

NOMBRES COMPLEXES :

Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$

NB :

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2; 0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$.

NB :

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que $\mathbb{Z}^+ = \{0; +1; \dots, +\infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que $\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, -2; -1, \dots, 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}^* = \{-\infty, \dots, -2; -1, \dots, +1; +2; \dots, +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_+^* = \{+1; +2; \dots, +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-\infty, \dots, -2; -1\}$$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{P}{Q} \text{ avec } P \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux

entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{R} = \{-\infty ; -\sqrt{2} ; \frac{-3}{2} ; -2; 0; 1 ; 2 ; \sqrt{2} ; \frac{3}{2}, \dots, +\infty\}.$$

NB : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Evaluation diagnostique

Activités :

Activité 1:

Résous dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x + 7 = 6$. Conclure.

Activité 2:

Résous dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $3x = 1$. Conclure.

Activité 3:

Résous dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2 = 0$. Conclure.

Activité 4:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Conclure.

Remarque : quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Ainsi un nouvel ensemble pris naissance au XVI^{ème} siècle par **JEROME CARDAN (Mathématicien Italien)** afin de trouver des solutions pour l'équation : $x^2 + 1 = 0$ ou des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera :

Ensemble des nombres complexes ou ensemble des corps complexes et sera noté $\mathbb{C}$.

Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire).

Le nombre i est tel que $i^2 = -1$. L'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 - i^2 = 0$ soit $(x - i)(x + i) = 0$ donc $x = i$ ou $x = -i$.

I) Définition ; vocabulaire et interprétation graphique

1) Définition :

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels a et b tel que $Z = a + ib$ où i est un imaginaire tel que $i^2 = -1$.

2) Notation et vocabulaire : Soit Z un nombre complexe tel que $Z = a + ib$.

- l'écriture $Z = a + ib$ est appelée forme algébrique de Z .
- le nombre réel a est appelé partie réelle de Z et est noté $\text{Re}(Z)$
- le nombre réel b est appelé partie imaginaire de Z et est noté $\text{Im}(Z)$

NB :

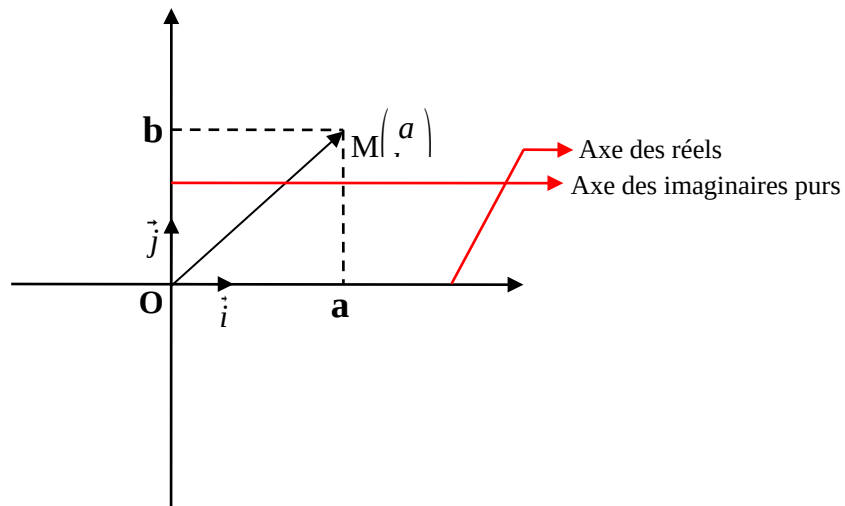
- Si $b = 0$; alors $Z = a$ (**Z est un nombre à la fois réel et complexe**) car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Si $a = 0$; alors $Z = ib$ (**Z est un imaginaire pur**).

3) Interprétation graphique :

A tout point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan P , on peut associer un nombre complexe $Z = a + ib$.

- M est le point image et Z l'affixe du point M .
- $\vec{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe $Z = a + ib$ l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.

Ainsi on a la représentation graphique du M comme suit :



(Figure 1)

Exemple

Dans chacun des nombres complexes suivants donner la partie réelle et la partie imaginaire.

a) $Z = -2 - 3i$; b) $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$; c) $Z = -5 + 8i$; d) $Z = i$; e) $Z = 0$; f) $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$

Solution

a) $Z = -2 - 3i \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = -2$ et $\operatorname{Im}(Z) = -3$

b) $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = -\frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $Z = -5 + 8i \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = -5$ et $\operatorname{Im}(Z) = 8$

d) $Z = i \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$ et $\operatorname{Im}(Z) = 1$

e) $Z = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$ et $\operatorname{Im}(Z) = 0$

f) $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 2$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

II) Operations dans $\mathbb{C}$:

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

1) Egalité :

Deux nombres complexes Z et Z' sont égaux si et seulement si $Z = Z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

2) Somme:

La somme des deux complexes Z et Z' est tel que : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

3) Produit :

Le Produit des deux complexes Z et Z' est tel que :

$$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \text{ (avec } i^2 = -1).$$

4) Quotient :

Le quotient de deux complexes Z et Z' est tel que :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

N.B : Le nombre $\frac{1}{Z}$ est appelé inverse du complexe Z tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} =$

$$\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Exemple

Ecrivez les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $Z = (2 - 5i)(3 + i)$

c) $Z = 75$

e) $Z = 76$

b) $Z = (4 + i)(1 + 2i)$

d) $Z = 77$

f) $Z = 78$

Solution

a) $Z = (2 - 5i)(3 + i) \Rightarrow Z = 11 - 13i$

$$\text{b) } Z = (4 + i)(1 + 2i) \Rightarrow Z = 2 + 9i$$

$$\text{c) } Z = \frac{(3+2i)(1+i)^2}{(1)^2 + (-1)^2} = \frac{(3+2i)(1+2i-1)}{2} = \frac{(3+2i)(2i)}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{4i^2 + 6i}{2} = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$$

$$\text{d) } Z = \frac{(4-3i)}{(4)^2 + (3)^2} = \frac{(4-3i)}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3i}{25}$$

$$\text{e) } Z = \frac{(4+3i)(4+3i)}{(4)^2 + (-3)^2} = \frac{16+24i-9}{25} = \frac{16+24i-9}{25} = \frac{7+24i}{25} = \frac{7}{25} + i\frac{24}{25}$$

$$\text{f) } Z = \frac{1-i\sqrt{2}-i\sqrt{3}+i^2\sqrt{6}}{(1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{(1-\sqrt{6})-i(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{3}$$

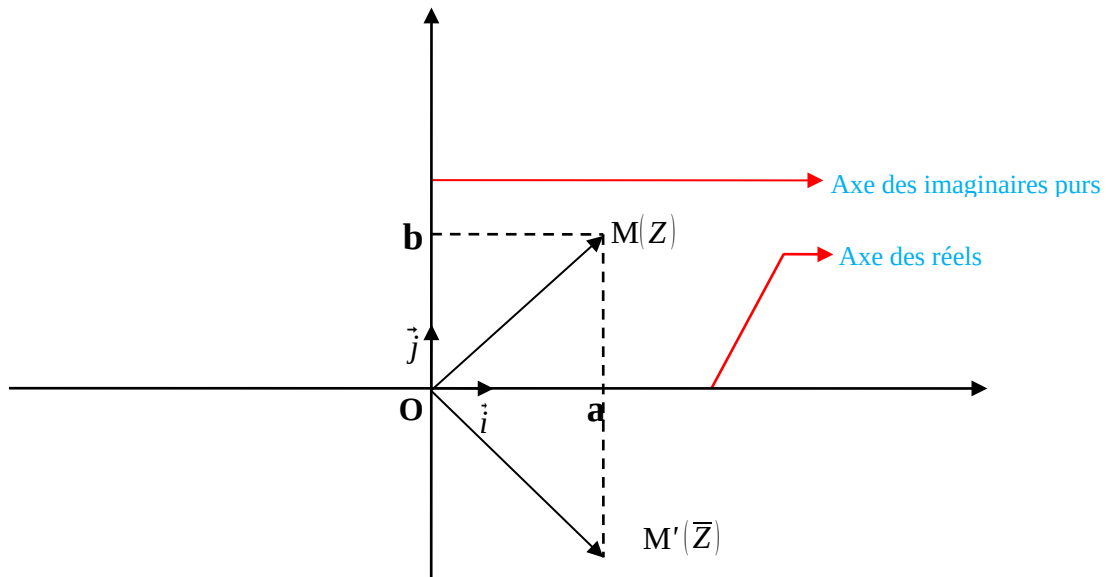
$$\Rightarrow Z = \frac{(1-\sqrt{6})}{3} - i\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{3}$$

III) Conjugué d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $Z = a + ib$ l'expression algébrique d'un nombre complexe. On appelle conjugué de Z , le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z} = a - ib$.

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Exemple

Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

- a) $Z = 1 - i$; b) $Z = i + 95$; c) $Z = i$. d) $Z = 3$

Solution

a) $Z = 1 - i \Rightarrow \bar{Z} = 1 + i$; b) $Z = i + 95 \Rightarrow \bar{Z} = -i + 95$

c) $Z = i \Rightarrow \bar{Z} = -i$; d) $Z = 3 \Rightarrow \bar{Z} = 3$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes :

$$P_1 : Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z \text{ est un réel}$$

$$P_2 : Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow Z \text{ est un imaginaire pur}$$

$$P_3 : \overline{Z+Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$$

$$P_4 : \overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'}$$

$$P_5 : \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}} \quad (\text{avec } Z' \neq 0)$$

$$P_6 : \overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}} \quad (\text{avec } Z' \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{R})$$

$$P_7 : \overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$$

$$P_8 : \operatorname{Re}(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$$

$$P_9 : Z \times \bar{Z} \text{ est un réel positif}$$

Exemple

Soit A un nombre complexe tel que $A = \frac{2 + \bar{Z}}{1 - \bar{Z}}$ (avec $\bar{Z} \neq 1$)

- 1) Ecrire A sous forme algébrique
- 2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tel que :
 - a) A soit un réel
 - b) A soit un imaginaire pur.

Solution

1) Forme algébrique de A

Posons $Z = x + iy \Rightarrow \bar{Z} = x - iy$

$$\begin{aligned} \text{On a : } A &= \frac{2 + (x - iy)}{1 - (x - iy)} = \frac{(2 + x) + i(-y)}{(1 - x) + i(y)} = \\ &= \frac{[(2 + x) + i(-y)][(1 - x) - i(y)]}{[(1 - x)^2 + (y)^2]} \\ &= \frac{(2 + x)(1 - x) - i(2 + x)(y) + i(-y)(1 - x) - y^2}{(1 - x)^2 + (y)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2) + i(-3y)}{(1-x)^2 + (y)^2} = \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2)}{(1-x)^2 + (y)^2} + i \frac{(-3y)}{(1-x)^2 + (y)^2}$$

2) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que :

a) A soit un réel

Z est un réel si sa partie imaginaire est nulle c'est-à-dire $\text{Im}(Z) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(-3y)}{(1-x)^2 + (y)^2} = 0 \Leftrightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite d'équation $y = 0$ ou encore l'axe des abscisses.

b) A soit un imaginaire pur.

A est un imaginaire pur si sa partie réelle est nulle c'est-à-dire $\text{Re}(A) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2)}{(1-x)^2 + (y)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{9}{4}$$

Alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$

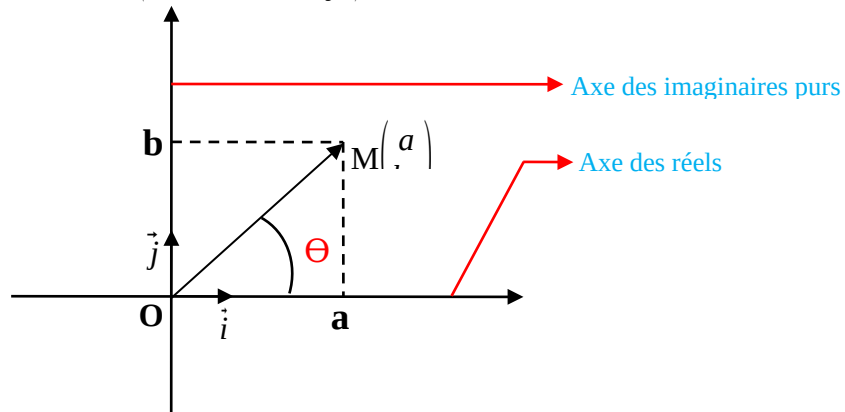
NB : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

IV) Module et argument d'un nombre complexe :

1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère $(\vec{o} ; \vec{i} ; \vec{j})$; plaçons le point M de Z dont l'afixe est

$$Z = a + ib \Rightarrow M$$



$$\text{Ici : } \|\vec{OM}\| = d(OM) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a- Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de Z, le nombre réel positif ou nul noté : $|Z|$ tel que $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si M est le point image de Z alors $|Z| = d(O ; M) = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } Z = -i ; \text{ b) } Z = \sqrt{3}i ; \text{ c) } Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i ; \text{ d) } Z = 1 - i\sqrt{3} ; \text{ e) } Z = 1 + i$$

Solution

$$\text{a) } Z = -i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{b) } Z = \sqrt{3}i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (0)^2} = \sqrt{3+0} = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d) } Z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{e) } Z = 1 + i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

b- Propriétés :

$P_1 : |Z|$ est toujours positif ; $P_2 : |Z| = |\bar{Z}|$; $P_3 : |Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

$$\mathbf{P}_4: |Z \times Z'| = |Z| \times |Z'| \quad ; \quad \mathbf{P}_5: |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

$$\mathbf{P}_6: \left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|} \text{ (avec } Z' \neq 0) \quad ; \quad \mathbf{P}_7: \left| \frac{a}{Z} \right| = \frac{a}{|Z|} \text{ (avec } Z \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{R}) ;$$

$$\mathbf{P}_8: |Z^n| = |Z|^n \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemple

Détermine le module des nombres complexes suivants

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} ; Z_2 = 2 + 2i ; Z_3 = -1 - i\sqrt{3} ; Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} ; Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 ; Z_6 = \frac{(Z_3)^2}{(Z_1)^2} \in \mathbb{C}$$

Solution

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$Z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$Z_3 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|Z_4| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \cdot Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3|$$

$$\Rightarrow |Z_5| = (2\sqrt{2})^2 \times 2$$

$$\Rightarrow |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

$$|Z_6| = \left| \frac{(Z_3)^2}{(Z_1)^2} \right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$$

2) Argument :

a- Définition :

En observant la **figure 1** ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle θ , on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

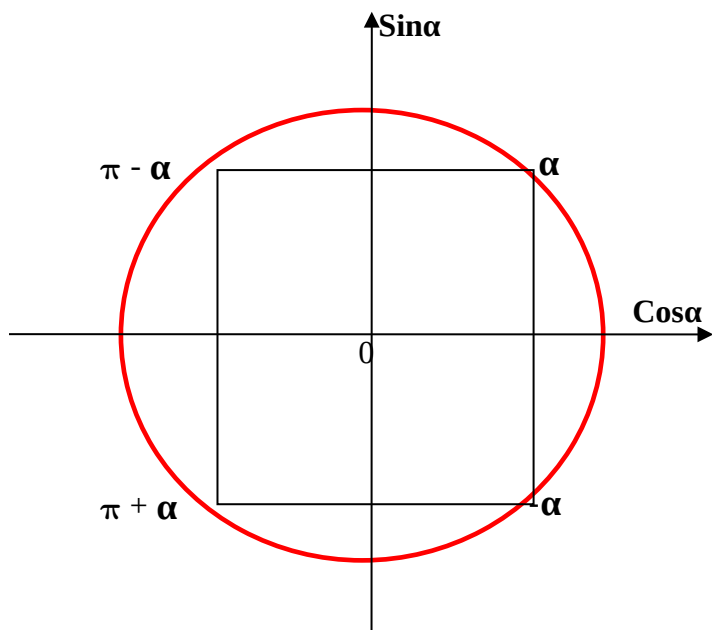
Soit $\mathbf{Z}$ est un nombre complexe de module $|Z|$ (avec $|Z| \neq 0$). On appelle argument de $\mathbf{Z}$, le nombre réel noté θ ou **arg (Z)** tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases}$$

N.B :

Le cercle de référence trigonométrique et le tableau des angles trigonométriques sont nécessaires à connaître pour le calcul des arguments :

Cercle trigonométrique et le Tableau des angles remarquables trigonométriques



Degrés	Radians	Sinus	Cosinus
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180°	π	0	-1
360°	2π	0	1

Exemple

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

$$Z_1 = -1 - i\sqrt{3} ; \quad Z_2 = -i(a^p + 1)(p) ; \quad Z_3 = 1 + i ; \quad Z_4 = 1 - i$$

Solution

$$Z_1 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2 = -i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \Theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z_3 = 1 + i \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_4 = 1 - i \Rightarrow |Z_4| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_4) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{1}{2} \\ \sin \Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{3}$$

b- Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes d'arguments respectifs $\arg(Z)$ et $\arg(Z')$

$$\mathbf{P_1 : } \arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z') \quad ; \quad \mathbf{P_2 : } \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$$

$$\mathbf{P_3 : } \arg(Z^n) = n \arg(Z) \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad \mathbf{P_4 : } \arg\left(\frac{a}{Z}\right) = -\arg(Z) \text{ (avec } Z \neq 0)$$

$$P_5: \arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$$

Exemple

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} ; Z_2 = 2 + 2i ; Z_3 = -1 - i\sqrt{3} ; Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} ; Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 ; Z_6 = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^3$$

Solution

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$Z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_3 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$|Z_4| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et

$$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$$

$$Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \cdot Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3| = (2\sqrt{2})^2 \times 2$$

$$\Rightarrow |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

Et

$$\arg(Z_5) = \arg[(Z_2)^2 \cdot Z_3] = \arg(Z_2)^2 + \arg(Z_3) = 2\arg(Z_2) + \arg(Z_3) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \arg(Z_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

$$|Z_6| = \left| \left(\frac{Z_3}{Z_1} \right)^2 \right| = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$$

$$\arg \left[\left(\frac{Z_3}{Z_1} \right)^2 \right] = 2 \arg \left(\frac{Z_3}{Z_1} \right) = 2 [\arg(Z_3) - \arg(Z_1)] = 2 \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{5\pi}{3} \right) = \frac{10\pi}{3}$$

V) Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$$\theta \in [-\pi ; \pi[\quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes tels que $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ et $Z' = r' (\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$P_1 : Z \times Z' = r \times r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

$$P_3 : Z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

NB : si $r = 1$ on a : $Z^n = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ (formule de Moivre)

Exemple

Ecrivez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} ; Z_2 = 2 + 2i ; Z_3 = -1 - i\sqrt{3} ; Z_4 = 4i ; Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 ; Z_6 = 4i^3$$

Solution

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Alors } Z_1 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\mathbf{Z}_2 = 2 + 2i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\Theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\Theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\mathbf{Z}_3 = -1 - i \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 2$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\Theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\Theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_3 = 2 \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$|Z_4| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et

$$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$$

$$\mathbf{Z}_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \cdot Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3| = (2\sqrt{2})^2 \times 2$$

$$\Rightarrow |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16 \text{ et}$$

$$\arg(Z_5) = \arg[(Z_2)^2 \cdot Z_3] = \arg(Z_2)^2 + \arg(Z_3) = 2\arg(Z_2) + \arg(Z_3) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \arg(Z_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_5 = 16 \left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right]$$

$$|Z_6| = \left| \left(\frac{Z_3}{Z_1} \right)^2 \right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$$

$$\arg \left[\left(\frac{Z_3}{Z_1} \right)^2 \right] = 2 \arg \left(\frac{Z_3}{Z_1} \right) = 2 [\arg(Z_3) - \arg(Z_1)] = 2 \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Alors } Z_6 = \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

VI) Forme polaire d'un nombre complexe

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme polaire de Z toute écriture de Z de la forme $Z = [r ; \theta]$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes tels que $Z = [r ; \theta]$ et $Z' = [r' ; \theta']$

$$P_1 : Z \cdot Z' = [r \cdot r' ; \theta + \theta']$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'} ; -\theta' \right]$$

$$P_3 : Z^n = [r^n ; n\theta]$$

Exemple

Donner la forme polaire des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -1 - i ; Z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} ; Z_3 = 1 - i ; Z_1 \times Z_2 ; Z_1^n ; Z_2^n$$

Solution

$$Z_1 = -1 - i \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{Alors } Z_1 = \left[\sqrt{2} ; \frac{5\pi}{4} \right]$$

$$Z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \sin \Theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Alors } Z_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$Z_3 = 1 - i \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 2$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{1}{2} \\ \sin \Theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Alors } Z_3 = \left[2 ; -\frac{\pi}{3} \right]$$

$$Z_1 \times Z_2 = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right] = [1 ; 2\pi]$$

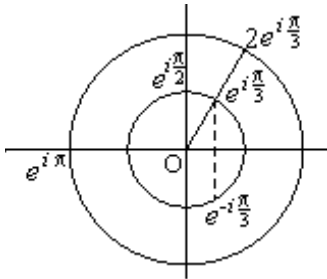
$$R_+ = \left[\frac{2}{\sqrt{2}} ; -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \right] = \left[2\sqrt{2} ; -\frac{13\pi}{12} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \left[2^4 ; -\frac{4\pi}{3} \right]$$

VII) Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z , toute écriture de Z se ramenant sous la forme $Z = re^{i\theta}$ où son conjugué est $\bar{Z} = re^{-i\theta}$



2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$$Z = re^{i\theta} \text{ et } Z' = r'e^{i\theta'}$$

$$P_1 : Z \cdot Z' = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$P_3 : Z \cdot \bar{Z} = r^2 e^{i(\theta - \theta)} = r^2 e^{i(0)} = r^2 e^0 = r^2 \cdot 1 = r^2 \text{ (Avec } e^0 = 1 \text{)}$$

$$P_4 : Z^n = r^n e^{in\theta}$$

P₅ : Formule d'Euler

$$R_{+}^i \text{ et } \sqrt{x}$$

Exemple 1

Compléter le tableau suivant

Formes algébriques de Z	$-5(1 + i\sqrt{3})$		
Formes trigonométriques de Z			$2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$
Formes exponentielles de Z		$4 e^{i \left(\frac{2\pi}{3} \right)}$	

Exemple 2

Soient les nombres complexes :

$$Z_1 = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + K ; Z_2 = 1 - i ; Z_3 = \sqrt{ax+b}$$

1) Ecrire Z_1 , Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire Z_3 sous forme algébrique.

3) Déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

4) Calculez $(Z_3)^{24}$.

Solution1

Formes algébriques de Z	$-5(1 + i\sqrt{3})$	$2(-1 + i\sqrt{3})$	$\sqrt{2}(1 - i)$
Formes trigonométriques de Z	$10 \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]$	$4 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right]$	$2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$
Formes exponentielles de Z	$10 e^{i \frac{4\pi}{3}}$	$4 e^{i \left(\frac{2\pi}{3} \right)}$	$2 e^{i \left(-\frac{\pi}{4} \right)}$

Solution 2

Soient les nombres complexes : $Z_1 = \frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b+K}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \frac{1}{\cos 1} e^{i \frac{\pi}{12}}$

1) Ecrire Z_1 , Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique.

$$Z_1 = i i \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \sin \Theta = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \Theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \Theta = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \Theta = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \Theta = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \Theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Alors } Z_1 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$Z_2 = 1 - i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \sin \Theta = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Alors } Z_2 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$Z_3 = \frac{1}{\cos 1} e^{i \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right] = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\text{Alors } Z_3 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$$

2) Ecrire Z_3 sous forme algébrique.

$$Z_3 = \sqrt[3]{1-i} \Rightarrow Z_3 = \frac{1-i}{2(1-i)} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2i)}{(2)^2+(-2)^2} = \frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})+2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$$

$$\Rightarrow Z_3 = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \quad \text{Alors } Z_3 = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

3) En déduisons les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Par identification des formes trigonométrique et algébrique, on a :

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \end{cases}$$

4) Calculons $(Z_3)^{24}$.

En utilisant la formule de Moivre ($Z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$) ; on a :

$$(Z_3)^{24} = \cos\left(\frac{24\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{24\pi}{12}\right) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

$$\text{Alors } (Z_3)^{24} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

VIII) Formules de Moivre et formules d'Euler:

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument** $\hat{\alpha}$. On appelle formule de **Moivre** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $Z^n = \cos(n\hat{\alpha}) + i \sin(n\hat{\alpha})$ avec $(n \in \mathbb{N}^*)$

2) Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal est une méthode très pratique utilisée pour le développement des identités :

$(a + b)^n$ et $(a - b)^n$. Elle se présente comme suit :

1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.								
.								

3) Application de la formule de Moivre :

$$\frac{u^{n+1}}{n+1} + K - \frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + K$$

4) Linéarisation : de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$

Pour **Linéariser $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$** ($n \in \mathbb{N}$) ; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules (**d'Euler ou de Moivre**) et du (**binôme de Newton ou du triangle de Pascal**).

Méthode :

- Développer et réduire : $\cos^n \theta = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ ou $\sin^n \theta = \frac{-1}{u'} \cos(u) + K$ (**Moivre**)

Ou encore $\cos^n \theta = \frac{1}{u'} \sin(u) + K$ ou $\sin^n \theta = \frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cos^2 u)$ (**Euler**)

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun deux en fonction des termes de la forme **$\cos kx$ et $\sin kx$** .

Exemple

En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, linéariser les expressions suivantes :

$A(x) = \cos^3 x$; $B(x) = \sin^3 x$; $C(x) = \cos^5 x$; $D(x) = \cos^3 x \cdot \sin^3 x$

Solution

• Utilisation des formules de Moivre

$A(x) = \cos^3 x$

Posons $\theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3 \theta = (\cos \theta)^3 = \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^3 = \frac{(z + \bar{z})^3}{2^3} =$

$$\frac{z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3}{8}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{(Z^3 + \bar{Z}^3) + (3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3 + \bar{Z}^3) + 3Z\bar{Z}(Z + \bar{Z})}{8}$$

$$\text{Or } Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos(n\theta) \Rightarrow Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\cos(3\theta) \text{ et } Z + \bar{Z} = 2\cos\theta$$

$$\text{De même } Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2\cos(3\theta) + 3(2\cos(\theta))}{8} = \frac{2\cos 3\theta + 6\cos\theta}{8} = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \text{ or } \theta = x$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$B(x) = \sin^3 x$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow B(x) = \sin^3\theta = (\sin\theta)^3 = \left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z - \bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) + (-3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z - \bar{Z})}{-8i}$$

$$\text{Or } Z^n - \bar{Z}^n = 2i\sin(n\theta) \Rightarrow Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\sin(3\theta) \text{ et } Z - \bar{Z} = 2i\sin\theta$$

$$\text{De même } Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{2i\sin(3\theta) + 3(2i\sin(\theta))}{-8i} = \frac{2i\sin 3\theta + 6i\sin\theta}{-8i} = \frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$$

$$\Rightarrow B(x) = -\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin\theta) \text{ or } \theta = x$$

$$\Rightarrow B(x) = -\frac{1}{4}(\sin 3x + 3\sin x)$$

$$C^{(x)} = \cos^5 x$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow C(x) = \cos^5\theta = (\cos\theta)^5 = \left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z + \bar{Z})^5}{2^5}$$

$$C(x) = \frac{Z^5 + 5Z^4\bar{Z} + 10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3 + 5Z\bar{Z}^4 + \bar{Z}^5}{32}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + (5Z^4\bar{Z} + 5Z\bar{Z}^4) + (10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + 5Z\bar{Z}(Z^3 + \bar{Z}^3) + 10Z^2\bar{Z}^2(Z + \bar{Z})}{32}$$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos(n\theta) \Rightarrow Z^5 + \bar{Z}^5 = 2\cos(5\theta)$; $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\cos(3\theta)$ et $Z + \bar{Z} = 2\cos\theta$

De même $Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$ et $Z^2 \bar{Z}^2 = 1$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{2\cos(5\theta) + 5(2\cos(3\theta)) + 10(2\cos\theta)}{32} = \frac{2}{32}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta) \text{ or } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{16}\left(\cos \frac{5x}{2} + 5\cos \frac{3x}{2} + 10\cos \frac{x}{2}\right)$$

D(x) = cos³x • sin³x

Posons $\theta = x \Rightarrow D(x) = \cos^3\theta \cdot \sin^3\theta = (\cos\theta)^3 (\sin\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3 \left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{2^3} \times \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{(Z+\bar{Z})^3 (Z-\bar{Z})^3}{-64i}$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{(Z^3 + 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3)(Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3)}{-64i}$$

Après development, on a :

$$D(x) = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) + (-3Z^4\bar{Z}^2 + 3Z^2\bar{Z}^4)}{-64i} = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) - 3Z^2\bar{Z}^2(Z^2 - \bar{Z}^2)}{-64i}$$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\sin(n\theta) \Rightarrow Z^6 - \bar{Z}^6 = 2i\sin(6\theta)$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2i\sin(2\theta)$

De même $Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z^2 \bar{Z}^2 = 1$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{2i\sin(6\theta) - 3(2i\sin(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(\sin 6\theta - 3\sin 2\theta) =$$

$$\frac{1}{32}(\sin 6\theta - 3\sin 2\theta)$$

Or $\theta = x \Rightarrow D(x) = \frac{1}{32}(\sin 6x - 3\sin 2x)$

- Utilisation des formules d'Euler

$A(x) = \cos^3 x$

Posons $\theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3 \theta = (\cos \theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{2^3}$

$\Rightarrow A(x) = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8}$

$\Rightarrow A(x) = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{8} = \frac{(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8}$

Or $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta) \Rightarrow e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} = 2\cos(3\theta)$

Et $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

De même $e^{in\theta} \cdot e^{-in\theta} = 1 \Rightarrow e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$

$\Rightarrow A(x) = \frac{2\cos(3\theta) + 3(2\cos(\theta))}{8} = \frac{2\cos 3\theta + 6\cos\theta}{8} = \frac{2}{8}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \quad \text{or } \theta = x$

$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

Faites-en de même avec les autres cas.

IX) Equations dans $\mathbb{C}$

1) Equation du premier degré :

a) Définition :

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $\mathbf{aZ} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Avec ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$)

b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation $\mathbf{aZ} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{S} = \frac{1}{a} \text{Arctg} \frac{x}{a} + K$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + 2i)Z - (i - 1) = iZ - 3$.

Solution

$$(1 + 2i)Z - (i - 1) = iZ - 3$$

$$\Rightarrow (1 + 2i)Z - iZ = (i - 1) - 3$$

$$\Rightarrow Z(1 + i) = -4 + i$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-4 + i}{1 + i}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{(-4 + i)(1 - i)}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-3 + 5i}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}i \right\}$$

2) Racines carrées d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle racines carrées de Z , tout nombre complexe $\mathbf{Z}$ tel que $Z = \mathbf{Z}^2$.

Exemple : Si $Z = 9i^2 \Rightarrow z_1 = -3i$ ou $z_2 = 3i$.

b) Résolution du cas général :

Si $Z = a + ib$ et $\mathbf{Z} = x + iy$. On dit que $\mathbf{Z}$ est une racine carrée de Z si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \arg th \frac{x}{a} + K \\ \text{si } |x| < a \end{array} \right. \quad \text{si } |x| < a$$

Exemple

Trouver les racines carrées de : $Z_1 = 5 - 12i$; $Z_2 = 45 + 28i$; $Z_3 = 3 - 4i$

Solution

$$\mathbf{Z}_1 = 5 - 12i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$(2) : xy = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{x}$$

- Si $x = -3 \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -3 + 2i$
- Si $x = 3 \Rightarrow y = \frac{-6}{3} = -2$ et $\delta_2 = x + iy \Rightarrow \delta_2 = 3 - 2i$

Alors les racines carrées de Z_1 sont $\delta_1 = -3 + 2i$ et $\delta_2 = 3 - 2i$

$$Z_2 = 45 + 28i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 45 \\ 2xy = 28 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(45)^2 + (28)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 45 & (1) \\ xy = 14 & (2) \\ x^2 + y^2 = 53 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 98 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = -7 \quad \text{ou} \quad x = 7$$

$$(2) : xy = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{x}$$

- Si $x = -7 \Rightarrow y = \frac{14}{-7} = -2$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -7 - 2i$
- Si $x' = 7 \Rightarrow y' = \frac{14}{7} = 2$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 7 + 2i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -7 - 2i$ et $\delta_2 = 7 + 2i$

$$Z_3 = 3 - 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = -2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$(2) : xy = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$$

- Si $x = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{-2} = 1$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 + i$
- Si $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{-2}{2} = -1$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 - i$

Alors les racines carrées de Z_1 sont $\delta_1 = -2 + i$ et $\delta_2 = 2 - i$

Autre méthode pratique

Soit $Z = a + ib$, l'écriture algébrique d'un nombre complexe.

Si $\frac{b}{2}$ est un entier relatif tel que $\frac{b}{2} = b_1 \times b_2$ avec $(b_1^2 - b_2^2 = a)$

Alors les racines carrées de Z sont : $\delta_1 = b_1 + ib_2$ et $\delta_2 = -b_1 - ib_2$

Exemple

Déterminer les racines carrées de $Z = 5 - 12i$

Ici : $a = 5$ et $b = -12$

$$\begin{array}{ccc} \frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6 = & -3 & \times & 2 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & (-3)^2 & & (2)^2 \\ & || & & || \\ & 9 & - & 4 = 5 = a \end{array}$$

Alors : $b_1 = -3$ et $b_2 = 2$

D'où $\delta_1 = -3 + 2i$ et $\delta_2 = -(-3 + 2i) = 3 - 2i$

En observant la solution obtenue à la page 26, on remarque que les résultats sont identiques.

Contre exemple :

Déterminer les racines carrées de $Z = 20 - 16i$

Ici : $a = 20$ et $b = -16$

$$\frac{b}{2} = \frac{-16}{2} = -8 = -4 \times 2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (-4)^2 & & (2)^2 \\ || & & || \\ & - & 16 \end{array} \quad 4 = 12 \neq a$$

Alors cette méthode est à rejeter.

Faites-en de même avec les complexes Z_2 et Z_3 .

3) Equation du second degré :

a) Définition:

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$$aZ^2 + bZ + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite d'abord le calcul du discriminant associé Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, on a : $Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, on a : $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, on a : $Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
- Si $\Delta = a' + ib'$ (sous forme algébrique), on a : $Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Où : δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ .

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a)** $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; **b)** $-2Z^2 + Z + 1 = 0$; **c)** $Z^2 - 4Z + 4 = 0$;
d) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

Solution

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$\Rightarrow S = \{ 1 - i ; 1 + i \}$$

$$Z_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

b) $-2Z^2 + Z + 1 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(1) = 9 = (3)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(1) - \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1 - 3}{-4} = 1$$

$$\Rightarrow S = \{ 1 ; -\frac{1}{2} \}$$

$$Z_2 = \frac{-(1) + \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1 + 3}{-4} = -\frac{1}{2}$$

c) $Z^2 - 4Z + 4 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \Rightarrow S = \{ 2 \}$$

d) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

$$\Delta = [-4(1+i)]^2 - 4(4)[- (45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i) = 720 + 448i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ xy = 224 \\ x^2 + y^2 = 848 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 1568 \Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = -28 \quad \text{ou} \quad x = 28$$

$$(2) : xy = 224 \Rightarrow y = \frac{224}{x}$$

- Si $x = -28 \Rightarrow y = \frac{224}{-28} = -8$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -28 - 8i$
- Si $x' = 28 \Rightarrow y' = \frac{224}{28} = 8$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -28 - 8i$ et $\delta_2 = 28 + 8i$

$$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -3 - \frac{1}{2}i ; 4 + \frac{3}{2}i \right\}$$

$$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i$$

4) Equations se ramenant au second degré :

a) Définition :

Ceux sont des équations dont **le degré est supérieur à 2**

Exemple : $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$; $aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e = 0$; etc..

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite obligatoirement la reconnaissance d'une racine évidente : **réelle** ($Z_0 = a$) **ou imaginaire** ($Z_0 = ib$) **ou encore** $Z_0 = a + ib$

(avec a et $b \neq 0$) afin de factoriser puis de résoudre l'équation en utilisant l'une des techniques de factorisation qui suivent : **(Division**

Euclidienne ; tableau d'Hörner ou par identification des coefficients).

NB :

Pour les équations bicarrées : ($aZ^4 + bZ^2 + c = 0$), il suffit de ramener l'équation bicarrée au second degré en posant : $Z^2 = z$. $\Rightarrow aZ^2 + bZ + c = 0$ Avec $a \neq 0$

Exemples

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$, sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Solution 1

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$, sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Soit $Z_0 = ib$ cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6 + i)Z_0 + 3i - 1 = 0,$$

$$\Leftrightarrow (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6+i)(ib) + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1) = 0 & (1) \\ (-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

NB : On résout toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (1) qui est la plus facile à résoudre : $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

Et par vérification dans (2) , on obtient :

$$- (1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow - 1 + 4 - 6 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow - 3 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ Vraie}$$

D'où $Z_0 = ib = i$ est la solution réelle

Factorisons : $Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1$ (En utilisant la méthode d'Hörner)

	1	- 4i	- 6-i	3i-1	
i			i	3	- 3i+1
	1	- 3i	- 3-i	0	

↓
Z₀

↓
a

↓
b

↓
c

$$\Rightarrow Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1 = (Z - Z_0) (aZ^2 + bZ + c)$$

$$\Leftrightarrow Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1 = (Z - i) (Z^2 - 3iZ - 3 - i)$$

$$\text{D'où } Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z - i) (Z^2 - 3iZ - 3 - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z - i = 0 \quad \text{ou} \quad Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = i$$

$$\text{Ou } Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0 \Rightarrow \Delta = (- 3i)^2 - 4(1)(- 3 - i) = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$(2) : xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

- Si $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z sont : $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \left(i ; -1 + i ; 1 + 2i \right)$$

Solution 2

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant quelle admet une solution réelle.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3 - (3 + 5i)Z_0^2 + (-4 + 9i)Z_0 + 6 - 4i = 0,$$

$$\Leftrightarrow (a)^3 - (3 + 5i)(a)^2 + (-4 + 9i)(a) + 6 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 5ia^2 - 4a + 9ai + 6 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) + i(-5a^2 + 9a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) = 0 & (1) \\ (-5a^2 + 9a - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (2) : $-5a^2 + 9a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (9)^2 - 4(-5)(-4) = 1$

$$\Rightarrow a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{4}{5}$$

Et par vérification dans (1), on remarque que :

$a_1 = 1$ est la seule solution qui vérifie l'équation (1)

D'où $Z_0 = a = 1$ est la solution réelle

Factorisons : $Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$ (En utilisant la méthode d'Horner)

	1	- 3-5i	- 4+9i	6-4i	
1			1	- 2-5i	-6+4i
	1	- 2-5i	- 6+4i	0	
	Z_0	a	b	c	

$$\Rightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$\Leftrightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = (Z - 1)[Z^2 + (-2-5i)Z - 6+4i]$$

$$\text{D'où } Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(Z - 1)[Z^2 + (-2-5i)Z - 6+4i] = 0$$

$$\Leftrightarrow Z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (Z - 1)[Z^2 + (-2-5i)Z - 6+4i] = 0$$

$$\Rightarrow Z = 1$$

$$\text{Ou } [Z^2 + (-2-5i)Z - 6+4i] = 0 \Rightarrow \Delta = [- (2+5i)]^2 - 4(1)(-6+4i)$$

$$\Rightarrow \Delta = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$

(2) : $xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z sont : $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2i \\ 2+3i \end{array} \right\}$$

5) Racines nièmes d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle **racine n^{ième} de Z** tout nombre complexe **Z** tel que : $Z^n = Z$.

b) Résolution :

Soit $Z = a + ib$ un complexe de forme polaire : $[r ; \frac{1}{n}\theta]$

$Z = a' + ib'$ un complexe de forme polaire : $[r' ; \frac{1}{n}\theta']$

$$Z^n = Z \Leftrightarrow [r' ; \frac{1}{n}\theta']^n = [r ; \frac{1}{n}\theta] \Leftrightarrow [(r')^n ; n \frac{1}{n}\theta'] = [r ; \frac{1}{n}\theta]$$

Par identification, on a :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{ax^2 + bx + c} (\Delta = 0) \quad \text{avec } k \in [0 ; n-1]$$

Ainsi les racines nièmes de Z sont données par la formule :

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} (a > 0) \quad \text{ou } Z_k = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left[x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} \right] + K$$

Avec $K \in [0 ; n-1]$

6) Racines n^{ièmes} de l'unité :

Soit Z un nombre complexe tel que $z = 1$.

Les racines de Z sont obtenues en utilisant la formule qui suit : $Z_k = \left[1; \frac{2K \Pi}{n} \right]$

Exemple

Déterminer :

- a) Les racines carrées de $-i$
- b) Les racines cubiques de $4^{\frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right)}$
- c) Les racines quatrièmes de 1
- d) Les racines cinquièmes de i
- e) Les racines sixièmes de $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Solution

a) **Déterminons les racines carrées de $-i$**

Posons $z = -i$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Et } \arg(z) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \Theta = 0 \\ \sin \Theta = -1 \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi les racines carrées de Z sont données par :

$$Z_k = \sqrt[2]{1} \left[\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{-\pi + 4k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi + 4k\pi}{4} \right)$$

Avec $k \in [0 ; 1]$

- Si $k = 0$; on a : $Z_0 = \cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right)$
- Si $k = 1$; on a : $Z_1 = \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$

$$\Rightarrow Z_1 = -\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

D'où les racines carrées de Z sont :

$$\left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) ; -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

b) Déterminons les racines cubiques de : $4\sqrt{3} - 4i$

Posons $z = 4\sqrt{3} - 4i$

$$= > |Z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{Et } \arg(Z) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\Theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{6}$$

Ainsi les racines cubiques de Z sont données par :

$$Z_k = \sqrt[3]{8} \left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right) \right] = \cos\left(\frac{-\pi + 12k\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi + 12k\pi}{18}\right)$$

Avec $k \in [0 ; 2]$

- Si $k = 0$; on a : $Z_0 = \cos\left(\frac{-\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{18}\right)$
- Si $k = 1$; on a : $Z_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right)$
- Si $k = 2$; on a : $Z_2 = \cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right)$

D'où les racines cubiques de Z sont :

$$\left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{18}\right) ; \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right) ; \cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right) \right\}$$

c) Déterminons les racines quatrième de 1

Posons $z = 1$

Cela revient à déterminer **les racines quatrième de l'unité** c'est-à-dire **1**.

Or elles sont données par la formule :

$$Z_k = \left[1; \frac{2K\pi}{n} \right] \Rightarrow Z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{4} \right] = \left[1; \frac{k\pi}{2} \right] \text{ Avec } k \in [0; 3]$$

- Si $k = 0$; on a : $Z_0 = \left[1; 0 \right]$
- Si $k = 1$; on a : $Z_1 = \left[1; \frac{\pi}{2} \right]$
- Si $k = 2$; on a : $Z_2 = \left[1; 2\pi \right]$
- Si $k = 3$; on a : $Z_3 = \left[1; \frac{3\pi}{2} \right]$

D'où les racines quatrièmes de Z sont :

$$\left\{ \left[1; 0 \right] ; \left[1; \frac{\pi}{2} \right] ; \left[1; 2\pi \right] ; \left[1; \frac{3\pi}{2} \right] \right\}$$

d) Déterminons les racines cinquièmes de i

Posons $z = i$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Et } \arg(Z) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\Theta = 0 \\ \sin\Theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi les racines cinquièmes de Z sont données par :

$$Z_k = \sqrt[5]{1} \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) \right] = \cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right)$$

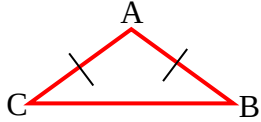
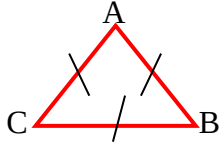
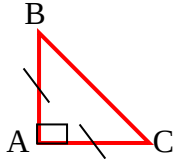
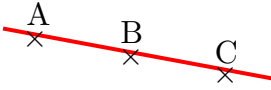
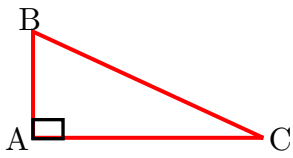
Avec $k \in [0; 4]$

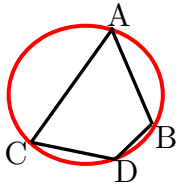
- Si $k = 0$; on a : $Z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
- Si $k = 1$; on a : $Z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- Si $k = 2$; on a : $Z_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
- Si $k = 3$; on a : $Z_3 = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)$

- Si $k = 4$; on a: $Z_4 = \cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)$

X) Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A 	$AB = AC$ $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \alpha$ $(\alpha \in [0 ; \pi])$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha} \text{ ou }$ $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral 	$AB = AC = BC$ Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou }$ $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	$AB = AC$ Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i \text{ ou }$ $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$
Points A, B, C alignés 	$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0 + K\pi$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$
Triangle ABC rectangle en A 	$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ib \text{ ou } -ib \text{ avec } b \in \mathbb{R}^*$

Points A, B, C, D cocycliques 	$\text{mes } \hat{C} \frac{-\sin x}{\cos^2 x} (\text{mes D}) [\pi]$ Ou $\text{mes } \hat{C} \frac{\sin x}{\cos^2 x} 0 [\pi]$	$\left. \begin{array}{l} \frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} \\ \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^*$
--	--	--

Exemples

Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

- 1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).
- 2) Déterminer l'abscisse de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

- 1) Etudier la nature des triangles ABC et BCD.
- 2) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

SOLUTIONS :

Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

$$Z_A = -1 - i \Rightarrow A(-1 ; -1)$$

$$Z_B = 2 + 3i \Rightarrow B(2 ; 3)$$

$$Z_C = -10 - 13i \Rightarrow C(-10 ; -13)$$

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

$$A ; B ; C \text{ sont alignés si } \det(\vec{AB} ; \vec{AC}) = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (3)(-12) - (4)(-9) = -36 + 36 = 0$$

Puis que $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0$; alors les points A ; B ; C sont alignés.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

$$Z_A = 3 + i \Rightarrow A(3 ; 1)$$

$$Z_B = 2i \Rightarrow B(0 ; 2)$$

$$Z_C = 2 - 2i \Rightarrow C(2 ; -2)$$

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

$$A ; B ; C \text{ est un triangle rectangle et isocèle en A si : } \begin{cases} \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\text{Or } \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2 - 2i) - (3 + i)}{(2i) - (3 + i)} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3)^2 + (1)^2} = \frac{10i}{10} = i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

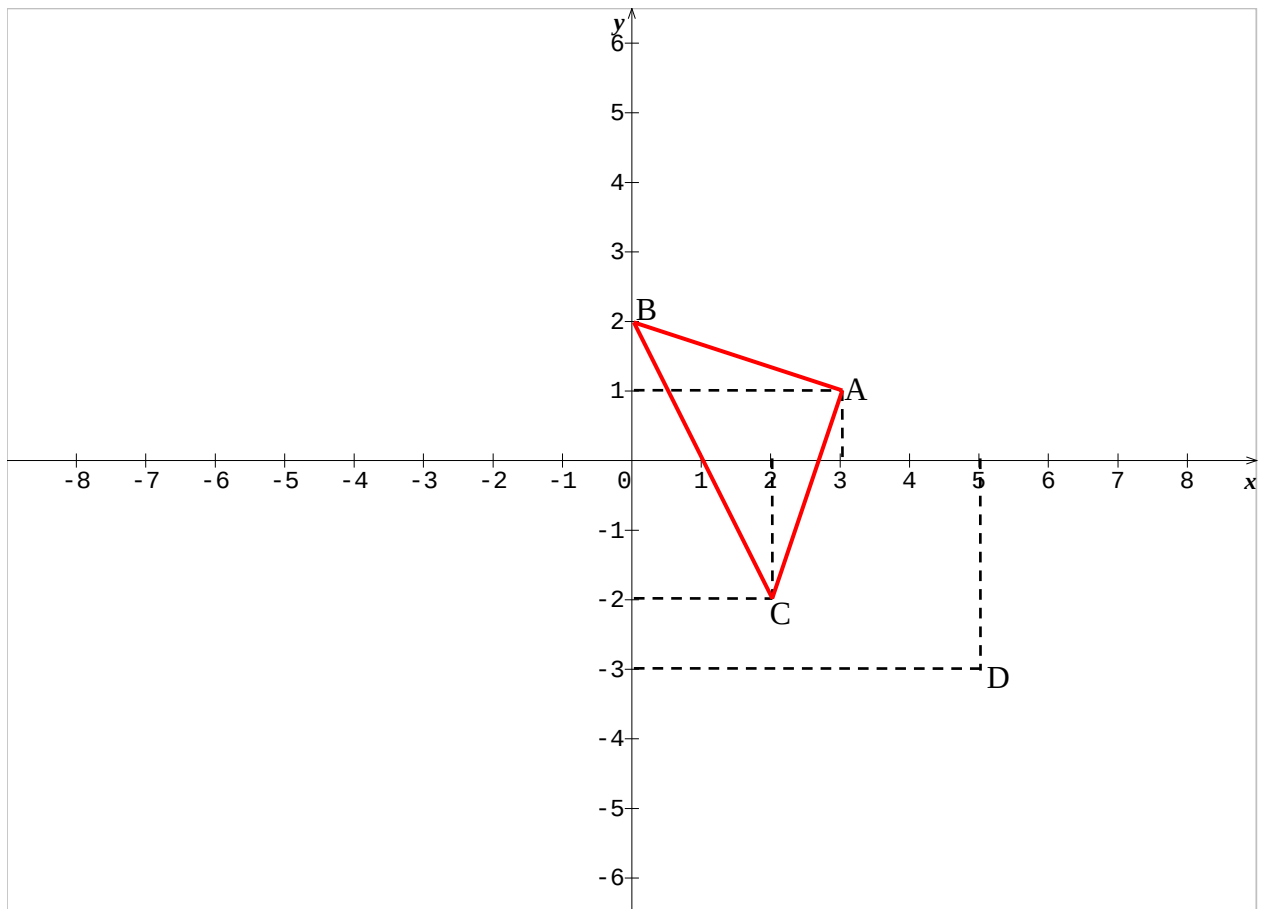
Conclusion :

$$\text{Puisque : } \begin{cases} \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$$

Alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

(Figure représentant cette situation

)



2) Déterminons l'abscisse de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Avec $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x \\ -2 - y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - x \\ -2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -3 \\ -2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{D'où } D \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'abscisses respectifs :
 $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

$$Z_A = -1 + i \Rightarrow A(-1 ; 1)$$

$$Z_B = -1 - i \Rightarrow B(-1 ; -1)$$

$$Z_C = 2i \Rightarrow C(0 ; 2)$$

$$Z_D = -2 - 2i \Rightarrow D(-2 ; -2)$$

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

Pour le triangle ABC

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2i) - (-1 + i)}{(-1 - i) - (-1 + i)} = \frac{1 + i}{-2i} = \frac{(1 + i)(2i)}{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2 + 2i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (-1 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

Alors le triangle ABC est quelconque.

Pour le triangle BCD

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{(2 - 2i) - (-1 - i)}{(2i) - (-1 - i)} = \frac{3 - i}{1 + 3i} = \frac{(3 - i)(1 - 3i)}{(1)^2 + (3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Soit $\Omega(x; y)$ les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

$$d(A; \Omega) = d(B; \Omega) = d(C; \Omega) = d(D; \Omega) = r$$

$$d(A; \Omega) = d(B; \Omega) \Leftrightarrow \sqrt{(x_{\Omega} - x_A)^2 + (y_{\Omega} - y_A)^2} = \sqrt{(x_{\Omega} - x_B)^2 + (y_{\Omega} - y_B)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(x+1)^2} + (y-1)^2 = \cancel{(x+1)^2} + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow -2y = 2y \Rightarrow y=0$$

$$d(C; \Omega) = d(D; \Omega) \Leftrightarrow \sqrt{(x_{\Omega} - x_C)^2 + (y_{\Omega} - y_C)^2} = \sqrt{(x_{\Omega} - x_D)^2 + (y_{\Omega} - y_D)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$$

En remplaçant $y=0$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$$-4x+4=0 \Rightarrow x=1$$

$$\text{D'où } \Omega \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

Or le rayon r est tel que $r = d(A; \Omega) = d(B; \Omega) = d(C; \Omega) = d(D; \Omega)$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

D'où les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle de centre $\Omega \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$

XI) Complexe et lieux géométriques :

1) Distance entre deux points A et B :

Soient A et B, deux points d'afixes respectives Z_A et Z_B .

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\int_a^b f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx}$$

2) Cercle de centre A et de rayon r :

Soit M d'afixe Z_M . A d'afixe Z_A .

$$d(A, M) = r \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^n g(x) dx$$

Exemple

Trouver l'ensemble (r) des points (M) du plan d'afixe Z tel que :

$$|f|$$

Solution

Posons: $Z - 1 + 4i = 0 \Rightarrow Z = 1 - 4i \Rightarrow A(1 ; -4)$

Ici l'ensemble cherché est le cercle de centre A (1 ; -4) et de rayon $r = 3$.

3) Médiatrice d'un segment :

Soit M d'afixe Z_M ; A d'afixe Z_A et B d'afixe Z_B .

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow$

$$\int_a^c g(x) dx$$

Exemple

Déterminer l'ensemble (r) des points M du plan tel que :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Solution

Posons : $Z - 2 = 0$ et $Z + 2 + i = 0$

$\Rightarrow Z = 2$ et $Z = -2 - i$

$\Rightarrow A(2 ; 0)$ et $B(-2 ; -1)$

Ici l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2, 0)$ et $B(-2; -1)$.

4) Droite passant par un point A et faisant un angle α avec l'horizontale

Soit $\bar{M}$ d'affixe Z_M ; A un point d'affixe Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si $\text{Arg} \overline{AM} = \alpha + k\pi$

Exemple

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que :

$$a) \text{Arg}(Z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$b) \text{Arg}(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Solution

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tel que :

$$a) \arg(Z - 2 + 3i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

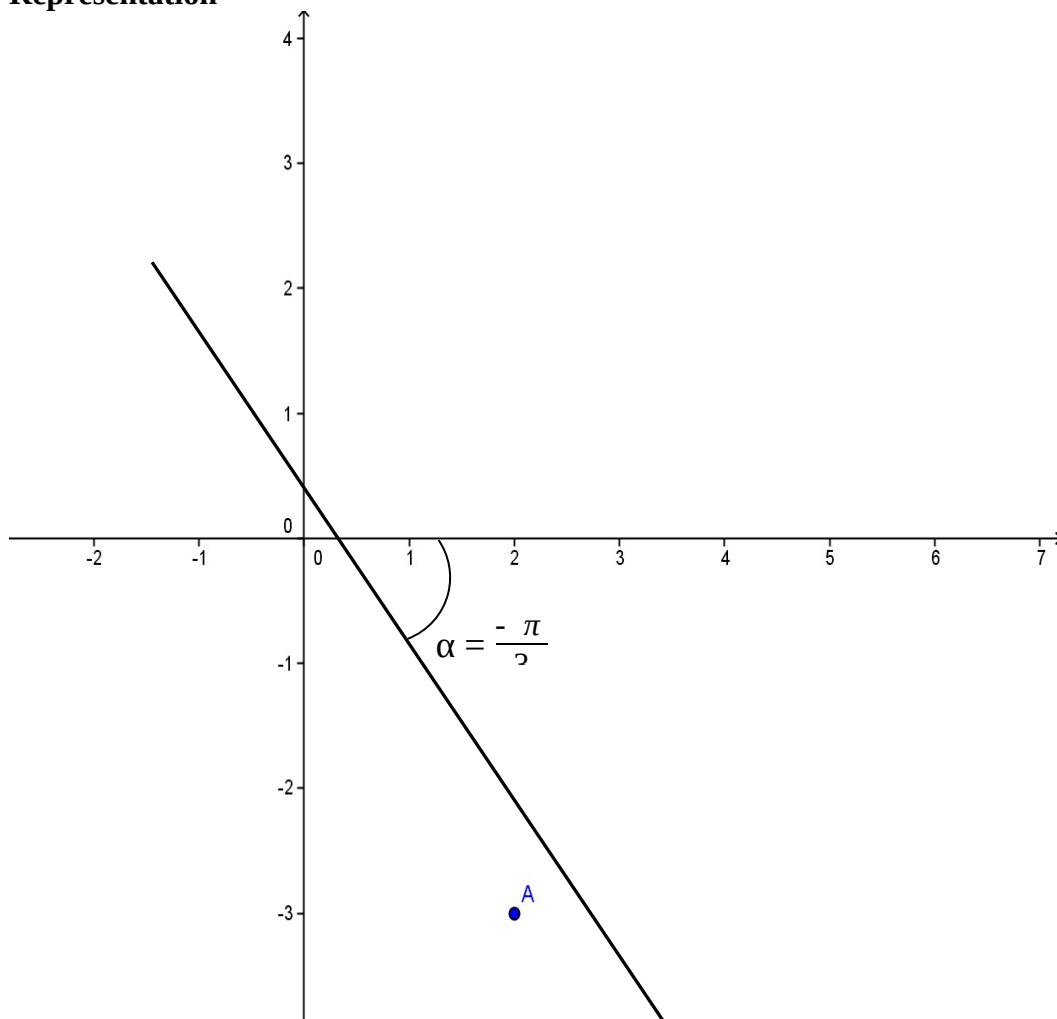
$$\arg(Z - 2 + 3i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \text{Arg}[Z - (2 - 3i)] = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(Z_M - Z_A) = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ Avec } Z_A = 2 - 3i \Rightarrow A\left(\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\right)$$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite (D) passant par le point $A\left(\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\right)$ et faisant

un angle $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ avec l'horizontale.

Représentation



$$\text{b) } \text{Arg}(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Arg}(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(2Z + 2 - i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(2Z + 2 - i) = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\left[2\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow \text{Arg}(2) + \text{Arg}\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow \text{Arg}\left[Z - \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

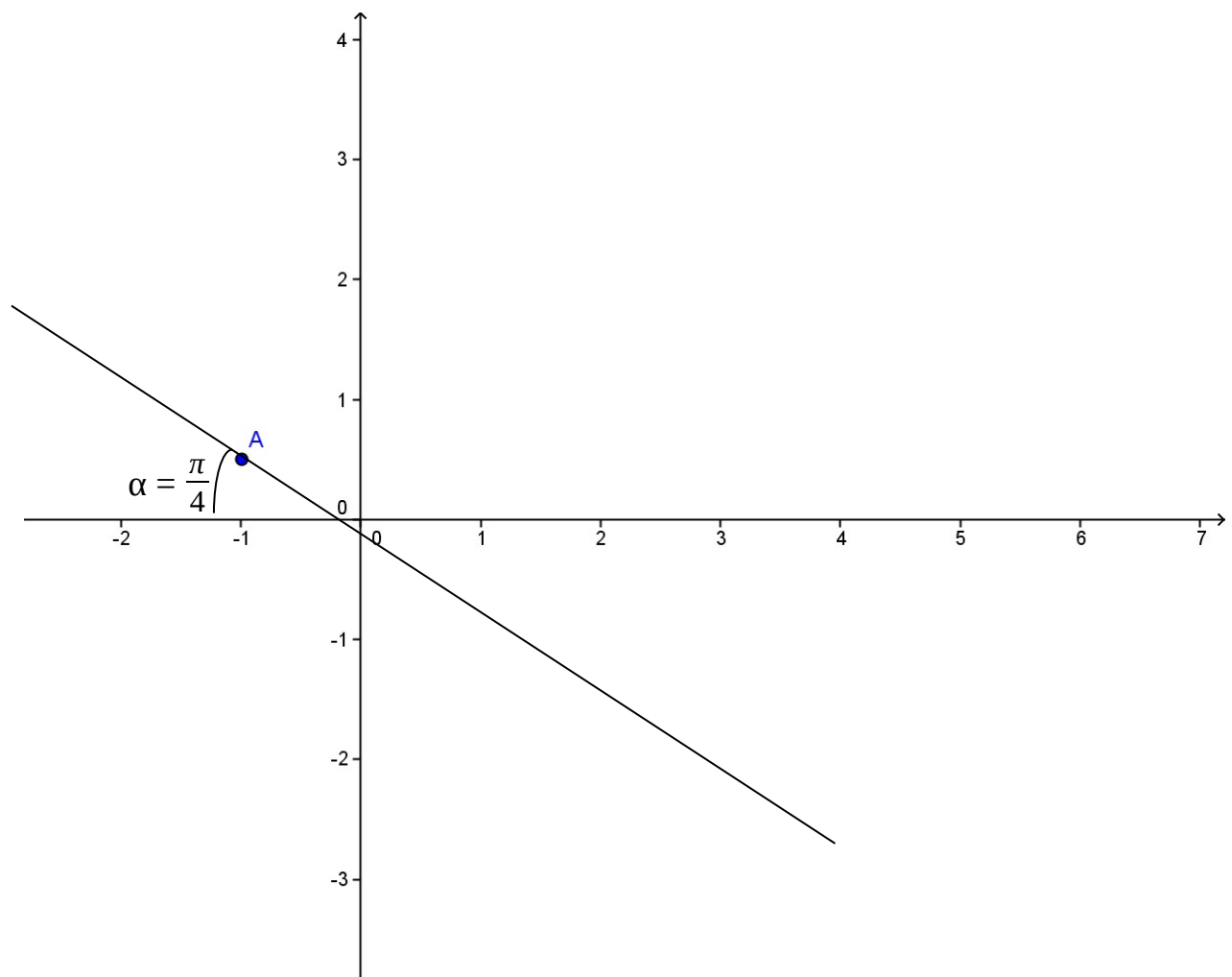
$$\Leftrightarrow \text{Arg}(Z_M - Z_A) = \frac{\pi}{4} - k\pi \text{ Avec } Z_A = -1 + \frac{1}{2}i \Rightarrow A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite (D) passant par le point $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ et

faisant

un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale.

Représentation



XII) Complexe et transformations géométriques du plan

1) Translation :

La traduction complexe d'une translation est :

$$f(Z) = Z + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C} \text{)}$$

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe $a' + ib'$ est :

$$f(A) = B \Leftrightarrow (a + ib) + q = (a' + ib') \Rightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)$$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Z + q$ pour trouver la traduction complexe.

2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k et de centre ω est :

$$f(Z) = kZ + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C} \text{)} \text{ ou } \overrightarrow{\Omega M'} = K \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = k(Z - \omega) \text{ avec :}$$

- Z' : image de Z
- K : le rapport
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi l'homothétie de rapport k qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe

$$a' + ib' \text{ est : } f(A) = B \Leftrightarrow k(a + ib) + q = (a' + ib') \Leftrightarrow q = (a' + ib') - k(a + ib).$$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = kZ + q$ pour trouver la traduction complexe.

3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre ω est :

$$f(Z) = e^{i\theta}Z + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C} \text{)} \text{ ou } \overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta} \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega) \text{ avec :}$$

- Z' : image de Z
- θ : l'angle
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi la rotation d'angle θ qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe $a' + ib'$ est : $f(A) = B \Leftrightarrow (a + ib)e^{i\theta} + q = (a' + ib') \Leftrightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)e^{i\theta} \Leftrightarrow q = -(a + ib)(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = e^{i\theta}Z + q$ pour trouver la traduction complexe.

4) Similitude du plan :

Expression complexe :

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe :**

$Z' = aZ + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport $k = \frac{|F_1(z_2) - F_1(z_1)|}{|z_2 - z_1|}$
- son angle $\arg(F_1(z_2) - F_1(z_1)) = \arg(a)$
- son centre $\frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt$ d'affixe $w = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt$ avec $a \neq 1$
- **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

$Z' = a\bar{Z} + b$ (où a et b sont des complexes) Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport $k = \frac{\int_0^1 |f(t)| dt}{\int_0^1 |f(t)| dt}$
- son axe (D) : $y = px + q$.
- son centre $\frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt$ d'affixe $w = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt$

Retenons

Soit f la transformation : $z' = az + b$

- si $a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b .
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- si $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- si $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation d'angle α , d'argument $\Theta = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- si $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α , d'argument $\Theta = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = \bar{z}$.
- Si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle α , d'argument $\Theta = \arg(a)$, d'axe $(\Delta) : y = px + q$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$.

Exemples

Exemple 1

Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

- 1) f est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$
- 2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.
- 3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.

Exemple 2

Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\frac{x^2}{2} = F_1(x)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z' .
Exprimer Z' en fonction de Z .

Exemple 3

Soient A, B, C et D les points d'affixes :
 $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

- 1) Déterminer le rapport K et l'angle θ de S
- 2) Déterminer l'écriture complexe f associée à S.
- 3) Déterminer l'affixe de Ω le centre de S

Exemple 4

- 1- Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si : a = 2 puis si a = - i
- 2- Soient A(1) ; B(2+i) ; A'(2i) ; B'(1+i)
Vérifier que AB = A'B'
Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

SOLUTION S

Exemple 1

- 1) La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.

$$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -1 + i + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -1 + 2i$$

$$\text{d'où } f(Z) = Z - 1 + 2i$$

- 2) La traduction complexe d'une homothétie est $f(Z) = kZ + q$.

$$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right) (-1 + i) + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\text{d'où } f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

La traduction complexe d'une rotation est $f(Z) = \left(\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \right) Z + q$.

$$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + i \Leftrightarrow \left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1}{e^{i\frac{3\pi}{4}} + 1} \right) (-1 + i) + q = -2 + i \Rightarrow q = -2 + i \left(1 + \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1}{e^{i\frac{3\pi}{4}} + 1} \right)$$

$$\text{d'où } f(Z) = Z e^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i(1 + \sqrt{2})$$

Exemple 2

On a :

- centre A $\int \frac{dz}{z-A}$
- rapport $k = \left| \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \right|$
- angle $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$

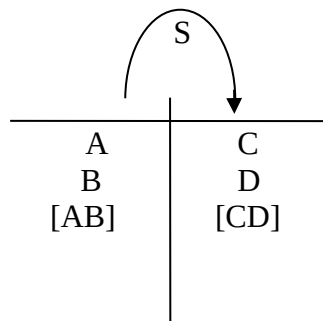
D'autre part :

$$Z' = aZ + b$$

et $a = \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} = \frac{i}{1+i} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \Rightarrow a = 1 + i$
 De même cherchons b.

On sait que le centre à pour affixe αdt $b = 1 - i$
 D'où $Z' = aZ + b \Leftrightarrow Z' = (1 + i) Z + 1 - i$

Exemple 3



1) Déterminons le rapport K et l'angle θ de S

- $K = \frac{CD}{AB} = \left| \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \right| = \left| \frac{(5+i) - (1+3i)}{i - (-1-i)} \right| = \left| \frac{4-2i}{1+2i} \right| = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$
- $\theta = \text{mes}(AB; CD) = \arg \left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \right) = \arg \left(\frac{4-2i}{1+2i} \right) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Déterminons l'écriture complexe f associée à S.

$$f(Z) = aZ + b.$$

$$S(A) = C \quad \text{et} \quad S(B) = D$$

$$\begin{cases} aZ_A + b = Z_C & (1) \\ aZ_B + b = Z_D & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow a(Z_A - Z_B) = Z_C - Z_D \Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-4 + 2i}{-1 - 2i} = -2i$$

$$\text{Dans (2) on a: } aZ_B + b = Z_D \Rightarrow b = Z_D - aZ_B \Rightarrow b = (5 + i) - (-2i)(i)$$

$$\Leftrightarrow b = 5 + i + 2i^2 = 5 + i - 2 = 3 + i \Rightarrow b = 3 + i$$

$$\text{D'où l'écriture complexe f est } f(Z) = -2iZ + 3 + i$$

Soit ω l'affixe de Ω tel que :

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1)^2 + (2)^2} = 1-i.$$

Exemple 4

1) Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$

Si $a = 2$

$$Z' = aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = 2Z + 3i$$

- Montrons que f admet un point invariant :
f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow 2\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = -3i = \Omega(0 ; -3)$
- Ainsi déterminons la nature de f
Pour cela, on exprime $Z' - \omega$ en fonction de $Z - \omega \Leftrightarrow$

$$Z' = 2Z + 3i \quad (1)$$

$$\omega = 2\omega + 3i \quad (2)$$

En effectuant (1) - (2) ; on a : $Z' - \omega = 2(Z - \omega)$; sous la forme :

$$Z' - \omega = k(Z - \omega) \text{ qui est l'écriture complexe d'une Homothétie}$$

- Ces éléments caractéristiques sont :
 - Centre : $\Omega(0 ; -3)$
 - Rapport : $k = 2$

Si $a = -i$

$$Z' = aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = -iZ + 3i$$

- Montrons que f admet un point invariant :

$$f \text{ admet un point invariant si : } f(\omega) = \omega \Leftrightarrow -i\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3i}{1+i} = \frac{3i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3i(1-i)}{1-i^2} = \frac{3i(1-i)}{2} = \frac{3i-3}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}$$

$$\Rightarrow \Omega\left(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$$

- Ainsi déterminons la nature de f

Pour cela, on exprime $Z' - \omega$ en fonction de $Z - \omega \Leftrightarrow$

$$Z' = -iZ + 3i \quad (1)$$

$$\omega = -i\omega + 3i \quad (2)$$

En effectuant (1) - (2) ; on a : $Z' - \omega = -i(Z - \omega)$; sous la forme

$Z' - \omega = e^{i\alpha}(Z - \omega)$ qui est l'écriture complexe d'une Rotation

- Ces éléments caractéristiques sont :

$$\text{- Centre : } \Omega\left(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{- Angle} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

2) Soient $A(1) ; B(2+i) ; A'(2i) ; B'(1+i)$

Vérifions que $AB = A'B'$

Puis démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

$$AB = A'B', \frac{4}{3} - \sqrt{3}$$

$$r(A) = A' \Rightarrow A' - \omega = e^{i\alpha}(A - \omega) \Rightarrow 2i - \omega = e^{i\alpha}(1 - \omega) \quad (1)$$

$$r(B) = B' \Rightarrow B' - \omega = e^{i\alpha}(B - \omega) \Rightarrow 1 + i - \omega = e^{i\alpha}(2 + i - \omega) \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } e^{i\alpha} = -i \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{On en déduit que } 2i - \omega = -i(1 - \omega) \Rightarrow \omega = \frac{\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx}{\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}$$

