

Par M. Almame Traoré prof LBF-LPMT

1. ENSEMBLE DE POINTS ET NOMBRES COMPLEXES

1.1. Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ et de $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right|$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA})$.

Autrement dit : $\arg(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.2. Interprétation de $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right|$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $C \neq D$, alors : $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = \frac{AB}{CD}$.

TABLEAU RECAPITULATIF

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B .

M est un point quelconque du plan d'affixe z et $\vec{u}$ désigne le vecteur-image de z .

CARACTERISATIONS COMPLEXES	CARACTERISATIONS GEOMETRIQUES	ENSEMBLE DE POINTS
$ z - z_A = r, r \in \mathbb{R}_+^*$	$AM = r$	Cercle de centre A et de rayon r.
$ z - z_A = \lambda z - z_B , \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$AM = \lambda BM$ Ou bien $\frac{AM}{BM} = \lambda$	- la médiatrice du segment [AB] lorsque $\lambda = 1$ - le cercle de diamètre $[G_1 G_2]$ lorsque $\lambda \neq 1$, où $G_1 = \text{bar} \{(A; 1), (B; \lambda)\}$ et $G_2 = \text{bar} \{(A; 1), (B; -\lambda)\}$
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\arg(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	La droite (AB) privée des points A et B.
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\arg(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
$\arg(z - z_A) = \alpha + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}$	$\arg(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	La droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, où $\arg(\vec{e}_1, \vec{u}) = \alpha$
$\arg(z - z_A) = \alpha + 2k\pi, \alpha \in \mathbb{R}$	$\arg(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	la demi-droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, où $\arg(\vec{e}_1, \vec{u}) = \alpha$

2. CONFIGURATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

2.1. Droites parallèles

Propriété :

A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

2.2. Alignements de trois points

Propriété :

A, B et C sont des points tels que $A \neq B$ et $B \neq C$ d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

2.3. Droites perpendiculaires

Propriété

A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

2.4. Points cocycliques

(C'est-à-dire des points situés sur un même cercle)

Propriété

A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et non alignés d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

2.5. Triangles particuliers et nombres complexes

Propriétés

A, B et C sont des points non alignés d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

- Le triangle ABC est **rectangle en A** si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

- Le triangle ABC est **isocèle en A** si et seulement si

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}, \text{ avec } 0 < \alpha < \pi$$

- Le triangle ABC est **rectangle et isocèle en A** si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.

- Le triangle ABC est **équilatéral** si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. TRANSFORMATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$.

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit f une transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M'.

L'application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la **transformation complexe associée à f** .

L'application f s'appelle la **transformation ponctuelle associée à F** .

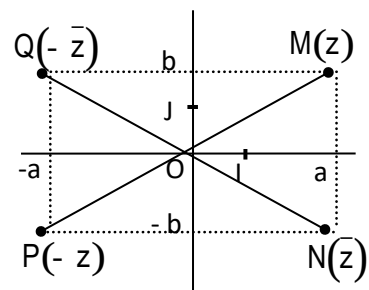
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'**écriture complexe de f** .

3.1. Écritures complexes de symétrie centrale de centre O et de symétries orthogonales d'axes (OI) et (OJ) dans le repère (O, I, J).

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

- La **symétrie orthogonale d'axe (OI)** a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
- La **symétrie centrale de centre O** a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La **symétrie orthogonale d'axe (OJ)** a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.



Transformation du Plan	Image $M'(z')$ d'un point $M(z)$	Définition géométrique	Ecriture complexe
Symétrie orthogonale d'axe (OI)		La droite (OI) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale d'axe (OJ)		La droite (OJ) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'afixe b		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$M \neq \Omega$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\widehat{\Omega M, \Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

4. Similitude plane directe

Propriétés

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

TABEAU RECAPITULATIF PERMETTANT DE PARTICULARISER UNE SIMILITUDE

	Conditions vérifiées par a		Nature et éléments caractéristiques de S
Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.	Si $a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
		$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$	S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a .
	Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$ a = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\text{Arg}(a)$
		$ a \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $ a $ de d'angle $\text{Arg}(a)$

EVALUATION1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A, B, C, D d'affixes respectives $2 + i$, $2 - i$, $5 - 2i$, $5 + 2i$.

Justifie que : les points A, B, C et D sont cocycliques.

REPONSE1

$$\text{On a : } \frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{4i}{3+i} : \frac{-3+i}{-2i} = \frac{-2}{5}.$$

$$\text{D'où : } \frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*.$$

Par suite les points A, B, C et D sont cocycliques.

EVALUATION2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

1) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 4i$.

2) Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

REPONSE 2

1) L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + z_{\vec{u}}$. Or $z_{\vec{u}} = 1 + 4i$.

L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + 1 + 4i$.

2) L'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' - (1 + i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (1 + i))$$

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - (1 + i)) + 1 + i$$

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

L'écriture complexe de la rotation r de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

EVALUATION3

La meilleure manière de vaincre les mathématiques c'est de les aimer et de les appliquer toutes les minutes

M. Almame Traoré prof LBF -LPMT

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans chaque cas, détermine et construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée :

a) $|z - 2i| = 3$.

b) $|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$.

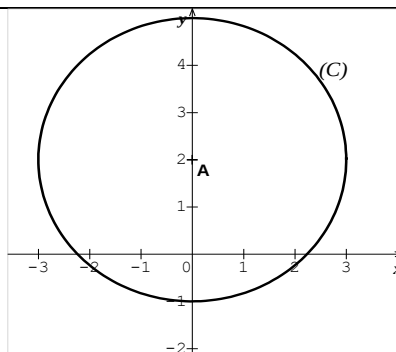
c) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

REPONSE 3

a) $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$ où A est le point d'affixe $2i$.

L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$|z - 2i| = 3$ est le cercle (C) de centre A de rayon 3.



b)

$$|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$$

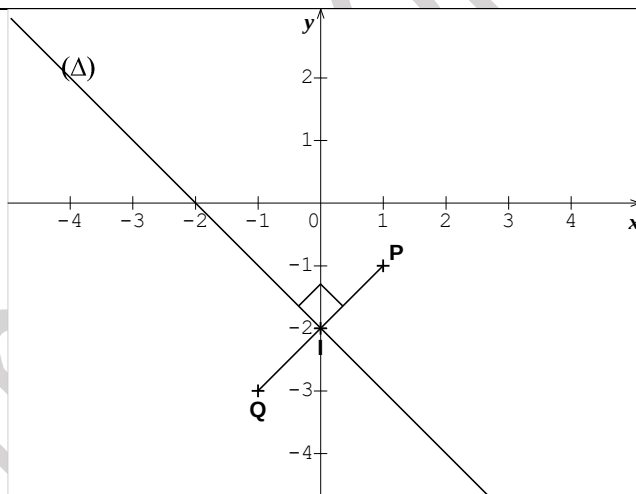
$$\Leftrightarrow |z - (1 - i)| =$$

$$|z - (-1 - 3i)|$$

$\Leftrightarrow PM = QM$ où P et Q sont les points d'affixes respectives $1 - i$ et $-1 - 3i$.

L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$ est la médiatrice (Δ) du segment [PQ].



c) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

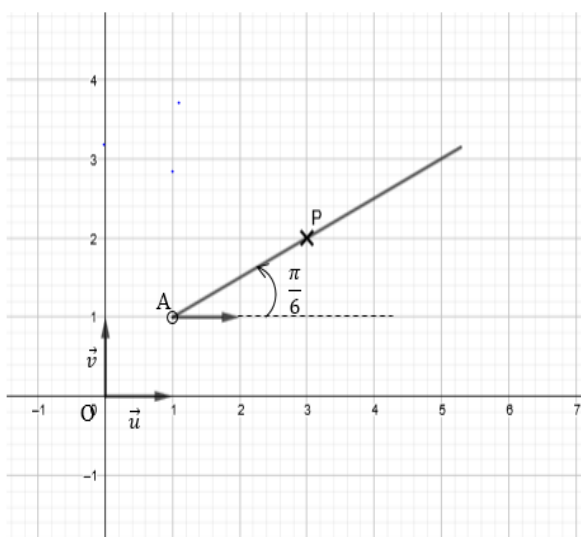
$$\Leftrightarrow \arg(z - (1 + i)) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z - z_A) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi], \text{ où } A(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes}(\vec{u}, \widehat{AM}) = \frac{\pi}{6}$$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ est la demi-droite [AP) privée du point A, où

$$\text{Mes}(\vec{u}, \widehat{AP}) = \frac{\pi}{6}.$$



EVALUATION4

1) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Précise le module et un argument de chacune des solutions.

b) Dédus les solutions de l'équation : $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm, On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i, z_B = \overline{z_A}, z_C = 2z_B$

a) Détermine les formes algébriques de z_A, z_B et z_C

b) Place les points A, B et C

c) Montre que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$

d) Calcule $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$; en déduire la nature du triangle IAC.

REPONSE 4

1) a) $z^2 - 2z + 2 = 0$. Utilisons (une fois quand même la forme canonique !)

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)^2 = -1 = i^2$$

$$\Leftrightarrow z - 1 = i \text{ ou } z - 1 = -i$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + i \text{ ou } z = 1 - i; \quad S_{\mathbb{C}} = \{1 + i; 1 - i\}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \Rightarrow |1 + i| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \text{ARG}(1 + i) = \frac{\pi}{4}.$$

On montre de même que : $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $\text{ARG}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$

b) En posant $Z = -iz + 3i + 3$, l'équation dévient : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ donc les solutions sont d'après la première question, $Z = 1 + i$ ou $Z = 1 - i$.

Donc $-iz + 3i + 3 = 1 + i$ ou $-iz + 3i + 3 = 1 - i$;

$$z = 2 - 2i \text{ ou } z = 4 - 2i; \quad S_{\mathbb{C}} = \{2 - 2i; 4 - 2i\}$$

2°/ a) $z_A = 1 + i, z_B = 1 - i, z_C = 2 - 2i$;

b) Figure

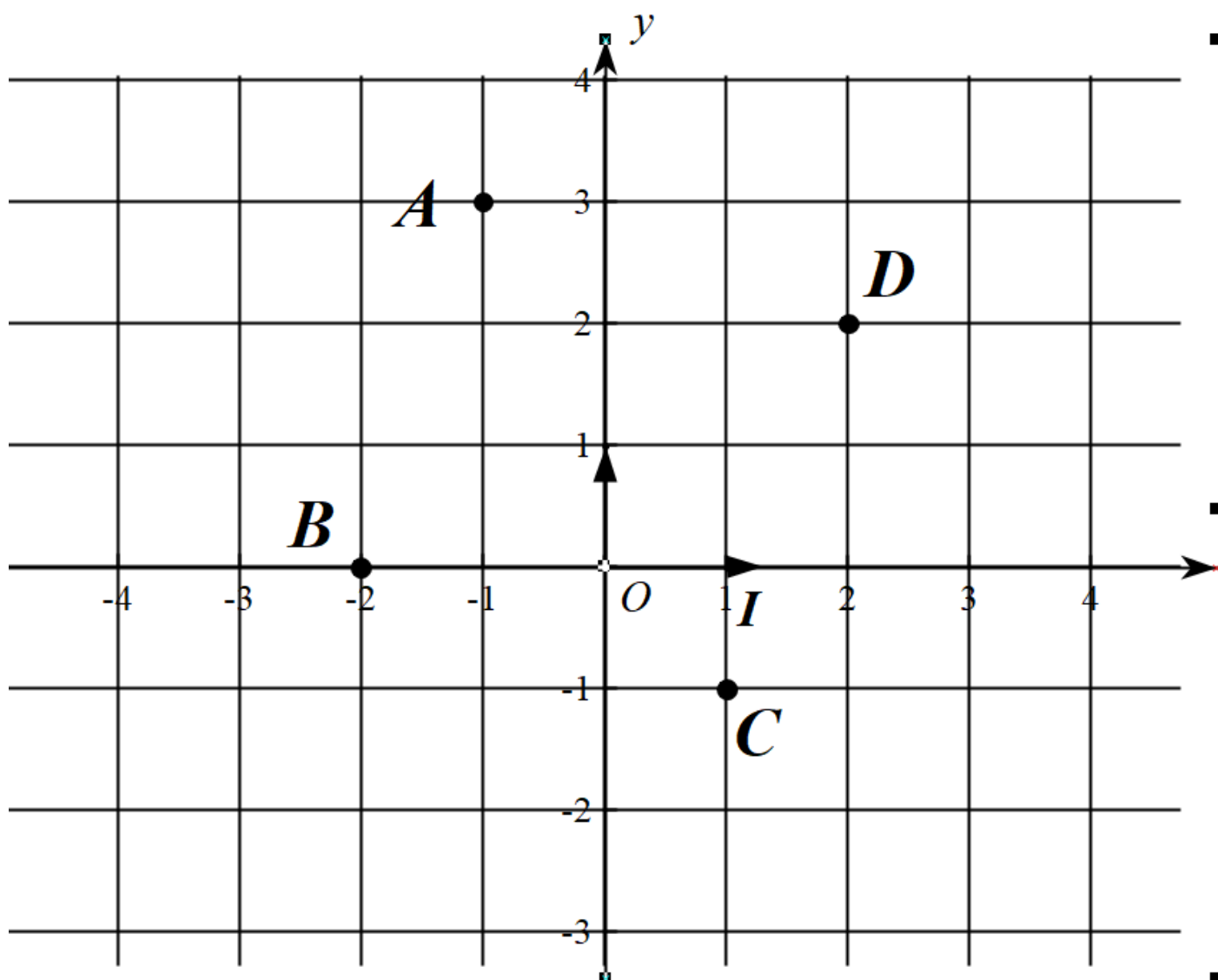
c) Il suffit de montrer que $IA = IB = IC = \sqrt{5}$

$$IA = |z_{\vec{IA}}| = |1 + i - 3| = |-2 + i| = \sqrt{5}; \quad IB = |z_{\vec{IB}}| = |1 - i - 3| = |-2 - i| = \sqrt{5}$$

$$IC = |z_{\vec{IC}}| = |2 - 2i - 3| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$$

d) $\frac{z_C - 3}{z_A - 3} = i$; le triangle IAC est rectangle et isocèle en I.

1- a)



b) écriture complexe de r

L'écriture complexe d'une rotation est de la forme : $z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$ où α est l'angle de la rotation et ω , l'affixe du centre de cette rotation. on en déduit que :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i) + i = iz + 1 + i \text{ est l'écriture complexe associée à cette rotation.}$$

2) a- Soit z'_A , l'affixe de l'image de A par la rotation r :

$$z'_A = i \times (-1 + 3i) + 1 + i = -2 = z_B.$$

b- cela revient à résoudre l'équation :

$z \in \mathbb{C}$, $-1 + 3i = iz + 1 + i$. On obtient :

$$z = \frac{-2+2i}{i} = 2 + 2i = z_D.$$

3) a- calcule de l'affixe de C

$$z_J = \frac{z_A + z_C}{2} \Leftrightarrow z_C = 2 \times z_J - z_A = 2 \times i - (-1 + 3i) = 1 - i.$$

b- démontrons que ABCD est un carré.

Il suffit pour cela de montrer que ABCD est un losange ayant deux cotés consécutifs perpendiculaires.

- $|z_B - z_A| = |z_B - z_C| = |z_C - z_D| = |z_D - z_A|$,
donc $AB = BC = CD = DA$.

- $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2 - (-1 + 3i)}{1 - i - (-1 + 3i)} = \frac{-1 - 3i}{2 - 4i} = \frac{(-1 - 3i)(2 + 4i)}{20} = \frac{-2 - 4i - 6i + 12}{20} = \frac{10 - 10i}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ donc

$$\text{Mes}(\widehat{AB; AC}) = \arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{4} \text{ et puisque}$$

$$\text{Mes}(\widehat{AB; AD}) = 2 \times \text{Mes}(\widehat{AB; AC}) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ d'où le résultat.}$$