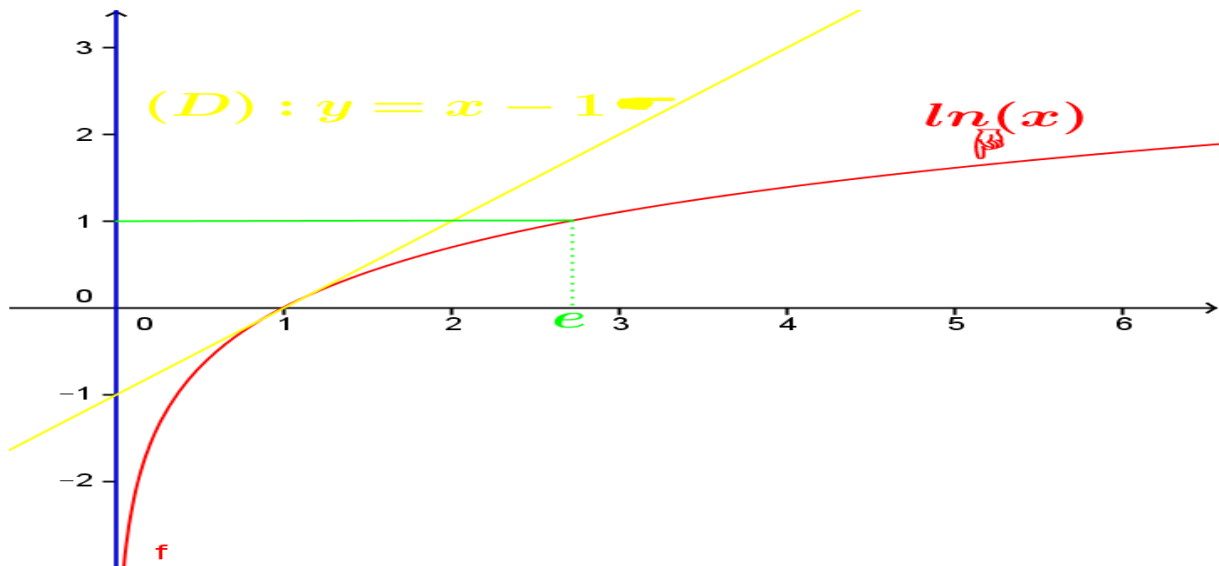
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \text{ pour tout } x > 0$$

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Le tableau de variation de $\ln$:



La représentation graphique de $\ln$:



Les limites usuelles

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} &= 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0; \text{avec } r \in \mathbb{Q}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1; \text{avec } a \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(+x)}{x} &= 1; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

Evaluation :

Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2; b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right); c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1)$$

Solution

a) Soit $x \in]0, +\infty[$; on a : $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x} \ln x)^2 = (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.

Posons : $u = \sqrt{x}$; on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 = \lim_{u \rightarrow 0^+} 4(u \ln u)^2 = 0$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$; on a : $x \ln \frac{x+1}{x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Posons $t = \frac{1}{x}$; on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

c) Posons $v = x - 1$; on a :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1) = \lim_{v \rightarrow 1} (v+1) \frac{\ln v}{v-1} = 2$$

Fonctions comportant $\ln$

Dérivée $\ln \circ U$

Activité :

Soit la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

En posant $U(x) = x^2 - 4$, et en inspirant sur la dérivée de $\ln(x)$, déterminer la dérivée de la fonction f

Solution :

On sait que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, en posant $U(x) = x^2 - 4$, donc $U'(x) = 2x$, on en déduira la dérivée

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

Synthèse :

Propriété :

Soit U une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

La fonction $\ln \circ U$ est dérivable sur K et on a : $(\ln \circ U)' = \frac{U'}{U}$.

Exemple :

Déterminer la dérivée de la fonction $g(x) = \ln(\ln x)$

Primitive de $\frac{U'}{U}$

Activité :

On considère la fonction suivante $F(x) = \ln(x^3 + 2x)$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}$

Synthèse :

En calculant la dérivée de la fonction F , on a : $F'(x) = \frac{3x^2+2}{x^3+2x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de la fonction f

Propriété :

Soit U une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle K .

La fonction $\frac{U'}{U}$ admet pour primitive sur K la fonction $\ln \circ |U|$.

La fonction $\ln \circ |U|$ est généralement notée $\ln|U|$

Exemples d'études de fonctions comportant $\ln$

Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$f(x) = -1 + (\ln x)^2 \text{ et } g(x) = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

Logarithme de base quelconques :

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1 : $a \in \frac{\mathbb{R}_+^*}{\{1\}}$. On appelle logarithme de base a l'application notée $\log_a$ définie par $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque :

- Si $a=10$, on obtient logarithme décimal, qu'on note $\log$
- Si $a=e$, on obtient $\ln$

Propriétés :

Soient $a \in \frac{\mathbb{R}_+^*}{\{1\}}$; $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) ; \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) ; \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a x^n = n \log_a(x)$$

Fonction Exponentielles :

I) Définition :

On appelle exponentielle la fonction qui à tout réel x associe l'unique réel y tel que $\ln y = x$. (on dit qu'exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien).

L'exponentielle de x est notée $\exp(x)$.

1) Notation :

On note $\exp(x) = e^x$ et se lit « exponentielle de x » ou e puissance x

2) Propriétés immédiates :

Soit $f(x) = e^x$

$$Df = \mathbb{R} ; e^1 = e ; e^0 = 1 \quad (\text{car } \ln 1 = 0)$$

Propriétés :

Pour tout nombre réel x :

1. e^x est un nombre strictement positif .
2. $\ln(e^x) = x$
3. Pour tout nombre réel strictement positif : $e^{\ln(x)} = x$

3) Relation fondamentale :

Soient x et y deux nombres réels on a :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

Démonstration :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Comme expo est la bijection réciproque de la fonction $\ln$; ils existent x' et $y' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\ln(x') = x$ et $\ln(y') = y$. On peut alors écrire

$$x + y = \ln(x') + \ln(y') \implies e^{x+y} = e^{\ln(x') + \ln(y')} = e^{\ln(x' \times y')} = x' \times y' = e^x \times e^y$$

$$\text{Donc } e^{x+y} = e^x \times e^y$$

Propriétés :

$$1. \frac{1}{e^x} = e^{-x};$$

$$2. e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y};$$

$$3. (e^x)^n = e^{nx} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Représentation graphique :

Propriétés :

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction elle-même : $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$

Démonstration :

On dérive la fonction $\ln e^x = x$. On trouve $\frac{(e^x)'}{e^x} = 1$ d'où $(e^x)' = e^x$.

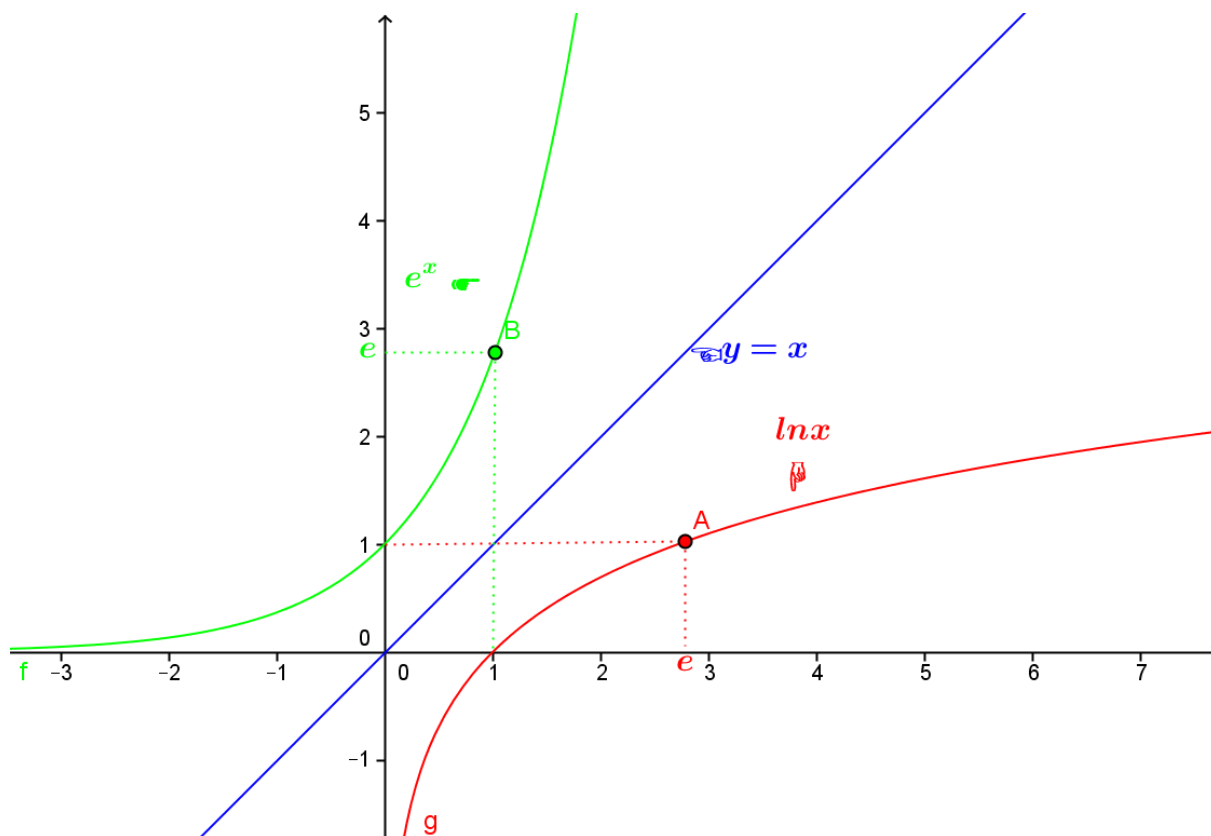
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ (asymptote horizontale)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'			+	
f	0	1	e	$+\infty$



Remarque1 :

La fonction exponentielle étant la bijection réciproque de la fonction logarithme, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

Les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

II) Dérivée et primitives des fonctions exponentielles :

1) Dérivée :

Activité :

Soit la fonction $f(x) = e^{x^3 - 5x}$

Donner la dérivée de la fonction $g(x) = \ln e^{x^3 - 5x} = x^3 - 5x$

En déduire la dérivée de la fonction f .

Solution :

La fonction $g'(x) = \frac{(e^{x^3-5x})'}{e^{x^3-5x}} = 3x^2 - 5$.

On sait que la fonction $f'(x) = (e^{x^3-5x})'$; donc dans $g'(x)$ on tire $(e^{x^3-5x})'$.

On en déduit $f'(x) = (3x^2 - 5)e^{x^3-5x}$

Synthèse :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction e^u est dérivable sur K et on a : $(e^u)' = u' e^u$.

2) Primitives :

Activité :

Soit la fonction définie par $F(x) = e^{-x^2+10x}$

Montrer que F est une primitive de la $f(x) = (-2x + 10)e^{-x^2+10x}$

Synthèse :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction $u' e^u$ admet pour primitive sur K la fonction e^u .

III) Fonctions puissances ($x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$)

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout nombre réel x , on a : $a^x = e^{x \ln a}$.
- On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction : $x \mapsto a^x$

Propriétés :

Propriété1 :

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y , on a :

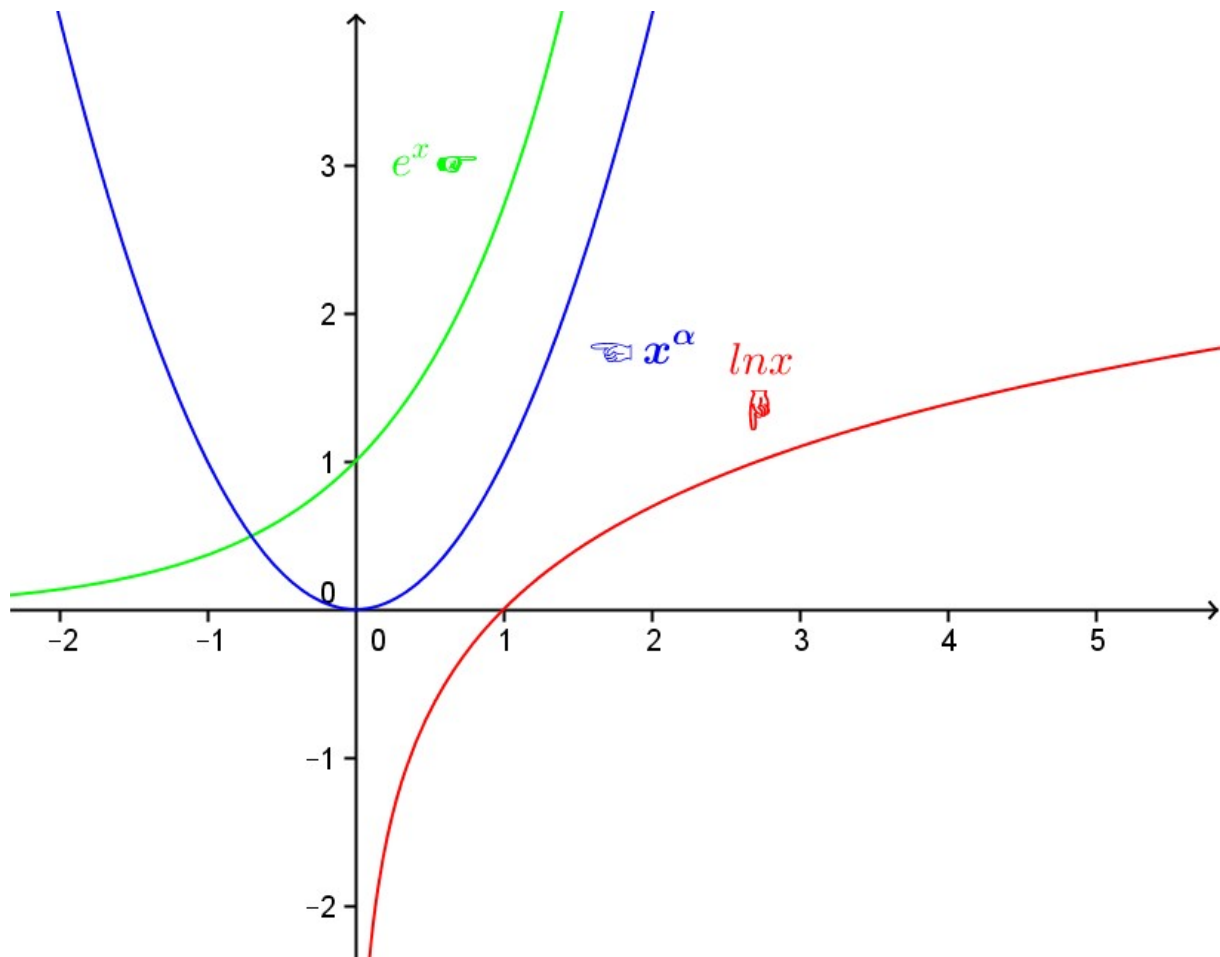
1)

$$a^{x+y} = a^x \times a^y ; 2) a^{-y} = \frac{1}{a^y} ; 3) a^{x \cdot y} = \frac{a^x}{a^y} ; 4) (ab)^x = a^x \times b^x ; 5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, 6) (a^x)^y = a^{xy}.$$

Propriété2 :

Soit $f(x) = a^x = e^{x \ln a} \implies f'(x) = \ln a e^{x \ln a}$ et $F(x) = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + C$; avec F la primitive de f .

IV) **Croissances comparées des fonctions** $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto x^\alpha$; $x \mapsto e^x$



Les propriétés suivantes sont admises :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0; \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$