

CHAPITRE 2 : NOMBRES COMPLEXES

Plan du chapitre

Introduction

A-Forme algébrique d'un nombre complexe

I. Ensemble des nombres complexes

1. Présentation et notation
2. Définitions et notations

✓ Définitions

✓ Exemples

3. Opérations sur les nombres complexes

✓ Exemples de calcul

4. Propriétés

5. Remarque

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Images d'un nombre complexe

✓ Exemple

2. Propriétés

3. Exercice d'application

III. Conjugué et module d'un nombre complexe

1. Conjugué d'un nombre complexe

✓ Définition

✓ Exemples

✓ Propriétés 1

✓ Propriétés 2

✓ Interprétation géométrique

✓ Exercice d'application

2. Module d'un nombre complexe

✓ Définition

✓ Exemples

✓ Propriétés 1

✓ Propriétés 2

✓ Interprétation géométrique

✓ Exercice d'application

IV. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Racines carrées d'un nombre complexe

✓ Définition

✓ Exemple

✓ Propriété

✓ Exemple

✓ Remarque

2. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

✓ Définition

✓ Propriété

✓ Exemple

✓ Remarque

3. Equation de degré ≥ 3 dans $\mathbb{C}$

Exemple

4. Ensemble de point

Exemple

5. Puissance entière d'un nombre complexe

a- Puissance entière d'un nombre complexe quelconque

Définition

b - Puissance entière de i

Déroulement du cours

A-FORME ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

I. Ensemble des nombres complexes

1. Définitions et notations

✓ Définitions

- Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + bi$ où a, b sont des nombres réels et $i^2 = -1$. Il est souvent noté z .
- L'écriture $z = a + bi$ avec a et b des nombres réels est dite forme algébrique du nombre complexe z .
 - Le réel a est dit partie réelle de z et est notée $\text{Re}(z)$.

➤ Le réel b est dit partie imaginaire de z et est notée $\text{Im}(z)$.

✓ **Exemples**

- $z = 1 + 2i$ est un nombre complexe ; $\text{Re}(z) = 1$ et $\text{Im}(z) = 2$
- $z = -3$ est un nombre complexe car $z = -3 + 0i$ et donc $\text{Re}(z) = -3$ et $\text{Im}(z) = 0$.

Remarque :

- Ainsi un réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.
On écrit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est de la forme $z = ib$ avec b un réel et est appelé imaginaire pur.

Exemple : $z = 5i = 0 + 5i$ est un nombre complexe : $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 5$.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres complexes est notée $\mathbb{C}$ et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Opérations sur les nombres complexes

✓ **Exemple**

$$z = 4 + 3i \text{ et } z' = 3 + 2i$$

- $z + z' = (4 + 3i) + (3 + 2i) = 7 + 5i$
- $zz' = (4 + 3i)(3 + 2i) = 6 + 17i$
- $3i \times z = 3i(4 + 3i) = -9 + 12i$
- $z^2 = (4 + 3i)^2 = 7 + 24i$

3. Propriétés : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

- $z = z'$ si et seulement si $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.
- $z = 0$ si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$.
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\text{Im}(z) = 0$.
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$.

4. Remarque

Un nombre complexe qui n'est pas un réel n'a pas de signe et on ne peut pas dire qu'il est plus grand ou plus petit qu'un autre nombre complexe donné.

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Image d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ dont la forme algébrique est $z = a + bi$ et $(O; \vec{u}; \vec{v})$, un repère orthonormé direct du plan. Dans ce repère :

- $M\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est appelé point image de $z = a + bi$ et est noté $M(z)$.
- Réciproquement, on dit que $z = a + bi$ est l'affixe du point $M\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et est noté z_M .
- Le vecteur $\vec{U}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ ou $(\vec{U} = a\vec{u} + b\vec{v})$ est appelé vecteur image du nombre complexe $z = a + bi$ et est noté $\vec{U}(z)$.
- Réciproquement, on dit que $z = a + bi$ est l'affixe du vecteur $\vec{U}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et est noté $z_{\vec{U}}$.

Remarque : Le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ dans le quel on peut représenter chaque nombre complexe par son point image est appelé plan complexe.

Dans tout le reste du chapitre, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et l'écriture $z = a + bi$ désigne la forme algébrique de z .

Exemple : Dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$,

- ✓ Le point image de $1 + 2i$ est le point $M\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$
- ✓ Le vecteur image de $1 + 2i$ est le vecteur $\vec{U}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$
- ✓ L'affixe de $M\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ est le nombre complexe noté $z_M = -1 + 3i$
- ✓ L'affixe du vecteur $\vec{w}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ est $z_{\vec{w}} = -\frac{1}{2}i$.

2. Propriétés :

- Le point image d'un nombre complexe z appartient à l'axe $(O, \vec{u})$ si et seulement si z est un nombre réel. Ainsi l'axe $(O, \vec{u})$ est dit axe réel.
- Le point image d'un nombre complexe z appartient à l'axe $(O, \vec{v})$ si et seulement si z est un nombre imaginaire pur. Ainsi l'axe $(O, \vec{v})$ est dit axe des imaginaires purs.
- Si $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
- $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$. En particulier $z_{\overline{OM}} = z_M$
- $z_{(\vec{u} + \vec{v})} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ et $z_{\alpha \vec{u}} = \alpha z_{\vec{u}}$
- $\vec{U} = \vec{V}$ si et seulement si $z_{\vec{U}} = z_{\vec{V}}$
- $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à O si et seulement si $z = -z'$

3. Exercice d'application :

A, B, C, D et G sont tels que : $z_A = 1 + i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = 4 + i$; $z_D = 4 - i$ et $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$

1. Calculer z_G
2. Calculer $z_{\overline{AB}}$ et $z_{\overline{CD}}$. En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

Solution

1-Calculons z_G

$$z_G = \frac{(1 + i) - 2(1 - i) + 3(4 + i)}{1 - 2 + 3} = \frac{6i + 11}{2}$$

2-Calculons $z_{\overline{AB}}$ et $z_{\overline{CD}}$.

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = (1 - i) - (1 + i) = -2i$$

$$z_{\overline{CD}} = z_D - z_C = (4 - i) - (4 + i) = -2i$$

On a déduit que la nature du quadrilatère en question est un parallélogramme car $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{CD}}$.

III. Conjugué et module d'un nombre complexe

1) Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que :

$$\bar{z} = a - bi.$$

b) Exemples

- i. Si $z = 3 + 2i$ alors $\bar{z} = 3 - 2i$.
- ii. Si $z = -4 - 3i$ alors $\bar{z} = -4 + 3i$.
- iii. Si $z = 2$ alors $\bar{z} = 2$.
- iv. Si $z = i$ alors $\bar{z} = -i$

c) Propriétés 1 : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

- i. $\overline{\bar{z}} = z$

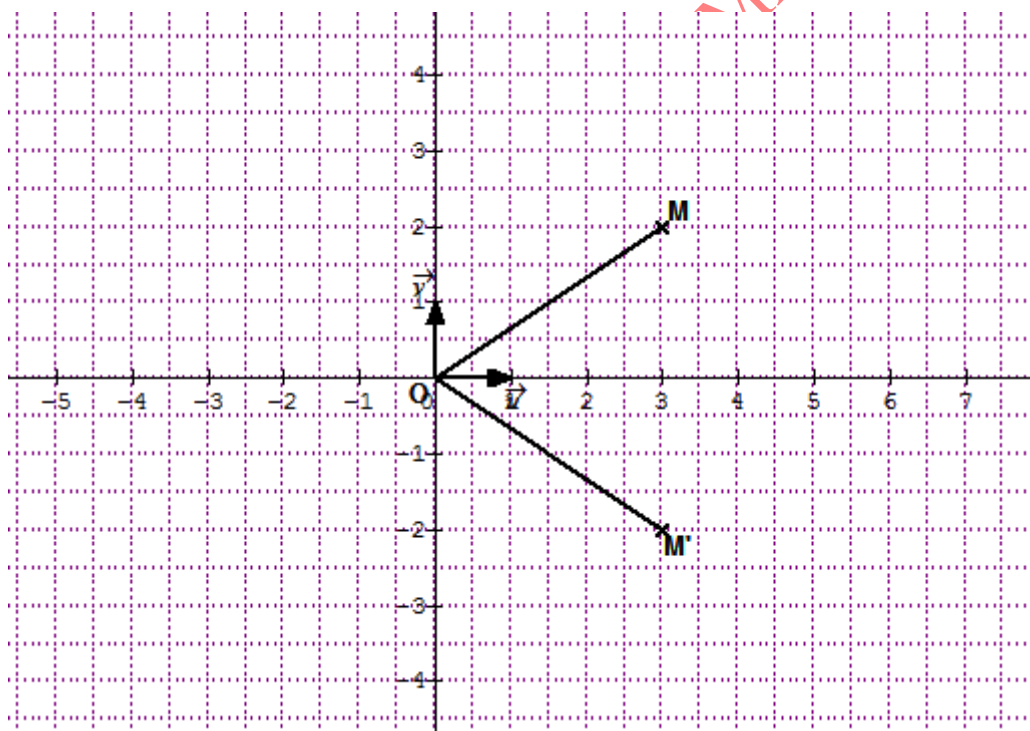
- ii. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- iii. Si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z}$ est un réel positif
- iv. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- v. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

d) Propriétés 2

- i. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- ii. $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$
- iii. $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- iv. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$
- v. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$

e) Interprétation géométrique

Le conjugué de $z = 3 + 2i$ est $\bar{z} = 3 - 2i$. Dans le plan complexe représentons $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ on a alors :



On constate que $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Plus généralement :

- $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à l'axe réel si et seulement si $z = \bar{z}'$ (ou bien $z' = \bar{z}$).

- $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs si et seulement si $z = -\bar{z}'$ (ou bien $z' = -\bar{z}$).

f) Exercice d'application

- Ecrire $z = \frac{2+i}{1+i}$ sous sa forme algébrique.
- $z = \frac{4-5i}{3+i}$. Ecrire $\bar{z}$ comme quotient de deux nombres complexes puis donner sa forme algébrique.
- $z = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z' = \frac{3-2i}{5+7i}$. Exprimer $\bar{z}$ en fonction de z' puis en déduire que $z - z'$ est un réel et que $z + z'$ est un imaginaire pur.

2) Module d'un nombre complexe

a) Définition :

Le module d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le réel positif noté $|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

b) Exemples

- Si $z = -3 + 4i$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
- Si $z = -3$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$. Donc le module d'un nombre réel correspond à sa valeur absolue et donc la notation utilisée pour le module est cohérente avec celle de la valeur absolue d'un nombre réel.

$z, z' \in \mathbb{C}$, on a les propriétés suivantes :

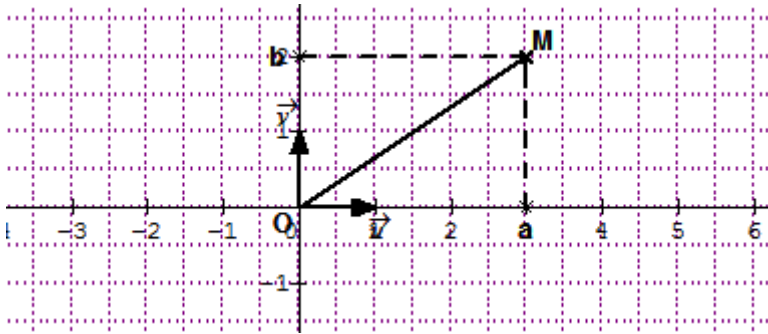
c) Propriétés 1

- $|z|^2 = z\bar{z}$ ou bien $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $|z| = |{-z}| = |\bar{z}| = |{-\bar{z}}|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

d) Propriétés 2

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Cette propriété est appelée inégalité triangulaire.
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec ($z' \neq 0$)

✓ **Interprétation géométrique du module :**



Si $z = a + ib$ et si M est le point image de z alors d'après le théorème de Pythagore on a : $OM^2 = a^2 + b^2$ donc $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ or $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où $|z| = OM$

Ainsi, le module de z est égal à la distance entre l'origine O du repère et le point M(z), point image de z.

Plus généralement on a : $|z_B - z_A| = AB$.

e) Exercice d'application

Sans les écrire sous forme algébrique, calculer les modules des nombres complexes.

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2 \text{ et } z_2 = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$$

IV. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Racines carrées d'un nombre complexe

a) Définition : $\delta, z \in \mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$, on dit que δ est une racine carrée de z si $\delta^2 = z$.

b) Exemple

$1 + i$ est une racine carrée de $2i$ car $(1 + i)^2 = 2i$.

c) Remarque

Tout nombre complexe non nul z admet deux racines carrées et ces deux racines carrées sont opposées.

d) Propriété

Si $z = a + ib$ alors les racines carrées de z sont les nombres complexes $\delta = x + iy$ tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

e) Exemple

Déterminons les racines carrées de $\Delta = 3 + 4i$.

Solution

Les racines carrées de Δ sont les complexes Z vérifiant $Z^2 = \Delta$. En posant $Z = x + iy$, on obtient

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \text{le système suivant : } \quad x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= -4 \end{aligned}$$

$$2x^2 = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$2y^2 = 2 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -1 \text{ comme } xy < 0 \text{ donc les racines de } \Delta \text{ sont : } 2 - i \text{ et } -2 + i$$

✓ Remarque

Si z est un réel négatif alors les racines carrées de z sont les nombres complexes $\delta_1 = i\sqrt{-z}$ et $\delta_2 = -i\sqrt{-z}$

2) Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

✓ Définitions

- Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ de la variable z est une équation qui peut s'écrire sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
- Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

✓ Propriété

Soit l'équation (E): $az^2 + bz + c = 0$.

- Si $\Delta = 0$ alors (E) a une solution double notée $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) a deux solutions distinctes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est l'une des deux racines carrées de Δ .

✓ Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes : $z^2 + 4 = 0$; $z^2 + (2 + 3i)Z - 2(1 - 2i) = 0$

✓ **Remarque**

Dans $\mathbb{C}$, toute équation du second degré admet deux solutions distinctes ou confondues.

3) Résolution d'une équation dont le degré ≥ 3 dans $\mathbb{C}$

Exemple :

Partie A On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 - (1 + i)Z^2 + (8 + 3i)Z + 28 + 10i = 0$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle Z_0 que l'on précisera.

2. Factoriser $p(Z) = Z^3 - (1 + i)Z^2 + (8 + 3i)Z + 28 + 10i$ et en déduire les autres solutions Z_1 et Z_2 telles que : $\text{Im}(Z_1) > 0$

Partie B

Le plan complexe est muni du repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A $(1 + 4i)$; B (-2) et C $(2 - 3i)$.

1) Représenter les points A ; B et C dans le plan complexe.

2) a. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

b. En déduire l'affixe de son centre I et le rayon r de son cercle circonscrit.

4) Ensemble des points

Soit A et B deux points distincts et r un réel positif. L'ensemble des points M tels que :

$\Rightarrow MA = MB$ est la médiatrice du segment [AB].

$\Rightarrow MA = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 (\pi)$ est la droite (AB) privée de A et B.

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 (2\pi)$ est la droite (AB) privée de [AB].

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi (2\pi)$ est le segment [AB] privée de A et B.

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} (\pi)$ est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ est l'un des demi-cercles de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ est l'un des demi-cercles de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

Exemple

Soit Z le nombre complexe de forme algébrique $Z = x + iy$. On pose $Z = \frac{2-z}{1+iz}$

1) Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y .

2) Soit M le point du plan d'affixe Z_M .

a. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels : $Z \in \mathbb{R}$.

b. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels : $Z \in i\mathbb{R}$.

c. Déterminer l'ensemble (E_3) des points M tels : $|Z| = 1$.

Exercice d'application

A) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, u, v) , d'unité graphique 1cm, on considère les points $A(2+i)$, $B(-1-i)$, $C(4-2i)$ et $D(1+i)$.

1/ a/ Placer ces points dans le repère. 0,1

b/ Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A,2), (B,1), (C,-1)\}$. 0,5

2/ Donner le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,5+0,5

B) A tout nombre complexe z différent de $2+i$, on associe le nombre complexe Z' tel que $Z' = \frac{z+1+i}{z-2-i}$. On désigne par M le point du plan d'affixe z .

1/ Interpréter géométriquement le module et un argument de Z' . 0,5

2/ Déterminer géométriquement et construire, l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|Z'| = 2$. (0,5+0,5)

5- Puissance entière d'un nombre complexe

a-Puissance entière d'un nombre complexe quelconque

Définition

Z étant un nombre complexe non nul, n un nombre entier naturel non nul.

$$P_1) Z^0 = 1 ; \quad P_2) 0^n = 0 ; \quad P_3) Z^{n+1} = Z^n \times Z \quad ; Z^{-n} = \frac{1}{Z^n}$$

b- Puissance entière de i

Pour tout nombre entier naturel n ,

$$i^{4n} = 1 ; \quad i^{4n+1} = i ; \quad i^{4n+2} = -1 ; \quad i^{4n+3} = -i$$

Exemple Déterminer i^{2020} ; i^{2023} et i^{2025}

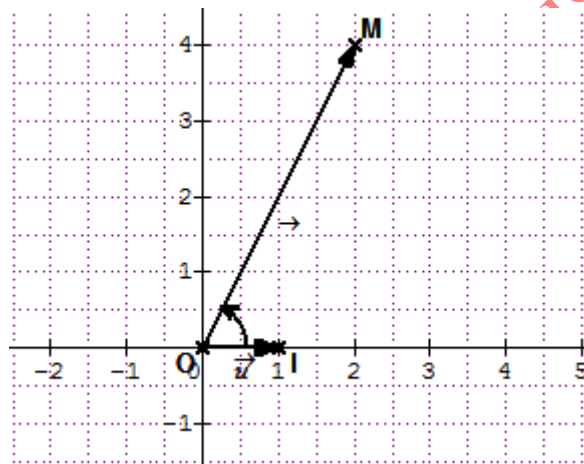
B-FORMES TRIGONOMETRIQUES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Dans toute la suite, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et l'écriture $z = a + ib$ est la forme algébrique de z.

V-Arguments d'un nombre complexe

1-Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M l'image de z dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle argument de z, toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \widehat{OM})$. Il est noté $\arg(z)$.



✓ Remarques

- Tout nombre complexe z non nul a une infinité d'arguments et si α est une mesure en radians de $(\vec{u}, \widehat{OM})$ alors tout argument de z s'écrit $\arg(z) = \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On dit qu'un argument de z est défini modulo 2π . On note $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$.
- L'écriture $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$ signifie que l'ensemble des arguments de z est

$\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ tandis que l'écriture $\arg(z) = \alpha$ signifie que α est un argument de z.

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.

✓ **Exemples**

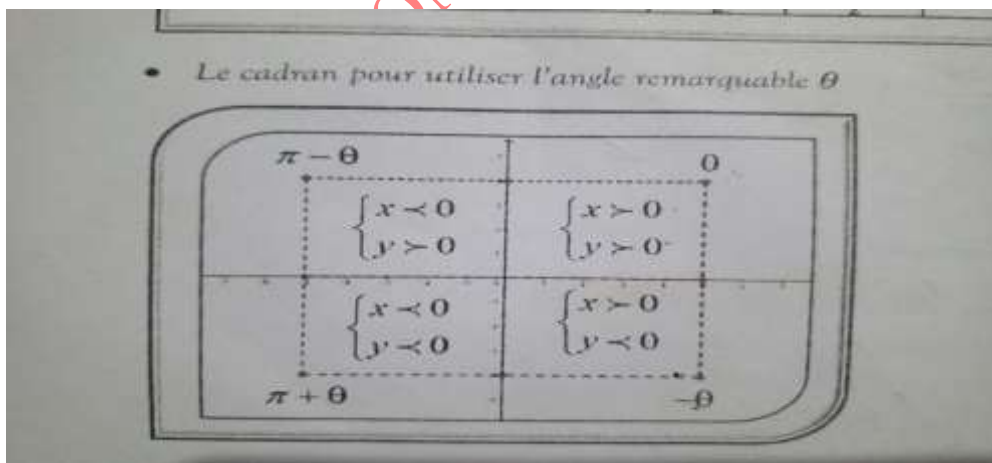
- i. $\arg(2) \equiv 0[2\pi]$
- ii. $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$
- iii. $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- iv. $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) Angles remarquables et le cardan pour utiliser l'angle remarquable θ .

a- Angles remarquables.

θ en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

b- Le cardan pour utiliser l'angle remarquable θ .



3) Propriété 1

Plus généralement, on a :

- i. z est un réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$

- ii. z est un réel strictement négatif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
- iii. z est un réel non nul $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$
- iv. $z = ib; b > 0 \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- v. $z = ib; b < 0 \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- vi. $z = ib; b \neq 0 \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

4) Propriétés 2 : $z, z' \in \mathbb{C}^*$

- i. $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$
- ii. $\arg(\bar{z}) \equiv \arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- iii. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- iv. $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$ où $n \in \mathbb{Z}$
- v. $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

5) Interprétation géométrique de $\arg(z_B - z_A)$ et $\arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})$

Si A, B et C sont trois points 2 à 2 distincts alors on a :

- $\arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$
- $\arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

VI-Formes trigonométriques d'un nombre complexe

1-Théorème-définition

Si $z = a + ib$ et si θ est un argument de z alors on a :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$
 Ainsi $a = |z|\cos\theta$ et $b =$

$|z|\sin\theta$ et par conséquent $z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est dite forme trigonométrique de z .

✓ Remarque

- Un nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques car chaque argument de z permet d'écrire une forme trigonométrique.
- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi]$

✓ Exemples

Donnons une forme trigonométrique pour $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ et $z_3 = -987546$

2- Formule de Moivre

Si $\theta \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{Z}$ alors on a : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Exemple : On donne $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{2016}$ et $Z' = (-\sqrt{3} - i)^7$

Montrer que $Z = 1$ et $Z' = 64\sqrt{3} - 64i$

Application :

a-Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de $Z = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$

b- En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

VII-Formes exponentielles d'un nombre complexe

1. Propriété-définition

Si z un nombre complexe non nul et si θ est un argument de z alors $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$.

Ainsi si on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ alors $z = |z|e^{i\theta}$.

L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ est dite forme exponentielle de z .

2. Exemples

- i. $e^{i0} = 1$
- ii. $e^{i\pi} = -1$
- iii. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- iv. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$

3. Propriétés : $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

- i. $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$
- ii. $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- iii. $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- iv. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ où $n \in \mathbb{Z}$ (**Formule de Moivre sous forme exponentielle**).
- v. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

4. Formules d'Euler

$$\text{Si } \theta \in \mathbb{R} \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Exemple : Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$

5. Remarque

Le nombre complexe 0 n'a pas de forme trigonométrique ni de forme exponentielle.

VIII- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1. Définition : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

2. Exemple

$(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = 1$ donc $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine $3^{\text{ième}}$ de l'unité. On dit que c'est une racine cubique de l'unité.

3. Propriétés

- Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ où $0 \leq k \leq n-1$
- Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont au nombre de n ($z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$) et leur somme $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0$.

4. Exemple

Déterminons les racines cubiques de l'unité.

5-Application

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{C}$: $Z^4 + 7 + 24i = 0$

a. Vérifier que $Z_0 = 2 - i$ est une solution de (E).

b. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et en déduire l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

IX-NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

1-RECONNAISSANCE D'UN TRIANGLE

A, B et C sont trois points deux à deux distincts.

A-Reconnaissance d'un triangle isocèle

$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow ABC$ est isocèle en A. En effet $\frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AC = AB \Leftrightarrow ABC$ est isocèle en A.

B-Reconnaissance d'un triangle rectangle

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A.

En effet $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow ABC$ est un triangle rectangle en A.

C-Reconnaissance d'un triangle rectangle et isocèle

➤ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow ABC$ est rectangle et isocèle en A.

En effet $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ABC \text{ isocèle en A} \\ ABC \text{ est rectangle en A} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow ABC$ est isocèle et rectangle en A.

➤ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow ABC$ est rectangle et isocèle en A.

En effet $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ABC \text{ isocèle en A} \\ \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ est rectangle et isocèle en A.}$

D- Reconnaissance d'un triangle équilatéral

$\begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ équilatéral.}$

2-RECONNAISSANCE D'UN QUADRILATERE

a- Le carre

➤ $ABCD$ est un carré $\Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_D - z_C| = |z_A - z_D| \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$

➤ $ABCD$ est un carré $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = DA \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$

b - Le parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

c- Le losange

ABCD est un losange $\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ et (AC) perpendiculaire (BD)

Remarque : (AC) perpendiculaire (BD) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3-ALIGNEMENT DE POINTS

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés. En effet : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$

4-COCYCLICITES (POINTS APPARTENANT A UN CERCLE)

-Les points A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou encore $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \times \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

-Des points sont cocycliques (appartiennent à un cercle de centre O et de rayon R) si

$$|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = \dots = R$$

Bibliographie

- VISA BAC
- COURS DE DOCTEUR FALL TS2
- CIAM TS2
- CIAM TS1