

Chapitre 5

Fonctions logarithmiques

Du niveau de base au niveau concours

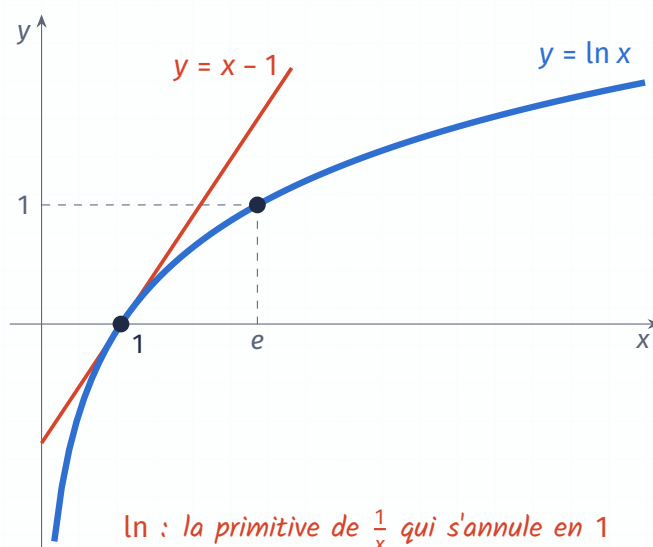
À connaître par cœur

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Défi de concours

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1 Primitives	5
1.1 Primitives usuelles et opérations	5
2 La fonction $\ln$	6
3 Propriétés algébriques	7
4 Équations, inéquations et systèmes	9
5 Limites et croissances comparées	9
6 Étude et courbe de $\ln$	11
7 Dérivée de $\ln u$ et primitives	12
8 Études complètes	13
8.1 Un prolongement et une asymptote oblique	13
8.2 Logarithme et arctangente	14
9 Logarithme de base a	15
10 Inégalités et suites	16
11 Les pièges classiques	17
12 Les astuces des concours	18
13 L'essentiel du chapitre en une page	20
14 Niveau 1 · Bases	21
15 Niveau 2 · Bac	22
16 Niveau 3 · Approfondissement	24
17 Niveau 4 · Concours	25
18 Calculs, équations, inéquations	27
19 Limites et croissances comparées	29
20 Dérivées et primitives	31
21 Études de fonctions	33

22 Suites et logarithme	35
23 Défis de concours	36
24 Corrigés du niveau 1	39
25 Corrigés du niveau 2	41
26 Corrigés du niveau 3	44
27 Corrigés du niveau 4	46
28 Corrigés : calculs, équations	49
29 Corrigés : limites	53
30 Corrigés : dérivées et primitives	57
31 Corrigés : études de fonctions	60
32 Corrigés : suites et logarithme	64
33 Corrigés : défis de concours	67

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Calculs, équations, inéquations, Limites et croissances comparées, Dérivées et primitives, Études de fonctions, Suites et logarithme, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|--|
| ☐ reconnaître $u' u^r$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{1+u^2}$; | ☐ utiliser une fonction auxiliaire ; |
| ☐ trouver la primitive qui vérifie une condition ; | ☐ étudier une fonction, tracer sa courbe ; |
| ☐ démontrer les propriétés algébriques de $\ln$; | ☐ calculer avec $\log_a$, compter les chiffres ; |
| ☐ simplifier avec $\ln$ et le nombre e ; | ☐ démontrer $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$; |
| ☐ résoudre équations, inéquations, systèmes ; | ☐ encadrer H_n et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$; |
| ☐ démontrer les limites usuelles ; | ☐ comparer a^b et b^a . |
| ☐ lever une forme indéterminée avec $\ln$; | |
| ☐ dériver $\ln u $ et primitiver $\frac{u'}{u}$; | |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

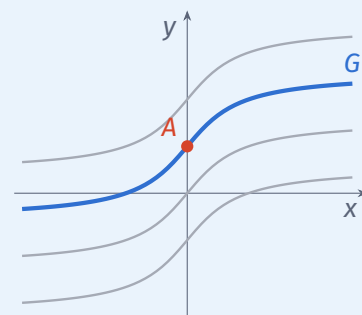
1 Primitives

Définition : primitive

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F **dérivable** sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Théorème

1. (**admis**) Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I .
2. Si F est une primitive de f sur I , les primitives de f sur I sont **exactement** les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
3. Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés, il existe une **unique** primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$: $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.



les primitives $\arctan x + C$ de $\frac{1}{1+x^2}$ (translations verticales) ; une seule passe par $A(0, 1)$

Démonstration de 2 et 3. Si G est une primitive de f , alors $(G - F)' = f - f = 0$ sur l'**intervalle** I , donc $G - F$ est constante (conséquence du TAF, chapitre 2). Réciproquement, $(F + C)' = F' = f$. Pour 3 : $G = F + C$, et $G(x_0) = y_0$ impose $C = y_0 - F(x_0)$.

Remarque. Sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, la constante peut changer d'un côté à l'autre : $x \mapsto -\frac{1}{x} + 1$ sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ définissent une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ qui ne diffère pas de $-\frac{1}{x}$ par une constante.

1.1 Primitives usuelles et opérations

$f(x)$	primitive $F(x)$	sur	$f(x)$	primitive $F(x)$	sur
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	où $\cos x \neq 0$
x^r ($r \in \mathbb{Q}, r \neq -1$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$ ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$\sin(ax + b)$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

Opérations (u dérivable sur l'intervalle I)

Si F et G sont des primitives de f et g sur I , alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). De plus :

$$u' u^n \mapsto \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{u'}{u^2} \mapsto -\frac{1}{u}$$

$$\frac{u'}{u^n} \mapsto -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$$

$$u' u^r \mapsto \frac{u^{r+1}}{r+1}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \mapsto 2\sqrt{u}$$

$$\frac{u'}{1+u^2} \mapsto \arctan u$$

$$u' \cos u \mapsto \sin u$$

$$u' \sin u \mapsto -\cos u$$

$$u' \times (v' \cdot u) \mapsto v \cdot u$$

avec $n \in \mathbb{N}$ (et $n \geq 2$ pour $\frac{u'}{u^n}$), $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $u \neq 0$ pour les quotients, $u > 0$ pour u^r et $\sqrt{u}$. Chaque ligne se démontre en dérivant la colonne de droite (dérivée d'une composée, chapitre 2).

Remarque. Le tableau contient x^r pour tout rationnel r **sauf** $r = -1$: la formule $\frac{x^{r+1}}{r+1}$ n'a alors aucun sens. Pourtant $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc y admet des primitives : c'est la naissance du logarithme (section 2).

Exemple : reconnaître la forme, ajuster la constante

- $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} u' u^{\frac{1}{2}}$ avec $u = x^2+1$: $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ sur $]0, \pi[$: c'est $\frac{u'}{u^3}$ avec $u = \sin x$: $F(x) = -\frac{1}{2 \sin^2 x}$.
- $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{1+(x+1)^2}$: $F(x) = \arctan(x+1)$; $\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}$: $F(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$ (sur $\mathbb{R}$).
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ sur $]0, +\infty[$: avec $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f = \frac{2u'}{1+u^2}$, d'où $F(x) = 2 \arctan \sqrt{x}$.
- $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $F(x) = \tan x - x$; on linéarise $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$: $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$.
- **Avec une condition.** La primitive de $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 : $f = \frac{1}{2} \frac{u'}{u^2}$ ($u = x^2+1$) donne $F(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$; $F(0) = 0$ impose $C = \frac{1}{2}$, d'où $F(x) = \frac{x^2}{2(x^2+1)}$.

2**La fonction $\ln$** **Définition : logarithme népérien**

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$; d'après la section 1, elle y admet une

unique primitive qui s'annule en 1. C'est la fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$:

$$\ln \text{ est définie et dérivable sur }]0, +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln 1 = 0.$$

Premières propriétés

- $\ln$ est dérivable, donc **continue**, sur $]0, +\infty[$; $\ln x$ n'a **aucun sens** si $x \leq 0$.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$: $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b \qquad \ln a < \ln b \iff a < b \qquad \ln a \leq \ln b \iff a \leq b.$$
- **Signe** : $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$; $\ln x = 0 \iff x = 1$; $\ln x > 0 \iff x > 1$.

Démonstration. La stricte croissance donne $a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$; la réciproque s'obtient par contraposée ($a \geq b \Rightarrow \ln a \geq \ln b$), et $\ln a = \ln b \iff a = b$ traduit l'injectivité. Pour le signe, on compare x à 1, puisque $\ln 1 = 0$.

L'inégalité fondamentale

Pour tout réel $x > 0$: $\boxed{\ln x \leq x - 1}$, avec égalité **si et seulement si** $x = 1$.

Démonstration. Soit $\psi(x) = x - 1 - \ln x$: $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Donc ψ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$: pour $x \neq 1$, $\psi(x) > \psi(1) = 0$. (Lecture graphique : section 6.)

Méthode : domaine de $x \mapsto \ln(u(x))$

On résout l'inéquation **stricte** $u(x) > 0$; s'il y a plusieurs logarithmes (ou une racine, un quotient), on cumule les conditions.

Exemple : domaines et signes

- $f(x) = \ln(1 - x^2)$: $D_f =]-1, 1[$. Comme $0 < 1 - x^2 \leq 1$, on a $f(x) \leq \ln 1 = 0$, avec égalité seulement en 0.
- $g(x) = \ln \frac{x+1}{x-3}$: $D_g =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$, et $g(x) > 0 \iff \frac{x+1}{x-3} > 1 \iff \frac{4}{x-3} > 0 \iff x > 3$: $g > 0$ sur $]3, +\infty[$, $g < 0$ sur $] -\infty, -1[$.
- $h(x) = \sqrt{\ln(2-x)}$: il faut $2-x > 0$ **et** $\ln(2-x) \geq 0$, c'est-à-dire $2-x \geq 1$: $D_h =]-\infty, 1]$.
- $\frac{1}{\ln x}$: $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$; $\ln(\ln x)$: $x > 0$ et $\ln x > 0$, soit $D =]1, +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$: $(x-1)\ln x \geq 0$, car les deux facteurs ont le même signe (celui de $x-1$).

3

Propriétés algébriques

Théorème fondamental

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (le logarithme transforme les produits en sommes).

Démonstration. Fixons $b > 0$ et posons $\varphi(x) = \ln(bx) - \ln x$ pour $x > 0$. Par la dérivée d'une composée, $\varphi'(x) = \frac{b}{bx} - \frac{1}{x} = 0$: φ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à $\varphi(1) = \ln b$. Donc $\ln(bx) = \ln x + \ln b$ pour tout $x > 0$.

Conséquences ($a > 0, b > 0, n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}$)

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a \quad (n \geq 2)$$

$$\ln(a^r) = r \ln a$$

Pour des réels non nuls a et b de même signe : $\ln(ab) = \ln |a| + \ln |b|$; pour $a \neq 0$: $\ln(a^2) = 2 \ln |a|$.

Démonstrations. $\ln b + \ln \frac{1}{b} = \ln 1 = 0$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b}$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n) + \ln a = (n+1) \ln a$; si $n < 0$, $\ln(a^n) = -\ln(a^{-n}) = n \ln a$. Si $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$), alors $(a^r)^q = a^p$, donc $q \ln(a^r) = p \ln a$. Enfin, si $ab > 0$, $ab = |a| \times |b|$.

Théorème

$\ln$ est une **bijection** de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: pour tout réel y , l'équation $\ln x = y$ admet une **unique** solution $x > 0$.

Démonstration. $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$: c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $J = \ln(]0, +\infty[)$ (chapitre 1). Or $\ln 2 > \ln 1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \ln 2 = \ln(2^n) \in J$: J contient des réels aussi grands et aussi petits que l'on veut ; comme c'est un intervalle, $J = \mathbb{R}$.

Définition : le nombre e

Le nombre e est l'unique réel tel que $\ln e = 1$. D'après l'inégalité fondamentale, $\ln 2 < 2 - 1 = 1 = \ln e$, donc $2 < e$; on montrera $e < 3$ en section 10 ($e \approx 2,71828$).

Pour tout **rationnel** r : $\ln(e^r) = r \ln e = r$, donc $\ln x = r \iff x = e^r$ et $\ln x < r \iff 0 < x < e^r$.

e^r est ici un simple **nombre** (puissance rationnelle du réel $e > 0$) : $\ln x = -2 \iff x = \frac{1}{e^2}$, $\ln x = \frac{3}{2} \iff x = e\sqrt{e}$.

Exemple : calculer sans calculatrice

• $A = \ln \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \ln(1+\sqrt{2})$: comme $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$, $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ et $A = 0$.

• $B = \ln\left(\tan \frac{\pi}{8}\right) + \ln\left(\tan \frac{3\pi}{8}\right) = \ln\left(\tan \frac{\pi}{8} \times \tan \frac{3\pi}{8}\right) = \ln 1 = 0$, car $\tan \frac{3\pi}{8} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}$ (nombres > 0).

- $\ln 0,375 = \ln \frac{3}{8} = \ln 3 - 3 \ln 2$; $\ln \sqrt{48} = \ln(4\sqrt{3}) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3$; $\ln(e^3 \sqrt{e}) - \ln \frac{1}{e^2} = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$.
- **Somme télescopique** : $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$.

4

Équations, inéquations et systèmes

Méthode : résoudre avec des logarithmes

1. Écrire le **domaine de validité** D avant tout calcul (chaque $\ln(\dots)$ exige $(\dots) > 0$). 2. Sur D , se ramener à $\ln A = \ln B$, $\ln A \leq \ln B$ ou $\ln A = r$ (avec $r = \ln e^r$), puis supprimer les $\ln$ (stricte croissance). 3. Ne garder que les solutions qui sont dans D . 4. Si $\ln x$ apparaît par ses puissances, poser $X = \ln x$.

Exemple : équations et inéquations

- $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln(x+9)$: $D =]1, +\infty[$; sur D : $(x+3)(x-1) = x+9 \iff x^2 + x - 12 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -4$. $-4 \notin D$: $S = \{3\}$.
- $\ln(x^2) = \ln(4-3x)$: $D =]-\infty, 0[\cup]0, \frac{4}{3}[$; $x^2 = 4-3x \iff x = 1$ ou $x = -4$: $S = \{-4, 1\}$. (Écrire $\ln(x^2) = 2 \ln x$ aurait fait perdre -4 .)
- $\ln x + \ln(x-2) \geq \ln 3$: $D =]2, +\infty[$; $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \geq 0$ et $x > 2$ donnent $S = [3, +\infty[$.
- $\ln(2x-1) - \ln x \leq 1$: $D =]\frac{1}{2}, +\infty[$; $\frac{2x-1}{x} \leq e \iff (2-e)x \leq 1$, vrai pour tout $x > 0$ car $2-e < 0$: $S =]\frac{1}{2}, +\infty[$.
- $2(\ln x)^2 + \ln x - 1 \leq 0$: $X = \ln x$, $(2X-1)(X+1) \leq 0 \iff -1 \leq X \leq \frac{1}{2}$, d'où $S = \left[\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right]$.
- $(\ln x)^3 = 4 \ln x$: **on ne divise pas** par $\ln x$: $X(X^2-4) = 0 \iff X \in \{-2, 0, 2\}$, donc $S = \left\{\frac{1}{e^2}, 1, e^2\right\}$.

Exemple : deux systèmes et un exposant entier

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} \quad (x > 0, y > 0) \quad \begin{cases} \ln(xy) = 5 \\ \ln x \times \ln y = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} X = \ln x, Y = \ln y \\ X+Y = 5 \text{ et } XY = 6 : X \text{ et } Y \text{ sont les racines de } t^2 - 5t + 6 = 0, \text{ soit } 2 \text{ et } 3. \end{matrix}$$

$xy = 3$, donc $(x+y)^2 = 10 + 6 = 16$ et $x+y = 4$ ($x+y > 0$) : x et y sont les racines de $t^2 - 4t + 3 = 0$. $S = \{(1, 3), (3, 1)\}$.

Plus petit entier n tel que $3^n > 2^{n+10}$. $\ln$ est strictement croissante et $\ln 3 - \ln 2 > 0$:

$$3^n > 2^{n+10} \iff n \ln 3 > (n+10) \ln 2 \iff n(\ln 3 - \ln 2) > 10 \ln 2 \iff n > \frac{10 \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 17,1,$$

donc $\boxed{n = 18}$.

5

Limites et croissances comparées

Limites de référence ($\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 0; n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^n = 0$$

Démonstrations.

- **Bornes.** Soit $A \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ tel que $\ln a = A$ (bijection, section 3). Pour $x > a$: $\ln x > A$. Donc $\ln x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. En 0^+ , on pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $\ln x = -\ln t \rightarrow -\infty$.
- **Nombres dérivés.** $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln'(1) = 1$, et de même $\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$.
- $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. L'inégalité fondamentale appliquée à $\sqrt{x}$ donne $\frac{1}{2} \ln x = \ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1 < \sqrt{x}$. Pour $x > 1$: $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, et les gendarmes donnent la limite 0.
- **Puissances.** Avec $X = x^\alpha \rightarrow +\infty$: $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$. Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $x^\alpha \ln x = -\frac{\ln t}{t^\alpha} \rightarrow 0$. Enfin $\frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/n}}\right)^n \rightarrow 0$ et $x^\alpha (\ln x)^n = (x^{\alpha/n} \ln x)^n \rightarrow 0$.

Croissances comparées

En $+\infty$, toute puissance x^α ($\alpha > 0$) **l'emporte** sur toute puissance $(\ln x)^n$; en 0^+ , x^α **écrase** $(\ln x)^n$.

Composée : si $u \rightarrow \ell > 0$, alors $\ln u \rightarrow \ln \ell$; si $u \rightarrow +\infty$, alors $\ln u \rightarrow +\infty$; si $u \rightarrow 0^+$, alors $\ln u \rightarrow -\infty$.

Méthode : lever une forme indéterminée

$\infty-\infty$: factoriser par le terme dominant. $\ln(\text{polynôme})$: factoriser **dans** le $\ln$. $\ln(1+\text{petit})$: faire apparaître $\frac{\ln(1+X)}{X}$ avec $X \rightarrow 0$. **Puissances de $\ln x$** : se ramener à $\frac{\ln x}{x^\beta}$ ou à $x^\beta \ln x$ (β rationnel bien choisi), ou poser $X = \ln x$.

Exemple : huit limites rédigées

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{1/6}} \right)^3 = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{1/4} \ln x)^2 = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - (\ln x)^2) = +\infty, \text{ car c'est } \sqrt{x} \left(1 - \left(\frac{\ln x}{x^{1/4}} \right)^2 \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+\sqrt{x})} = \frac{2}{1/2} = 4 :$$

$$\ln(1+x^2) = 2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right),$$

$$\ln(1+\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \text{ puis on divise par } \ln x.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+2}{x-1} = 3 : \text{ avec } t = \frac{3}{x-1} \rightarrow 0,$$

$$\text{c'est } \frac{3x}{x-1} \times \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{2}{3} : \text{ c'est}$$

$$\frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \times (\sqrt{x}+1) = 2.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad (X = \ln x).$$

6

Étude et courbe de $\ln$

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

• En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$: la droite $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est **asymptote verticale**.

• En $+\infty$: $\ln x \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: **branche parabolique de direction** (Ox) .

• **Valeurs** : $\ln \frac{1}{e} = -1$, $\ln 2 \approx 0,693$, $\ln 3 \approx 1,099$, $\ln 10 \approx 2,303$.

• **Tangente en $a > 0$** : $y = \frac{x-a}{a} + \ln a$. En 1 :

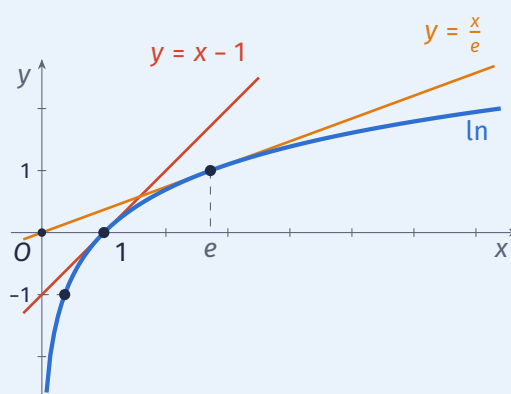
$$y = x - 1 ; \text{ en } e : y = \frac{x}{e}.$$

La tangente en a passe par O si et seulement si $\ln a - 1 = 0$, soit $a = e$.

• **Concavité** : $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: la courbe est **concave**, donc **au-dessous de toutes ses tangentes** :

$$\ln x \leq \frac{x}{a} - 1 + \ln a \quad (x > 0, a > 0).$$

Pour $a = 1$, c'est l'inégalité fondamentale $\ln x \leq x - 1$; pour $a = e$: $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

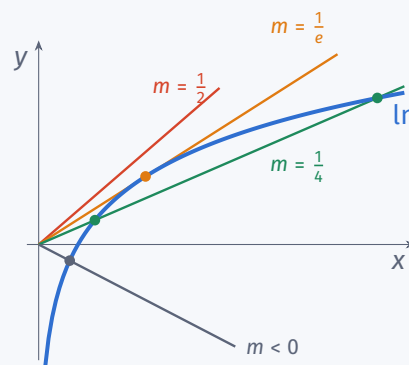


Exemple : discuter le nombre de solutions de $\ln x = mx$ ($m \in \mathbb{R}$)

Pour $x > 0$: $\ln x = mx \iff g(x) = m$ avec $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

On a $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$: g croît strictement sur $]0, e]$ de $-\infty$ à $g(e) = \frac{1}{e}$, puis décroît strictement sur $[e, +\infty[$ de $\frac{1}{e}$ vers 0 (sans l'atteindre, car $g > 0$ sur $]1, +\infty[$). Par le corollaire du TVI :

- $m > \frac{1}{e}$: aucune solution ; $m = \frac{1}{e}$: une seule, $x = e$ (point de tangence) ;
- $0 < m < \frac{1}{e}$: deux solutions, l'une dans $]1, e[$, l'autre dans $]e, +\infty[$;
- $m \leq 0$: une seule solution, dans $]0, 1]$.



7 Dérivée de $\ln |u|$ et primitives

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , qui **ne s'annule pas** sur I . Alors $x \mapsto \ln |u(x)|$ est dérivable sur I et

$$\left(\ln |u| \right)' = \frac{u'}{u} \quad (\text{si } u > 0 \text{ sur } I : (\ln u)' = \frac{u'}{u}).$$

Par conséquent, les primitives de $\frac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln |u(x)| + C$, $C \in \mathbb{R}$. En particulier, $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$, et une primitive de $\frac{1}{ax+b}$ ($a \neq 0$) est $\frac{1}{a} \ln |ax+b|$.

Démonstration. u est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I : d'après le TVI, elle garde un **signe constant**. Si $u > 0$, $(\ln \cdot u)' = u' \times \frac{1}{u}$. Si $u < 0$, $|u| = -u$ et $(\ln(-u))' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$.

Remarque. Comme $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ a le signe de u' quand $u > 0$, $\ln u$ a les mêmes variations que u . Le quotient $\frac{u'}{u}$ est la **dérivée logarithmique** de u : elle transforme un produit $u = v^p w^q$ en somme, $\frac{u'}{u} = p \frac{v'}{v} + q \frac{w'}{w}$.

Exemple : des primitives de la forme $\frac{u'}{u}$

- **$\tan$ et $\frac{1}{\tan}$.** Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x > 0$ et $\tan x = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$: $F(x) = -\ln(\cos x)$. Sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$: $F(x) = -\ln |\cos x|$. Sur $]0, \pi[$, une primitive de $\frac{\cos x}{\sin x}$ est $\ln(\sin x)$.
- $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$: $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$ (pas de valeur absolue : $x^2+1 > 0$).
- $\frac{1}{x \ln x} = \frac{u'}{u}$ avec $u = \ln x$: $F(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$ et $F(x) = \ln(-\ln x)$ sur $]0, 1[$, soit $\ln |\ln x|$ dans les deux cas.
- **Fraction décomposée.** $f(x) = \frac{x^2+3}{(x+1)(x+2)}$ sur $] -1, +\infty[$. La division donne $f(x) = 1 + \frac{-3x+1}{(x+1)(x+2)}$, et l'on cherche $\frac{-3x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$: en multipliant par $x+1$ puis en faisant $x = -1$, $a = 4$; de même $b = -7$. Donc

$$f(x) = 1 + \frac{4}{x+1} - \frac{7}{x+2} \quad \text{et} \quad F(x) = x + 4 \ln(x+1) - 7 \ln(x+2).$$

Exemple : deux dérivées à connaître, et des primitives « vérifiées »

- $\varphi(x) = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$ sur $]0, \pi[$: $\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$: c'est une primitive de $\frac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$.

$$\bullet \varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ sur }]1, +\infty[: \varphi'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- On **vérifie en dérivant** que $x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$ ($\ln x + 1 - 1$), et que $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ est une primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ ($\arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$).

8

Études complètes

Méthode : le plan d'étude d'une fonction avec $\ln$

1. Domaine : chaque $\ln(u)$ exige $u > 0$, un quotient par $\ln x$ exclut $x = 1$.
2. Limites aux bornes (croissances comparées, section 5), prolongement par continuité et dérivabilité aux bornes.
3. f' et son signe, souvent grâce à une **fonction auxiliaire** étudiée à part.
4. Branches infinies et position par rapport aux asymptotes.
5. f'' : concavité, inflexions.
6. Tracé : asymptotes, points remarquables et tangentes, puis la courbe.

8.1 Un prolongement et une asymptote oblique

Exemple : $f(x) = x + \frac{1}{\ln x}$ si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et $f(0) = 0$

1. Domaine, continuité en 0. $D_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

2. Dérivabilité en 0. Pour $0 < x < 1$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 + \frac{1}{x \ln x}$. Or $x \ln x \rightarrow 0$ en restant **négatif**, donc $\frac{1}{x \ln x} \rightarrow -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0, et C_f admet en 0 une **demi-tangente verticale**, dirigée vers le bas.

3. Asymptotes. $\ln x \rightarrow 0^-$ en 1^- et $\ln x \rightarrow 0^+$ en 1^+ : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$: la droite $x = 1$ est asymptote verticale. En $+\infty$: $f(x) - x = \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$: la droite $\Delta : y = x$ est **asymptote oblique**. **Position :** $f(x) - x$ a le signe de $\ln x$: C_f est au-dessous de Δ sur $]0, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$.

4. Variations, par une fonction auxiliaire. Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln^2 x} = \frac{\varphi(x)}{x \ln^2 x} \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = x \ln^2 x - 1, \quad \varphi'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2).$$

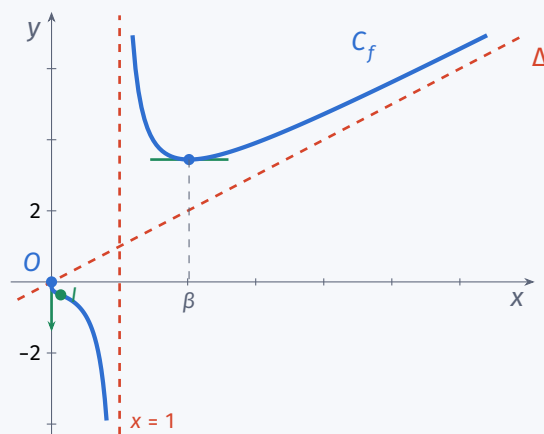
- Sur $]0, 1[$: φ croît sur $]0, e^{-2}]$ et décroît sur $[e^{-2}, 1[$; son maximum $\varphi(e^{-2}) = \frac{4}{e^2} - 1$ est < 0 (car $e > 2$). Donc $f' < 0$: f est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
- Sur $]1, +\infty[$: $\varphi' > 0$; φ est continue, strictement croissante, de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = -1$ à $+\infty$: elle s'annule en un **unique** réel β . Comme $\varphi(2) \approx -0,04$ et $\varphi(2,1) \approx 0,16$: $\beta \in]2, 2,1[$ ($\beta \approx 2,02$). $f' < 0$ sur $]1, \beta[$, $f' > 0$ sur $] \beta, +\infty[$.

- **Valeur exacte du minimum :** $\beta \ln^2 \beta = 1$ et $\ln \beta > 0$, donc $\ln \beta = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ et $f(\beta) = \beta + \sqrt{\beta} \approx 3,44$.

5. Concavité. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln^2 x}$ donne $f''(x) = \frac{(x \ln^2 x)'}{(x \ln^2 x)^2} = \frac{\ln x (\ln x + 2)}{x^2 \ln^4 x} = \frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}$. C_f est convexe sur $]0, e^{-2}]$, concave sur $[e^{-2}, 1[$, convexe sur $]1, +\infty[$: $I(e^{-2}, e^{-2} - \frac{1}{2}) \approx (0,14; -0,36)$ est un point d'inflexion. Enfin $f < 0$ sur $]0, 1[$ et $f \geq f(\beta) > 0$ sur $]1, +\infty[$: C_f ne rencontre les axes qu'en 0.

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ $\beta + \sqrt{\beta}$		+∞

$\beta + \sqrt{\beta} \approx 3,44$: minimum de f sur $]1, +\infty[$



8.2 Logarithme et arctangente

Exemple : $g(x) = \ln(1 + x^2) - 2 \arctan x$ sur $\mathbb{R}$

1. Une primitive. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(x-1)}{1+x^2}$: g est la primitive de $\frac{2(x-1)}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 (sections 1 et 7). Elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$, strictement croissante sur $]1, +\infty[$, de minimum $g(1) = \ln 2 - \frac{\pi}{2} \approx -0,88$.

2. Branches infinies. $\ln(1+x^2) \rightarrow +\infty$ et $\arctan$ est bornée : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$. Pour $x \neq 0$, $\ln(1+x^2) = 2 \ln|x| + \ln(1 + \frac{1}{x^2})$, donc

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{2 \ln|x|}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2 \arctan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \left(\frac{\ln|x|}{|x|} \rightarrow 0, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}\right) :$$

C_g admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une **branche parabolique de direction** (Ox) .

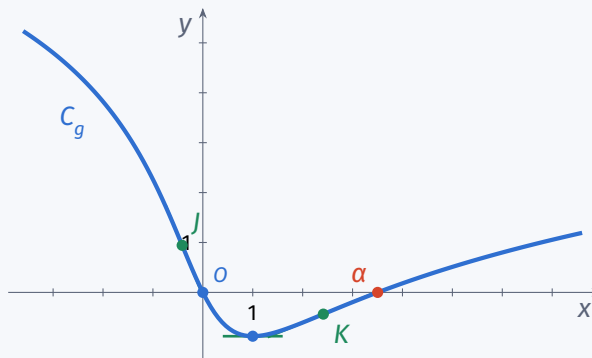
3. Concavité. $g''(x) = \frac{2[(1+x^2) - 2x(x-1)]}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+2x-x^2)}{(1+x^2)^2}$, du signe de $1+2x-x^2$, de racines $1 \pm \sqrt{2}$: C_g est concave sur $]-\infty, 1 - \sqrt{2}]$ et sur $[1 + \sqrt{2}, +\infty[$, convexe sur $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$. Avec $t = \tan \frac{\pi}{8} > 0$, $\frac{2t}{1-t^2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ donne $t = \sqrt{2} - 1$: $\arctan(1 - \sqrt{2}) = -\frac{\pi}{8}$ et $\arctan(1 + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{8}$. Les points d'inflexion sont

$$J\left(1 - \sqrt{2}, \ln(4 - 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}\right) \approx (-0,41; 0,94) \quad \text{et} \quad K\left(1 + \sqrt{2}, \ln(4 + 2\sqrt{2}) - \frac{3\pi}{4}\right) \approx (2,41; -0,44),$$

de tangentes de pentes $g'(1 - \sqrt{2}) = -(1 + \sqrt{2})$ et $g'(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.

4. Zéros et signe. Sur $]-\infty, 1]$, g est strictement décroissante et $g(0) = 0$: c'est son seul zéro, avec $g > 0$ avant et $g < 0$ après. Sur $]1, +\infty[$, g est continue, strictement croissante, $g(1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$: elle s'annule en un unique α ; $g(3) \approx -0,20$ et $g(4) \approx 0,18$ donnent $\alpha \in]3, 4[$ ($\alpha \approx 3,50$). **Bilan :** $\ln(1+x^2) \leq 2 \arctan x \iff x \in [0, \alpha]$.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	0	$\ln 2 - \frac{\pi}{2}$	0	$+\infty$



9 Logarithme de base a

Définition : logarithme de base a ($a > 0, a \neq 1$)

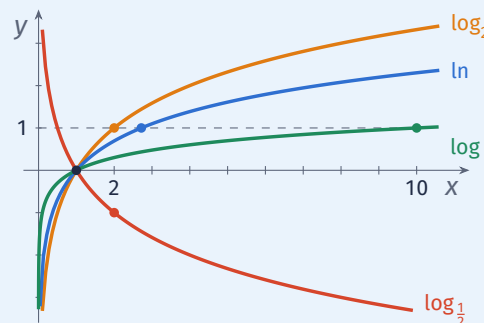
La fonction **logarithme de base a** est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$\log_e = \ln$; $\log_{10}$ est le **logarithme décimal**, noté $\log$: $\log(10^n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $\log 2 \approx 0,30103$.

Propriétés ($x > 0, y > 0, r \in \mathbb{Q}$)

- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a(a^r) = r$;
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
 $\log_a(x^r) = r \log_a x$;
- changement de base ($b > 0, b \neq 1$) : $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ et $\log_a b \times \log_b a = 1$;
- $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ et $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$;
- $a > 1$: $\log_a$ est strictement **croissante**, de $-\infty$ (en 0^+) à $+\infty$; $0 < a < 1$: strictement **décroissante**, de $+\infty$ à $-\infty$, et les inégalités **changent de sens**. $\log_{\frac{1}{a}} = -\log_a$.



toutes passent par $(1, 0)$; $\log_a$ passe par $(a, 1)$

Démonstrations. On divise par la constante $\ln a$ les propriétés de $\ln$; $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln x / \ln a}{\ln b / \ln a}$; le signe de $\frac{1}{x \ln a}$ est celui de $\ln a$, positif si et seulement si $a > 1$.

Exemple : équations et inéquations

- $\log_2 x = \log_x 16$: il faut $x > 0$ et $x \neq 1$; $\frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{4 \ln 2}{\ln x} \iff (\ln x)^2 = (2 \ln 2)^2 \iff \ln x = \pm 2 \ln 2$: $S = \left\{ \frac{1}{4}, 4 \right\}$.
- $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) > -1$: $D = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$, $-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$ et $\log_{\frac{1}{3}}$ est **décroissante** : $2x - 1 < 3$, d'où

$$S =]\frac{1}{2}, 2[.$$

- $\log x + \log(x - 15) = 2$: $D =]15, +\infty[$; $x(x - 15) = 10^2 \iff x^2 - 15x - 100 = 0 \iff x = 20$ ou $x = -5$: $S = \{20\}$.

Nombre de chiffres d'un entier $N \geq 1$

$$N \text{ s'écrit avec } n \text{ chiffres} \iff 10^{n-1} \leq N < 10^n \iff n-1 \leq \log N < n \iff \boxed{n = E(\log N) + 1}.$$

Exemple : des nombres géants

- $\log(2^{100}) = 100 \log 2 \approx 30,103$: 2^{100} a 31 chiffres. De plus $30 \leq 100 \log 2 < 30 + \log 2$, soit $10^{30} \leq 2^{100} < 2 \times 10^{30}$: son premier chiffre est 1.
- Le nombre premier de Mersenne $M = 2^{136\,279\,841} - 1$, découvert en 2024 : avec $\log 2 \approx 0,301\,029\,995\,66$, $136\,279\,841 \times \log 2 \approx 41\,024\,319,945$. Donc $2^{136\,279\,841}$ a 41 024 320 chiffres, et M aussi ($2^{136\,279\,841}$ n'est pas une puissance de 10).

10 Inégalités et suites

Encadrement fondamental

Pour tout réel $x > -1$: $\boxed{\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x}$, avec égalité **si et seulement si** $x = 0$.

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$: $\boxed{\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}}$.

Démonstration. L'inégalité $\ln u \leq u - 1$ (section 2) avec $u = 1 + x$ donne la majoration ; avec $u = \frac{1}{1+x}$, elle donne $-\ln(1+x) \leq \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$. L'égalité n'a lieu que pour $u = 1$, soit $x = 0$. Pour $x = \frac{1}{n}$: $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$. (On peut aussi appliquer le TAF à $\ln$ sur $[n, n+1]$: $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$ avec $n < c < n+1$.)

Exemple : encadrer e ; la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

En multipliant par n , puis par $n+1$: $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, soit $\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] < \ln e < \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n \geq 1).$$

Pour $n = 5$: $\left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} = 2,488\,32 < e < \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46\,656}{15\,625} = 2,985\,984$: on a bien $\boxed{2 < e < 3}$ (section 3).

De plus, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ vérifie $\frac{n}{n+1} e < u_n < e$ (diviser la majoration de e par $1 + \frac{1}{n}$) : par les gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exemple : la somme harmonique $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

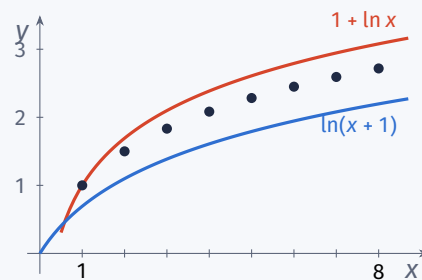
On somme l'encadrement pour $k = 1, \dots, n$; les $\ln$ se télescopent :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

soit $H_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < H_n$. En remplaçant $n+1$ par n : $H_n - 1 < \ln n$ ($n \geq 2$). Donc

$$\ln(n+1) < H_n \leq 1 + \ln n \quad (n \geq 1).$$

Conséquences : $H_n \rightarrow +\infty$, mais très lentement ($H_{10^6} < 15$) ; et $\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1$, car $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \rightarrow 1$.



les points (n, H_n) entre les deux courbes

Exemple : $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ tend vers $\ln 2$

On somme l'encadrement pour $k = n, \dots, 2n-1$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} < \ln(2n) - \ln n = \ln 2 < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \quad \text{donc} \quad \ln 2 - \frac{1}{2n} < S_n < \ln 2$$

et, par les gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$.

Exemple : une suite récurrente et l'IAF : $u_0 = 2, u_{n+1} = 2 + \ln u_n$

Soit $f(x) = 2 + \ln x$ et $I = [2, +\infty[$.

1. Stabilité. Si $x \geq 2$, alors $f(x) \geq 2 + \ln 2 > 2$: $f(I) \subset I$, et par récurrence $u_n \geq 2$ pour tout n .

2. Point fixe. $h(x) = 2 + \ln x - x$ vérifie $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$ sur I : h est continue et strictement décroissante. Or $h(3) = \ln 3 - 1 > 0$ (car $e < 3$) et $h(4) = 2(\ln 2 - 1) < 0$ (car $2 < e$). L'équation $f(x) = x$ a donc une unique solution $\ell \in]3, 4[$ ($\ell \approx 3,146$).

3. Convergence. Sur I , $|f'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$; l'IAF entre u_n et ℓ (tous deux dans I) donne

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|, \quad \text{puis par récurrence} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{2^n} < \frac{2}{2^n}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$; et $|u_n - \ell| < 10^{-3}$ dès que $2^{n-1} \geq 1000$, soit $n \geq 11$.

Remarque. La constante d'Euler. La suite $u_n = H_n - \ln n$ est décroissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$, et minorée par 0, car $H_n > \ln(n+1) > \ln n$: elle converge. Sa limite $\gamma \approx 0,5772$ est la constante d'Euler ; on ne sait toujours pas si γ est rationnel ! On retrouve $S_n = H_{2n} - H_n = u_{2n} - u_n + \ln 2 \rightarrow \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$.

11 Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
$\ln(a + b) = \ln a + \ln b$	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a + b)$ ne se simplifie pas ($\ln 2 \neq \ln 1 + \ln 1$)
$\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour tout $x \neq 0$	$\ln(x^2) = 2 \ln x $; $2 \ln x$ n'existe que si $x > 0$
$(\ln x)^2 = \ln(x^2)$	$(\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$ ($x = e : 1 \neq 2$)
$\frac{\ln a}{\ln b} = \ln \frac{a}{b}$	$\frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a$; c'est $\ln \frac{a}{b}$ qui vaut $\ln a - \ln b$
$\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(x^2 - 1)$ sur le domaine de $\ln(x^2 - 1)$	seulement pour $x > 1$: on résout sur le domaine de l'équation de départ
$(\ln x)^3 = 4 \ln x \iff (\ln x)^2 = 4$	on ne divise pas par $\ln x$: la solution $x = 1$ serait perdue
$(\ln u)' = \frac{1}{u}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est $\ln x$	$\ln x $, sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$
une primitive de $\tan$ est $\ln(\cos x)$	$-\ln \cos x $, sur un intervalle où $\cos$ ne s'annule pas
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	cette limite vaut 1 en 0 ; en $+\infty$, elle vaut 0
$x^\alpha \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ pour tout rationnel α	seulement si $\alpha > 0$: $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$ en 0^+
$\log_a u < \log_a v \iff u < v$, pour toute base a	seulement si $a > 1$; pour $0 < a < 1$, l'inégalité change de sens

12 Les astuces des concours

★ **Astuce de concours : comparer a^b et b^a**

Pour $a, b > 0$: $a^b < b^a \iff b \ln a < a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$. On compare avec $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$ (section 6).

Exemple : $e < 2026 < 2027$, donc $h(2026) > h(2027)$ et $2026^{2027} > 2027^{2026}$.

Les entiers $1 \leq a < b$ tels que $a^b = b^a$: $h(a) = h(b)$ impose $a < e < b$ (h est injective sur chaque intervalle), donc $a = 1$ ou $a = 2$. $a = 1$ donne $h(b) = 0$, impossible pour $b > 1$; $a = 2$ donne $h(b) = h(2) = h(4)$ avec $b > e$, donc $b = 4$: seule solution $2^4 = 4^2$.

★ **Astuce de concours : $\ln x \leq x - 1$ démontre l'inégalité arithmético-géométrique**

Soit $a_1, \dots, a_n > 0$ et $m = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$. En appliquant $\ln x \leq x - 1$ à $x = \frac{a_k}{m}$ et en sommant :

$$\sum_{k=1}^n \ln \frac{a_k}{m} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{m} - 1 \right) = \frac{nm}{m} - n = 0, \quad \text{donc} \quad \ln(a_1 a_2 \dots a_n) \leq n \ln m = \ln(m^n),$$

soit $a_1 a_2 \dots a_n \leq m^n$ et $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, avec égalité si et seulement si tous les a_k sont égaux à m (cas d'égalité de $\ln x \leq x - 1$).

★ **Astuce de concours : l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$**

Soit f dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y > 0$. Avec $x = y = 1$: $f(1) = 0$. À y fixé, on dérive par rapport à x : $y f'(xy) = f'(x)$; pour $x = 1$: $f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$.

Donc $f - f'(1) \ln$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et vaut 0 en 1 : $f = k \ln$ avec $k = f'(1)$. Le logarithme est, à une constante près, la seule fonction dérivable qui transforme les produits en sommes.

★ **Astuce de concours : un produit devient une somme télescopique**

Pour étudier un produit, on prend son logarithme. Avec $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ et $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$:

$$\ln P_n = \sum_{k=2}^n ([\ln(k+1) - \ln k] - [\ln k - \ln(k-1)]) = [\ln(n+1) - \ln 2] - [\ln n - \ln 1] = \ln \frac{n+1}{2n},$$

$$\text{donc } P_n = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

★ **Astuce de concours : une limite cache un nombre dérivé**

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \ln'(e) = \frac{1}{e} \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{x - \frac{\pi}{4}} = (\ln \circ \tan)' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\arctan x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{\arctan x - \arctan 1} = \frac{\ln'(1)}{\arctan'(1)} = \frac{1}{1/2} = 2$$

★ **Astuce de concours : le nombre de chiffres de 2^n et de 5^n**

Pour $n \geq 1$, 2^n n'est pas une puissance de 10 (il n'est pas divisible par 5), donc $t = n \log 2 \notin \mathbb{Z}$. Or, si $t \notin \mathbb{Z}$: $E(t) < t < E(t) + 1$, d'où $n - E(t) - 1 < n - t < n - E(t)$ et $E(n - t) = n - 1 - E(t)$. Comme $n \log 5 = n - n \log 2$:

$$(E(n \log 2) + 1) + (E(n \log 5) + 1) = n + 1 : \quad 2^n \text{ et } 5^n \text{ ont, ensemble, exactement } n + 1 \text{ chiffres.}$$

Exemple : $2^{10} = 1024$ et $5^{10} = 9\,765\,625$: $4 + 7 = 11$ chiffres. 2^{2026} a $E(2026 \log 2) + 1 = 610$ chiffres, donc 5^{2026} en a $2027 - 610 = 1417$.

13

L'essentiel du chapitre en une page

Primitives (sur un intervalle I)

$F' = f$; les primitives de f sont les $F + C$, $C \in \mathbb{R}$;
une seule vérifie $G(x_0) = y_0$.

$$u' u^r \mapsto \frac{u^{r+1}}{r+1} \quad (r \in \mathbb{Q}, r \neq -1) \quad \frac{u'}{u^2} \mapsto -\frac{1}{u}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \mapsto 2\sqrt{u} \quad \frac{u'}{1+u^2} \mapsto \arctan u$$

$$\frac{u'}{u} \mapsto \ln |u|$$

Définition de $\ln$

$\ln$: primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ nulle en 1.

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1 \quad (e \approx 2,718, \quad 2 < e < 3).$$

Algèbre ($a > 0, b > 0, r \in \mathbb{Q}$)

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b \quad \ln(a^r) = r \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$x \neq 0 : \ln(x^2) = 2 \ln |x|.$$

Équations, inéquations (domaine d'abord !)

$$\ln a = \ln b \iff a = b \quad \ln a < \ln b \iff a < b$$

$$\ln x = r \iff x = e^r \quad \ln x < 0 \iff 0 < x < 1.$$

Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

Croissances comparées ($\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^n = 0$$

Composée : $u \rightarrow +\infty \Rightarrow \ln u \rightarrow +\infty$;

$u \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln u \rightarrow -\infty$.

Courbe de $\ln$

Asymptote $x = 0$; branche parabolique de direction (Ox) ; concave. Tangentes : $y = x - 1$ (en 1), $y = \frac{x}{e}$ (en e).

$$\boxed{\ln x \leq x - 1} \quad (\text{égalité si et seulement si } x = 1).$$

Dérivées et primitives

u ne s'annule pas sur I : $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$;

si $u > 0$, $\ln u$ a les variations de u .

$$\tan \mapsto -\ln |\cos x| \quad \frac{1}{ax+b} \mapsto \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\frac{1}{x \ln x} \mapsto \ln |\ln x| \quad \ln \mapsto x \ln x - x$$

Étude d'une fonction

Domaine ; limites et prolongements ; dérivabilité aux bornes ; signe de f' (fonction auxiliaire) ; branches infinies et positions ; f'' ; tracé.

Logarithme de base a ($a > 0, a \neq 1$)

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$: mêmes règles que $\ln$, $\log_a a = 1$.

$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$: croissante si $a > 1$,
décroissante si $0 < a < 1$ (l'inégalité change de sens).

$\log = \log_{10}$, $\log(10^n) = n$. Un entier $N \geq 1$ a $E(\log N) + 1$ chiffres.

Inégalités

$$x > -1 : \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

$$n \geq 1 : \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} ;$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Suites

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} : \ln(n+1) < H_n \leq 1 + \ln n ;$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \rightarrow \ln 2 ; \quad H_n - \ln n \rightarrow \gamma \approx 0,577 ;$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

Astuces

$a^b < b^a \iff \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$ (étudier $\frac{\ln x}{x}$, maximum en e).

$f(xy) = f(x) + f(y)$, f dérivable $\Rightarrow f = k \ln$.

Un produit : on prend son $\ln$. Une limite $\frac{0}{0}$: un nombre dérivé.

2^n et 5^n ont, ensemble, $n + 1$ chiffres.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

14 Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Primitives usuelles ★

corrigé p. 39

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué :

- a) $x(x^2 + 1)^3$, $\mathbb{R}$ b) $\frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$, $] -1, +\infty[$ c) $\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$, $\mathbb{R}$ d) $\sin x \cos^3 x$, $\mathbb{R}$
e) $\frac{1}{4 + x^2}$, $\mathbb{R}$ f) $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$, $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$, $]0, +\infty[$ (celle qui s'annule en 1)

Exercice 2 Calculs et nombre e ★

corrigé p. 39

1. Écrire $A = \ln 0,0036$ et $B = \ln \frac{1}{\sqrt{150}}$ à l'aide de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$. Simplifier $C = \frac{\ln 8 + \ln 27 - \ln 36}{\ln 6}$ et $D = \ln \left((1 + \sqrt{3})^2 \right) - \ln (2 + \sqrt{3})$.
2. Dédire de $\ln x \leq x - 1$ (égalité si et seulement si $x = 1$) que $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$ pour $x > 0$, puis que $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$ et $2 < e < 4$.

Exercice 3 Équations, inéquations, système ★

corrigé p. 39

Résoudre (domaine d'abord) a) à f), puis le système g) : $2 \ln x + \ln y = 7$, $\ln x - 3 \ln y = -7$.

- a) $\ln(x^2 - 4x) = \ln(3x - 12)$ b) $2 \ln(x + 1) = \ln(x + 7)$ c) $\ln \sqrt{x + 3} = \ln(x - 3)$
d) $\ln(x + 1) - \ln(2x - 1) \geq \ln 2$ e) $\ln(2 - x) + \ln(x + 4) \leq \ln(x + 10)$ f) $(\ln x)^2 \leq \ln(x^2) + 3$

Exercice 4 Limites de référence ★

corrigé p. 40

Calculer, en précisant l'outil utilisé :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x + 1) - \ln(x + 3))$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x} \ln x)$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x} - 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt[3]{x}}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(x + x^2)}$

Exercice 5 Dériver avec $\ln$ ★

corrigé p. 40

Calculer $f'(x)$ (pour e), justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$; déduire de f) que $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ ($x > 0$).

- a) $\ln(1 + \sqrt{x})$, $]0, +\infty[$ b) $x\sqrt{x} \ln x$, $]0, +\infty[$ c) $\ln |x^2 - 2x - 3|$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$
d) $\ln(\ln(1 + x^2))$, $]0, +\infty[$ e) $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $\mathbb{R}$ f) $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, $]0, +\infty[$

Exercice 6 Primitives de la forme $\frac{u'}{u}$ ★

corrigé p. 40

Déterminer une primitive sur l'intervalle indiqué (pour f), écrire d'abord $\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$:

- a) $\frac{1}{3-2x}$, $] -\infty, \frac{3}{2}[$ b) $\frac{x^2+1}{x^3+3x+1}$, $]0, +\infty[$ c) $\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x-\frac{1}{x}}$, $]1, +\infty[$ d) $\frac{1+\ln x}{x \ln x}$, $]1, +\infty[$
 e) $\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$, $]0, +\infty[$ f) $\frac{x-5}{x^2-x-2}$, $]2, +\infty[$ g) $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$, $]e, +\infty[$ (nulle en e^2)

Exercice 7 Logarithme de base a ★

corrigé p. 41

On rappelle que $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$).

- Calculer $A = \log_4 8 + \log_9 \frac{1}{27}$ et $B = \log_{\sqrt{2}} 8$. Résoudre : a) $\log_3 x = \log_9(x+6)$; b) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq -1$; d) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ ($x > 0$, $x \neq 1$).
- Un entier $N \geq 1$ s'écrit avec k chiffres en base 2 si et seulement si $2^{k-1} \leq N < 2^k$. Montrer que $k = E(\log_2 N) + 1$ et calculer le nombre de chiffres binaires de 10^{12} ($\ln 2 \approx 0,6931$, $\ln 10 \approx 2,3026$).

Exercice 8 Une première étude ★

corrigé p. 41

Soit $f(x) = \frac{2+\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et C_f sa courbe.

- Limites de f en 0^+ et en $+\infty$ (interpréter) ? Montrer que $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{x^2}$, dresser le tableau de variations de f et en déduire que $\ln x \leq ex - 2$ pour $x > 0$.
- Donner le point commun à C_f et à (Ox) , et la tangente à C_f au point d'abscisse 1. Montrer que C_f a un unique point d'inflexion, d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

15

Niveau 2 • Bac

Exercice 9 Limites : le bon outil ★★

corrigé p. 41

Calculer a) à d), et e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}$, où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ (choisir le bon outil).

- a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{4x - \pi}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2} - (\ln x)^4)$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$

Exercice 10 Problème : la fonction $\sqrt{x}(2 - \ln x)$ ★★

corrigé p. 41

Soit $f(x) = \sqrt{x}(2 - \ln x)$ si $x > 0$, $f(0) = 0$, et C_f sa courbe (repère orthonormé).

- Continuité et dérivabilité à droite en 0 ? Limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$? Interpréter.
- Montrer que $f'(x) = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$; variations de f ; en déduire que $\ln x \geq 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.
- Montrer que $f''(x) = \frac{\ln x - 2}{4x\sqrt{x}}$; concavité, point d'inflexion I , tangente T en I ; tracer C_f ($e^2 \approx 7,4$).
- Montrer que la restriction g de f à $[1, +\infty[$ est une bijection sur un intervalle J à préciser ; calculer $(g^{-1})'(0)$. g^{-1} est-elle dérivable à gauche en 2 ?

Exercice 11 Problème : une suite récurrente ★★

corrigé p. 42

Soit $f(x) = 4 - \ln x$, $u_0 = 3$, $u_{n+1} = f(u_n)$; $\ln 2,9 \approx 1,065$, $\ln 3 \approx 1,099$, $\ln 10 \approx 2,303$, $2,71 < e < 2,72$.

1. Montrer que $f(x) = x$ a une unique solution $\alpha > 0$, que $2,9 < \alpha < 3$, que $f([e, 3]) \subset [e, 3]$ et que $e \leq u_n \leq 3$ pour tout n .
2. Calculer u_1, u_2 ; (u_n) est-elle monotone ? Et $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ (étudier $f \circ f$) ?
3. Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$, puis que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{e}\right)^n$. En déduire que (u_n) converge vers α , et un entier n_0 tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-6}$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 12 Encadrer $\ln(1+x)$ ★★

corrigé p. 42

1. Montrer que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$, puis que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$; limites de H_n et de $\frac{H_n}{\ln n}$? Montrer qu'il faut au moins 8 104 termes pour que $H_n \geq 10$ ($e^9 \approx 8\,103,08$).

Exercice 13 Droites passant par $A(1, 0)$ ★★

corrigé p. 43

Soit $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

1. Avec $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ ($x \neq 1$), montrer que $g(x)$ est entre 1 et $\frac{1}{x}$; en déduire le prolongement par continuité $g(1) = 1$, et les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
2. Montrer que $g'(x) = \frac{h(x)}{(x-1)^2}$ avec $h(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$; en déduire que g est strictement décroissante.
3. Suivant $m \in \mathbb{R}$, combien de points communs ont la courbe de $\ln$ et la droite D_m passant par A de pente m ? Cas $m = 1$?

Exercice 14 Problème : la fonction $x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ ★★

corrigé p. 43

Soit $f(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Ensemble de définition D , parité, limites aux bornes de D ? Montrer que $\Delta : y = x$ est asymptote à C_f en $\pm\infty$; position de C_f par rapport à Δ ?
2. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; variations; concavité, point d'inflexion et tangente en ce point ?
3. Montrer que $f(x) = 0$ a exactement trois solutions $-\alpha, 0, \alpha$, avec $1,5 < \alpha < 1,6$ ($\ln 0,2 \approx -1,609$, $\ln \frac{3}{13} \approx -1,466$). Tracer Δ et C_f .

Exercice 15 Tangentes issues d'un point ★★

corrigé p. 43

Soit Γ la courbe de $\ln$ et, pour $t > 0$, T_t la tangente à Γ au point d'abscisse t .

1. Montrer que Γ est au-dessous de ses tangentes, et que T_t passe par $M(a, b)$ si et seulement si $\varphi_a(t) = b + 1$, avec $\varphi_a(t) = \ln t + \frac{a}{t}$.
2. Si $a \leq 0$, montrer qu'une seule tangente passe par M ; si $a > 0$, qu'il en passe 0, 1 ou 2 selon que M est au-dessous de Γ , sur Γ ou au-dessus. Cas de O (équation) ? de $B(1, 1)$?

Exercice 16 Problème : la fonction $x \ln x - \frac{x^2}{2}$ ★★

corrigé p. 44

Soit $f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Continuité et dérivabilité à droite en 0 ? Limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$? Interpréter.
2. Montrer que $f'(x) = 1 + \ln x - x$; en déduire (cours) que f est strictement décroissante et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Montrer que $f(x) = -1$ a une unique solution α , avec $2,7 < \alpha < 2,8$ ($\ln 2,7 \approx 0,993$, $\ln 2,8 \approx 1,030$).

3. Montrer que C_f a un unique point d'inflexion I , en lequel la tangente est horizontale. Position de C_f par rapport à la parabole $P : y = -\frac{x^2}{2}$? Tracer P et C_f .

16

Niveau 3 • Approfondissement

Exercice 17 Découper pour maximiser un produit ★★★

corrigé p. 44

On partage $N \geq e$ en k parts égales ($k \in \mathbb{N}^*$) ; quel k rend maximal le produit $P_k = \left(\frac{N}{k}\right)^k$?

1. Étudier $\varphi(x) = x \ln \frac{N}{x}$ sur $]0, +\infty[$; vérifier que $\ln P_k = \varphi(k)$. En déduire que (P_k) croît puis décroît, et que le meilleur k est $E\left(\frac{N}{e}\right)$ ou $E\left(\frac{N}{e}\right) + 1$.
2. Montrer que $P_{k+1} > P_k \iff N > \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$. Meilleur k pour $N = 10$? pour $N = 20$?

Exercice 18 La somme des $\frac{\ln k}{k}$ ★★★

corrigé p. 45

Soit $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ ($x > 0$), $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ et $T_n = S_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ ($n \geq 1$).

1. Montrer que F' décroît sur $[e, +\infty[$, puis (TAF) que $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq F(k+1) - F(k) \leq \frac{\ln k}{k}$ pour $k \geq 3$.
2. Montrer que $(T_n)_{n \geq 3}$ décroît et est minorée par $\frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$. Conclure ; limite de $\frac{S_n}{(\ln n)^2}$?

Exercice 19 La fonction $\arctan(\ln x)$ ★★★

corrigé p. 45

Soit $f(x) = \arctan(\ln x)$ sur $]0, +\infty[$.

1. Limites en 0^+ et en $+\infty$? Calculer f' ; montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser ; calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Montrer que $f''(x) = -\frac{(1+\ln x)^2}{x^2(1+(\ln x)^2)^2}$. La courbe de f a-t-elle un point d'inflexion ? En déduire que $\arctan(\ln x) \leq x - 1$, puis, avec $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, que $\arctan(\ln x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ ($x > 0$).

Exercice 20 Une fonction symétrique ★★★

corrigé p. 45

Soit $f(x) = \ln x \cdot \ln(1-x)$ pour $x \in]0, 1[$, et C_f sa courbe.

1. Montrer que $f(1-x) = f(x)$ et $f(x) > 0$; interpréter. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; on pose $f(0) = f(1) = 0$. Dérivabilité de f à droite en 0 ?
2. Montrer que $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(1-x)}$ avec $\varphi(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln x$. Calculer φ'' ; en déduire que $\varphi > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$, les variations et le maximum de f . Tracer C_f . Montrer que $\ln a \cdot \ln b \leq (\ln 2)^2$ si $a, b > 0$ et $a + b = 1$.

Exercice 21 Où les tangentes coupent (Oy) ★★★

corrigé p. 45

Soit f dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, la tangente à la courbe de f au point $M(x, f(x))$ coupe (Oy) en P ; on note $H(0, f(x))$, et y_P, y_H les ordonnées de P et H .

1. Montrer que $y_P = f(x) - x f'(x)$. Pour $f = \ln$, vérifier que $y_H - y_P = 1$ pour tout $x > 0$. Réciproquement, soit $k \in \mathbb{R}$: déterminer les fonctions f telles que $y_H - y_P = k$ pour tout $x > 0$.
2. Déterminer les f telles que $y_P = -x$ pour tout $x > 0$ (dérivée $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$) ; laquelle admet un minimum en 1 ? Que vaut ce minimum ?
3. On suppose $f > 0$. Déterminer les f telles que $y_P = \frac{f(x)}{2}$ pour tout $x > 0$ (dérivée $x \mapsto \ln f(x) - \frac{1}{2} \ln x$).

Exercice 22 Comparer des logarithmes ★★★

corrigé p. 46

1. Sans calculatrice, comparer $\log_2 3$ et $\log_3 5$ (comparer chacun à $\frac{3}{2}$).
2. Soit $c > 0$ et $\psi_c(x) = \frac{\ln(x+c)}{\ln x}$ sur $]1, +\infty[$. Montrer que ψ_c est strictement décroissante (utiliser $t \mapsto t \ln t$); limites en 1^+ et en $+\infty$?
3. Ranger $\log_2 3$, $\log_3 4$, $\log_4 5$, $\log_5 6$; comparer $\log_3 10$ et $\log_4 17$ (écrire $\log_3 10 = 2 \log_9 10$). Résoudre dans $]1, +\infty[$ l'inéquation $\log_x(x+2) > 2$.

Exercice 23 Primitives : les bonnes idées ★★★

corrigé p. 46

1. Trouver une primitive sur l'intervalle indiqué ($n \in \mathbb{N}^*$; pour d), dériver $x \mapsto \arctan \frac{\ln x}{x}$:
 a) $\frac{1}{x(x^n+1)}$, $]0, +\infty[$ b) $\frac{1}{\sin x \cos x}$, $]0, \frac{\pi}{2}[$ c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $]1, +\infty[$ d) $\frac{1 - \ln x}{x^2 + (\ln x)^2}$, $]0, +\infty[$
2. **Dériver un produit « à l'envers ».** Dériver $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x}$; en déduire la primitive F de $\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ sur $]0, +\infty[$ de limite nulle en 0^+ , et sa limite en $+\infty$. De même, trouver une primitive G de $\frac{\arctan x}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$, et sa limite en $+\infty$.

17

Niveau 4 • Concours**Exercice 24 Prolonger $n \mapsto \ln(n!)$ ★★★★★**

corrigé p. 46

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = x \ln n + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$, avec $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et $0! = 1$.

1. Montrer que $0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x(x+1)}{n^2}$ (utiliser $\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u$) et que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$. En déduire que la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ converge; on note $L(x)$ sa limite.
2. Montrer que $L(1) = 0$, que $L(x+1) = L(x) + \ln x$ pour tout $x > 0$, et que $L(n) = \ln((n-1)!)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $f'' \geq 0$, $f(1) = 0$ et $f(x+1) = f(x) + \ln x$ pour tout $x > 0$. Soient $x \in]0, 1]$ et $n \geq 2$. Montrer que $\ln(n-1) \leq \frac{f(n+x)-f(n)}{x} \leq \ln n$ (TAF; variations de $t \mapsto \frac{f(n+t)-f(n)}{t}$ sur $]0, 1]$), puis que $g_{n-1}(x) \leq f(x) \leq g_{n-1}(x) + x \ln \frac{n}{n-1}$. En déduire que $f = L$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 25 Inégalités de Young et de Hölder ★★★★★

corrigé p. 47

1. Soient $t \in]0, 1[$ et $x, y > 0$. Montrer que $t \ln x + (1-t) \ln y \leq \ln(tx + (1-t)y)$, avec égalité si et seulement si $x = y$ (étudier la différence comme fonction de x).
2. Soient $p, q > 1$ rationnels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tous $a, b > 0$ (Young).
3. Soient $a_k, b_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$), $A = \left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\sum b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$. En appliquant 2. à $\frac{a_k}{A}$ et $\frac{b_k}{B}$, montrer que $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq AB$ (Hölder). Cas $p = q = 2$? Montrer que $(x+y+z)^3 \leq 9(x^3 + y^3 + z^3)$ ($x, y, z > 0$).

Exercice 26 Calculer e par la méthode de Newton ★★★★★

corrigé p. 47

Soit $h(x) = x(2 - \ln x)$ sur $]0, +\infty[$. On admet que $2,7 < e < 2,8$.

1. Montrer que la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse $a > 0$ coupe la droite $y = 1$ au point d'abscisse $h(a)$. Étudier h ; montrer que $h(x) \leq e$ pour $x > 0$.
2. Montrer que $\frac{(e-x)^2}{2e} \leq e - h(x) \leq \frac{(e-x)^2}{4}$ pour $x \in [2, e]$ (étudier deux fonctions et leurs dérivées secondes).

3. Soit $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = h(x_n)$. Montrer que $2 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq e$, que (x_n) converge vers e , et que $0 \leq e - x_n \leq 4 \left(\frac{e-2}{4}\right)^{2^n} \leq 4 \cdot 5^{-2^n}$. Que dire de x_4 ?

Exercice 27 Les puissances de 2 qui commencent par 7 ★★★★★

corrigé p. 48

On note $\log = \log_{10}$, $\alpha = \log 2$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $\{t\} = t - E(t) \in [0, 1[$.

1. Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \{1, \dots, 9\}$: montrer que le premier chiffre (à gauche) de N est c si et seulement si $\log c \leq \{\log N\} < \log(c+1)$. Vérifier que 2^{46} commence par 7 ($\alpha \approx 0,301\,030$, $\log 7 \approx 0,845\,1$, $\log 8 \approx 0,903\,1$).
2. Soit $Q \in \mathbb{N}^*$. En répartissant les $Q+1$ réels $\{k\alpha\}$ ($0 \leq k \leq Q$) dans les Q intervalles $\left[\frac{j}{Q}, \frac{j+1}{Q}\right]$, montrer qu'il existe $q \in \{1, \dots, Q\}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{Q}$.
3. Soient $0 \leq a < b \leq 1$. On choisit Q tel que $\frac{1}{Q} < b - a$, puis q, p comme en 2., et $\delta = q\alpha - p$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{mq\alpha\} \in]a, b[$ (distinguer $\delta > 0$ et $\delta < 0$). En déduire qu'une puissance de 2 commence par 2026.

Exercice 28 La suite $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (exercice 12), avec $H_0 = 0$.

1. Montrer que $\lim u_n = +\infty$ et $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$, puis que $2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln n$ ($n \geq 1$) ; limite de $\frac{u_n}{\sqrt{2n}}$?
2. Soit $w_k = \frac{1}{2k} - \frac{1}{u_k^2}$ ($k \geq 1$). Montrer que $0 \leq w_k \leq \frac{5}{8k^2} + \frac{1}{4k\sqrt{k}}$ (utiliser $\ln k \leq 2\sqrt{k}$), et que $\frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ ($k \geq 2$, TAF) ; en déduire que $W_n = \sum_{k=1}^n w_k$ converge.
3. Montrer que $u_n^2 - 2n = 2 + \frac{1}{2}H_{n-1} - W_{n-1}$ ($W_0 = 0$), puis que $\lim \frac{u_n^2 - 2n}{\ln n} = \frac{1}{2}$ et que $u_n^2 - 2n - \frac{1}{2} \ln n$ a une limite finie.

Exercice 29 Le problème du recrutement ★★★★★

corrigé p. 49

On reçoit un à un $n \geq 3$ candidats, dans un ordre aléatoire, pour un seul poste ; refuser les r premiers ($1 \leq r \leq n-1$), puis engager le premier meilleur que tous les précédents, engage le meilleur avec la probabilité (admise) $p_n(r) = \frac{r}{n} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$.

1. Montrer que $\ln \frac{n}{r} \leq \sum_{j=r}^{n-1} \frac{1}{j}$, et que $\sum_{j=r}^{n-1} \frac{1}{j} \leq \ln \frac{n-1}{r-1}$ si $r \geq 2$ (exercice 12). Avec $\varphi(x) = -x \ln x$, en déduire que $\varphi\left(\frac{r}{n}\right) \leq p_n(r) \leq \varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{2}{n}$ si $2 \leq r \leq n-1$, et que $p_n(1) \leq \frac{1+\ln n}{n}$.
2. Soit M_n le plus grand des $p_n(r)$. Montrer que $\lim M_n = \frac{1}{e}$ (essayer $r = E\left(\frac{n}{e}\right)$), et que $\lim \frac{r_n}{n} = \frac{1}{e}$ si $p_n(r_n) = M_n$: il faut laisser passer environ 37 % des candidats.

Exercice 30 Les nombres premiers et $\ln(\ln n)$ ★★★★★

corrigé p. 49

Soient $n \geq 2$, $p_1 < \dots < p_s$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n , et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $-\ln(1-x) \leq x + x^2$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m > n$; en développant $\Pi = \prod_{i=1}^s \left(1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^m}\right)$ (décomposition en facteurs premiers), montrer que $H_n \leq \Pi \leq \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$.
2. En déduire que $\ln H_n \leq \sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i^2}$, puis que $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_s} \geq \ln(\ln(n+1)) - 1$. Conclure : il y a une infinité de nombres premiers, et les sommes de leurs inverses ne sont pas bornées.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

18 Calculs, équations, inéquations

Toujours en trois temps : (1) le domaine de validité ; (2) la transformation par $\ln a = \ln b \iff a = b$ ou $\ln a < \ln b \iff a < b$; (3) le tri des solutions. Quand aucun calcul n'aboutit, on étudie une fonction : la stricte monotonie donne l'unicité.

Exercice 31 Calculs exacts et domaines ★

corrigé p. 50

1. Calculer sans calculatrice :

$$A = \ln \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2} - 1) \quad B = \frac{\ln(7 + 4\sqrt{3})}{\ln(2 - \sqrt{3})} \quad C = \ln\left(\cos \frac{\pi}{8}\right) + \ln\left(\sin \frac{\pi}{8}\right) \quad D = \frac{\ln(e\sqrt{e})}{\ln \sqrt[3]{e^2}}$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \ln(\ln(\ln x)) \quad f_2(x) = \sqrt{\ln(2 - x)} \quad f_3(x) = \frac{1}{\ln|x| - 1} \quad f_4(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x + 3}\right)$$

3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = 7ab$. Montrer que $\ln \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Exercice 32 Équations et inéquations : le domaine d'abord ★

corrigé p. 50

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ | e) $\ln(x^2 - x) \leq \ln(x + 3)$ |
| b) $\ln(x + 3) + \ln(x - 1) = 2 \ln(x + 1)$ | f) $\ln x + \ln(x - 2) < \ln(x + 4)$ |
| c) $\ln 2x - 1 = \ln x + 4 $ | g) $ \ln x \leq \ln 3$ |
| d) $\ln(x - 1) - \ln(3 - x) = 1$ | h) $\ln(2 - x) > -1$ |

Exercice 33 Changement d'inconnue et systèmes ★★

corrigé p. 51

1. Résoudre dans $]0, +\infty[$:

$$\text{a) } (\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0 \quad \text{b) } \ln x + \frac{2}{\ln x} \geq 3 \quad \text{c) } (\ln x)^2 - |\ln x| - 2 = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants ($\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$).

$$(S_1) \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -6 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} \ln(x+y) - \ln(x-y) = \ln 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 27 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

Exercice 34 Logarithmes de base a ★★

corrigé p. 51

Pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $x > 0$: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\log = \log_{10}$.

1. Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a \neq 1$, $b \neq 1$, $ab \neq 1$, et $x > 0$, $x \neq 1$. Montrer que

$$\frac{1}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}.$$

2. On pose $t = \log_2 3$. Exprimer $\log_{12} 9$ et $\log_6 24$ en fonction de t .

3. Résoudre : a) $\log_x(x+6) = 2$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq -3$; c) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$; d) $\log_3 x - 6 \log_x 3 = 1$.

4. On donne $\log 2 \approx 0,30103$ et $\log 3 \approx 0,47712$ (à 10^{-5} près). Combien de chiffres faut-il pour écrire 6^{2026} en base 10 ? Quel est son premier chiffre (à gauche) ?

Exercice 35 Quand la monotonie résout l'équation ★★★

corrigé p. 52

1. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $\ln x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$, puis l'inéquation $\ln x + \arctan x > \frac{\pi}{4}$.

2. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $x \ln x = 2 \ln 2$, puis l'inéquation $x \ln x < 2 \ln 2$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \ln x - \ln y = y - x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ (on pourra étudier $t \mapsto t + \ln t$).

4. Discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation $\ln x = m(x-1)$ (on étudiera $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$). Interpréter à l'aide des droites passant par le point $A(1, 0)$.

Exercice 36 Encadrer $\ln 2$ et $\ln 3$ sans calculatrice ★★★

corrigé p. 52

1. Montrer que, pour tout $x \geq 1$: $\frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

2. En déduire un encadrement de $a = \ln \frac{4}{3}$ et de $b = \ln \frac{9}{8}$.

3. Vérifier que $\ln 2 = 2a + b$ et $\ln 3 = 3a + 2b$. En déduire que $0,6890 < \ln 2 < 0,6953$ et $1,0924 < \ln 3 < 1,1018$.

4. Applications : montrer que $2^{10} < e^7$ et que $3^{11} > e^{12}$, puis que $1,57 < \log_2 3 < 1,60$.

19

Limites et croissances comparées

Une forme indéterminée se lève en factorisant le terme dominant (croissances comparées), en reconnaissant un nombre dérivé, ou en encadrant (inégalités prouvées par une étude de fonction, accroissements finis).

Exercice 37 Croissances comparées ★

corrigé p. 53

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et α un rationnel strictement positif. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^n = 0.$$

2. Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{x\sqrt{x}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\ln x)^2 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - \ln x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + (\ln x)^2}{x - \ln x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + 1)}{\ln(x^2 + 1)} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x - \sqrt{x}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x\sqrt{x} + 1} \end{array}$$

Exercice 38 Nombres dérivés cachés ★

corrigé p. 53

En reconnaissant un nombre dérivé, ou en se ramenant à $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, calculer :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arctan 2x)}{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{x-1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln x)}{x-e} \end{array}$$

Exercice 39 Branches infinies et positions ★★

corrigé p. 54

Pour chaque fonction : ensemble de définition, limites aux bornes, branches infinies de la courbe.

- $f(x) = \frac{x^2}{1 + \ln x}$.
- $g(x) = (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$. Préciser ensuite la position de C_g par rapport à la droite $y = 1$, sachant que $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$ pour tout réel $t > -1$, $t \neq 0$.
- $h(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ (préciser la position de C_h par rapport à son asymptote oblique).
- $k(x) = \sqrt{x^2 + x} - \ln x$.

Exercice 40 Prolongements et demi-tangentes ★★

corrigé p. 55

1. Soit $f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, et $f(0) = 0$. Étudier la parité de f , sa continuité et sa dérivabilité en 0. Calculer $f''(x)$ pour $0 < |x| < 1$ et montrer que 0 est un point d'inflexion de C_f ; préciser la tangente en 0.
2. Soit $g(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$ si $x \in]0, e[$, et $g(0) = 0$. Étudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0, puis la limite de g en e^- . Interpréter graphiquement.
3. Soit $h(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Montrer que h se prolonge par continuité en 0 et en 1, puis étudier la dérivabilité à droite en 0 du prolongement.
4. Soit α un rationnel strictement positif et $\varphi(x) = x^\alpha \ln x$ si $x > 0$, $\varphi(0) = 0$. Pour quelles valeurs de α la fonction φ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 41 Au-delà de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ ★★★

corrigé p. 55

1. Soient $a(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$ et $b(x) = \frac{x(2+x)}{2(1+x)} - \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$. Calculer $a'(x)$ et $b'(x)$, puis en déduire que
pour $x \geq 0$: $\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{x(2+x)}{2(1+x)}$ et, pour $-1 < x \leq 0$: $\frac{x(2+x)}{2(1+x)} \leq \ln(1+x) \leq \frac{2x}{2+x}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
3. Soit $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, et $\varphi(0) = 1$. Montrer que φ est continue et dérivable en 0 ; donner la tangente T à C_φ au point d'abscisse 0, puis montrer à l'aide de la question 1 que C_φ est au-dessus de T .
4. Soit $g(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que $\frac{1}{2(2x+1)} \leq g(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2(x+1)}$ pour tout $x > 0$. Interpréter graphiquement.

Exercice 42 Limites par les accroissements finis ★★★

corrigé p. 56

1. Soit $x > 0$. En appliquant le TAF à $t \mapsto t \ln t$ sur $[x, x+1]$, montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $(x+1) \ln(x+1) - x \ln x = 1 + \ln c$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1) \ln(x+1) - x \ln x - \ln x)$.
2. a) Montrer que, pour tout $x > 1$: $\frac{1}{(x+1) \ln(x+1)} < \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) < \frac{1}{x \ln x}$.
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x (\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x))$.
3. a) Montrer que, pour tout $u \in]0, 1[$: $1 - u < -\ln u < \frac{1-u}{u}$.
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)$ (on rappelle que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$).

20 Dérivées et primitives

Dériver avec $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ et $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$; pour primitiver, reconnaître $u'u^n$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{1+u^2}$, quitte à transformer l'expression d'abord. Une primitive se vérifie toujours en la dérivant.

Exercice 43 Dériver avec $\ln$, $\log_a$ et Arctan ★

corrigé p. 57

1. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle (ou l'ensemble) I indiqué, puis calculer $f'(x)$ sous forme simplifiée.

a) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$, $I =]0, +\infty[$ b) $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$, $I = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

c) $f(x) = \log_3(x^2 + 1)$, $I = \mathbb{R}$ d) $f(x) = \arctan(\ln x)$, $I =]0, +\infty[$

e) $f(x) = \ln(\arctan x)$, $I =]0, +\infty[$ f) $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$, $I =]1, +\infty[$

g) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$, $I =]-\pi, \pi[$ h) $f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $I =]0, 1[$

2. Soit $F(x) = \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $F'(x) = \frac{2}{\cos x}$ et en déduire une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur I .

Exercice 44 Reconnaître la bonne forme ★

corrigé p. 57

1. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I indiqué.

a) $\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$, $\mathbb{R}$ b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $\mathbb{R}$ c) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$, $]0, +\infty[$

d) $\frac{1}{x(4+(\ln x)^2)}$, $]0, +\infty[$ e) $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$, $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ f) $\frac{x^2}{1+x^6}$, $\mathbb{R}$

g) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$, $]0, +\infty[$ h) $\frac{1}{x^2-6x+13}$, $\mathbb{R}$ i) $\frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$, $]1, +\infty[$

2. Écrire $\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}$ sous la forme $ax + \frac{bx+c}{x^2+1}$, puis déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de cette fonction telle que $F(0) = 0$.

Exercice 45 Décomposer avant de primitiver ★★

corrigé p. 58

1. a) Déterminer les réels a, b, c tels que $\frac{2x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ pour tout $x \neq -1$.
 b) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{2x^2}{(x+1)(x^2+1)}$ sur $]-1, +\infty[$.
 2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+2x+2}$ (faire apparaître $\frac{u'}{u}$ et $\frac{v'}{1+v^2}$).
 3. Déterminer une primitive sur $]3, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2-4x+3}$.

4. a) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{(1+t)(2+t)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{2+t}$ pour tout réel $t \notin \{-2, -1\}$.
 b) En déduire la primitive F sur $\left] \frac{1}{e}, +\infty \right[$ de $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln x)(2+\ln x)}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 46 Deviner une primitive, puis vérifier ★★

corrigé p. 58

- Montrer que $F(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ est une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer les réels a et b tels que $G(x) = x \ln(1+x^2) + ax + b \arctan x$ soit une primitive de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les réels a et b tels que $H(x) = \sqrt{x}(a \ln x + b)$ soit une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.
- En cherchant K sous la forme $K(x) = \frac{a \ln x + b}{x} + c$, déterminer la primitive K de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 47 Une primitive qu'on ne calcule pas ★★★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$, et F la primitive de f sur $]0, +\infty[$ telle que $F(1) = 0$.

- Étudier les variations de F et en déduire que $F(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.
- En dérivant $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$, montrer que $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ pour tout $x > 0$.
- Soit $K(x) = 1 - \frac{1+\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Vérifier que $K'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ et que $K(1) = 0$.
- Montrer que, pour tout $x \geq 1$: $\frac{1}{2}K(x) \leq F(x) \leq K(x)$. En déduire que $0 \leq F(x) < 1$ pour tout $x > 0$.
- Montrer que la suite $(F(n))_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ tel que $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Exercice 48 Primitives de $\frac{1}{1+x^3}$ et de $\frac{x}{1+x^3}$ ★★★

corrigé p. 59

- Déterminer les réels a, b, c tels que $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ pour tout $x \neq -1$.
- Vérifier que $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)$, puis déterminer une primitive de $\frac{1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire la primitive F de $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ sur $]-1, +\infty[$ telle que $F(0) = 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- Vérifier que $\frac{x}{1+x^3} = \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{1+x^3}$. En déduire la primitive G de $x \mapsto \frac{x}{1+x^3}$ sur $]-1, +\infty[$ telle que $G(0) = 0$, et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

21

Études de fonctions

Domaine, symétries, limites, branches infinies, points sensibles, variations, concavité, tracé.

Exercice 49 Le logarithme d'un polynôme ★

corrigé p. 60

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

- Vérifier que $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. En déduire l'ensemble de définition D_f de f , puis que $f(x) = 2 \ln|x - 1| + \ln(x + 2)$ pour tout $x \in D_f$.
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f , ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- Montrer que $f'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+2)}$ sur D_f et dresser le tableau de variations de f . Montrer que C_f est concave sur chacun des deux intervalles qui forment D_f .
- Résoudre dans D_f les équations $f(x) = \ln 2$ et $f(x) = \ln 4$.
- Discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, puis tracer C_f .

Exercice 50 La fonction $x \mapsto \ln x + \frac{1}{\ln x}$ ★

corrigé p. 61

Soit f la fonction définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$, et C_f sa courbe.

- Calculer les limites de f en 0^+ , en 1^- , en 1^+ et en $+\infty$, ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ pour tout $x \in D$; que peut-on en déduire pour les points $M(x, f(x))$ et $M'\left(\frac{1}{x}, -f(x)\right)$? Montrer que $f'(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x(\ln x)^2}$ sur D et dresser le tableau de variations de f .
- En déduire que $\ln x + \frac{1}{\ln x} \geq 2$ pour tout $x > 1$, puis résoudre l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$. Discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, puis tracer C_f .

Exercice 51 La fonction $x \mapsto \frac{x}{x - \ln x}$ ★★

corrigé p. 62

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

- Étudier les variations de $g(x) = x - \ln x$ et en déduire que $g \geq 1$ (donc f est bien définie).
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, interpréter, et étudier la position de C_f par rapport à $D : y = 1$.
- Montrer que $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$ ($x > 0$) et dresser le tableau de variations de f . Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
- Donner la tangente T à C_f au point d'abscisse 1; montrer, avec $\ln x \leq x - 1$, que C_f est au-dessous de T , et préciser leurs points communs. Tracer D , T et C_f .

Exercice 52 Fonction auxiliaire et courbe asymptote ★★

corrigé p. 62

Soit $g(x) = x + 1 + \ln x$ pour $x > 0$, et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

1. Étudier les variations de g . Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α , avec $0,27 < \alpha < 0,28$, puis en déduire le signe de $g(x)$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$, dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.
4. Soit Γ la courbe de la fonction $\ln$. Étudier la position relative de C_f et de Γ , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$. Interpréter, puis tracer Γ et C_f .

Exercice 53 La fonction $x \mapsto \log_x(x+1)$ ★★★

corrigé p. 63

Soit f la fonction définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, et C_f sa courbe.

1. Calculer les limites de f en 0^+ , 1^- , 1^+ et $+\infty$; interpréter. On prolonge f par $f(0) = 0$: montrer que ce prolongement est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$.
2. Soit $\varphi(t) = t \ln t$ ($t > 0$). Montrer que $f'(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$ sur D et que $\varphi(x) < \varphi(x+1)$ pour tout $x > 0$ (distinguer $x < \frac{1}{e}$ et $x \geq \frac{1}{e}$). Dresser le tableau de variations de f et tracer C_f .
3. **a)** Montrer que la suite $(\log_n(n+1))_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et converge vers 1 ; en déduire que $\ln n \times \ln(n+2) < (\ln(n+1))^2$ pour tout entier $n \geq 2$. **b)** Résoudre dans $]1, +\infty[$ l'inéquation $\ln(x+1) \leq \log_2 3 \times \ln x$.

Exercice 54 La fonction entropie ★★★

corrigé p. 64

Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$ si $0 < x < 1$, et $h(0) = h(1) = 0$.

1. Montrer que h est continue sur $[0, 1]$ et que la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_h . Étudier la dérivabilité de h à droite en 0 et à gauche en 1 ; interpréter.
2. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$ pour $0 < x < 1$. Dresser le tableau de variations de h , étudier la concavité de C_h et la tracer.
3. En déduire que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $a \ln a + b \ln b \geq (a+b) \ln \frac{a+b}{2}$.
4. **Inégalité de Gibbs.** Soient $n \geq 2$ et des réels $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ strictement positifs tels que $\sum p_i = \sum q_i = 1$. **a)** À l'aide de $\ln t \leq t - 1$, montrer que $\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq 0$, avec égalité si et seulement si $p_i = q_i$ pour tout i . **b)** En déduire que $-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \ln n$ (cas d'égalité ?) et retrouver le maximum de h .

22 Suites et logarithme

On étudie $\ln u_n$, puis on revient à u_n ; les inégalités et les accroissements finis donnent les encadrements.

Exercice 55 Une convergence lente vers 1 ★

corrigé p. 64

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 1$.
2. Étudier les variations de $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$; en déduire que (u_n) est strictement décroissante.
3. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}$; que dire de la vitesse de convergence ?
4. Si $u_0 = \frac{1}{2}$, calculer u_1 et u_2 ; que se passe-t-il ? Montrer que si $0 < u_0 < 1$, la suite ne peut pas être définie pour tout n (par l'absurde, avec $\varphi(u_n) \geq \varphi(u_0)$).

Exercice 56 Revenir du logarithme ★

corrigé p. 65

1. **a)** Montrer que $1 - \frac{1}{t} \leq \ln t \leq t - 1$ pour tout réel $t > 0$. **b)** Soit (t_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim \ln t_n = 0$; montrer que $\lim t_n = 1$. En déduire que si $a_n > 0$ pour tout n et $\lim \ln a_n = \ln L$, avec $L > 0$, alors $\lim a_n = L$.
2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{\sqrt{u_n}}$. Montrer que $u_n > 0$ et que $v_n = \ln u_n - 2$ définit une suite géométrique. Exprimer u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.
3. Calculer les limites des suites de termes généraux $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$, $c_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ et $d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \geq 2$).

Exercice 57 Produits et logarithme ★★

corrigé p. 65

Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels positifs. On pose $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = (1 + a_1) \cdots (1 + a_n)$ et $S_n = a_1 + \cdots + a_n$.

1. Montrer que (P_n) est croissante et que $1 + S_n \leq P_n$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, puis que $\ln P_n \leq S_n$. En déduire que (P_n) converge si et seulement si (S_n) est majorée.
3. **a)** Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, puis que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ converge vers un réel $L \in [2, e^2]$. **b)** Montrer que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \rightarrow +\infty$. **c)** Calculer $\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right)$ et sa limite.
4. Montrer que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n + 1)$, puis que $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n + 1}}$ (utiliser $\ln(1 - x) \leq -x$). Limite ?

Exercice 58 Une récurrence qui suit $\ln n$ à la trace ★★

corrigé p. 66

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, u_n est bien défini et $0 < u_n \leq n$. Calculer u_2 et u_3 .
2. Montrer que $u_{n+1} - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \frac{u_n - 1}{n+1}\right)$, puis, avec $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$ ($t > -1$), que $|u_{n+1} - \ln(n+1)| \leq \frac{|u_n - 1|}{n}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $u_n \leq 1 + \ln n$ pour tout $n \geq 1$, puis que $|u_{n+1} - \ln(n+1)| \leq \frac{\ln n}{n}$ pour $n \geq 3$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ln n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} (u_n - \ln n) = 1$.

Exercice 59 Une suite implicite : x_n est proche de $\frac{\ln n}{n}$ ★★★

corrigé p. 66

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $h_n(x) = nx + \ln x$ pour $x > 0$.

1. Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$, que $x_n < 1$, et que $x_n > \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$.
2. Calculer $h_{n+1}(x_n)$ et en déduire que (x_n) est strictement décroissante. Montrer que $x_n < \frac{\ln n}{n}$ pour $n \geq 3$ et en déduire $\lim x_n$.
3. On pose $y_n = nx_n$. Montrer que $y_n + \ln y_n = \ln n$ et que $1 < y_n < \ln n$ pour $n \geq 3$.
4. En déduire que $\lim y_n = +\infty$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx_n}{\ln n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx_n - \ln n + \ln(\ln n)) = 0$.

Exercice 60 Une somme de logarithmes et les accroissements finis ★★★

corrigé p. 67

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$, et pour $x \geq 0$: $F(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$.

1. Calculer $F'(x)$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$; en appliquant le théorème des accroissements finis à F sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, montrer que

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) < F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

2. En déduire que $2 \ln 2 - 1 < S_n < 2 \ln 2 - 1 + \frac{\ln 2}{n}$, puis la limite de (S_n) .
3. On pose $w_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$. Montrer que $\ln w_n = S_n$ et en déduire $\lim w_n$ (on pourra utiliser l'exercice 56, question 1).
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer de même la limite de $\frac{1}{n^p} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots ((p+1)n)}$.

23

Défis de concours

Six problèmes de concours : initiative et rigueur exigées.

Exercice 61 La constante d'Euler ★★★★★

corrigé p. 67

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

- Montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ pour tout entier $k \geq 1$. En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; leur limite commune γ est la **constante d'Euler**. Montrer que $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.
- On admet que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour tout $x \geq 0$. **a)** Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} \leq u_k - u_{k+1} \leq \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k}.$$
b) En déduire que $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(H_n - \ln n - \gamma)$.
- Une somme réordonnée.** Soit s_n la somme des n premiers termes de $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$ (deux inverses d'impairs, puis l'opposé d'un inverse de pair). Montrer que $s_{3n} = H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$, puis que (s_n) converge vers $\frac{3}{2} \ln 2$.

Exercice 62 Vers la formule de Stirling ★★★★★

corrigé p. 68

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$.

- Montrer que $u_n - u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.
- Pour $t \in [0, 1[$, on pose $\psi(t) = \ln \frac{1+t}{1-t}$. Montrer que $2t + \frac{2t^3}{3} \leq \psi(t) \leq 2t + \frac{2t^3}{3(1-t^2)}$.
- En appliquant la question 2 à $t = \frac{1}{2n+1}$, montrer que $\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12(n+2)} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$.
- En déduire que les suites (u_n) et $\left(u_n - \frac{1}{12n}\right)$ sont adjacentes ; on note C leur limite. Montrer que $\frac{1}{12(n+1)} \leq u_n - C \leq \frac{1}{12n}$ pour tout $n \geq 1$, puis que $0,91 < C < 0,94$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - C$.

Exercice 63 Caractériser le logarithme ★★★★★

corrigé p. 69

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y > 0$. On pose $a = f(e)$.

- Montrer que $f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, puis que $f(x^r) = r f(x)$ pour tout $x > 0$ et tout rationnel r . En déduire $f(e^r) = ar$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
- On suppose dans cette question que f est croissante. Soit $x > 0$; pour $n \geq 1$, on pose $p_n = E(n \ln x)$. Montrer que $e^{p_n} \leq x^n < e^{p_n+1}$, puis que $ap_n \leq n f(x) \leq a(p_n + 1)$. En déduire que $f(x) = a \ln x$.
- On suppose seulement que f est continue en 1. **a)** Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$. **b)** Soit $x > 0$; pour $n \geq 2$, on reprend p_n et on pose $t_n = x e^{-\frac{p_n}{n}}$. Montrer que $1 \leq t_n < e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n-1}$, puis que $f(x) = a \ln x$.

4. Déterminer toutes les fonctions g continues sur $]0, +\infty[$ telles que $g(xy) = xg(y) + yg(x)$ pour tous $x, y > 0$.

Exercice 64 Une somme alternée remarquable ★★★★★

corrigé p. 69

Pour $n \geq 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ et $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \dots$. On admet (exercice

61) que $H_n - \ln n \rightarrow \gamma$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ pour $x > 0$. Montrer que $F' = \varphi$ et que φ est décroissante sur $[e, +\infty[$. En déduire que $\varphi(k+1) \leq F(k+1) - F(k) \leq \varphi(k)$ pour tout entier $k \geq 3$.
2. On pose $w_n = T_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$. Montrer que $(w_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée par $\frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$; en déduire qu'elle converge.
3. Montrer que $A_{2n} = \ln 2 \times H_n + T_n - T_{2n}$, puis que (A_n) converge vers $\gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Exercice 65 Moyennes de Césàro et racines n -ièmes ★★★★★

corrigé p. 70

1. **Lemme de Césàro.** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle de limite ℓ . Montrer que $m_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ tend vers ℓ (pour $\varepsilon > 0$, couper la somme en deux).
2. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow L$, avec $L > 0$. Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow L$. (On admet, voir l'exercice 56, que si $b_n > 0$ et $\ln b_n \rightarrow \ln L$, alors $b_n \rightarrow L$.)
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$. Montrer, avec $u_n = 2 + (-1)^n$, que la réciproque de 2 est fautive.

Exercice 66 L'inégalité de Carleman ★★★★★

corrigé p. 70

Soient $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. On veut démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} < e \sum_{k=1}^n a_k.$$

1. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j < e$ pour tout entier $j \geq 1$. **Inégalité arithmético-géométrique :** soient $x_1, \dots, x_k > 0$ et $G = \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k}$. En appliquant l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ aux réels $\frac{x_i}{G}$, montrer que $G \leq \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$.
2. Pour $j \geq 1$, on pose $c_j = \frac{(j+1)^j}{j^{j-1}}$. Calculer $c_1 c_2 \dots c_k$, puis montrer que $\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \leq \frac{a_1 c_1 + \dots + a_k c_k}{k(k+1)}$.
3. Conclure, en sommant pour k de 1 à n et en intervertissant les deux sommes.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

24 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

On reconnaît $u'u^n$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ou $\frac{u'}{1+u^2}$: a) $x(x^2+1)^3 = \frac{1}{2}u'u^3$ avec $u = x^2+1$; b) $\frac{u'}{u^2}$ avec $u = x^3+1 > 0$; c) $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = x^2+3x+5 > 0$ (discriminant $-11 < 0$) ; d) $-u'u^3$ avec $u = \cos x$; e) $\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1+(x/2)^2}$; f) $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \sin x$. D'où les primitives

a) $\frac{1}{8}(x^2+1)^4$ b) $-\frac{1}{x^3+1}$ c) $2\sqrt{x^2+3x+5}$ d) $-\frac{1}{4}\cos^4 x$ e) $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2}$ f) $\arctan(\sin x)$.

g) Avec $u = 1 + \frac{1}{x}$, $u' = -\frac{1}{x^2}$: la fonction vaut $-u'u^2$, donc $G(x) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 + C$; $G(1) = -\frac{8}{3} + C = 0$:

$$G(x) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3.$$

■ Corrigé de l'exercice 2

1. $0,0036 = \frac{36}{10^4} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3^2}{2^2 \cdot 5^4}$: $A = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - 4 \ln 5$; $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$: $B = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 5$.

$\ln 8 + \ln 27 = 3 \ln 2 + 3 \ln 3 = 3 \ln 6$ et $\ln 36 = 2 \ln 6$: $C = 1$. $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})$: $D = \ln 2$.

2. Pour $x > 0$, on applique l'inégalité à $\frac{1}{x}$: $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$, avec égalité si et seulement si $\frac{1}{x} = 1$. Pour $x = 2 \neq 1$, les deux inégalités sont strictes : $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$. Comme $\ln$ est strictement croissante, $\ln 2 < 1 = \ln e$ donne $2 < e$, et $\ln 4 = 2 \ln 2 > 1 = \ln e$ donne $e < 4$.

■ Corrigé de l'exercice 3

a) $D : x(x-4) > 0$ et $x > 4$, soit $D =]4, +\infty[$. Sur D : $x^2 - 4x = 3x - 12 \iff x^2 - 7x + 12 = 0 \iff x \in \{3, 4\}$; aucune n'est dans D : $S = \emptyset$.

b) $D =]-1, +\infty[$; $\ln((x+1)^2) = \ln(x+7) \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x \in \{2, -3\}$: $S = \{2\}$.

c) $D =]3, +\infty[$; $\frac{1}{2} \ln(x+3) = \ln(x-3) \iff x+3 = (x-3)^2 \iff x^2 - 7x + 6 = 0 \iff x \in \{1, 6\}$: $S = \{6\}$.

d) $D = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$; $\frac{x+1}{2x-1} \geq 2 \iff x+1 \geq 4x-2$ (car $2x-1 > 0$) $\iff x \leq 1$: $S = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

e) $D =]-4, 2[; (2-x)(x+4) \leq x+10 \iff x^2+3x+2 \geq 0 \iff (x+1)(x+2) \geq 0 : S =]-4, -2] \cup [-1, 2[.$

f) $D =]0, +\infty[$, où $\ln(x^2) = 2 \ln x$. Avec $X = \ln x : X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3) \leq 0 \iff -1 \leq X \leq 3 :$
 $S = \left[\frac{1}{e}, e^3 \right].$

g) Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y : 2X + Y = 7$ et $X - 3Y = -7$ donnent $X = 2, Y = 3 : S = \{(e^2, e^3)\}.$

■ Corrigé de l'exercice 4

a) C'est $\ln \frac{2x+1}{x+3}$, et $\frac{2x+1}{x+3} \rightarrow 2$: par continuité de $\ln$, la limite vaut $\ln 2$.

b) $x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x \ln(1+x^2) - 2x \ln x \rightarrow 0 - 0 = 0$ ($x \ln x \rightarrow 0$).

c) $x - \sqrt{x} \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ et $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ (croissances comparées) : $+\infty$.

d) $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x} \rightarrow 1 \times 2 = 2.$

e) $\frac{(\ln x)^2}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{\ln x}{x^{1/6}}\right)^2 \rightarrow 0$ (croissances comparées avec $\alpha = \frac{1}{6}$).

f) $\ln(x+x^2) = \ln x + \ln(1+x)$, donc le quotient vaut $\frac{1}{1+\frac{\ln(1+x)}{\ln x}} \rightarrow 1$, car $\ln(1+x) \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 5

a) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} \ln x + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}(3 \ln x + 2)}{2}$; c) $\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ ($(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$) ; d) pour $x > 0$,

$\ln(1+x^2) > 0$ et $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)}.$

e) $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, donc $u = \sqrt{x^2+1} - x > 0$ sur $\mathbb{R}$; $u' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{-u}{\sqrt{x^2+1}}$, d'où

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

f) $f'(x) = \frac{-1/x^2}{1+1/x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$. Cette fonction φ est strictement décroissante et tend vers $0 - 0 = 0$ en $+\infty$; pour $t > x+1 : \varphi(x) > \varphi(x+1) > \varphi(t)$, et $t \rightarrow +\infty$ donne $\varphi(x+1) \geq 0$. Donc $\varphi(x) > 0 : \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}.$

■ Corrigé de l'exercice 6

a) $-\frac{1}{2} \ln(3-2x)$; b) $u = x^3 + 3x + 1 > 0$ sur I , $u' = 3(x^2+1) : \frac{1}{3} \ln(x^3+3x+1)$; c) $u = x - \frac{1}{x} > 0$ sur I , $u' = 1 + \frac{1}{x^2} : \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$; d) $u = x \ln x > 0$, $u' = \ln x + 1 : \ln(x \ln x)$; e) $u = \arctan x > 0$, $u' = \frac{1}{1+x^2} : \ln(\arctan x)$; f) $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$; en multipliant par $x-2$ puis en faisant $x=2 : a = \frac{-3}{3} = -1$; de même $b = \frac{-6}{-3} = 2 : -\ln(x-2) + 2 \ln(x+1) = \ln \frac{(x+1)^2}{x-2}.$

g) Sur $]e, +\infty[: \ln x > 1$ et $\ln(\ln x) > 0$; avec $u = \ln(\ln x)$, $u' = \frac{1}{x \ln x}$, la fonction est $\frac{u'}{u} : G(x) = \ln(\ln(\ln x)) + C$, et $G(e^2) = \ln(\ln 2) + C = 0 : G(x) = \ln(\ln(\ln x)) - \ln(\ln 2).$

■ Corrigé de l'exercice 7

$$1. A = \frac{3 \ln 2}{2 \ln 2} - \frac{3 \ln 3}{2 \ln 3} = \boxed{0} \text{ et } B = \frac{3 \ln 2}{\frac{1}{2} \ln 2} = \boxed{6}.$$

$$a) x > 0 \text{ et } \log_9(x+6) = \frac{\ln(x+6)}{2 \ln 3} : 2 \ln x = \ln(x+6) \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x \in \{3, -2\} : S = \{3\}.$$

$$b) x > 1 ; \ln((x-1)(x+1)) = 3 \ln 2 \iff x^2 = 9 : S = \{3\}. \quad c) x > \frac{1}{2} ; \text{ comme } \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 < 0 :$$

$$\frac{\ln(2x-1)}{-\ln 2} \geq -1 \iff \ln(2x-1) \leq \ln 2 \iff x \leq \frac{3}{2} : S = \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]. \quad d) \frac{3 \ln 2}{\ln x} = \frac{3}{2} \iff \ln x = 2 \ln 2 : S = \{4\}.$$

$$2. \ln \text{ est strictement croissante : } 2^{k-1} \leq N < 2^k \iff k-1 \leq \log_2 N < k \iff k-1 = E(\log_2 N). \text{ Ici } \log_2(10^{12}) = \frac{12 \ln 10}{\ln 2} \approx 39,86 : 10^{12} \text{ s'écrit avec } \boxed{40} \text{ chiffres en base 2.}$$

■ Corrigé de l'exercice 8

$$1. \text{ En } 0^+ : 2 + \ln x \rightarrow -\infty \text{ et } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, \text{ donc } f \rightarrow -\infty : \text{ asymptote } x = 0. \text{ En } +\infty : f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 : \text{ asymptote } y = 0.$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (2 + \ln x)}{x^2} = -\frac{1 + \ln x}{x^2} : \text{ positif sur } \left] 0, \frac{1}{e} \right], \text{ négatif sur } \left] \frac{1}{e}, +\infty \right[, \text{ et } f\left(\frac{1}{e}\right) = e(2-1) = e. \text{ Donc } f(x) \leq e, \text{ soit } 2 + \ln x \leq ex : \boxed{\ln x \leq ex - 2}.$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	e	0

$$2. f(x) = 0 \iff \ln x = -2 : \text{ point } \left(\frac{1}{e^2}, 0\right). \quad f(1) = 2, f'(1) = -1 : \text{ tangente } \boxed{y = -x + 3}. \quad f''(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 + \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 + 2 \ln x}{x^3} \text{ ne s'annule, en changeant de signe, qu'en } x = \frac{1}{\sqrt{e}} : \text{ unique point d'inflexion } \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3}{2}\sqrt{e}\right).$$

25

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

$$a) \varphi(x) = \ln(\tan x) : \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \varphi'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}, \varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 ; \text{ le quotient vaut } \frac{1}{4} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(\pi/4)}{x - \pi/4} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$b) \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 1 + u \text{ avec } u = -\frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow 0 : x^2 \ln(1+u) = -\frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow \boxed{-1}.$$

$$c) \sqrt[3]{x^2} - (\ln x)^4 = x^{2/3} \left(1 - \left(\frac{\ln x}{x^{1/6}}\right)^4\right) \rightarrow \boxed{+\infty}.$$

$$d) \frac{(\ln x - \ln 1)/(x-1)}{(\arctan x - \arctan 1)/(x-1)} \rightarrow \frac{\ln'(1)}{\arctan'(1)} = \frac{1}{1/2} = \boxed{2}.$$

$$e) 0 \leq \ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k \leq n \ln n, \text{ donc } 0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 : \text{ la limite est } \boxed{0}.$$

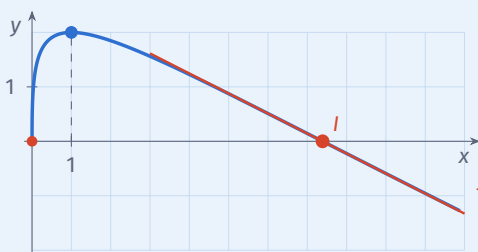
■ Corrigé de l'exercice 10

$$1. \sqrt{x} \ln x = 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} \rightarrow 0 \text{ (} t \ln t \rightarrow 0 \text{)}, \text{ donc } f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x} \ln x \rightarrow 0 = f(0) : f \text{ est continue à droite en } 0. \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{2 - \ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty : f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0, \text{ demi-tangente verticale en } 0.$$

$$\text{En } +\infty : f(x) \rightarrow -\infty \text{ et } \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 : \text{ branche parabolique de direction } (Ox).$$

2. $f'(x) = \frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x} = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$: f croît sur $[0, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$, de maximum $f(1) = 2$. Ainsi $\sqrt{x}(2 - \ln x) \leq 2$, soit $\ln x \geq 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$.
3. $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2} \ln x$, donc $f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2} \ln x + x^{-3/2}\right) = \frac{\ln x - 2}{4x\sqrt{x}}$: C_f est concave sur $[0, e^2]$, convexe sur $[e^2, +\infty[$; point d'inflexion $I(e^2, 0)$ ($f(e^2) = e(2 - 2) = 0$), et $f'(e^2) = -\frac{2}{2e}$: $T : y = -\frac{x}{e} + e$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	2	$-\infty$



4. g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, $g(1) = 2$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$: bijection sur $J =]-\infty, 2]$. $g(e^2) = 0$ et $g'(e^2) = -\frac{1}{e} \neq 0$: $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(e^2)} = -e$. Mais $g'(1) = 0$: quand $y \rightarrow 2^-$, $x = g^{-1}(y) \rightarrow 1^+$ et $\frac{g^{-1}(y)-1}{y-2} = \frac{x-1}{g(x)-g(1)} \rightarrow -\infty$ (car $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \rightarrow 0^-$) : g^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 2 (demi-tangente verticale).

■ Corrigé de l'exercice 11

1. $\varphi(x) = f(x) - x = 4 - \ln x - x$ est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, de $+\infty$ (en 0^+) à $-\infty$: elle s'annule en un unique α . $\varphi(2,9) \approx 0,035 > 0$ et $\varphi(3) \approx -0,099 < 0$: $2,9 < \alpha < 3$. f est décroissante, $f(e) = 3$ et $f(3) = 4 - \ln 3 \approx 2,901 > e$: $f([e, 3]) = [4 - \ln 3, 3] \subset [e, 3]$. Comme $u_0 \in [e, 3]$, une récurrence donne $e \leq u_n \leq 3$.
2. $u_1 = 4 - \ln 3 \approx 2,901$ et $u_2 = 4 - \ln u_1 \approx 2,935$: $u_0 > u_1 < u_2$, (u_n) n'est pas monotone. $f \circ f$ est strictement croissante sur $[e, 3]$ (composée de deux fonctions strictement décroissantes, et $f([e, 3]) \subset [e, 3]$). Comme $u_2 < u_0$, une récurrence donne $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) < f \circ f(u_{2n-2}) = u_{2n}$: (u_{2n}) décroît. De même $u_3 = f(u_2) > f(u_0) = u_1$ et (u_{2n+1}) croît.
3. $\alpha \in [e, 3]$ et $|f'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{e}$ sur $[e, 3]$; l'inégalité des accroissements finis entre u_n et α donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$. Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ ($0 < 3 - \alpha < 0,1$) ; comme $0 < \frac{1}{e} < 1$, $\lim u_n = \alpha$. Enfin $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{e}\right)^n < 10^{-6} \iff n > 5 \ln 10 \approx 11,5$: $n_0 = 12$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$: $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x}$; $\psi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$: $\psi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$. Les deux fonctions décroissent sur $]-1, 0]$, croissent sur $[0, +\infty[$ et s'annulent en 0 : elles sont positives. Avec $x = \frac{1}{k}$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}$.
2. En sommant $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ ($1 \leq k \leq n$) : $\ln(n+1) \leq H_n$; en sommant $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k$ ($1 \leq k \leq n-1$) : $H_n - 1 \leq \ln n$. Donc $\lim H_n = +\infty$; et $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \rightarrow 1$, $\frac{1+\ln n}{\ln n} \rightarrow 1$: $\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1$. Si $H_n \geq 10$, alors $1 + \ln n \geq 10$, donc $n \geq e^9 \approx 8\,103,08$, soit $n \geq 8\,104$. (En fait H_n dépasse 10 pour la première fois en $n = 12\,367$.)

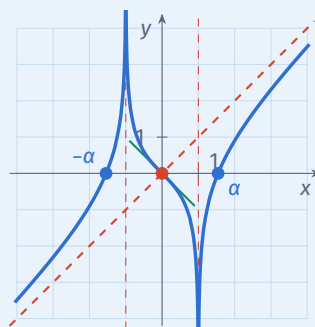
■ Corrigé de l'exercice 13

- Pour $x > 1$: $0 < 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$; en divisant par $x - 1 > 0$: $\frac{1}{x} < g(x) < 1$. Pour $0 < x < 1$, on divise par $x - 1 < 0$: $1 < g(x) < \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x} \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1$ (gendarmes) : on prolonge par $g(1) = 1$. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $x - 1 \rightarrow -1$, donc $g \rightarrow +\infty$; en $+\infty$: $g(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1-1/x} \rightarrow 0$.
- $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{h(x)}{(x-1)^2}$, et $h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$: h a pour maximum $h(1) = 0$, donc $h(x) < 0$ si $x \neq 1$. Ainsi g décroît strictement sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$; avec 1., $g(x) > 1 = g(1) > g(y)$ si $x < 1 < y$: g est strictement décroissante (et continue) sur $]0, +\infty[$.
- D_m : $y = m(x-1)$. Les abscisses des points communs sont les solutions de $\ln x = m(x-1)$: $x = 1$, et, pour $x \neq 1$, les solutions de $g(x) = m$. g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$; $g(x) = m$ a une solution $x \neq 1$ (unique) si et seulement si $m > 0$ et $m \neq g(1) = 1$. **Bilan** : deux points si $m \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$; un seul (A) si $m \leq 0$ ou $m = 1$. Pour $m = 1$, D_1 : $y = x - 1$ est la **tangente** en A, et la courbe est au-dessous ($\ln x < x - 1$ pour $x \neq 1$).

■ Corrigé de l'exercice 14

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, symétrique, et $f(-x) = -x + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = -f(x)$: f est **impaire**. En $\pm\infty$: $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow 1$, donc $f(x) - x = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \rightarrow 0$: $f \rightarrow \pm\infty$ et Δ est asymptote. En $1^\pm$: $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \rightarrow 0^+$, $f \rightarrow -\infty$; en $(-1)^\pm$: $f \rightarrow +\infty$: asymptotes verticales $x = 1$ et $x = -1$. Comme $(x-1)^2 - (x+1)^2 = -4x$, $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1 \iff x > 0$: C_f est **au-dessous** de Δ pour $x > 0$, **au-dessus** pour $x < 0$, et la coupe en O.
- Sur D : $f(x) = x + \ln |x-1| - \ln |x+1|$, d'où $f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, du signe de x^2-1 . Puis $f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$: convexe sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, concave sur $]0, 1[$ et sur $]-1, 0[$; point d'inflexion O, de tangente $y = -x$ ($f'(0) = -1$).

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$



- Sur $]-1, 1[$, f est strictement décroissante et $f(0) = 0$: seul zéro 0. Sur $]1, +\infty[$, f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: un unique zéro α ; $f(1,5) = 1,5 + \ln 0,2 \approx -0,109 < 0$ et $f(1,6) = 1,6 + \ln \frac{3}{13} \approx 0,134 > 0$: $1,5 < \alpha < 1,6$ ($\alpha \approx 1,543$). Par imparité, $-\alpha$ est l'unique zéro sur $]-\infty, -1[$.

■ Corrigé de l'exercice 15

- T_t : $y = \frac{x-t}{t} + \ln t$. Soit $d(x) = \frac{x-t}{t} + \ln t - \ln x$: $d'(x) = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}$ est négatif sur $]0, t[$, positif sur $]t, +\infty[$, donc $d \geq d(t) = 0$: Γ est sous T_t . Et $M \in T_t \iff b = \frac{a}{t} - 1 + \ln t \iff \varphi_a(t) = b + 1$.
- Si $a < 0$: $\varphi'_a(t) = \frac{1}{t} - \frac{a}{t^2} > 0$, $\varphi_a \rightarrow -\infty$ en 0^+ (deux termes tendant vers $-\infty$) et $\rightarrow +\infty$ en $+\infty$: φ_a est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, une seule tangente ; si $a = 0$, $\varphi_0 = \ln$: de même. Si $a > 0$: $\varphi'_a(t) = \frac{t-a}{t^2}$, φ_a décroît sur $]0, a[$, croît sur $]a, +\infty[$, de minimum $\ln a + 1$; $\varphi_a(t) = \frac{a+t \ln t}{t} \rightarrow +\infty$ en

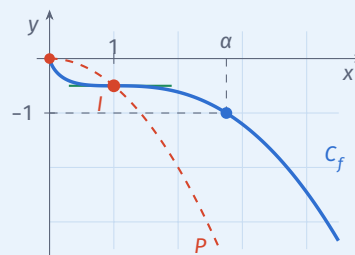
0^+ , et $\varphi_a \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Par le TVI sur chaque intervalle de monotonie, $\varphi_a(t) = b + 1$ a 0, 1 ou 2 solutions selon que $b < \ln a$ (M au-dessous de Γ), $b = \ln a$ ($M \in \Gamma$) ou $b > \ln a$ (M au-dessus).

$O : a = 0$, une seule tangente ; $\ln t = 1, t = e : T_e : y = \frac{x}{e}$. $B(1, 1) : a = 1 > 0$ et $1 > \ln 1$: **deux** tangentes (points de contact d'abscisses $t \approx 0,318$ et $t \approx 6,305$, solutions de $\ln t + \frac{1}{t} = 2$).

■ Corrigé de l'exercice 16

- $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ (cours), donc $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0. $\frac{f(x)}{x} = \ln x - \frac{x}{2} \rightarrow -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0, **demi-tangente verticale** en O . En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} \right) \rightarrow -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} \right) \rightarrow -\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy) .
- $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - x = 1 + \ln x - x \leq 0$, car $\ln x \leq x - 1$, avec égalité seulement en $x = 1$. Donc f , continue sur $[0, +\infty[$, avec $f' < 0$ sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, est strictement décroissante, de $f(0) = 0$ à $-\infty$: bijection de $[0, +\infty[$ sur $]J =]-\infty, 0]$ (et $f(x) < 0$ pour $x > 0$). Comme $-1 \in J$, $f(x) = -1$ a une unique solution α ; $f(2,7) \approx 2,7 \times 0,993 - 3,645 \approx -0,964 > -1$ et $f(2,8) \approx 2,8 \times 1,030 - 3,92 \approx -1,036 < -1$: $2,7 < \alpha < 2,8$ ($\alpha \approx 2,751$).
- $f''(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$: C_f est convexe sur $[0, 1]$, concave sur $[1, +\infty[$: unique point d'inflexion $I \left(1, -\frac{1}{2} \right)$, où $f'(1) = 0$: tangente **horizontale** $y = -\frac{1}{2}$. Et $f(x) - \left(-\frac{x^2}{2} \right) = x \ln x$: C_f est **au-dessous** de P sur $]0, 1[$, **au-dessus** sur $]1, +\infty[$; elles se coupent en O et en I .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$



26

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- $\varphi(x) = x \ln N - x \ln x$, $\varphi'(x) = \ln N - \ln x - 1 = \ln \frac{N}{ex}$: φ croît sur $]0, \frac{N}{e}]$, décroît sur $[\frac{N}{e}, +\infty[$, maximum $\varphi\left(\frac{N}{e}\right) = \frac{N}{e}$. Et $\ln P_k = k \ln \frac{N}{k} = \varphi(k)$. Soit $k_0 = E\left(\frac{N}{e}\right) \geq 1$ (car $N \geq e$) : $k_0 \leq \frac{N}{e} < k_0 + 1$, donc $(\varphi(k))$, et (P_k) avec $(\ln$ croissante), croît pour $k \leq k_0$ et décroît pour $k \geq k_0 + 1$: le maximum est atteint en k_0 ou en $k_0 + 1$.
- $P_{k+1} > P_k \iff \frac{N^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} > \frac{N^k}{k^k} \iff N > \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$. Or $\frac{4^4}{3^3} \approx 9,48$, $\frac{5^5}{4^4} \approx 12,2$, $\frac{7^7}{6^6} \approx 17,65$, $\frac{8^8}{7^7} \approx 20,37$. Pour $N = 10$: $P_4 > P_3$ et $P_5 < P_4$, d'où (monotonie par morceaux) $k = 4$, $P_4 = 2,5^4 \approx 39,1$. Pour $N = 20$: $P_7 > P_6$ et $P_8 < P_7$: $k = 7$, $P_7 \approx 1555$. (On retrouve k voisin de $\frac{N}{e} \approx 3,7$ et $7,4$.)

■ Corrigé de l'exercice 18

1. $F'(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $F''(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ sur $[e, +\infty[$: F' y décroît. Pour $k \geq 3$, $[k, k+1] \subset [e, +\infty[$ et le TAF donne $c \in]k, k+1[$ tel que $F(k+1) - F(k) = F'(c)$, avec $F'(k+1) \leq F'(c) \leq F'(k)$.
2. $T_{n+1} - T_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - (F(n+1) - F(n)) \leq 0$ pour $n \geq 3$. Et, F croissant sur $[1, +\infty[$:

$$T_n = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} - F(n) \geq \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^n (F(k+1) - F(k)) - F(n) = \frac{\ln 2}{2} + F(n+1) - F(3) - F(n) \geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}.$$

Décroissante et minorée, (T_n) converge (vers $\approx -0,0728$). Enfin $\frac{S_n}{(\ln n)^2} = \frac{1}{2} + \frac{T_n}{(\ln n)^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$.

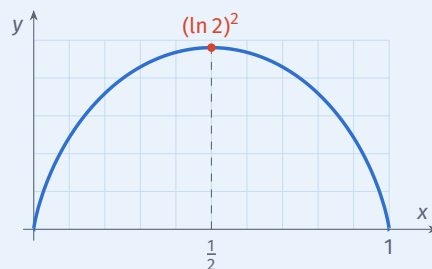
■ Corrigé de l'exercice 19

1. $\ln x \rightarrow -\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$: $f \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (asymptotes $y = \pm \frac{\pi}{2}$). $f'(x) = \frac{1}{x(1+(\ln x)^2)} > 0$: f , continue et strictement croissante, est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. $f(e) = \frac{\pi}{4}$ et $f'(e) = \frac{1}{2e}$: $(f^{-1})'(\frac{\pi}{4}) = \boxed{2e}$.
2. $f' = \frac{1}{x+x(\ln x)^2}$, donc $f''(x) = -\frac{1+(\ln x)^2+2\ln x}{(x+x(\ln x)^2)^2} = -\frac{(1+\ln x)^2}{x^2(1+(\ln x)^2)^2} \leq 0$: la courbe est concave ; f'' s'annule en $\frac{1}{e}$ **sans changer de signe** : pas de point d'inflexion. Tangente en $(1, 0)$: $y = x - 1$ ($f'(1) = 1$). $d(x) = x - 1 - f(x)$ a pour dérivée $1 - f'(x)$, avec f' décroissante et $f'(1) = 1$: $d' \leq 0$ sur $]0, 1]$, $d' \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, d'où $d \geq d(1) = 0$: $\arctan(\ln x) \leq x - 1$. Enfin $f(\frac{1}{x}) = \arctan(-\ln x) = -f(x)$, donc $-f(x) = f(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} - 1$: $\arctan(\ln x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

■ Corrigé de l'exercice 20

1. $f(1-x) = \ln(1-x)\ln x = f(x)$: C_f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$. Sur $]0, 1[$, $\ln x < 0$ et $\ln(1-x) < 0$: $f > 0$. $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{-x} \cdot (-x \ln x) \rightarrow 1 \times 0 = 0$ en 0^+ (et en 1^- par symétrie). $\frac{f(x)}{x} = \ln x \cdot \frac{\ln(1-x)}{1-x} \rightarrow (-\infty) \times (-1) = +\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 ; demi-tangentes verticales en O et en $(1, 0)$.
2. $f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\varphi(x)}{x(1-x)}$. $\varphi'(x) = -\ln(1-x) - 1 - \ln x - 1 = -\ln(x(1-x)) - 2$ et $\varphi''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2x-1}{x(1-x)} < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$.

φ' décroît strictement de $+\infty$ (en 0^+) à $\varphi'(\frac{1}{2}) = 2 \ln 2 - 2 < 0$: elle s'annule en un unique c ; φ croît sur $]0, c]$, décroît sur $[c, \frac{1}{2}]$, et $\lim_{0^+} \varphi = 0 = \varphi(\frac{1}{2})$: $\varphi > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$. Comme $\varphi(1-x) = -\varphi(x)$, $\varphi < 0$ sur $] \frac{1}{2}, 1[$. Donc f croît sur $[0, \frac{1}{2}]$, décroît sur $[\frac{1}{2}, 1]$; maximum $f(\frac{1}{2}) = (\ln 2)^2 \approx 0,48$. Si $a, b > 0$ et $a + b = 1$: $\ln a \cdot \ln b = f(a) \leq (\ln 2)^2$.



■ Corrigé de l'exercice 21

1. La tangente en M a pour équation $y = f'(x)(X-x) + f(x)$; pour $X = 0$: $y_p = f(x) - xf'(x)$, donc $y_H - y_p = xf'(x)$. Pour $f = \ln$: $y_H - y_p = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (P est toujours une unité au-dessous de H). Réciproquement, $y_H - y_p = k \iff f'(x) = \frac{k}{x} \iff (f - k \ln)' = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[\iff f = k \ln + C$ ($C \in \mathbb{R}$) ; pour $k = \frac{1}{\ln a}$, ce sont les fonctions $\log_a + C$.

2. $y_p = -x \iff xf'(x) - f(x) = x \iff \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \iff \frac{f(x)}{x} = \ln x + C \iff f(x) = x \ln x + Cx$. Alors $f'(x) = \ln x + 1 + C$; un minimum en 1 impose $f'(1) = 0$, soit $C = -1$. Réciproquement, $f(x) = x \ln x - x$ a pour dérivée $\ln x$, négative sur $]0, 1]$, positive sur $[1, +\infty[$: minimum $f(1) = -1$.
3. $y_p = \frac{f(x)}{2} \iff xf'(x) = \frac{f(x)}{2} \iff \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \iff \left(\ln f(x) - \frac{1}{2} \ln x\right)' = 0 \iff \ln \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \ln f(1)$ (valeur en 1) $\iff f(x) = f(1)\sqrt{x}$. Réciproquement, $A\sqrt{x}$ ($A > 0$) convient : $A\sqrt{x} - x \cdot \frac{A}{2\sqrt{x}} = \frac{A\sqrt{x}}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 22

1. $\log_2 3 > \frac{3}{2} \iff 2 \ln 3 > 3 \ln 2 \iff 9 > 8$; $\log_3 5 < \frac{3}{2} \iff 2 \ln 5 < 3 \ln 3 \iff 25 < 27$. Donc $\log_2 3 > \log_3 5$.
2. $\psi'_c(x) = \frac{\frac{\ln x}{x+c} - \frac{\ln(x+c)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+c) \ln(x+c)}{x(x+c)(\ln x)^2}$. $\theta(t) = t \ln t$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ ($\theta'(t) = 1 + \ln t > 0$), donc $\theta(x) < \theta(x+c)$ et $\psi'_c < 0$. En 1^+ : $\ln(x+c) \rightarrow \ln(1+c) > 0$ et $\ln x \rightarrow 0^+$, donc $\psi_c \rightarrow +\infty$; en $+\infty$: $\psi_c(x) = 1 + \frac{\ln(1+c/x)}{\ln x} \rightarrow 1$.
3. $\log_k(k+1) = \psi_1(k)$: $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5 > \log_5 6$. $\log_3 10 = \frac{2 \ln 10}{\ln 9} = 2\psi_1(9) > 2\psi_1(16) = \frac{2 \ln 17}{\ln 16} = \log_4 17$. Enfin $\log_x(x+2) = \psi_2(x)$, $\psi_2(2) = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$ et ψ_2 décroît strictement : $\psi_2(x) > 2 \iff x < 2$; $S =]1, 2[$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. a) $\frac{1}{x(x^n+1)} = \frac{(x^n+1)-x^n}{x(x^n+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n+1} : \ln x - \frac{1}{n} \ln(x^n+1)$. b) $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1/\cos^2 x}{\tan x} = \frac{\tan' x}{\tan x}$ avec $\tan x > 0$: $\ln(\tan x)$. c) $u = \sqrt{x^2-1} : \frac{u'}{1+u^2} = \frac{x/\sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} : \arctan \sqrt{x^2-1}$. d) $\left(\arctan \frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(1-\ln x)/x^2}{1+(\ln x)^2/x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2+(\ln x)^2} : \arctan \frac{\ln x}{x}$.
2. $\left(\frac{\ln x}{1+x}\right)' = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ et $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$, donc $\frac{\ln x}{(1+x)^2} = \left(\ln x - \ln(1+x) - \frac{\ln x}{1+x}\right)'$. Ainsi $F(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x) + C$; en 0^+ , $x \ln x \rightarrow 0$ et $F \rightarrow C$, d'où $C = 0$: $F(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)$. En $+\infty$: $F(x) = \ln \frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} \rightarrow 0$.
- De même $\left(\frac{\arctan x}{x}\right)' = \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan x}{x^2}$ et $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$: $G(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x}$ convient, et $G(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{\arctan x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

27

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. $g_{n+1}(x) - g_n(x) = x \ln \frac{n+1}{n} + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$. Or $\frac{x}{n+1} \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$ et $\frac{x}{n+1+x} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \leq \frac{x}{n+1}$: la différence est ≥ 0 et $\leq \frac{x}{n} - \frac{x}{n+1+x} = \frac{x(x+1)}{n(n+1+x)} \leq \frac{x(x+1)}{n^2}$. Puis $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n}$. Ainsi $(g_n(x))$ croît et $g_n(x) \leq g_1(x) + x(x+1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq g_1(x) + 2x(x+1)$: elle converge.

- $g_n(1) = \ln n + \ln(n!) - \ln((n+1)!) = \ln \frac{n}{n+1} \rightarrow 0 : L(1) = 0$. Par télescopage, $g_n(x+1) - g_n(x) = \ln n - \sum_{k=0}^n (\ln(x+k+1) - \ln(x+k)) = \ln x + \ln \frac{n}{x+n+1} \rightarrow \ln x : L(x+1) = L(x) + \ln x$. Puis $L(n+1) = L(n) + \ln n$ et une récurrence donnent $L(n) = \ln((n-1)!)$.
- TAF : $\ln(n-1) = f(n) - f(n-1) = f'(c_1)$ avec $c_1 \in]n-1, n[$, et $\frac{f(n+x)-f(n)}{x} = f'(c_2)$ avec $c_2 \in]n, n+x[$; f' est croissante ($f'' \geq 0$), donc $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Soit $\varphi(t) = \frac{f(n+t)-f(n)}{t} : \varphi'(t) = \frac{f'(n+t)-\varphi(t)}{t} = \frac{f'(n+t)-f'(c)}{t} \geq 0$ ($c \in]n, n+t[$), donc $\varphi(x) \leq \varphi(1) = f(n+1) - f(n) = \ln n$. Par récurrence, $f(n+x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k)$ et $f(n) = \ln((n-1)!)$; en multipliant par $x > 0$:

$$x \ln(n-1) \leq f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k) - \ln((n-1)!) \leq x \ln n,$$

soit $g_{n-1}(x) \leq f(x) \leq g_{n-1}(x) + x \ln \frac{n}{n-1}$, et $n \rightarrow +\infty$ donne $f(x) = L(x)$ sur $]0, 1]$. Si $x = y + m$ ($y \in]0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$), f et L vérifient la même relation : $f(x) = f(y) + \sum_{k=0}^{m-1} \ln(y+k) = L(x)$. Donc $f = L$ (L est le logarithme de la fonction Γ d'Euler, qui prolonge la factorielle : $\Gamma(n) = (n-1)!$).

■ Corrigé de l'exercice 25

- $\varphi(x) = \ln(tx + (1-t)y) - t \ln x - (1-t) \ln y : \varphi'(x) = \frac{t}{tx+(1-t)y} - \frac{t}{x} = \frac{t(1-t)(x-y)}{x(tx+(1-t)y)}$, du signe de $x-y$: φ a pour minimum $\varphi(y) = 0$, atteint seulement en y . D'où l'inégalité et le cas d'égalité.
- Avec $x = a^p$, $y = b^q$, $t = \frac{1}{p}$ ($1-t = \frac{1}{q}$) : $t \ln x + (1-t) \ln y = \ln a + \ln b = \ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$, et $\ln$ est croissante : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
- $\sum \frac{a_k}{A} \cdot \frac{b_k}{B} \leq \sum \left(\frac{a_k^p}{pA^p} + \frac{b_k^q}{qB^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (car $\sum a_k^p = A^p$ et $\sum b_k^q = B^q$) : $\sum a_k b_k \leq AB$. Pour $p = q = 2$: c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\sum a_k b_k \leq \sqrt{\sum a_k^2} \sqrt{\sum b_k^2}$. Avec $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$, $(a_k) = (x, y, z)$ et $b_k = 1$: $x + y + z \leq (x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; en élevant au cube : $(x + y + z)^3 \leq 9(x^3 + y^3 + z^3)$.

■ Corrigé de l'exercice 26

- Tangente en a : $y = \frac{x-a}{a} + \ln a$; $y = 1 \iff x = a + a(1 - \ln a) = a(2 - \ln a) = h(a)$. $h'(x) = 1 - \ln x$: h croît sur $]0, e]$, décroît sur $[e, +\infty[$, maximum $h(e) = e$: $h \leq e$.
- $D(x) = e - h(x) = e - 2x + x \ln x$: $D(e) = 0$, $D'(x) = \ln x - 1$, $D'(e) = 0$, $D''(x) = \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[2, e]$. Soit $A(x) = \frac{(e-x)^2}{4} - D(x)$: $A'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \geq 0$, donc A' croît et $A' \leq A'(e) = 0$: A décroît et $A \geq A(e) = 0$. Soit $B(x) = D(x) - \frac{(e-x)^2}{2e}$: $B'' = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geq 0$, donc B' croît et $B' \geq B'(e) = 0$, B décroît et $B \geq B(e) = 0$.
- Sur $[2, e]$, h est croissante et $h(x) - x = x(1 - \ln x) \geq 0$; $h(2) = 2(2 - \ln 2) > 2$ et $h(e) = e$: $h([2, e]) \subset [2, e]$. Par récurrence, $x_n \in [2, e]$ et $x_{n+1} = h(x_n) \geq x_n$. Croissante et majorée, (x_n) converge vers $\ell \in [2, e]$; h étant continue, $h(\ell) = \ell$, soit $\ell(1 - \ln \ell) = 0$: $\ell = e$.
Par 2., $e - x_{n+1} = D(x_n) \leq \frac{(e-x_n)^2}{4}$. Avec $q = \frac{e-2}{4}$: $e - x_0 = 4q$, et si $e - x_n \leq 4q^{2^n}$, alors $e - x_{n+1} \leq \frac{16q^{2^{n+1}}}{4} = 4q^{2^{n+1}}$. Comme $e < 2,8$, $q < \frac{1}{5}$: $e - x_n \leq 4 \cdot 5^{-2^n}$. Pour $n = 4$: $0 \leq e - x_4 \leq 4 \cdot 5^{-16} < 3 \cdot 10^{-11}$: **quatre étapes suffisent** pour avoir e à $3 \cdot 10^{-11}$ près ($x_1 \approx 2,6137$, $x_2 \approx 2,71624$, $x_3 \approx 2,7182811$). La minoration $e - x_{n+1} \geq \frac{(e-x_n)^2}{2e}$ de 2. montre que l'erreur est vraiment « mise au carré » à chaque étape : le nombre de décimales exactes double (convergence quadratique).

■ Corrigé de l'exercice 27

- Si $\alpha = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), alors $\log(2^q) = q\alpha = p = \log(10^p)$ et $2^q = 10^p$: impossible (5 divise 10^p , pas 2^q). Le premier chiffre de N est c si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $c \cdot 10^k \leq N < (c+1)10^k$, soit (log strictement croissante) $k + \log c \leq \log N < k + \log(c+1)$; comme $0 \leq \log c < \log(c+1) \leq 1$, cela équivaut à $k = E(\log N)$ et $\log c \leq \{\log N\} < \log(c+1)$. Ici $46\alpha \approx 13,8474$ et $\{46\alpha\} \approx 0,8474 \in [0,8451; 0,9031[$: $2^{46} = 70\,368\,744\,177\,664$ commence par 7.
- Deux des $Q+1$ réels, $\{i\alpha\}$ et $\{j\alpha\}$ ($0 \leq i < j \leq Q$), sont dans un même intervalle (principe des tiroirs) : $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{Q}$. Avec $q = j - i \in \{1, \dots, Q\}$ et $p = E(j\alpha) - E(i\alpha)$: $q\alpha - p = \{j\alpha\} - \{i\alpha\}$, donc $|q\alpha - p| < \frac{1}{Q}$, et $q\alpha - p \neq 0$ car $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
- $0 < |\delta| < b - a$. Si $\delta > 0$: $m = E\left(\frac{a}{\delta}\right) + 1 \geq 1$ vérifie $a < m\delta \leq a + \delta < b \leq 1$; $mqa = mp + m\delta$, donc $\{mqa\} = m\delta \in]a, b[$. Si $\delta < 0$, $d = -\delta$: $m = E\left(\frac{1-b}{d}\right) + 1$ vérifie $1 - b < md \leq 1 - b + d < 1 - a \leq 1$; $mqa = (mp - 1) + (1 - md)$ avec $1 - md \in]0, 1[$, donc $\{mqa\} = 1 - md \in]a, b[$.
Avec $a = \log 2,026$ et $b = \log 2,027$, $n = mq$ vérifie $2,026 \times 10^E < 2^n < 2,027 \times 10^E$, où $E = E(n\alpha)$; aucun entier n'est dans cet intervalle si $E \leq 2$, donc $E \geq 3$ et 2^n commence par 2026 (le plus petit tel n est 589).

■ Corrigé de l'exercice 28

- Par récurrence $u_n \geq 1$, et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$: (u_n) croît. Si elle convergerait vers $\ell \geq 1$, on aurait $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$: impossible ; croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$. $u_{k+1}^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2}$; en sommant pour $0 \leq k \leq n-1$: $u_n^2 = 1 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$, donc $u_n^2 \geq 2n + 1$; puis, pour $n \geq 2$ (exercice 12) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \leq 1 + \frac{1}{2}H_{n-1} \leq 1 + \frac{1}{2}(1 + \ln(n-1)) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln n,$$

d'où $u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln n$ (vrai aussi pour $n = 1$: $u_1^2 = 4$). Ainsi $\frac{u_n^2}{2n} \rightarrow 1$ et $\boxed{\frac{u_n}{\sqrt{2n}} \rightarrow 1}$.

- $\ln k = 2 \ln \sqrt{k} \leq 2(\sqrt{k} - 1) \leq 2\sqrt{k}$. $w_k = \frac{u_k^2 - 2k}{2ku_k^2}$, avec $1 \leq u_k^2 - 2k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln k \leq \frac{5}{2} + \sqrt{k}$ et $2ku_k^2 \geq 4k^2$: $0 \leq w_k \leq \frac{5}{8k^2} + \frac{1}{4k\sqrt{k}}$. Le TAF pour $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[k-1, k]$ donne $\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2c\sqrt{c}} \geq \frac{1}{2k\sqrt{k}}$ ($c < k$). Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 3$, et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < 2$: $W_n \leq \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$. Croissante ($w_k \geq 0$) et majorée, (W_n) converge vers un réel W .

- $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k} - w_k\right) = 1 + \frac{1}{2}H_{n-1} - W_{n-1}$, d'où $u_n^2 - 2n = 2 + \frac{1}{2}H_{n-1} - W_{n-1}$. Comme $\frac{H_{n-1}}{\ln n} \rightarrow 1$ et $W_{n-1} \rightarrow W$: $\frac{u_n^2 - 2n}{\ln n} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$. Enfin $H_{n-1} - \ln n = (H_n - \ln n) - \frac{1}{n} \rightarrow \gamma$ (cours, section 10) : $u_n^2 - 2n - \frac{1}{2}\ln n \rightarrow$

$$\boxed{2 + \frac{\gamma}{2} - W} \quad (\approx 1,723).$$

■ Corrigé de l'exercice 29

1. Par l'exercice 12 : $\ln(j+1) - \ln j \leq \frac{1}{j}$, d'où $\sum_{j=r}^{n-1} \frac{1}{j} \geq \ln n - \ln r$; et, pour $j \geq 2$, $\frac{1}{j} \leq \ln j - \ln(j-1)$, d'où, si $r \geq 2$, $\sum_{j=r}^{n-1} \frac{1}{j} \leq \ln(n-1) - \ln(r-1)$. Donc $p_n(r) \geq \frac{r}{n} \ln \frac{n}{r} = \varphi\left(\frac{r}{n}\right)$ et, si $r \geq 2$,

$$p_n(r) \leq \frac{r}{n} \ln \frac{n-1}{r-1} = \varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{r}{n} \ln \frac{(n-1)r}{n(r-1)} \leq \varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{r}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{r-1}\right) \leq \varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{r}{n(r-1)} \leq \varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{2}{n}.$$

$$\text{Enfin } p_n(1) = \frac{1}{n} H_{n-1} \leq \frac{1+\ln(n-1)}{n} \leq \frac{1+\ln n}{n}.$$

2. $\varphi'(x) = -1 - \ln x$: φ croît sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$, décroît sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, maximum $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$. **Majoration** : $p_n(r) \leq \frac{1}{e} + \frac{2}{n}$ si $r \geq 2$, et $p_n(1) \leq \frac{1+\ln n}{n} \leq \frac{1}{e} + \frac{2}{n}$ car $\ln \frac{n}{e} \leq \frac{n}{e} - 1 < \frac{n}{e}$; donc $M_n \leq \frac{1}{e} + \frac{2}{n}$. **Minoration** : pour $n \geq 6$, $\rho_n = E\left(\frac{n}{e}\right)$ vérifie $2 \leq \rho_n \leq n-1$ et $\frac{1}{e} - \frac{1}{n} < \frac{\rho_n}{n} \leq \frac{1}{e}$; donc $M_n \geq p_n(\rho_n) \geq \varphi\left(\frac{\rho_n}{n}\right) \rightarrow \varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$ (φ continue). Par encadrement, $\lim M_n = \frac{1}{e}$.

Rang optimal : $p_n(1) \leq \frac{1+\ln n}{n} \rightarrow 0 < \frac{1}{e}$, donc $r_n \geq 2$ pour n grand, et $\frac{1}{e} \geq \varphi\left(\frac{r_n}{n}\right) \geq M_n - \frac{2}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ et $\delta = \frac{1}{e} - \max\left(\varphi\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right), \varphi\left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)\right) > 0$; par monotonie de φ de part et d'autre de $\frac{1}{e}$,

$$\left|x - \frac{1}{e}\right| \geq \varepsilon \Rightarrow \varphi(x) \leq \frac{1}{e} - \delta. \text{ Pour } n \text{ grand, } \varphi\left(\frac{r_n}{n}\right) > \frac{1}{e} - \delta, \text{ donc } \left|\frac{r_n}{n} - \frac{1}{e}\right| < \varepsilon : \boxed{\frac{r_n}{n} \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0,368}.$$

(Pour $n = 100$: $r_n = 37$ et $M_n \approx 0,371$.)

■ Corrigé de l'exercice 30

1. $\chi(x) = x + x^2 + \ln(1-x)$: $\chi(0) = 0$, $\chi'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $\chi \geq 0$. En développant, Π est la somme des $\frac{1}{p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}}$, $0 \leq a_i \leq m$. Tout entier $k \in [1, n]$ s'écrit $k = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ (ses facteurs premiers sont $\leq k \leq n$), avec $2^{a_i} \leq p_i^{a_i} \leq k \leq n < 2^m$, donc $a_i < m$; par unicité de la décomposition, les $\frac{1}{k}$ ($1 \leq k \leq n$) sont des termes distincts de ce développement, dont tous les termes sont positifs : $\Pi \geq H_n$. Et $1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^m} = \frac{1-p^{-(m+1)}}{1-\frac{1}{p}} < \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.
2. Par croissance de $\ln$: $\ln H_n \leq \ln \prod_{i=1}^s \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = \sum_{i=1}^s -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \leq \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i^2}$ (par 1., car $\frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2}$). Or $\sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < 1$ et $H_n \geq \ln(n+1)$ (exercice 12) : $\sum \frac{1}{p_i} \geq \ln H_n - 1 \geq \ln(\ln(n+1)) - 1$. Ce minortant tend vers $+\infty$: les sommes des inverses des nombres premiers $\leq n$ ne sont pas bornées. S'il n'y avait qu'un nombre fini de nombres premiers, elles seraient toutes majorées par la somme (finie) de leurs inverses : contradiction. (Pour $n = 10^6$: $\sum \frac{1}{p} \approx 2,887$, et le minortant vaut $\approx 1,626$.)

■ Corrigé de l'exercice 31

- $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, donc $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ et $A = \ln((1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)) = \ln 1 = \boxed{0}$.
 $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, donc $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3}) \neq 0$ et $B = \frac{2 \ln(2 + \sqrt{3})}{-\ln(2 + \sqrt{3})} = \boxed{-2}$.
 $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, donc $C = \ln\left(\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 - 2 \ln 2 = \boxed{-\frac{3}{2} \ln 2}$.
 $\ln(e\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $\ln \sqrt[3]{e^2} = \frac{2}{3}$: $D = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{9}{4}}$.
- f_1 : il faut $x > 0$, $\ln x > 0$ et $\ln(\ln x) > 0$, c'est-à-dire $\ln x > 1$: $\boxed{D_1 =]e, +\infty[}$.
 f_2 : il faut $2 - x > 0$ et $\ln(2 - x) \geq 0$, c'est-à-dire $2 - x \geq 1$: $\boxed{D_2 =]-\infty, 1]}$.
 f_3 : il faut $x \neq 0$ et $\ln |x| \neq 1$, c'est-à-dire $|x| \neq e$: $\boxed{D_3 = \mathbb{R} \setminus \{-e, 0, e\}}$.
 f_4 : il faut $\frac{(x-1)(x+1)}{x+3} > 0$; un tableau de signes (valeurs $-3, -1, 1$) donne $\boxed{D_4 =]-3, -1[\cup]1, +\infty[}$.
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$, et $a+b > 0$, donc $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ et $\ln \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} \ln(ab) = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b)$.
 ✓

■ Corrigé de l'exercice 32

- Domaine : $x^2 > 4$ et $x > 0$, soit $x > 2$. Alors $x^2 - 4 = 3x \iff (x-4)(x+1) = 0$; seul 4 convient : $\boxed{S = \{4\}}$.
- Domaine : $x > 1$. L'équation équivaut à $(x+3)(x-1) = (x+1)^2$, soit $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1$, c'est-à-dire $-3 = 1$: $\boxed{S = \emptyset}$.
- Domaine : $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -4$. $|2x-1| = |x+4| \iff 2x-1 = x+4$ ou $2x-1 = -(x+4)$: $\boxed{S = \{-1, 5\}}$.
- Domaine : $1 < x < 3$. L'équation équivaut à $\frac{x-1}{3-x} = e$, soit $x(1+e) = 3e+1$; et $x = \frac{3e+1}{e+1} \in]1, 3[$
 car $x-1 = \frac{2e}{e+1} > 0$ et $3-x = \frac{2}{e+1} > 0$: $\boxed{S = \left\{\frac{3e+1}{e+1}\right\}}$.
- Domaine : $x^2 - x > 0$ et $x > -3$, soit $D =]-3, 0[\cup]1, +\infty[$. Sur D : $x^2 - x \leq x+3 \iff (x-3)(x+1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$. $\boxed{S = [-1, 0[\cup]1, 3]}$.
- Domaine : $x > 2$. Sur ce domaine : $x(x-2) < x+4 \iff x^2 - 3x - 4 < 0 \iff -1 < x < 4$.
 $\boxed{S =]2, 4[}$.
- Domaine : $x > 0$. $-\ln 3 \leq \ln x \leq \ln 3 \iff \ln \frac{1}{3} \leq \ln x \leq \ln 3$: $\boxed{S = \left[\frac{1}{3}, 3\right]}$.
- Domaine : $x < 2$. $\ln(2-x) > \ln \frac{1}{e} \iff 2-x > \frac{1}{e}$: $\boxed{S =]-\infty, 2 - \frac{1}{e}[}$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. On pose $X = \ln x$ (X décrit $\mathbb{R}$ quand x décrit $]0, +\infty[$).

a) $X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$, donc $X \in \{-1, 1, 2\}$: $S = \left\{\frac{1}{e}, e, e^2\right\}$.

b) Il faut $x \neq 1$ ($X \neq 0$). $X + \frac{2}{X} - 3 = \frac{(X - 1)(X - 2)}{X} \geq 0$; le tableau de signes donne $X \in]0, 1] \cup [2, +\infty[$, d'où $S =]1, e] \cup [e^2, +\infty[$.

c) Avec $Y = |\ln x| \geq 0$: $Y^2 - Y - 2 = (Y - 2)(Y + 1) = 0$, donc $Y = 2$, $\ln x = \pm 2$: $S = \{e^{-2}, e^2\}$.

2. Dans les trois systèmes, il faut $x > 0$ et $y > 0$.

(S_1) : avec $X = \ln x$, $Y = \ln y$: $XY = -6$ et $X + Y = 1$; X et Y sont les racines de $t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$.
 $S_1 = \{(e^3, e^{-2}), (e^{-2}, e^3)\}$.

(S_2) : il faut de plus $x > y$. La première équation donne $x + y = 2(x - y)$, soit $x = 3y$; la seconde $xy = 27$, d'où $3y^2 = 27$, $y = 3$, $x = 9$ (et $9 > 3 > 0$) : $S_2 = \{(9, 3)\}$.

(S_3) : avec $X = \log_2 x$, $Y = \log_2 y$, on a $\log_4 x = \frac{\ln x}{2 \ln 2} = \frac{X}{2}$ et $\log_4 y = \frac{Y}{2}$. Le système devient $2X + Y = 8$, $X + 2Y = 10$, d'où $X = 2$, $Y = 4$: $S_3 = \{(4, 16)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. $ab \neq 1$ et $x \neq 1$, donc $\ln(ab) \neq 0$ et $\ln x \neq 0$: $\frac{1}{\log_{ab} x} = \frac{\ln(ab)}{\ln x} = \frac{\ln a}{\ln x} + \frac{\ln b}{\ln x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. ✓

2. On divise numérateur et dénominateur par $\ln 2$: $\log_{12} 9 = \frac{2 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3} = \frac{2t}{2 + t}$ et $\log_6 24 = \frac{3 \ln 2 + \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} = \frac{3 + t}{1 + t}$.

3. a) Domaine : $x > 0$, $x \neq 1$. L'équation équivaut à $\ln(x + 6) = 2 \ln x = \ln x^2$, soit $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$: $S = \{3\}$.

b) Domaine : $x^2 > 1$. Comme $\ln \frac{1}{2} < 0$, $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante, et $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$: l'inéquation équivaut à $x^2 - 1 \leq 8$, soit $|x| \leq 3$. $S = [-3, -1[\cup]1, 3]$.

c) $\log_9 x = \frac{\ln x}{2 \ln 3} = \frac{1}{2} \log_3 x$ et $\log_{27} x = \frac{1}{3} \log_3 x$: $\frac{11}{6} \log_3 x = 11$, $\log_3 x = 6$: $S = \{729\}$.

d) Domaine : $x > 0$, $x \neq 1$. Avec $u = \log_3 x \neq 0$, $\log_x 3 = \frac{\ln 3}{\ln x} = \frac{1}{u}$: $u - \frac{6}{u} = 1 \iff u^2 - u - 6 = (u - 3)(u + 2) = 0$. $u = 3$ donne $x = 27$, $u = -2$ donne $x = \frac{1}{9}$: $S = \left\{\frac{1}{9}, 27\right\}$.

4. Un entier $N \geq 1$ s'écrit avec k chiffres si et seulement si $10^{k-1} \leq N < 10^k$, soit $k - 1 \leq \log N < k$. Ici $\log 6^{2026} = 2026(\log 2 + \log 3)$; or $2026 \times 0,77815 = 1576,531 \dots$, à $2026 \times 2 \times 10^{-5} < 0,041$ près : $1576,49 < 2026 \log 6 < 1576,58$. Donc 6^{2026} a 1577 chiffres.

De plus $\log 3 < 0,47713 < 0,49$ et $\log 4 = 2 \log 2 > 0,60204 > 0,58$, donc $1576 + \log 3 < 2026 \log 6 < 1576 + \log 4$, soit $3 \times 10^{1576} < 6^{2026} < 4 \times 10^{1576}$: le premier chiffre est 3.

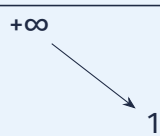
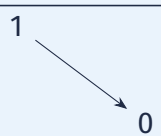
■ Corrigé de l'exercice 35

1. $\varphi(x) = \ln x + \arctan x$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (somme de deux fonctions strictement croissantes), et $\varphi(1) = 0 + \frac{\pi}{4}$. Donc $\varphi(x) = \frac{\pi}{4} \iff x = 1$, et $\varphi(x) > \frac{\pi}{4} \iff x > 1$: $S = \{1\}$ puis $S' =]1, +\infty[$.
2. Soit $h(x) = x \ln x$. Sur $]0, 1]$, $h(x) \leq 0 < 2 \ln 2$: pas de solution, et l'inéquation y est vraie. Sur $[1, +\infty[$, $h'(x) = \ln x + 1 > 0$: h est strictement croissante et $h(2) = 2 \ln 2$, donc $h(x) = 2 \ln 2 \iff x = 2$ et $h(x) < 2 \ln 2 \iff x < 2$. $S = \{2\}$ et $S' =]0, 2[$.
3. Il faut $x > 0$, $y > 0$. La première équation s'écrit $x + \ln x = y + \ln y$, soit $\psi(x) = \psi(y)$ avec $\psi(t) = t + \ln t$ strictement croissante, donc injective : $x = y$. Alors $2x^2 = 8$ et $x = 2$: $S = \{(2, 2)\}$.
4. $x = 1$ est solution pour tout m . Pour $x \neq 1$: $\ln x = m(x - 1) \iff g(x) = m$. On a $g'(x) = \frac{\theta(x)}{(x - 1)^2}$ avec $\theta(x) = \frac{x - 1}{x} - \ln x = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$; $\theta'(x) = \frac{1 - x}{x^2}$, donc θ admet en 1 son maximum $\theta(1) = 0$: $\theta(x) < 0$ pour $x \neq 1$, et g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Limites : $g \rightarrow +\infty$ en 0^+ ; $g(x) = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \rightarrow 1$ en 1

(nombre dérivé) ; $g(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x - 1} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Donc g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$ et une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$. D'où, pour l'équation $\ln x = m(x - 1)$:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-
$g(x)$	$+\infty$ 	1 	0

- $m \leq 0$ ou $m = 1$: **une seule** solution ($x = 1$) ; $0 < m < 1$: **deux** (1 et une dans $]1, +\infty[$) ; $m > 1$: **deux** (1 et une dans $]0, 1[$).
- Graphiquement : la droite de pente m passant par $A(1, 0)$ recoupe la courbe de $\ln$ en un second point, sauf si $m \leq 0$ ou si $m = 1$ (c'est alors la tangente en A).

■ Corrigé de l'exercice 36

1. Soit $\varphi(x) = \ln x - \frac{2(x - 1)}{x + 1} = \ln x - 2 + \frac{4}{x + 1}$: $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)^2}{x(x + 1)^2} \geq 0$.

$$\text{Soit } \psi(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x}} - \ln x = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x : \psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}} \geq 0.$$

φ et ψ sont strictement croissantes sur $]1, +\infty[$ (dérivées nulles seulement en 1) et $\varphi(1) = \psi(1) = 0$: elles sont positives sur $]1, +\infty[$ (et strictement positives sur $]1, +\infty[$). ✓

2. Pour $x = \frac{4}{3}$: $\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{2}{7}$ et $\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{4/3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\frac{2}{7} < a < \frac{\sqrt{3}}{6}$.

$$\text{Pour } x = \frac{9}{8} : \frac{2 \cdot \frac{1}{8}}{\frac{17}{8}} = \frac{2}{17} \text{ et } \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{9/8}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ donc } \frac{2}{17} < b < \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

3. $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{9}{8} = \frac{16}{9} \times \frac{9}{8} = 2$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{64}{27} \times \frac{81}{64} = 3$, d'où $\ln 2 = 2a + b$ et $\ln 3 = 3a + 2b$. Ainsi

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{17} = \frac{82}{119} < \ln 2 < \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \text{et} \quad \frac{6}{7} + \frac{4}{17} = \frac{130}{119} < \ln 3 < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Or $0,6890 \times 119 = 81,991 < 82$ et $1,0924 \times 119 = 129,9956 < 130$; avec $\sqrt{3} < 1,7321$ et $\sqrt{2} < 1,4143$ (car $1,7321^2 > 3$ et $1,4143^2 > 2$) : $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12} < 0,57737 + 0,11786 < 0,6953$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} < 0,86605 + 0,23572 < 1,1018$. ✓

(Valeurs exactes : $\ln 2 \approx 0,69315$ et $\ln 3 \approx 1,09861$.)

4. $10 \ln 2 < 6,953 < 7$, donc $\ln(2^{10}) < \ln(e^7)$ et $2^{10} < e^7$ ($1024 < 1096,6 \dots$). $11 \ln 3 > 12,016 > 12$, donc $3^{11} > e^{12}$.

Enfin $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} : \frac{1,0924}{0,6953} > 1,571$ et $\frac{1,1018}{0,6890} < 1,600$, donc $1,57 < \log_2 3 < 1,60$ ($\log_2 3 \approx 1,585$).

29 Corrigés : limites

■ Corrigé de l'exercice 37

1. $\beta = \frac{\alpha}{n}$ est un rationnel strictement positif et, pour $x > 0$: $\frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^\beta}\right)^n$ et $x^\alpha |\ln x|^n = |x^\beta \ln x|^n$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \ln x = 0$ (croissances comparées du cours), les deux limites valent $\boxed{0}$.

2. a) Question 1 avec $n = 4$, $\alpha = \frac{3}{2}$ ($x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$) : $\boxed{0}$. b) Question 1 avec $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 2$: $\boxed{0}$.

c) $\sqrt[3]{x} - \ln x = \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{\ln x}{x^{1/3}}\right)$ et la parenthèse tend vers 1 : $\boxed{+\infty}$.

d) $\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \ln x + 1}{\sqrt{x}}$: le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 0^+ : $\boxed{+\infty}$.

e) $\frac{2x + (\ln x)^2}{x - \ln x} = \frac{2 + \frac{(\ln x)^2}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} \rightarrow \frac{2 + 0}{1 - 0} = \boxed{2}$.

f) Pour $x > 0$: $\ln(x^3 + 1) = 3 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$ et $\ln(x^2 + 1) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, donc

$$\frac{\ln(x^3 + 1)}{\ln(x^2 + 1)} = \frac{3 + \ln(1 + x^{-3}) / \ln x}{2 + \ln(1 + x^{-2}) / \ln x} \rightarrow \boxed{\frac{3}{2}}.$$

g) $\frac{(\ln x)^2}{x - \sqrt{x}} = \frac{(\ln x)^2}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \rightarrow 0 \times 1 = \boxed{0}$. h) $\frac{x \ln x}{x\sqrt{x} + 1} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \rightarrow \boxed{0}$.

■ Corrigé de l'exercice 38

Rappel : si u est dérivable en a , alors $\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \rightarrow u'(a)$.

a) $u(x) = \ln(1 + x + x^2)$, $u(0) = 0$, $u'(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2}$: la limite vaut $u'(0) = \boxed{1}$.

b) $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1} \cdot \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \rightarrow \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$.

c) $w(x) = \ln(1 + \arctan 2x)$ est dérivable près de 0, $w(0) = 0$, $w'(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)(1 + \arctan 2x)}$: limite $w'(0) = \boxed{2}$.

d) Posons $t = \sin x : t \rightarrow 1, t \neq 1$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ proche de $\frac{\pi}{2}$, et $\cos^2 x = 1 - t^2$. Alors

$$\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\ln t}{(1-t)(1+t)} = -\frac{\ln t}{t-1} \cdot \frac{1}{1+t} \rightarrow -1 \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

e) $\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{-x} \rightarrow 1 + 1 = \boxed{2}.$

f) $\frac{\log_2 x}{x-1} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{\ln x}{x-1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\ln 2}}.$

g) Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ et $u = \sin t$ ($u \rightarrow 0, u \neq 0$ pour $0 < t < \pi$) : $x \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1 \times 1 = \boxed{1}.$

h) $v(x) = \ln(\ln x)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, $v(e) = \ln 1 = 0$ et $v'(x) = \frac{1}{x \ln x}$: la limite vaut $v'(e) = \boxed{\frac{1}{e}}.$

■ Corrigé de l'exercice 39

1. $D_f : x > 0$ et $1 + \ln x \neq 0$, soit $x \neq \frac{1}{e}$: $D_f =]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$. En $0^+ : x^2 \rightarrow 0$ et $1 + \ln x \rightarrow -\infty$, donc $f \rightarrow \boxed{0}$. En $\frac{1}{e} : x^2 \rightarrow \frac{1}{e^2}$ et $1 + \ln x \rightarrow 0^+$, donc $f \rightarrow -\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite : asymptote verticale $x = \frac{1}{e}$. En $+\infty : \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{1 + \ln x} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}} \rightarrow +\infty$ (dénominateur $\rightarrow 0^+$), donc $f \rightarrow +\infty$ et C_f admet une **branche parabolique de direction** (Oy).

2. $g(x) = (x+1) \ln \frac{x+1}{x}$: il faut $\frac{x+1}{x} > 0$, donc $D_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

En $\pm\infty$: avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $g(x) = (1+t) \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow \boxed{1}$: asymptote $y = 1$.

En $0^+ : x+1 \rightarrow 1$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$: $\boxed{+\infty}$, asymptote $x = 0$.

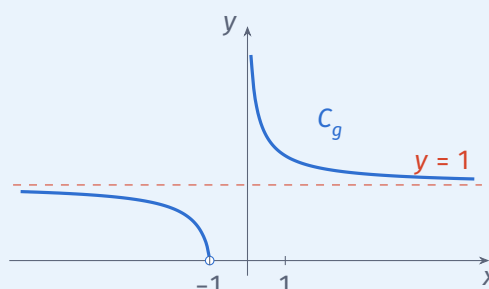
En $-1^- : g(x) = (x+1) \ln |x+1| - (x+1) \ln |x| \rightarrow 0 - 0 = \boxed{0}$ (car $u \ln |u| \rightarrow 0$ en 0).

Position. Pour $x \in D_g$, $t = \frac{1}{x} > -1, t \neq 0$, et $x+1 = \frac{1+t}{t}$.

Si $x > 0$: $x+1 > 0$ et $g(x) > (x+1) \frac{t}{1+t} = 1$. Si $x < -1$:

$x+1 < 0$ et l'inégalité change de sens : $g(x) < 1$.

C_g est **au-dessus** de $y = 1$ sur $]0, +\infty[$ et **au-dessous** sur $]-\infty, -1[$.



2. $D_h =]0, +\infty[$. En $0^+ : \frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$, donc $h \rightarrow -\infty$: asymptote $x = 0$. En $+\infty : h(x) - x = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: $h \rightarrow +\infty$ et la droite $\Delta : y = x$ est asymptote. $h(x) - x$ a le signe de $\ln x$: C_h est au-dessous de Δ sur $]0, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$, et la coupe en $(1, 1)$.

3. $D_k =]0, +\infty[$ ($x^2 + x > 0$ et $x > 0$). En $0^+ : \sqrt{x^2 + x} \rightarrow 0$ et $-\ln x \rightarrow +\infty$: $k \rightarrow +\infty$, asymptote $x = 0$.

En $+\infty : \frac{k(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1$ (donc $k \rightarrow +\infty$) et

$$k(x) - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} - \ln x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} - \ln x \rightarrow \frac{1}{2} - \infty = -\infty :$$

branche parabolique de direction $y = x$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ est symétrique et $f(-x) = \frac{-x}{\ln |x|} = -f(x)$ (et $f(0) = 0$) : f est **impaire**. Quand $x \rightarrow 0$, $\ln |x| \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue en 0. Et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{\ln |x|} \rightarrow 0$: f est dérivable en 0, $f'(0) = 0$: tangente **horizontale** $y = 0$ en O .

Pour $x \neq 0$, posons $L = \ln |x|$ (de dérivée $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ comme sur $]-\infty, 0[$) : $f'(x) = \frac{L-1}{L^2} = \frac{1}{L} - \frac{1}{L^2}$,

$$\text{puis } f''(x) = -\frac{1}{xL^2} + \frac{2}{xL^3} = \frac{2 - \ln |x|}{x(\ln |x|)^3}.$$

Pour $0 < |x| < 1$: $\ln |x| < 0$, donc $(\ln |x|)^3 < 0$ et $2 - \ln |x| > 0$: $f''(x)$ a le signe de $-x$. C_f est convexe sur $]-1, 0]$, concave sur $[0, 1[$ et admet une tangente en O : O est un **point d'inflexion à tangente horizontale** (C_f traverse l'axe des abscisses, car $f(x)$ a le signe de $-x$ près de 0).

2. Sur $]0, e[$, $1 - \ln x > 0$. En 0^+ : $1 - \ln x \rightarrow +\infty$, donc $g(x) \rightarrow 0 = g(0)$: continue à droite. $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{1 - \ln x} \rightarrow 0$: dérivable à droite, $g'_d(0) = 0$: demi-tangente horizontale en O . En e^- : $1 - \ln x \rightarrow 0^+$ et $x \rightarrow e$: $g \rightarrow +\infty$, asymptote verticale $x = e$.

3. En 0^+ : $x - 1 \rightarrow -1$ et $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $h(x) \rightarrow 0$. En 1 : $\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 1$, donc $h(x) \rightarrow 1$. On prolonge en posant $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

Pour $0 < x < 1$: $\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{x-1}{x \ln x}$; or $x-1 \rightarrow -1$ et $x \ln x \rightarrow 0^-$: le quotient tend vers $+\infty$. Le prolongement n'est pas dérivable à droite en 0 : demi-tangente verticale en O (dirigée vers le haut, car $h > 0$ sur $]0, 1[$).

4. φ est continue en 0 (croissances comparées). Pour $x > 0$: $\frac{\varphi(x)}{x} = x^{\alpha-1} \ln x$.

Si $\alpha > 1$: $\alpha - 1$ est un rationnel > 0 , donc $x^{\alpha-1} \ln x \rightarrow 0$: φ est dérivable à droite en 0, $\varphi'_d(0) = 0$.

Si $\alpha = 1$: $\ln x \rightarrow -\infty$; si $0 < \alpha < 1$: $x^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow -\infty$: dans les deux cas, limite $-\infty$.

Conclusion : φ est dérivable à droite en 0 **si et seulement si** $\alpha > 1$ (sinon, demi-tangente verticale).

■ Corrigé de l'exercice 41

1. On a $\left(\frac{2x}{2+x}\right)' = \frac{4}{(2+x)^2}$ et $\frac{x(2+x)}{2(1+x)} = \frac{(1+x)^2 - 1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \left((1+x) - \frac{1}{1+x} \right)$. En réduisant au même dénominateur :

$$a'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \quad b'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2}$$

$a' \geq 0$ et $b' \geq 0$: a et b sont croissantes sur $]-1, +\infty[$, et $a(0) = b(0) = 0$. Donc $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, et $a(x) \leq 0$, $b(x) \leq 0$ pour $-1 < x \leq 0$: ce sont exactement les deux encadrements. ✓

2. $\frac{2x}{2+x} - x = -\frac{x^2}{2+x}$ et $\frac{x(2+x)}{2(1+x)} - x = -\frac{x^2}{2(1+x)}$. En retranchant x puis en divisant par $x^2 > 0$:

$$\text{si } x > 0 : -\frac{1}{2+x} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2(1+x)} ; \quad \text{si } -1 < x < 0 : -\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2+x}.$$

Les bornes tendent vers $-\frac{1}{2}$: par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

3. $\varphi(x) \rightarrow 1 = \varphi(0)$: φ est continue en 0. Et $\frac{\varphi(x) - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$: φ est dérivable en 0,

$$\boxed{\varphi'(0) = -\frac{1}{2}}, \text{ tangente } \boxed{T : y = 1 - \frac{x}{2}}.$$

Pour $x \neq 0$: $\varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{N(x)}{x}$ avec $N(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Au même dénominateur, $\frac{2x}{2+x} - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2(2+x)}$. Avec la question 1 : si $x > 0$, $N(x) \geq \frac{x^3}{2(2+x)} > 0$; si $-1 < x < 0$, $N(x) \leq \frac{x^3}{2(2+x)} < 0$. Dans les deux cas $\frac{N(x)}{x} > 0$: C_φ est **au-dessus** de T . ✓

4. Avec $t = \frac{1}{x} > 0$: $g(x) - x = x^2(\ln(1+t) - t)$ et, d'après la question 2, $-\frac{t^2}{2+t} \leq \ln(1+t) - t \leq -\frac{t^2}{2(1+t)}$.

En multipliant par $x^2 = \frac{1}{t^2}$:

$$-\frac{x}{2x+1} = -\frac{1}{2+t} \leq g(x) - x \leq -\frac{1}{2(1+t)} = -\frac{x}{2(x+1)}.$$

On ajoute $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} - \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2(2x+1)}$ et $\frac{1}{2} - \frac{x}{2(x+1)} = \frac{1}{2(x+1)}$, d'où l'encadrement. ✓

Les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$: la droite $\boxed{y = x - \frac{1}{2}}$ est asymptote à C_g en $+\infty$, et C_g est **au-dessus** d'elle (la borne de gauche est > 0).

■ Corrigé de l'exercice 42

1. $\phi(t) = t \ln t$ est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, et $\phi'(t) = \ln t + 1$. Le TAF fournit $c \in]x, x+1[$ tel que $\phi(x+1) - \phi(x) = 1 \times (\ln c + 1)$. Alors

$$(x+1) \ln(x+1) - x \ln x - \ln x = 1 + \ln \frac{c}{x}, \quad \text{avec } 0 < \ln \frac{c}{x} < \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 0.$$

Par encadrement, la limite vaut $\boxed{1}$.

2. a) $\psi(t) = \ln(\ln t)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\psi'(t) = \frac{1}{t \ln t}$. TAF sur $[x, x+1]$: il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{c \ln c}$. Comme $t \mapsto t \ln t$ est strictement croissante et positive sur $]1, +\infty[$: $x \ln x < c \ln c < (x+1) \ln(x+1)$, d'où l'encadrement.

b) En multipliant par $x \ln x > 0$: $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{\ln(x+1)} < x \ln x (\psi(x+1) - \psi(x)) < 1$. Or $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} \rightarrow 1$: la borne de gauche tend vers 1, et la limite vaut $\boxed{1}$.

3. a) TAF pour $\ln$ sur $[u, 1]$: $-\ln u = \ln 1 - \ln u = \frac{1-u}{c}$ avec $u < c < 1$, donc $1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{u}$, et on multiplie par $1-u > 0$. ✓

b) Pour $x > 0$, $u = \frac{2}{\pi} \arctan x \in]0, 1[$ et $1-u = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}$. Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: $x(1-u) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\arctan t}{t} \rightarrow \frac{2}{\pi}$. D'après a) :

$$-\frac{x(1-u)}{u} < x \ln u < -x(1-u),$$

et les deux bornes tendent vers $-\frac{2}{\pi}$ (car $u \rightarrow 1$). Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right) = \boxed{-\frac{2}{\pi}}$.

30 Corrigés : dérivées et primitives

■ Corrigé de l'exercice 43

1. Chaque fonction est obtenue par opérations et composées de fonctions dérivables, les quantités sous $\ln$ étant strictement positives (et celle sous $\sqrt[3]{}$ aussi) sur I .

$$a) f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \boxed{\frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}}.$$

$$b) \text{ Sur } I : f(x) = \ln |x - 1| - \ln |x + 2|, \text{ donc } f'(x) = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} = \boxed{\frac{3}{(x - 1)(x + 2)}}.$$

$$c) f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 3} : f'(x) = \boxed{\frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 3}}. \quad d) f'(x) = \frac{1/x}{1 + (\ln x)^2} = \boxed{\frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)}}.$$

$$e) \arctan x > 0 \text{ sur } I : f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} = \boxed{\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}}.$$

$$f) \ln x > 0 \text{ sur } I \text{ et } f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{3}} : f'(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{3x \sqrt[3]{(\ln x)^2}}}.$$

$$g) 1 + \cos x > 0 \text{ sur } I : f'(x) = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = \frac{-2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \boxed{-\tan \frac{x}{2}}.$$

$$h) \text{ Sur } I, 0 < \sqrt{x} < 1 \text{ et } f(x) = \ln(1 + \sqrt{x}) - \ln(1 - \sqrt{x}) : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}(1 - x)}}.$$

2. Sur I , $-1 < \sin x < 1$, donc $F(x) = \ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x)$ et

$$F'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \cos x \cdot \frac{(1 - \sin x) + (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}.$$

Une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur I est donc $x \mapsto \boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$

■ Corrigé de l'exercice 44

1. On note F une primitive (à une constante près).

$$a) u = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0, u' = 2(x + 1) : \text{forme } \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u^2}, \quad F(x) = -\boxed{\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)}}.$$

$$b) \text{ Forme } \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ avec } u = x^2 + 4 : \quad F(x) = \boxed{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

$$c) \text{ Même forme, } u = 1 + (\ln x)^2 :$$

$$\boxed{F(x) = \sqrt{1 + (\ln x)^2}}.$$

$$d) 4 + (\ln x)^2 = 4(1 + v^2) \text{ avec } v = \frac{\ln x}{2}, v' = \frac{1}{2x} : f = \frac{1}{4x(1 + v^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v'}{1 + v^2} \text{ et } \boxed{F(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{\ln x}{2}}.$$

$$e) u = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \text{ sur } I, u' = \cos x - \sin x : \quad \boxed{F(x) = \ln(\cos x + \sin x)}.$$

$$f) \frac{x^2}{1 + x^6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{1 + (x^3)^2} : \quad \boxed{F(x) = \frac{1}{3} \arctan(x^3)}.$$

g) Avec $u = 1 + \sqrt{x} > 0$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $f = 2 \frac{u'}{u}$ et $F(x) = 2 \ln(1 + \sqrt{x})$.

h) $x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 = 4(1 + v^2)$ avec $v = \frac{x-3}{2}$, $v' = \frac{1}{2}$: $f = \frac{1}{2} \cdot \frac{v'}{1+v^2}$ et $F(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{2}$.

i) Forme $u'u$ avec $u = \ln(\ln x)$, $u' = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1, +\infty[$: $F(x) = \frac{1}{2} (\ln(\ln x))^2$.

2. $x^3 + 2x + 1 = x(x^2 + 1) + x + 1$, donc $\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{x+1}{x^2 + 1}$: $a = b = c = 1$. Avec $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + C, \quad F(0) = C = 0 : \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x.$$

■ Corrigé de l'exercice 45

1. a) En multipliant par $x+1$ puis en faisant $x = -1$: $a = \frac{2}{2} = 1$. Alors $2x^2 = (x^2 + 1) + (bx + c)(x + 1)$, d'où $(bx + c)(x + 1) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$: $a = 1, b = 1, c = -1$.

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$ a pour primitive sur $] -1, +\infty[$: $\ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x$.

2. $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ et $\frac{2x+3}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{1 + (x+1)^2}$: $\ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x+1)$.

3. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ et $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$. Sur $]3, +\infty[$, $x-3 > 0$ et $x-1 > 0$: $\frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1}$.

4. a) En réduisant au même dénominateur : $1 = a(2+t) + b(1+t)$ pour tout t ; $t = -1$ donne $a = 1$, $t = -2$ donne $b = -1$: $a = 1, b = -1$.

b) Sur $\left] \frac{1}{e}, +\infty[\right]$, $u = 1 + \ln x > 0$ et $v = 2 + \ln x > 0$, avec $u' = v' = \frac{1}{x}$. D'après a) avec $t = \ln x$: $f(x) = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$, donc

$$F(x) = \ln(1 + \ln x) - \ln(2 + \ln x) + C = \ln \frac{1 + \ln x}{2 + \ln x} + C.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$: $\frac{1 + \ln x}{2 + \ln x} = 1 - \frac{1}{2 + \ln x} \rightarrow 1$, donc $F(x) \rightarrow C$: il faut $C = 0$, $F(x) = \ln \frac{1 + \ln x}{2 + \ln x}$.

■ Corrigé de l'exercice 46

1. $F'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot \frac{2 \ln x}{x} - \left(2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} \right) + 2 = (\ln x)^2$. ✓

2. $G'(x) = \ln(1 + x^2) + \frac{2x^2}{1 + x^2} + a + \frac{b}{1 + x^2} = \ln(1 + x^2) + (2 + a) + \frac{b-2}{1 + x^2}$ (car $\frac{2x^2}{1+x^2} = 2 - \frac{2}{1+x^2}$).

$G'(x) = \ln(1 + x^2)$ pour tout x si $a = -2$ et $b = 2$: $G(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x$.

3. $H'(x) = \frac{a \ln x + b}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a \ln x + b + 2a}{2\sqrt{x}}$, à identifier avec $\frac{2 \ln x}{2\sqrt{x}}$: $a = 2$ et $b + 2a = 0$.

$H(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$.

4. $K'(x) = \frac{\frac{a}{x} \cdot x - (a \ln x + b)}{x^2} = \frac{-a \ln x + a - b}{x^2}$, à identifier avec $\frac{\ln x}{x^2}$: $a = -1$ et $b = a = -1$. Ainsi $K(x) = -\frac{1 + \ln x}{x} + c$; or $\frac{1 + \ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $c = 0$: $K(x) = -\frac{1 + \ln x}{x}$.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $F' = f$ a le signe de $\ln x$: F est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Son minimum est $F(1) = 0$, donc $F(x) \geq 0$ sur $]0, +\infty[$.

2. $\varphi(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-\ln x}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{\ln x}{1 + x^2} = \frac{\ln x}{x^2 + 1} - \frac{\ln x}{1 + x^2} = 0.$$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, φ est constante, égale à $\varphi(1) = 0$: $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

3. $K'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$ et $K(1) = 1 - 1 = 0$. ✓

4. Pour $x \geq 1$, posons $D_1 = K - F$ et $D_2 = F - \frac{1}{2}K$, nulles en 1 :

$$D_1'(x) = \ln x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) = \frac{\ln x}{x^2(1 + x^2)} \geq 0, \quad D_2'(x) = \ln x \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2x^2} \right) = \frac{\ln x (x^2 - 1)}{2x^2(1 + x^2)} \geq 0.$$

D_1 et D_2 sont croissantes sur $[1, +\infty[$ et nulles en 1, donc positives : $\frac{1}{2}K(x) \leq F(x) \leq K(x)$.

Pour $x \geq 1$: $1 + \ln x > 0$, donc $K(x) < 1$ et $0 \leq F(x) < 1$. Pour $0 < x < 1$: $\frac{1}{x} > 1$ et $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) \in [0, 1[$. Ainsi $0 \leq F(x) < 1$ pour tout $x > 0$.

5. F est croissante sur $[1, +\infty[$, donc $(F(n))$ est croissante ; elle est majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \leq 1$. De plus $F(n) \geq \frac{1}{2}K(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n}\right)$, qui tend vers $\frac{1}{2}$: par passage à la limite, $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$. (En fait $\ell \approx 0,916$.)

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $1 + x^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. En multipliant par $x + 1$ et en faisant $x = -1$: $a = \frac{1}{3}$. Alors

$$(bx + c)(x + 1) = 1 - \frac{x^2 - x + 1}{3} = \frac{-x^2 + x + 2}{3} = -\frac{(x - 2)(x + 1)}{3}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = \frac{2}{3}.$$

2. $\frac{3}{4}\left(1 + \frac{(2x - 1)^2}{3}\right) = \frac{3 + 4x^2 - 4x + 1}{4} = x^2 - x + 1$. ✓ Avec $v = \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$, $v' = \frac{2}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v'}{1 + v^2}, \quad \text{de primitive} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}.$$

$$3. \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1}, \text{ donc sur }]-1, +\infty[:$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + C = 0 : \boxed{C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}}.$$

$$\text{En } +\infty : \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \rightarrow \frac{1}{6} \ln 1 = 0 \text{ et } \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}} \approx 1,209.$$

$$4. \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{1+x^3} = \frac{(x+1)-1}{1+x^3} = \frac{x}{1+x^3}. \quad \checkmark \text{ Donc } G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - F(x) + C', \text{ et } G(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + C' = 0 \text{ donne } C' = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} :$$

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} : \text{ la même limite que } F.$$

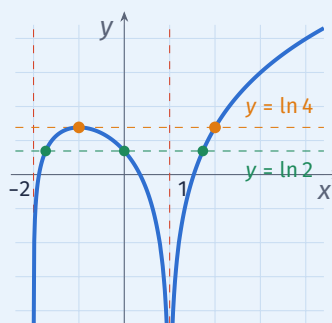
31

Corrigés : études de fonctions

■ Corrigé de l'exercice 49

- $(x-1)^2(x+2) = (x^2-2x+1)(x+2) = x^3-3x+2$. Donc $f(x)$ existe si et seulement si $(x-1)^2(x+2) > 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x > -2$: $D_f =]-2, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour $x \in D_f$: $(x-1)^2 = |x-1|^2 > 0$ et $x+2 > 0$, donc $f(x) = \ln(|x-1|^2) + \ln(x+2) = 2 \ln|x-1| + \ln(x+2)$.
- En -2^+ : $\ln(x+2) \rightarrow -\infty$ et $2 \ln|x-1| \rightarrow 2 \ln 3$, donc $f \rightarrow -\infty$. En 1^- et en 1^+ : $\ln|x-1| \rightarrow -\infty$ et $\ln(x+2) \rightarrow \ln 3$, donc $f \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = 2 \frac{\ln(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x} + \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x} \rightarrow 0$. Les droites $x = -2$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales ; en $+\infty$, C_f a une **branche parabolique de direction (Ox)**.
- $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ donne $f'(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) + (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+2)}$, du signe de $\frac{x+1}{x-1}$ (car $x+2 > 0$) : f croît sur $]-2, -1]$, décroît sur $[-1, 1[$, croît sur $]1, +\infty[$; $f(-1) = 2 \ln 2 = \ln 4$.

x	-2	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 4$	$-\infty$	$+\infty$



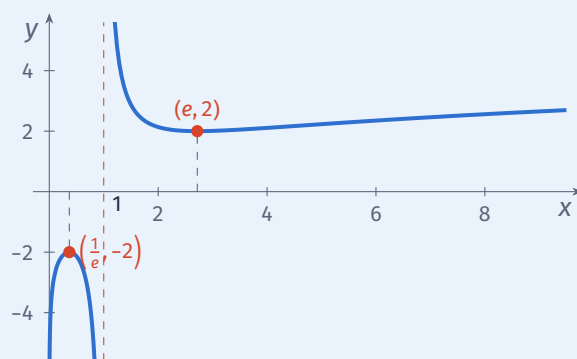
$$f''(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0 \text{ sur } D_f : C_f \text{ est concave sur }]-2, 1[\text{ et sur }]1, +\infty[.$$

4. Sur D_f , $\ln$ étant injective : $f(x) = \ln 2 \iff x^3 - 3x + 2 = 2 \iff x(x^2 - 3) = 0 : S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$
 (tous dans D_f). $f(x) = \ln 4 \iff x^3 - 3x - 2 = 0 \iff (x+1)^2(x-2) = 0 : S = \{-1, 2\}$.
5. f est continue et strictement monotone sur $]-2, -1]$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$, d'images respectives $]-\infty, \ln 4]$, $]-\infty, \ln 4]$ et $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = m$ a donc : **trois** solutions si $m < \ln 4$ (une par intervalle ; pour $m = \ln 2 : -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$) ; **deux** si $m = \ln 4$ (-1 et 2) ; **une** seule si $m > \ln 4$ (dans $]2, +\infty[$). Courbe ci-dessus.

■ Corrigé de l'exercice 50

1. En $0^+ : \ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow -\infty$. En $1^- : \ln x \rightarrow 0^-$, $f \rightarrow -\infty$; en $1^+ : \ln x \rightarrow 0^+$, $f \rightarrow +\infty$. En $+\infty : f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x \ln x} \rightarrow 0$. Les droites $x = 0$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales ; en $+\infty$, C_f a une **branche parabolique de direction** (Ox) .
2. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x + \frac{1}{-\ln x} = -f(x) : M \in C_f \iff M' \in C_f$. L'arc de C_f au-dessus de $]0, 1[$ se déduit de l'arc au-dessus de $]1, +\infty[$ par $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -y\right)$.
- $$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{(\ln x)^2 - 1}{x(\ln x)^2} = \frac{(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x(\ln x)^2}, \text{ du signe de } (\ln x)^2 - 1 : \text{ positif si et seulement si } |\ln x| > 1, \text{ c'est-à-dire } x < \frac{1}{e} \text{ ou } x > e.$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$-\infty$	-2	$+\infty$	$+\infty$



3. Sur $]1, +\infty[$, le minimum de f est $f(e) = 2 : \ln x + \frac{1}{\ln x} \geq 2$ pour $x > 1$, avec égalité si et seulement si $x = e$.

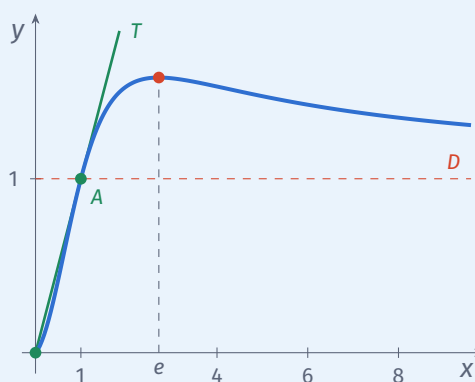
Avec $X = \ln x \neq 0 : X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2} \iff 2X^2 - 5X + 2 = 0 \iff X = 2 \text{ ou } X = \frac{1}{2} : S = \{\sqrt{e}, e^2\}$.

f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0, \frac{1}{e}]$, $[\frac{1}{e}, 1[$, $]1, e]$, $[e, +\infty[$, d'images respectives $]-\infty, -2]$, $]-\infty, -2]$, $[2, +\infty[$, $[2, +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = m$ a : **deux** solutions si $|m| > 2$ (dans $]1, +\infty[$ si $m > 2$, dans $]0, 1[$ si $m < -2$) ; **une** seule si $m = 2$ ($x = e$) ou $m = -2$ ($x = \frac{1}{e}$) ; **aucune** si $-2 < m < 2$.

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$: g décroît sur $]0, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$, donc $g(x) \geq g(1) = 1 > 0$: le dénominateur $x - \ln x$ ne s'annule pas, et f est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. En 0^+ : $x - \ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0. De plus $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x - \ln x} \rightarrow 0$: $f'_d(0) = 0$ (demi-tangente **horizontale** en O). En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \rightarrow 1$: la droite $D : y = 1$ est **asymptote horizontale**. Et $f(x) - 1 = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ a le signe de $\ln x$: C_f est au-dessous de D sur $]0, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$, et la coupe en $A(1, 1)$.
3. $f'(x) = \frac{(x - \ln x) - x(1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$, du signe de $1 - \ln x$: f croît sur $[0, e]$ et décroît sur $[e, +\infty[$; maximum $f(e) = \frac{e}{e-1} \approx 1,582$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{e}{e-1}$	1



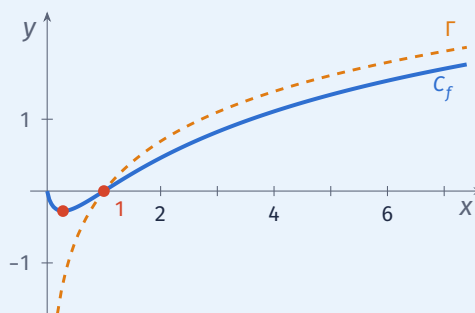
Sur $[e, +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, avec $f(e) = \frac{e}{e-1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$: elle réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $J = \left]1, \frac{e}{e-1}\right]$.

4. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$: $T : y = x$. Pour $x > 0$: $f(x) - x = \frac{x - x(x - \ln x)}{x - \ln x} = \frac{x(1 - x + \ln x)}{x - \ln x} \leq 0$, car $\ln x \leq x - 1$ et $x - \ln x > 0$: C_f est **au-dessous** de T . Pour $x > 0$, l'égalité a lieu si et seulement si $\ln x = x - 1$, soit $x = 1$; de plus $f(0) = 0$: les points communs à C_f et T sont O et $A(1, 1)$. Courbes ci-dessus.

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$: g est continue et strictement croissante de $-\infty$ (en 0^+) à $+\infty$; elle s'annule une seule fois, en α . $g(0,27) \approx -0,039 < 0 < g(0,28) \approx 0,007$, d'où $0,27 < \alpha < 0,28$. $g < 0$ sur $]0, \alpha[$, $g > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.
2. $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , donc $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0. Mais $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln x}{x+1} \rightarrow -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 et C_f admet en O une **demi-tangente verticale** (dirigée vers le bas). En $+\infty$: $f(x) = \frac{x}{x+1} \ln x \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} \rightarrow 0$: **branche parabolique de direction** (Ox) .
3. $f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x + 1) - x \ln x}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 + \ln x}{(x + 1)^2} = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}$, du signe de $g(x)$. Comme $g(\alpha) = 0$, $\ln \alpha = -(\alpha + 1)$, d'où $f(\alpha) = \frac{\alpha \times (-(\alpha + 1))}{\alpha + 1} = \boxed{-\alpha}$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\alpha$	$+\infty$



4. $f(x) - \ln x = \frac{x \ln x - (x+1) \ln x}{x+1} = \frac{-\ln x}{x+1}$: C_f est au-dessus de Γ sur $]0, 1[$, au-dessous sur $]1, +\infty[$, et les deux courbes se coupent en $A(1, 0)$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} = 0$: en $+\infty$, C_f et Γ sont **asymptotes** (l'écart vertical tend vers 0). Courbes ci-dessus.

■ Corrigé de l'exercice 53

1. En 0^+ : $\ln(x+1) \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $f \rightarrow 0$. En 1^- : $\ln(x+1) \rightarrow \ln 2 > 0$ et $\ln x \rightarrow 0^-$, donc $f \rightarrow -\infty$; en 1^+ : $f \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = \frac{\ln x + \ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} \rightarrow 1$. Asymptotes : $x = 1$ (verticale) et $y = 1$ (horizontale en $+\infty$).

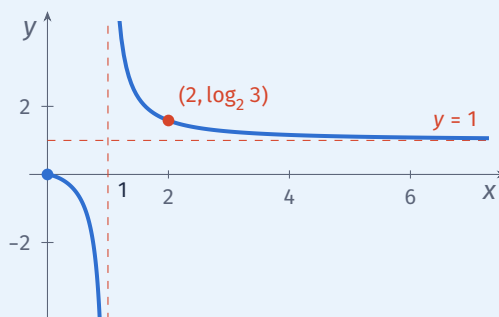
Pour $0 < x < 1$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{\ln x} \rightarrow 1 \times 0 = 0$: $f'_d(0) = 0$, demi-tangente horizontale en O .

2. $f'(x) = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$. Si $x \geq \frac{1}{e}$: $\varphi'(t) = \ln t + 1 > 0$ sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$, donc φ est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ et $\varphi(x) < \varphi(x+1)$. Si $0 < x < \frac{1}{e}$: $\varphi(x) = x \ln x < 0 < (x+1) \ln(x+1) = \varphi(x+1)$. Donc $f' < 0$ sur D : f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (et $f > 1$ sur $]1, +\infty[$). Tableau et courbe ci-dessous.

3. a) Pour $n \geq 2$, $\log_n(n+1) = f(n)$: f étant strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et de limite 1 en $+\infty$, la suite est strictement décroissante et converge vers 1. Ensuite $f(n) > f(n+1)$ s'écrit $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} > \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$, et en multipliant par $\ln n \ln(n+1) > 0$: $\ln n \ln(n+2) < (\ln(n+1))^2$.

b) Pour $x > 1$, $\ln x > 0$ et l'inéquation équivaut à $f(x) \leq \log_2 3 = f(2)$, soit $x \geq 2$ (f strictement décroissante sur $]1, +\infty[$) : $S = [2, +\infty[$.

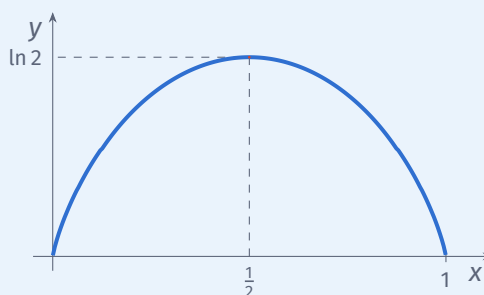
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	0	$-\infty$	1



■ Corrigé de l'exercice 54

1. $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ et $(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 1 \times \ln 1 = 0$: $h(x) \rightarrow 0 = h(0)$. Échanger x et $1-x$ échange les deux termes : $h(1-x) = h(x)$ sur $[0, 1]$, donc la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie, et h est aussi continue en 1. Pour $0 < x < 1$: $\frac{h(x) - h(0)}{x} = -\ln x - (1-x) \frac{\ln(1-x)}{x}$, où $\frac{\ln(1-x)}{x} \rightarrow -1$; donc le quotient tend vers $+\infty$: pas de dérivabilité, **demi-tangente verticale** en 0, et de même (symétrie) au point $(1, 0)$.
2. $h'(x) = -\ln x - 1 + \ln(1-x) + 1 = \ln \frac{1-x}{x}$, positif si et seulement si $\frac{1-x}{x} > 1$, soit $x < \frac{1}{2}$: h croît sur $[0, \frac{1}{2}]$, décroît sur $[\frac{1}{2}, 1]$, de maximum $h(\frac{1}{2}) = \ln 2$. $h''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x(1-x)} < 0$: C_h est **concave**. Tableau et courbe ci-dessous.
3. Soient $a, b > 0$ et $p = \frac{a}{a+b} \in]0, 1[$, $1-p = \frac{b}{a+b}$. D'après 2, $h(p) \leq \ln 2$; en multipliant par $a+b > 0$: $-a \ln \frac{a}{a+b} - b \ln \frac{b}{a+b} \leq (a+b) \ln 2$, soit $-a \ln a - b \ln b + (a+b) \ln(a+b) \leq (a+b) \ln 2$, c'est-à-dire $a \ln a + b \ln b \geq (a+b) \ln \frac{a+b}{2}$ (égalité si et seulement si $a = b$).
4. a) $\ln \frac{q_i}{p_i} \leq \frac{q_i}{p_i} - 1$, et en multipliant par $p_i > 0$: $p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq q_i - p_i$. En sommant : $\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \sum q_i - \sum p_i = 0$. Il y a égalité si et seulement si chacune des n inégalités (de même sens) est une égalité, c'est-à-dire $\frac{q_i}{p_i} = 1$ pour tout i .
b) Avec $q_i = \frac{1}{n}$: $\sum p_i \ln \frac{1}{np_i} = -\ln n - \sum p_i \ln p_i \leq 0$, soit $-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \ln n$, avec égalité si et seulement si $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. Pour $n = 2$, $p_1 = x$, $p_2 = 1-x$: $h(x) \leq \ln 2$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{2}$: le maximum de h est $h(\frac{1}{2}) = \ln 2$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	0	$\ln 2$	0



32

Corrigés : suites et logarithme

■ Corrigé de l'exercice 55

1. $u_0 = 3 > 1$. Si u_n est défini et $u_n > 1$, alors $\ln u_n$ existe et $\ln u_n > 0$, donc $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ est défini et $u_{n+1} > 1$.
2. $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$: φ décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, et $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$ pour $x \neq 1$. Comme $u_n > 1$: $u_{n+1} - u_n = 1 + \ln u_n - u_n = -\varphi(u_n) < 0$: (u_n) est strictement décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers $\ell \geq 1$. La fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ étant continue en $\ell > 0$, on obtient $\ell = 1 + \ln \ell$, soit $\varphi(\ell) = 0$: $\boxed{\ell = 1}$.

Comme $u_n \rightarrow 1$ avec $u_n \neq 1$: $\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\ln u_n}{u_n - 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \boxed{1}$. L'écart à la limite n'est pas divisé par un facteur fixe à chaque étape : la convergence est **très lente** ($u_{10} \approx 1,195$, $u_{100} \approx 1,020$).

4. $u_1 = 1 - \ln 2 \approx 0,307$ et $u_2 = 1 + \ln(1 - \ln 2) \approx -0,181 < 0$: $u_3 = 1 + \ln u_2$ n'existe pas.

Supposons $0 < u_0 < 1$ et la suite définie pour tout n (donc $u_n > 0$). Par récurrence, $u_n < 1$ (car $\ln u_n < 0$). Alors $u_{n+1} - u_n = -\varphi(u_n) < 0$: la suite décroît, donc $u_n \leq u_0$ et, φ étant décroissante sur $]0, 1]$, $\varphi(u_n) \geq \varphi(u_0) > 0$. Ainsi $u_{n+1} \leq u_n - \varphi(u_0)$, d'où $u_n \leq u_0 - n\varphi(u_0) \rightarrow -\infty$: contradiction avec $u_n > 0$.

■ Corrigé de l'exercice 56

1. a) $\ln t \leq t - 1$ est l'inégalité fondamentale ; appliquée à $\frac{1}{t}$, elle donne $-\ln t \leq \frac{1}{t} - 1$, soit $\ln t \geq 1 - \frac{1}{t}$.
 b) D'après a) : $t_n \geq 1 + \ln t_n$, et $\frac{1}{t_n} \geq 1 - \ln t_n$. À partir d'un certain rang, $\ln t_n < 1$, donc $1 + \ln t_n \leq t_n \leq \frac{1}{1 - \ln t_n}$; les deux bornes tendent vers 1 : $\boxed{t_n \rightarrow 1}$ (gendarmes). Si $\ln a_n \rightarrow \ln L$, on applique ceci à $t_n = \frac{a_n}{L}$: $\ln t_n = \ln a_n - \ln L \rightarrow 0$, donc $t_n \rightarrow 1$ et $a_n = Lt_n \rightarrow L$.
2. Par récurrence, $u_n > 0$. $v_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2} \ln u_n - 2 = \frac{1}{2}(\ln u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, avec $v_0 = -2$. Donc $v_n = -\frac{2}{2^n}$, $\ln u_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\boxed{u_n = e^{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}}$ (puissance rationnelle de e). Comme $\ln u_n \rightarrow 2 = \ln e^2$: $\boxed{\lim u_n = e^2}$ (question 1).
3. On calcule la limite du logarithme, puis on applique la question 1.

- $\ln a_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$: $\boxed{a_n \rightarrow 1}$.
- $\ln b_n = \frac{1}{n} \ln \left(3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \right) = \ln 3 + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \rightarrow \ln 3$: $\boxed{b_n \rightarrow 3}$.
- $\ln c_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 0 \times 1 = 0$: $\boxed{c_n \rightarrow 1}$.
- Avec $h = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$: $\ln d_n = n \ln(1 + h) = -\frac{\ln(1 + h)}{h} \rightarrow -1 = \ln \frac{1}{e}$: $\boxed{d_n \rightarrow \frac{1}{e}}$.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. $P_{n+1} = P_n(1 + a_{n+1}) \geq P_n$ (car $P_n > 0$ et $a_{n+1} \geq 0$). Récurrence : $P_1 = 1 + S_1$; si $P_n \geq 1 + S_n$, alors $P_{n+1} \geq (1 + S_n)(1 + a_{n+1}) = 1 + S_n + a_{n+1} + S_n a_{n+1} \geq 1 + S_{n+1}$.
2. $\psi(x) = x - \ln(1 + x)$ vérifie $\psi'(x) = \frac{x}{1+x} \geq 0$ et $\psi(0) = 0$, donc $\psi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Alors $\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k) \leq \sum_{k=1}^n a_k = S_n$.

Si (S_n) est majorée par un entier N , alors $\ln P_n \leq N$, $P_n \leq e^N$: (P_n) est croissante et majorée, donc converge. Si (P_n) converge vers L , alors $P_n \leq L$ (croissance) et $S_n \leq P_n - 1 \leq L - 1$.

3. a) Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$; par télescopage, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$. Donc $S_n \leq 2$: le produit converge vers L , avec $L \geq P_1 = 2$ et $\ln P_n \leq 2$, soit $L \leq e^2$ ($L \approx 3,676$).

b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ et $P_n \geq 1 + S_n$: $P_n \rightarrow +\infty$.

c) $1 + \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$, donc $\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} \times \prod_{k=2}^n \frac{k}{k+1} = n \times \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2$.

4. $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ donne $H_n \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$. Ensuite $\ln(1-x) \leq -x$ (inégalité fondamentale pour $t = 1-x$), donc

$$\ln \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq -\frac{1}{2} H_n \leq -\frac{1}{2} \ln(n+1) = \ln \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ainsi $0 < \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$: le produit tend vers $\boxed{0}$.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. $u_1 = 1 \in]0, 1]$. Si $0 < u_n \leq n$, alors $n + u_n > 1$: $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$ est défini, strictement positif, et (avec $\ln n \leq n-1$) $u_{n+1} \leq \ln(2n) \leq \ln 2 + n-1 < n+1$. $u_2 = \ln 2 \approx 0,693$, $u_3 = \ln(2 + \ln 2) \approx 0,991$.

2. $u_{n+1} - \ln(n+1) = \ln \frac{n+u_n}{n+1} = \ln(1+t)$, avec $t = \frac{u_n-1}{n+1}$ et $1+t = \frac{n+u_n}{n+1} > \frac{n}{n+1}$ (donc $t > -1$). Si $t \geq 0$: $0 \leq \ln(1+t) \leq t \leq \frac{|u_n-1|}{n}$. Si $t < 0$: $0 < -\ln(1+t) \leq \frac{-t}{1+t} < |t| \times \frac{n+1}{n} = \frac{|u_n-1|}{n}$. D'où $|u_{n+1} - \ln(n+1)| \leq \frac{|u_n-1|}{n}$.
Or $|u_n - 1| \leq n$ (car $-1 < u_n - 1 \leq n-1$) : $u_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$; avec $u_1 = 1 + \ln 1$, $u_n \leq 1 + \ln n$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 3$, $\ln n > 1$ donne $|u_n - 1| \leq \ln n$, d'où la majoration par $\frac{\ln n}{n}$.

3. Comme $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$: $\lim(u_n - \ln n) = 0$, puis $\frac{u_n}{\ln n} = 1 + \frac{u_n - \ln n}{\ln n} \rightarrow \boxed{1}$. Au rang $n-1$: $u_n - \ln n = \ln(1+t_n)$ avec $t_n = \frac{u_{n-1}-1}{n} \in]0, \frac{\ln(n-1)}{n}]$ pour n assez grand ($u_{n-1} \rightarrow +\infty$), donc $t_n \rightarrow 0$, $\frac{\ln(1+t_n)}{t_n} \rightarrow 1$, et, comme $nt_n = u_{n-1} - 1$ et $\frac{\ln(n-1)}{\ln n} \rightarrow 1$:

$$\frac{n}{\ln n} (u_n - \ln n) = \frac{\ln(1+t_n)}{t_n} \times \frac{u_{n-1}-1}{\ln n} = \frac{\ln(1+t_n)}{t_n} \times \left(\frac{u_{n-1}}{\ln(n-1)} \times \frac{\ln(n-1)}{\ln n} - \frac{1}{\ln n} \right) \rightarrow \boxed{1}.$$

■ Corrigé de l'exercice 59

1. $h'_n(x) = n + \frac{1}{x} > 0$; h_n est continue, strictement croissante, de limites $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$: unique solution x_n . $h_n(1) = n > 0$ donne $x_n < 1$; pour $n \geq 3$, $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \ln n < 0$ (car $\ln 3 > 1$) donne $x_n > \frac{1}{n}$.

2. $h_{n+1}(x_n) = h_n(x_n) + x_n = x_n > 0 = h_{n+1}(x_{n+1})$, et h_{n+1} est strictement croissante : $x_{n+1} < x_n$. Pour $n \geq 3$: $nx_n = -\ln x_n = \ln \frac{1}{x_n} < \ln n$ car $\frac{1}{x_n} < n$. Donc $0 < x_n < \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$: $\lim x_n = 0$.

3. $\ln y_n = \ln n + \ln x_n = \ln n - nx_n = \ln n - y_n$, d'où $y_n + \ln y_n = \ln n$. Pour $n \geq 3$: $y_n > 1$ (car $x_n > \frac{1}{n}$) et $y_n < \ln n$ (question 2).

4. Alors $0 < \ln y_n < \ln(\ln n)$, et $y_n = \ln n - \ln y_n > \ln n - \ln(\ln n) = \ln n \left(1 - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right) \rightarrow +\infty$ (car $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ avec $X = \ln n$). Puis

$$\frac{y_n}{\ln n} = 1 - \frac{\ln y_n}{\ln n}, \quad 0 < \frac{\ln y_n}{\ln n} < \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{ny_n}{\ln n} \rightarrow 1}.$$

$\ln x_n = -ny_n$, donc $\frac{\ln x_n}{\ln n} = -\frac{y_n}{\ln n} \rightarrow \boxed{-1}$. Enfin $nx_n - \ln n + \ln(\ln n) = -\ln y_n + \ln(\ln n) = -\ln \frac{y_n}{\ln n} \rightarrow -\ln 1 = \boxed{0}$ (continuité de $\ln$ en 1).

■ Corrigé de l'exercice 60

- $F'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1 = \ln(1+x)$, strictement croissante. Le TAF donne $c \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ tel que $F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln(1+c)$, et $\ln\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) < \ln(1+c) < \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
- On somme pour $k = 1, \dots, n$; le terme du milieu télescope en $F(1) - F(0) = 2 \ln 2 - 1$, celui de droite vaut S_n , et celui de gauche $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{j}{n}\right) = S_n - \frac{\ln 2}{n}$. Donc $S_n - \frac{\ln 2}{n} < 2 \ln 2 - 1 < S_n$, soit l'encadrement voulu, et $\boxed{\lim S_n = 2 \ln 2 - 1} \approx 0,386$.
- $\ln w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - \ln n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = S_n$. Ainsi $\ln w_n \rightarrow 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}$, et d'après l'exercice 56 : $\boxed{\lim w_n = \frac{4}{e}} \approx 1,47$.
- Le TAF sur les pn intervalles $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ ($1 \leq k \leq pn$) donne de même, pour $\Sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{pn} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$: $\Sigma_n - \frac{\ln(1+p)}{n} < F(p) - F(0) < \Sigma_n$, donc $\Sigma_n \rightarrow F(p) = (p+1) \ln(p+1) - p$. Or le logarithme de la suite étudiée vaut $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{pn} \ln(n+k) - p \ln n = \Sigma_n$; comme $(p+1) \ln(p+1) - p = \ln \frac{(p+1)^{p+1}}{e^p}$, la limite est (exercice 56) $\boxed{\frac{(p+1)^{p+1}}{e^p}}$ (pour $p = 1 : \frac{4}{e}$).

33

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

- Le TAF appliqué à $\ln$ sur $[k, k+1]$ donne $\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c}$ avec $k < c < k+1$, d'où l'encadrement. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq 0$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0$ et $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$: les suites sont **adjacentes**, et $v_n \leq \gamma \leq u_n$. Pour $n = 1 : 1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.
- a) $u_k - u_{k+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$. Avec $x = \frac{1}{k}$:

$$u_k - u_{k+1} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{2k^2(k+1)} \geq \frac{1}{2(k+1)(k+2)},$$

car $(k-1)(k+2) = k^2 + k - 2 \geq k^2$ pour $k \geq 2$; et $\frac{1}{2(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)}$. De même $u_k - u_{k+1} \leq \frac{k-1}{2k^2(k+1)} + \frac{1}{3k^3} \leq \frac{1}{2k(k-1)} \leq \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k}$, la dernière inégalité venant de $\frac{1}{2k(k-1)} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} = \frac{k+2}{6k^3(k-1)} > 0$.

b) Pour $2 \leq n < N$, on somme pour $k = n, \dots, N-1$ (télescopage) : $\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(N+1)} \leq u_n - u_N \leq \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(N-1)}$. En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}, \quad \text{donc} \quad \frac{n}{2(n+1)} \leq n(H_n - \ln n - \gamma) \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

et, par encadrement, $\lim n(H_n - \ln n - \gamma) = \frac{1}{2}$.

3. Les $3n$ premiers termes sont les inverses des $2n$ premiers impairs et les opposés des inverses des n premiers pairs :

$$s_{3n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2j-1} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} = \left(H_{4n} - \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2j} \right) - \frac{H_n}{2} = H_{4n} - \frac{H_{2n}}{2} - \frac{H_n}{2}.$$

Avec $H_m = \ln m + \gamma + \varepsilon_m$, où $\varepsilon_m \rightarrow 0$: $s_{3n} = \ln(4n) - \frac{1}{2} \ln(2n) - \frac{1}{2} \ln n + \left(\gamma - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) + \varepsilon_{4n} - \frac{\varepsilon_{2n}}{2} - \frac{\varepsilon_n}{2} \rightarrow 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$. Enfin $s_{3n+1} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1}$ et $s_{3n+2} = s_{3n+1} + \frac{1}{4n+3}$ ont la même limite : $s_n \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2$. Dans l'ordre naturel, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ tend vers $\ln 2$: **changer l'ordre des termes change la somme !**

■ Corrigé de l'exercice 62

- $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + 1 = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} + 1$, d'où $u_n - u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.
- $\psi'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{2}{1-t^2}$. Soit $A(t) = \psi(t) - 2t - \frac{2t^3}{3}$: $A'(t) = \frac{2}{1-t^2} - 2 - 2t^2 = \frac{2t^4}{1-t^2} \geq 0$ et $A(0) = 0$, donc $A \geq 0$. Soit $B(t) = 2t + \frac{2t^3}{3(1-t^2)} - \psi(t)$, nulle en 0 :

$$B'(t) = 2 + \frac{2t^2 - \frac{2}{3}t^4}{(1-t^2)^2} - \frac{2}{1-t^2} = \frac{2t^2 - \frac{2}{3}t^4 - 2t^2(1-t^2)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t^4}{3(1-t^2)^2} \geq 0, \quad \text{donc} \quad B \geq 0.$$

- Pour $t = \frac{1}{2n+1}$: $\frac{1+t}{1-t} = \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2t}$, donc $u_n - u_{n+1} = \frac{\psi(t)}{2t} - 1$, et la question 2 divisée par $2t$ donne $\frac{t^2}{3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{t^2}{3(1-t^2)}$. Or

$$\frac{t^2}{3(1-t^2)} = \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)},$$

et $\frac{t^2}{3} = \frac{1}{3(2n+1)^2} \geq \frac{1}{12(n+1)(n+2)}$ car $4(n+1)(n+2) - (2n+1)^2 = 8n+7 > 0$; enfin $\frac{1}{12(n+1)(n+2)} = \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12(n+2)}$.

- $u_n - u_{n+1} > 0$: (u_n) décroît. Avec $w_n = u_n - \frac{1}{12n}$: $w_{n+1} - w_n = \left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}\right) - (u_n - u_{n+1}) \geq 0$: (w_n) croît, et $u_n - w_n = \frac{1}{12n} \rightarrow 0$. Les suites sont adjacentes, de limite C , et $w_n \leq C \leq u_n$, soit $u_n - C \leq \frac{1}{12n}$. En sommant la minoration de 3 pour $k = n, \dots, N-1$: $u_n - u_N \geq \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12(N+1)}$, puis $N \rightarrow +\infty$: $u_n - C \geq \frac{1}{12(n+1)}$.

Pour $n = 2$: $u_2 = \ln 2 - \frac{5}{2} \ln 2 + 2 = 2 - \frac{3}{2} \ln 2 \approx 0,9603$, et $u_2 - \frac{1}{24} \leq C \leq u_2 - \frac{1}{36}$ donne $0,9186 \leq C \leq 0,9325$, d'où $0,91 < C < 0,94$.

5. D'après la définition, $\ln(m!) = u_m + \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln m - m$. Donc

$$\ln \binom{2n}{n} = \ln((2n)!)-2 \ln(n!) = u_{2n} - 2u_n + \left(2n + \frac{1}{2}\right)(\ln 2 + \ln n) - (2n+1) \ln n = u_{2n} - 2u_n + \left(2n + \frac{1}{2}\right) \ln 2 - \frac{\ln n}{2},$$

$$\text{et } \ln \left(\frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} \right) = u_{2n} - 2u_n + \frac{1}{2} \ln 2 \rightarrow C - 2C + \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{\frac{1}{2} \ln 2 - C}.$$

Remarque. On peut montrer (avec des outils qui dépassent ce chapitre) que $C = \frac{1}{2} \ln(2\pi) \approx 0,9189$; on en déduit la formule de Stirling, $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \rightarrow 1$, et $\frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \binom{2n}{n} \rightarrow 1$.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. $x = y = 1$: $f(1) = 2f(1)$, donc $f(1) = 0$; $y = \frac{1}{x}$: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$. Par récurrence, $f(x^{n+1}) = f(x^n) + f(x)$ donne $f(x^n) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$ avec $f(x^{-n}) = -f(x^n)$. Si $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) : $q f(x^r) = f(x^{r^q}) = f(x^p) = pf(x)$, donc $f(x^r) = rf(x)$. Avec $x = e$: $f(e^r) = ar$.
2. Par définition de la partie entière, $p_n \leq n \ln x < p_n + 1$, c'est-à-dire $\ln e^{p_n} \leq \ln x^n < \ln e^{p_n+1}$; $\ln$ étant strictement croissante, $e^{p_n} \leq x^n < e^{p_n+1}$. Comme f est croissante : $f(e^{p_n}) \leq f(x^n) \leq f(e^{p_n+1})$, soit $ap_n \leq nf(x) \leq a(p_n + 1)$. Ainsi $a \frac{p_n}{n} \leq f(x) \leq a \frac{p_n}{n} + \frac{a}{n}$, et $\ln x - \frac{1}{n} < \frac{p_n}{n} \leq \ln x$ donne $\frac{p_n}{n} \rightarrow \ln x$: par encadrement, $\boxed{f(x) = a \ln x}$.
3. a) Soit $x_0 > 0$: $f(x_0 + h) - f(x_0) = f\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) \rightarrow f(1) = 0$ quand $h \rightarrow 0$ (continuité en 1).
b) $\ln t_n = \ln x - \frac{p_n}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, donc $1 \leq t_n < e^{\frac{1}{n}}$. L'inégalité $\ln u \geq 1 - \frac{1}{u}$ appliquée à $u = \frac{n}{n-1}$ donne $\ln \frac{n}{n-1} \geq \frac{1}{n} = \ln e^{\frac{1}{n}}$, d'où $e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n-1}$. Donc $t_n \rightarrow 1$ (gendarmes). Comme $x = e^{\frac{p_n}{n}} t_n$: $f(x) = a \frac{p_n}{n} + f(t_n) \rightarrow a \ln x + f(1) = a \ln x$. Le membre de gauche ne dépend pas de n : $\boxed{f(x) = a \ln x}$.
4. Si g convient, $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ est continue et $f(xy) = \frac{xg(y)+yg(x)}{xy} = f(y) + f(x)$: d'après 3, $f = a \ln$, donc $g(x) = ax \ln x$. Réciproquement, ces fonctions conviennent : $axy \ln(xy) = x(ay \ln y) + y(ax \ln x)$. Les solutions sont les fonctions $\boxed{g(x) = ax \ln x}$, $a \in \mathbb{R}$.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $F'(x) = \ln x \times \frac{1}{x} = \varphi(x)$ et $\varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ sur $[e, +\infty[$. Pour $k \geq 3 > e$, le TAF sur $[k, k+1]$ donne $F(k+1) - F(k) = \varphi(c)$ avec $k < c < k+1$, et $\varphi(k+1) \leq \varphi(c) \leq \varphi(k)$ (φ décroissante).
2. $w_{n+1} - w_n = \varphi(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \leq 0$ pour $n \geq 3$. Et pour $n \geq 3$, $T_n = T_2 + \sum_{k=3}^n \varphi(k) \geq T_2 + \sum_{k=3}^n (F(k+1) - F(k)) = T_2 + F(n+1) - F(3) \geq T_2 + F(n) - F(3)$, d'où $w_n \geq T_2 - F(3) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$. Décroissante et minorée, (w_n) converge vers un réel c .
3. Les termes d'indice pair sont comptés positivement : $A_{2n} = 2 \sum_{j=1}^n \varphi(2j) - T_{2n}$, et $2\varphi(2j) = \frac{\ln 2 + \ln j}{j}$, d'où $\boxed{A_{2n} = \ln 2 \times H_n + T_n - T_{2n}}$. Avec $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) et $T_m = \frac{1}{2}(\ln m)^2 + w_m$:
$$A_{2n} = \ln 2 \ln n + \gamma \ln 2 + \varepsilon_n \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln n)^2 + w_n - w_{2n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} + \varepsilon_n \ln 2 + (w_n - w_{2n}),$$

qui tend vers $\gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$ puisque w_n et w_{2n} tendent vers c . Enfin $A_{2n+1} = A_{2n} - \varphi(2n+1)$ a la même limite ($\varphi \rightarrow 0$ en $+\infty$) : $\lim A_n = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} \approx 0,160$.

■ Corrigé de l'exercice 65

1. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|a_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k > N$. Pour $n > N$, avec $K = \sum_{k=1}^N |a_k - \ell|$ (fixé) :

$$|m_n - \ell| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - \ell) \right| \leq \frac{K}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\frac{K}{n} \rightarrow 0$, il existe $N' \geq N$ tel que $\frac{K}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > N'$; alors $|m_n - \ell| \leq \varepsilon$. Donc $m_n \rightarrow \ell$.

2. Posons $a_k = \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} : a_k \rightarrow \ln L$ (continuité de $\ln$ en $L > 0$). Par télescopage, $\ln u_n = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, donc $\ln \sqrt[n]{u_n} = \frac{\ln u_1}{n} + \frac{n-1}{n} m_{n-1} \rightarrow \ln L$ (question 1), et $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow L$.

3. • $u_n = \frac{n!}{n^n} : \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Or $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\ln \left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 = \ln e$, donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{e}$:
- $$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

• $u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n^n} : \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} : \text{ la limite est } \frac{2}{e}.$

• $u_n = \binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} : \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} \rightarrow \frac{27}{4} : \text{ la limite est } \frac{27}{4}.$

• Pour $u_n = 2 + (-1)^n \in \{1, 3\} : 1 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[3]{3}$, et $\ln \sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3}{3} \rightarrow 0$, donc $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1$; mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut alternativement 3 et $\frac{1}{3}$: il n'a pas de limite.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$ donne $j \ln \left(1 + \frac{1}{j}\right) < 1$, soit $\ln \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j < \ln e$, et $\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j < e$.

Ensuite $\sum_{i=1}^k \ln \frac{x_i}{G} = \ln \frac{x_1 \dots x_k}{G^k} = \ln 1 = 0$ et $\ln \frac{x_i}{G} \leq \frac{x_i}{G} - 1$; en sommant, $0 \leq \frac{x_1 + \dots + x_k}{G} - k$, d'où $G \leq \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$.

2. Avec $d_j = (j+1)^j$ (et $d_0 = 1$), $c_j = \frac{d_j}{d_{j-1}}$: le produit télescope et $c_1 c_2 \dots c_k = (k+1)^k$. Donc $a_1 \dots a_k = \frac{(a_1 c_1) \dots (a_k c_k)}{(k+1)^k}$ et, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} = \frac{\sqrt[k]{(a_1 c_1) \dots (a_k c_k)}}{k+1} \leq \frac{a_1 c_1 + \dots + a_k c_k}{k(k+1)}.$$

3. En sommant et en intervertissant ($j \leq k \leq n$), avec $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{a_j c_j}{k(k+1)} = \sum_{j=1}^n a_j c_j \sum_{k=j}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{j=1}^n a_j c_j \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) < \sum_{j=1}^n a_j \frac{c_j}{j}.$$

Or $\frac{c_j}{j} = \frac{(j+1)^j}{j^j} = \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j < e : \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} < e \sum_{k=1}^n a_k.$

La constante e est optimale : prendre $a_k = \frac{1}{k}$ et utiliser l'exercice 65.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Calculs, équations, inéquations	31 à 36	/ 6	
Thème B · Limites et croissances comparées	37 à 42	/ 6	
Thème C · Dérivées et primitives	43 à 48	/ 6	
Thème D · Études de fonctions	49 à 54	/ 6	
Thème E · Suites et logarithme	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Nombres complexes (partie 2)

Maths Olympiad