

Chapitre

10

NOMBRES COMPLEXES

- I . Définition et propriétés
- II . Représentation géométrique d'un nombre complexe
- III . Conjugué d'un nombre complexe
- IV . Module d'un nombre complexe
- V . Equations dans $\mathbb{C}$



Cardan Girolamo (Jérôme)
1501-1576

I. Définition et propriétés

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Calculer $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

2) Ecrire alors sous la forme $a + b\sqrt{3}$ les réels suivants $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ et $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ où a et b sont deux nombres rationnels.

Activité 2 :

Résoudre dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x + 1 = 0, \quad 2x + 1 = 0, \quad x^2 - 2 = 0.$$

Activités de découverte

Activité 1:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 + 1 = 0$

➤ L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$.

- On suppose qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes, et dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet une solution.

Cette solution notée i n'est pas un nombre réel; c'est **un imaginaire pur**.

- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$ où a et b sont deux réels et $i^2 = -1$
- On définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication ayant les mêmes propriétés que celles définies dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2 + a = 0$ où a est un réel donné strictement positif.

Activité 2 :

1) Soient $z = 2 - 3i$ et $z' = 1 + i$.

Ecrire sous la forme $x + iy$ (x et y des réels) : $3z$; $z + z'$; $z - z'$; zz'

2) Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

Ecrire sous la forme $x + iy$ (x et y des réels) : $z + z'$; $z - z'$; $z \cdot z'$

3) a) Calculer : $(1 + i)(1 - i)$

b) Ecrire alors $\frac{1}{1 + i}$ et $\frac{2 - 3i}{1 + i}$ sous la forme $x + iy$ (x et y des réels)

4) Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b sont des réels et a', b' sont des réels non nuls.

a) Vérifier que : $(a' + ib')(a - ib) = (a')^2 + (b')^2$

b) En déduire l'écriture sous la forme $x + iy$ (x et y des réels) de $\frac{1}{z'}$ et $\frac{z}{z'}$

A retenir

Théorème et définition

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $z = a + i b$ où a et b sont des réels.

Vocabulaire et notation

L'écriture $z = a + i b$, où a et b sont des réels, s'appelle forme algébrique (ou cartésienne) du nombre complexe z .

Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et noté $Re(z)$.

Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et noté $Im(z)$.

Si $a = 0$, alors z est appelé imaginaire pur.

Conséquences

Soit z et z' deux nombres complexes.

- z est réel si et seulement si $Im(z) = 0$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $Re(z) = 0$.
- $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = Im(z) = 0$.
- $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

Propriétés: Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ avec a, b, a' et b' des réels.

- $z + z' = (a + a') + i (b + b')$
- $z - z' = (a - a') + i (b - b')$
- $z \cdot z' = (a a' - b b') + i (a b' + b a')$

Si en plus $z' \neq 0$ alors on a :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{z'} &= \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-b'}{a'^2 + b'^2} \\ \bullet \frac{z}{z'} &= \frac{a a' + b b'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{b a' - a b'}{a'^2 + b'^2} \end{aligned}$$

Les calculs dans $\mathbb{C}$ se font de la même manière que les calculs dans $\mathbb{R}$ en remplaçant i^2 par (-1) chaque fois que le cas se présente.

Dans la pratique, on ne retient pas les formules de l'inverse et du quotient, on fait intervenir l'égalité :

$$(x + i y)(x - i y) = x^2 + y^2$$

Applications

1 On considère les nombres complexes suivants : $z = 3 + 2i$ et $z' = 2 + i$.

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants : $z + z'$, $z - z'$, $3z - 5z'$, $z \cdot z'$, $\frac{1}{z'}$, $\frac{z}{z'}$.

2) 1) Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :
 $(1 - 2i) - (3 + i)$; $(1 + i)^2$; $(1 + i)^3$; $(3 + i)(3 - i)$; $(a + i)(a^2 - ia + i^2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2) Trouver le réel x tel que : $x^2 + 3x - 3 + i(x + 2) = 1 - 2i$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z - 2i = iz + 5$; $2z(z - i) = 0$;

$\frac{z - 2i}{z + 3} = 2 - i$ (On donnera le résultat sous forme algébrique.)

4) 1) Calculer : i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^7 et i^8

2) Calculer : i^{50} , i^{57} , i^{2000} et i^{2007}

3) Calculer : $(1 + i)^2$, $(1 - i)^2$, $(1 + i)^{50}$ et $(1 - i)^{50}$

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1:

On donne les nombres complexes $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -2 + 3i$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

1) Placer les points : $A(Re(z_1), Im(z_1))$ et $B(Re(z_2), Im(z_2))$.

➤ Les points A et B ainsi obtenus s'appellent les **images** respectives des nombres complexes z_1 et z_2 dans le plan.

Réciproquement les nombres complexes z_1 et z_2 s'appellent les **affixes** respectives des points A et B . On note

$\text{Aff}(A) = z_1$; on lit : affixe de A est égal à z_1 ou encore

$A(z_1)$; on lit : A d'affixe z_1 .

2) a) Donner les affixes des points suivants : $C(1, 3)$; $D(0, -2)$; $E(\sqrt{2}, 0)$; $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b) Que peut-on dire de l'affixe d'un point appartenant à la droite des abscisses ? à la droite des ordonnées ?

3) a) Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AB]$.

b) Calculer $\frac{z_1 + z_2}{2}$. Conclure.

Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère un vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et le point M du plan tel que $OM = u$

Le nombre complexe $z = x + iy$, qui est l'affixe du point M , est aussi appelé affixe du vecteur $\vec{u}$. On le note : $\text{Aff}(\vec{u})$ ou $z_{\vec{u}}$.

On donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = a + ib$, $z_B = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

1) a) Donner l'affixe du point M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$

b) Vérifier que : $\text{Aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A$

2) Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que : $\text{Aff}(I) = \frac{z_A + z_B}{2}$

Activité 3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, où a, b, a' et b' sont des réels.

- 1) Donner les coordonnées des vecteurs : $k\vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ (k réel)
- 2) En déduire que : $\text{Aff}(k\vec{u}) = k \text{Aff}(\vec{u})$, $\text{Aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{Aff}(\vec{u}) + \text{Aff}(\vec{v})$

A retenir

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- A tout nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont des réels, on associe un unique point $M(a, b)$ du plan.
- A tout point $M(a, b)$ du plan, on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$.

Vocabulaire et notation

- Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe du point $M(a, b)$ et est noté $\text{Aff}(M)$ ou z_M .
- Le point $M(a, b)$ est appelé l'image du nombre complexe $z = a + ib$ et on note $M(z)$.

Remarques

- A tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$.

Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}$; on le note $\text{Aff}(\vec{u})$ ou $z_{\vec{u}}$.

- Lorsqu'on repère un point ou un vecteur dans un repère orthonormé par son affixe, on dit qu'on se place dans le **plan complexe**.

Conséquences : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' .

- (M et M' sont confondus) signifie ($z = z'$).
- z est réel si et seulement si M appartient à la droite des abscisses, appelée **axe réel**.
- z est imaginaire pur si et seulement si M appartient à la droite des ordonnées, appelée **axe imaginaire**.

- Les points d'affixes z et $(-z)$ sont symétriques par rapport à O .

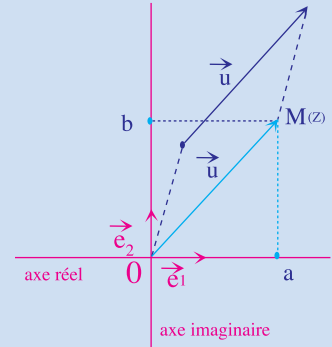
Propriétés: Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- Si A et B sont deux points du plan, on a : $\text{Aff}(\vec{AB}) = \text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)$

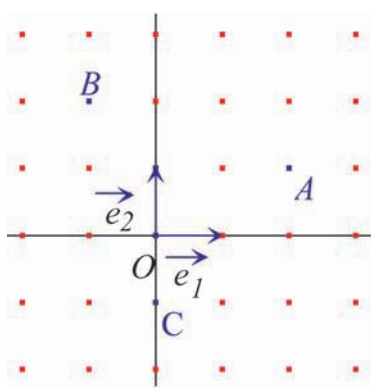
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et pour tout réel k , on a :

$$\text{Si } I \text{ est le milieu de } [AB] \text{ alors } \text{Aff}(I) = \frac{\text{Aff}(A) + \text{Aff}(B)}{2}$$

$$\text{Aff}(\overline{ku}) = k \text{Aff}(\overline{u}) \quad \text{Aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{Aff}(\vec{u}) + \text{Aff}(\vec{v})$$



Applications

- 1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On a représenté ci-contre les points A, B et C .
- 
- Déterminer les affixes de chacun des points : A, B et C .
 - Déterminer l'abbixe du point I milieu du segment $[BC]$. Placer le point I .
 - Déterminer l'abbixe du point D symétrique de A par rapport à I . Placer le point D .
 - Justifier que $ABDC$ est un parallélogramme.
 - Déterminer l'abbixe du point E tel que $\overline{EB} = \overline{OA}$. Placer le point E .
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soient a et b deux réels. Déterminer l'ensemble des points $M(a, b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = (a - 2) + i(2a - b)$ soit :
- un réel
 - un imaginaire pur
 - nul

III. Conjugué d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit le point $M(z)$ où $z = 2 + 3i$.

On désigne par M' le symétrique de M par rapport à l'axe réel. Placer les points M et M' et en déduire l'abbixe z' de M' .

➤ Le nombre complexe trouvé $z' = 2 - 3i$ s'appelle **conjugué** de z et se note par $\bar{z}$.

Activité 2 :

- Donner le conjugué de chacun des nombres complexes suivants : $1 + i$; 3 ; $2 - 3i$; $2i$; $4i - 3$; $3 - 2\sqrt{3}$; $i\sqrt{5}$.
- Que peut-on dire du conjugué d'un réel? d'un imaginaire pur?

Activité 3 :

- On donne deux nombres complexes : $z = 1 + 2i$ et $z' = -2 + i$.

a) Calculer : $\bar{z}$; $\bar{z}'$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z - z'}$; $\overline{z z'}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$; $\bar{z} \bar{z}'$; $\frac{1}{z'}$ et $\frac{\bar{z}}{z'}$.

b) Vérifier que : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$; $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

- Cas général : soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

a) Montrer que : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$; $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$.

- b) En remarquant que pour $z' \neq 0$, $z' \cdot \frac{1}{z'} = 1$, montrer que : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$.
- c) En utilisant : $\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'}$, déduire que : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ ($z' \neq 0$).

Activité 4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'afixes respectives z et z' tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, où a, b, a' et b' sont des réels.

1) Montrer que $\vec{z} \cdot \vec{z'} = (a a' + b b') + i(a b' - a' b) = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \det(\vec{u}, \vec{v})$

2) En déduire : $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \overline{z z'} \text{ est réel.} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow z z' \text{ est imaginaire pur} \end{cases}$

A retenir

Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont des réels, est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Remarques:

Les points d'afixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

$$\bullet \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}}$$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z, z' et tout entier naturel non nul n ,

$$\text{on a : } \overline{\bar{z}} = z ; \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} ; \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'} ; \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Pour tous nombres complexes z et z' ($z' \neq 0$) et tout entier naturel n , on a :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}} ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} ; \quad \overline{\left(\frac{1}{(z')^n}\right)} = \frac{1}{(\bar{z'})^n}$$

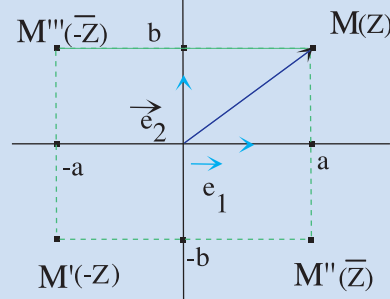
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

Théorème

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'afixes respectives z et z' on a :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \overline{z z'}$ est réel
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow z z'$ est imaginaire pur



1) Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants (on donne les conjugués sous forme algébrique) : $\sqrt{5}$; -3 ; $3i$; $-7i$; $1+3i$; $-5-i$;

$$\frac{3-5i}{2} ; \quad 2i-3 ; \quad (1+i)^{2008} ; \quad \frac{5-2i}{i} ; \quad \frac{1}{i} ; \quad \frac{5+i}{3-i}$$

2) soient a et b deux réels et n un entier naturel. Ecrire sous la forme $(a+ib)^n$ les nombres

complexes suivants: $\overline{(2-3i)^{17}}$; $\frac{\overline{(3+i)}}{\overline{(4+3i)}}$ et $\frac{\overline{(3+i)^{20}}}{\overline{(4+3i)^{20}}}$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z = 1+ia$ et $z' = 1-ia$; avec a un nombre complexe.

1) Montrer que : $z \cdot z' = 1 - aa - i(a+a)$

2) En déduire que :

a) Les points O , A et B sont alignés si et seulement si $Re(a) = 0$

b) Les vecteurs OA et OB sont orthogonaux si et seulement si $a \cdot a = 1$

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On pose $Z = z + \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$). Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

IV. Module d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points A et B d'afixe respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 2-3i$

1) Placer les points A et B

2) Calculer les réels suivants : OB et $\sqrt{z_B \cdot \overline{z_B}}$. Conclure.

3) Calculer les réels suivants AB et $\sqrt{(z_B - z_A)(\overline{z_B - z_A})}$. Conclure.

4) On considère le point $M(x, y)$ d'afixe z . Comparer OM et $\sqrt{z \cdot \overline{z}}$

➤ Le réel positif $\sqrt{z \cdot \overline{z}}$ s'appelle **module** du nombre complexe z et se note par $|z|$.

5) On considère les points M et N d'afixes respectives : $z_M = a+ib$ et $z_N = a'+ib'$. Comparer AB et $|z_N - z_M|$.

Activité 2 :

Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes alors $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

(Pour montrer cette inégalité dans le cas où z et z' sont non nuls, on pourra en faire une interprétation géométrique et utiliser l'inégalité triangulaire)

Activité 3 :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- 1) En utilisant l'égalité : $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$, montrer que : $|zz'| = |z| |z'|$
- 2) En remarquant : $z' \cdot \frac{1}{z'} = 1$, où $z' \neq 0$, montrer que : $\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$
- 3- En déduire que pour $z' \neq 0$, $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

A retenir

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$ et M le point d'affixe z .

On appelle module du nombre complexe z et on note $|z|$ le réel positif

$$\sqrt{z \bar{z}}. \text{ On a : } |z| = \sqrt{z \bar{z}} = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

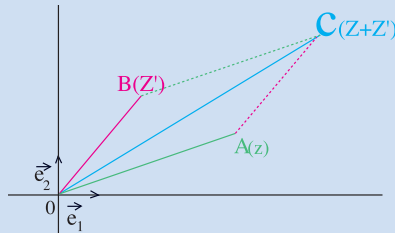
Remarques

• Pour tout réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x "

• Pour tout nombre complexe z imaginaire pur, si $z = iy$, avec y un réel, alors $|z| = |y|$

Conséquences

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$



Pour tous nombres complexes z et z' et tout réel k , on a :

- $|Re(z)| \leq |z|$; $|Im(z)| \leq |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- Si A et B sont deux points du plan complexe alors $AB = |z_B - z_A|$

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n , on a : $|zz'| = |z| |z'|$; $|kz| = |k| |z|$; $|z^n| = |z|^n$
- Pour tous nombres complexes z et z' ($z \neq 0$) et tout entier naturel n , on a :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} ; \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} ; \quad \left| \frac{1}{z^n} \right| = \frac{1}{|z|^n}$$

Applications

- 1 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points A , B et C d'affixe respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

- 1) Calculer les modules respectifs de z_A , z_B et z_C
- 2) En déduire que les points A , B et C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on donne les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = -4 - i$; $z_C = -2 + 5i$.

- 1) Placer les points A , B et C
- 2) Calculer les affixes Z_1 , Z_2 et Z_3 des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$
- 3) Calculer les modules respectifs de Z_1 , Z_2 et Z_3
- 4) En déduire la nature du triangle ABC .

3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

- 1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2i| = |z + 3|$.

- 2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3i| = 3$

b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\overline{z} + 3i| = 3$ et l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\overline{z} - 3i| = 3$

V. Equations dans $\mathbb{C}$

Activités préliminaires

Activité 1 :

- 1) Factoriser dans $\mathbb{R}$, si c'est possible, en un produit de binômes du 1^{er} degré :
 $x^2 + 4$; $x^2 - 3$; $-x^2 + 9$; $2x^2 - 3x - 5$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 - 8 = 0$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^4 + 4x^2 - 7 = 0$

Activité 2 :

Soit le polynôme f définie par $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6$

- 1) Vérifier que 1 est une racine de f .
- 2) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

1. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Activités de découverte

Activité 1 :

- 1) En remarquant que $-4 = (2i)^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = -4$
- 2) a) Vérifier que : $z^2 + 2z + 5 = (z + 1)^2 + 4$
 b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Activité 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = 0$; $z^2 = m$ ($m \in \mathbb{R}_+^*$) ; $z^2 = m$ ($m \in \mathbb{R}_-^*$)

Activité 3 :

Soit le nombre complexe $3 + 4i$

1) En posant $z = x + iy$, montrer que : $z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

2) Trouver alors les solutions de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.

Activité 4 :

1) Soient z et z' deux nombres complexes non réels de formes algébriques $z = a + ib$ et

$z' = a' + ib'$. Montrer l'équivalence suivante : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ |z| = |z'| \\ bb' > 0 \end{cases}$

2) En utilisant le résultat précédent, trouver les solutions de : $z^2 = 3 + 4i$

Activité 5 :

Soient a, b et c des nombres complexes.

On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$).

Puisque les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles dans $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ (forme canonique). On pose } \Delta = b^2 - 4ac.$$

1) Résoudre (E) dans le cas où $\Delta = 0$

2) On suppose que $\Delta \neq 0$. On sait que, dans ce cas, Δ admet deux racines carrées δ et $(-\delta)$

Montrer alors que (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ que l'on déterminera.

A retenir

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes non réels de formes algébriques

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on a : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ |z| = |z'| \\ bb' > 0 \end{cases}$

Théorème 1 (admis)

Soit a un nombre complexe non nul.

L'équation $z^2 = a$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions opposées.

Les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées les racines carrées de a .

Théorème 2

Soit $T(z) = az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $T(z)$

• Si $\Delta = 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet une seule solution $z = \frac{-b}{2a}$

• Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z' = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

Remarque

Les solutions de l'équation $T(z) = 0$ sont aussi appelées les racines du polynôme $T(z)$.

Cas particulier : a, b et c sont des réels

• Si $\Delta > 0$, alors $z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si $\Delta < 0$, alors $z' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques

Soit $T(z) = az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.

• Si z' et z'' sont les solutions de l'équation $T(z) = 0$ alors on a :

$$z' + z'' = -\frac{b}{a} ; \quad z' \cdot z'' = \frac{c}{a} ; \quad T(z) = az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$$

• Si $a + b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : 1 et $-\frac{c}{a}$.

• Si $a - b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : -1 et $-\frac{c}{a}$.

Applications

- 1) 1) Déterminer les racines carrées des : 3 ; -5 ; $7 + 24i$.
 2) a) Déterminer la forme algébrique de : $(1 + i)^2$ et $(1 - i)^2$.
 b) En déduire les racines carrées de : i ; $3i$; $-i$; $-7i$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$
- 3) Factoriser les expressions : $(2 - i)z^2 - (2 + i)z + 2i$; $iz^2 + \sqrt{2}z - i$.

2. Equations de degré supérieur à deux dans $\mathbb{C}$

Activités de découverte

Activité 1 :

- 1) a) Ecrire le nombre complexe $(3 + 4i)^2$ sous forme algébrique.
 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 3z + 2 - 3i = 0$
- 2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^4 + 3z^2 + 2 - 3i = 0$
 En posant $Z = z^2$, résoudre l'équation (E) .

Activité 2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- 1) Vérifier que (-1) est une solution de (E) .
- 2) Trouver les réels a, b et c tels que : $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(az^2 + bz + c)$
- 3) Résoudre alors l'équation (E)

Point méthode :

Résolution d'une équation de degré 3

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ ($a_1 \neq 0$), connaissant une solution z_0 :

- On calcule les trois nombre complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
- On résout l'équation : $az^2 + bz + c = 0$

Résolution d'une équation bicarrée

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ ($a \neq 0$) :

- On pose $Z = z^2$ et on détermine Z' et Z'' solutions de l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$
- On cherche les racines carrées de Z' et Z''

Applications

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^3 + 8 = 0$; $z^3 + 3iz^2 - 3z - i = 0$; $z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = 0$

2 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

- 1) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).
- 2) Trouver les réels b et c tel que : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + bz + c)$
- 3) Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

3 On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - 1$

- 1) Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifier que $1, j$ et $\bar{j}$ sont les racines de $P(z)$.
- 2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soient A, B et C les points d'afixes respectives $1, j$ et $\bar{j}$.
 - a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
 - b) Déterminer son centre de gravité.

Situation 1

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On pose $Z = \frac{z-1}{z-i}$.

- 1) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
- 2) Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Vers une solution

On doit avoir $z - i \neq 0$ ($z \neq i$) autrement dit $M \neq A$ où A est le point d'affixe i .

Première méthode

- En posant $z = x + iy$ dans l'expression de Z , on obtient : $Z = \frac{(x-1) + iy}{x + i(y-1)}$
- En écrivant Z sous forme algébrique (multiplier le numérateur et le dénominateur par

$$x - i(y-1)), \text{ on obtient : } Z = \frac{x^2 - x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

- Les ensembles E et F sont tels que : $\text{Im}(Z) = 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \dots$

Deuxième méthode

- En calculant $\bar{Z}$ on obtient : $\bar{Z} = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}$
- $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}$ ($z \neq i$)

$$\Leftrightarrow i(z + \bar{z}) + (z - \bar{z}) - 2i = 0 \quad (z \neq i)$$

En posant $z = x + iy$ avec $(x, y) \neq (0, 1)$, on retrouve l'ensemble E .

- On adopte la même démarche pour retrouver l'ensemble F avec $Z = -\bar{Z}$.

Situation 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$

- 1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure.
- 2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Vers une solution

- 1) On pose $z = iy$ (où y un réel)

- z est solution de (E) si et seulement si $(2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y) + i(-y^3 + 2y^2 + 4y - 8) = 0$

$$\text{d'où le système (S)} \quad \begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre le système (S) , on résout l'équation $2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y = 0$ (la plus simple) et on vérifie si les solutions trouvées sont solutions de l'autre équation.

- 2) Déterminer b et c tels que : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$

- On trouve : $z_0 = 2i$; $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

Produit de deux nombres complexes

Le programme suivant permet de calculer le produit de deux nombres complexes écrit en langage Turbo Pascal.

```
program produit;
uses wincrt ;
var a1, b1, a2, b2, ReP, ImP : real;
begin
  writeln('donner la valeur de la partie réelle de z1');
  readln(a1);
  writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z1');
  readln(b1);
  writeln('donner la valeur de la partie réelle de z2');
  readln(a2);
  writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z2');
  readln(b2);
  ReP:=a1*a2-b1*b2;
  ImP:=a1*b2+a2*b1;
  writeln('le produit de z1 et z2 est: ',ReP,'+',('ImP','i'));
end.
```

Applications

Calculer dans chacun des cas suivants :

a) $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 1 - i$

b) $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i$

c) $z_1 = 2i$ et $z_2 = 3 + i$

Racine carrée d'un nombre complexe

Ce programme permet de calculer une racine carrée d'un nombre complexe écrit en langage Turbo Pascal.

```
program racine;
uses wincrt;
var a, b, ar, br, modu: real;
begin
  writeln('donner la valeur de la partie réelle de z');
  readln(a);
  writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z');
  readln(b);
  modu:= sqrt(a*a+b*b);
  ar:=sqrt((a+modu)/2);
  br:=b/(2*ar);
  writeln('une racine carrée de z est',ar,'+',i('br',''));
end.
```

Applications

Calculer une racine carrée de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -3 + 4i$;

b) $z = 1 + i$; ;

c) $z = 2i$

VRAI-FAUX

1 Répondre par vrai ou faux

(z et z' sont deux nombres complexes et $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan complexe).

1) $|z| = |z'| \Leftrightarrow z = z' \text{ ou } z = -z'$

2) $|z| = |\bar{z}| \Leftrightarrow |z| = |\bar{z}|$

3) Les points d'affixes respectives z et $\bar{z}$ appartiennent à un même cercle de centre O .

4) Les nombres complexes a et b solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 10 = 0$ sont conjugués.

2 QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1) L'ensemble des points $M(z)$ tels que

$|z - 2i| = 4$ est :

a) La médiatrice de $[AB]$ avec $A(2i)$ et $B(4)$

b) un cercle de centre $A(2i)$

c) un cercle de rayon 2

2) $\operatorname{Im}(3 + i(2+i))$ est :

a) $2 + i$

b) $2i$

c) 2

3) On considère le nombre complexe :

$z = (1 - i)^2$

a) $|z| = 1$

b) z est réel strictement positif

c) z est imaginaire pur

4) Les solutions de $z^2 - 4z + 13 = 0$ sont :

a) $2 - 5i$ et $-2 + 5i$

b) $-4 + i$ et $4 + i$

c) $2 - 3i$ et $2 + 3i$

5) Les racines carrées de $\frac{2}{i}$ sont :

a) $\frac{\sqrt{2}}{i}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{i}$

b) $1 - i$ et $-1 + i$

c) $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$

6) On pose $z' = \frac{z+4i}{z-2}$; $z \neq 2$. L'ensemble des

points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$ est

a) un cercle de rayon 1

b) une droite

c) une droite privée d'un point

d) un cercle privé d'un point

On donne les nombres complexes :

$z = 4 + 3i$ et $z' = 5 - 2i$

3 Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants:

$z + z'$; $z - z'$; $3z - z'$;

$z z'$; $(z + z')^2$; $(z - z')^2$;

$z^2 - (z')^2$; $z^3 - (z')^3$; $\frac{z}{z'}$

4 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, placer les points d'affixes : $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$,

$z_3 = -1 + 2i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 2z_1 - 3z_2$,

$z_6 = z_3(z_4 - z_2)$

5 Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$2 - \sqrt{3}$; $i\sqrt{2} + 5i$; i^4 ; $\frac{1+5i}{537i}$; $2i - 7$

$\frac{1+i}{1-i}$; $\frac{3}{5-i} + \frac{i}{5+i}$

6 Soient les nombres complexes :

$z = 3 + 4i$ et $z' = 1 - i$.

Calculer les modules des nombres complexes suivants : z , z' , $z z'$

$\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^{2007}

7 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points

A et M d'affixe respectives :

$z_A = -1$ et $z = x + iy$, avec x et y des réels.

on pose $Z = \frac{iz}{z+1}$

- 1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .
- 2) En déduire
 - a) L'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
 - b) L'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

8 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $1, -3i$ et i .

A tout point M d'affixe z ($z \neq -3i$), on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z-1}{3-i}$

- 1) a) Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$,

$$z' = \frac{i(z-1)}{z+3i}$$

- b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$

- 2) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel.

- 3) a) Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$,

$$|z' - i| \cdot |z + 3i| = \sqrt{10}$$

- b) En déduire que si M appartient au

cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon

9 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par A le point d'affixe i .

A tout point M d'affixe z ($z \neq i$), associe le

point M' d'affixe $z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}$

- 1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' désignent des réels.

- a) Calculer x' et y' en fonction de x et y
- b) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tel que z' soit réel

- c) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit imaginaire pur

- 2) On pose $Z = z - i$ et $Z' = z' - i$.

- a) Montrer que $ZZ' = -3 + 4i$. Calculer le module de ZZ' .

- b) Soit r un réel strictement positif.

Déduire de ce qui précède que si M décrit le cercle (C) de centre A et de rayon r alors M' appartient à un cercle (C') de centre A

- c) Déterminer r pour que (C) et (C') soient confondus.

10 Déterminer les racines carrées des chacun des nombres complexes suivants :

$$1 + 2i\sqrt{2}; \quad 6 - 30i; \quad -45 - 28i; \quad 5; \quad -7i; \quad 24 + 10i; \quad -7; \quad -5 + 12i.$$

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1) (2 + i)z - 3 + 2i = 0$$

$$2) \frac{z+2}{z-1} = 3 + i$$

$$3) z + 3\bar{z} = 4 + 2i$$

$$4) z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$$

$$5) (3 + i)z^2 + (1 + 4i)z - 4 - 5i = 0$$

$$6) (2 + i)z^2 - (3 + 2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$$

$$7) z^2 - (10i - 7)z - (11 + 41i) = 0$$

$$8) z^2 - 4(6 + i)z + (63 + 16i) = 0$$

$$9) z^3 - 8 = 0$$

$$10) z^3 + 1 = 0$$

11 1) Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

- a) Vérifier que $P(4) = 0$

- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 - 6\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + 12\left(\frac{z-i}{z+i}\right) - 16 = 0$$

(On peut poser $Z = \frac{z-i}{z+i}$)

13 1) a) Vérifier que $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (4 - i)z + 5 + i = 0$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E):

$$z^3 - (10 - i)z^2 + (29 - 5i)z - 30 - 6i = 0$$

a) Vérifier que :

$$z^3 - (10 - i)z^2 + (29 - 5i)z - 30 - 6i = (z - 6)(z^2 - (4 - i)z + 5 + i).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par A, B

et C les points d'affixes respectives $z_A = 6$,

$$z_B = 1 + i \quad \text{et} \quad z_C = 3 - 2i$$

a) Placer les points A, B et C

b) Calculer les distances AB, AC et BC

c) En déduire la nature du triangle ABC

d) Déterminer l'affixe de point D pour que ACBD soit un carré.

14 On considère dans $\mathbb{C}$: $P(z) = z^4 - 4z^2 + 16$

1) Déterminer le réel a tel que :

$$P(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$$

2) a) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation

$P(z) = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives.

b) Vérifier que les solutions de $P(z) = 0$ sont $z_1, -z_1, \bar{z}_1$ et $-\bar{z}_1$

3) Le plan complexe muni d'un repère

orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

a) Placer les points A, B, C et D d'affixes

respectives $z_1, -z_1, \bar{z}_1$ et $-\bar{z}_1$

b) Vérifier que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

15 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S) \begin{cases} 8x + 2y + t = 0 \\ x + y + t = -5 \\ -x - y + t = -3 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = az^3 + bz + c$; où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait :

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1) = -5 \\ f(-1) = -3 \end{cases}$$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$f(z) = 0$$

16 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S) \begin{cases} x + y - 2t = -6 \\ y + t = -1 \\ x + t = 3 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$$f(z) = az^3 + bi z^2 + (c - 6)z + ic$$

où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait : $f(1) = -3 - i$ et $f(i) = 0$

b) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes

respectives $z_A = i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -1 + i$

a) Placer les points A, B et C

b) Déterminer la nature du triangle OBC.

17 Pour tout nombre complexe z on pose

$$f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$$

1) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Démontrer qu'il existe deux réels b et c tels que : $f(z) = (z - z_0)(z^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un

repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = -i, \quad z_B = 8 + 5i \quad \text{et} \quad z_C = 8 - 5i$$

a) Déterminer la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'ensemble E des point M tels que $-MA^2 + MB^2 - MC^2 = 20$

18 I- On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = z^3 + a z^2 + b z + c$ où a, b et c sont des réels.

1) a) Montrer que si $f(2) = 0$ et $f(1 - i) = 0$ alors a, b et c vérifient le système :

$$(S) \quad \begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).

2) Dans la suite on prend

$$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$$

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a : $f(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

II- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 2 et $1-i$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B .

2) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que $OABC$ est un carré.

(Bac Tunisien)

19 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = -5 \\ 4x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = z^3 + a z^2 + b z + c$ où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = -6 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

b) Vérifier que l'on a alors :

$$f(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 4).$$

3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(z - 1)(z^2 + 2z + 4) = 0.$$

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1; \quad z_B = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

a) Placer les points A, B et C .

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

(Bac Tunisien)

Au début du XVI^{ème} siècle, le mathématicien **Scipione dal Ferro**, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3^{ème} degré : $x^3 + p x = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

A la fin du XVI^{ème} siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation

$$x^3 - 15 x = 4. \text{ Il obtient littéralement : } x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Cette écriture n'a, à priori, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$.

Mais **Bombelli** va plus loin. Il remarque que, en utilisant les règles usuelles de calcul que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

$$\text{Si bien qu'il obtient finalement : } x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Or, 4 est bien une solution de l'équation $x^3 - 15 x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessous $(\sqrt{-1})$?

C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes.

>Le symbole $\sqrt{-1}$ a été donc utilisé au XVI^{ème} siècle par Bombelli. Or

- Les solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont i et $-i$ d'où $\sqrt{-1} = i$.

- On a : $1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$ c'est absurde.

- Pour cette raison le symbole $\sqrt{-1}$ que nous avons utilisé en toute impunité est absolument interdit à partir de maintenant.

- Dans la réalité, il a fallu 150 ans pour l'abandonner et utiliser la notation i proposée par **Euler**.