Chapitre I : Nombres Complexes

RESUME DU COURS

1- **Introduction** Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, D, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles réalisés progressivement pour pouvoir résoudre certaines équations.

Exemple 1: $x - 1 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{N}$ par contre l'équation $x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$, alors il faut chercher un autre ensemble dans lequel $x + 1 = 0$ admet une solution. $\mathbb{Z}$ fut mis sur place. Ainsi de suite jusqu'aux équations du 2^e degré n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemple2 (E) $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

C'est au XVI siècle que les mathématiciens ont mis au point des nombres imaginaires dont l'ensemble est noté $\mathbb{C}$ pour résoudre l'équation (E). Ils procèdent ainsi :

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ On pose $i^2 = -1$ avec $i \in \mathbb{C}$ on aura $x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{i^2}$ on a $x = i$ ou $x = -i$. (E) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow S = \{i; -i\}$ dans $\mathbb{C}$.

2- **Etude algébrique**

a) *Définition et vocabulaire* On appelle nombre complexe tout nombre z de la forme $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$.

- a est appelé ***partie réelle*** de z noté $Re(z) = a$ et
- b est appelé ***partie imaginaire*** de z noté $Im(z) = b$.

L'écriture $a + ib$ est appelée ***forme algébrique*** de z.

Exemple 1 : $z = 3 - 4i$ est la forme algébrique de z et $Re(z) = 3$; $Im(z) = -4$.

b) *Propriété 1* soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- z est réel ssi $Im(z) = 0$ (c-à-d $b = 0$)
- z est imaginaire pur ssi $Re(z) = 0$ (c-à-d $a = 0$)
- 0 est le nombre complexe nul.

Tout réel est complexe car pour $z = a \Rightarrow z = a + i.0$ mais la réciproque est fausse.

Exemple2

$z = 2$ on dit que z est réel car $Im(z) = 0$ et $Re(z) = 2$

$z = -i$ on dit que z et imaginaire pur car $Re(z) = 0$ et $Im(z) = -1$.

Etude algébrique

Soit $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ deux nombres complexes.

b) somme de deux nombres complexes

$z_1 + z_2 = a + ib + a' + ib' = a + a' + i(b + b')$

c) Produit de deux nombres complexes

$z_1 \times z_2 = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

Exemple Ecrire sous forme algébrique la somme et le produit de : $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 2 - 4i$

$z_1 + z_2 = -1 + 3i + 2 - 4i = 1 - i$

$z_1 \times z_2 = (-1 + 3i)(2 - 4i) = -2 + 4i + 6i + 12 = 10 + 10i$

Scanned by CamScanner

d) Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

e) l'inverse d'un nombre complexe

si $z = a + ib$ alors l'inverse de z est : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ bien sûr a, b ne sont pas tous nuls.

Exemple Ecrire sous forme algébrique l'inverse de $z = 2 - 3i$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{(2)^2+(-3)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

f) Puissances entière d'un nombre complexe

Soit i un nombre imaginaire pour tout entier naturel n on a

$i^2 = -1$, $\quad i^3 = i^{2+1} = i^2 \times i = -i$, $\quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ et $i^{4n+3} = -i$

Exemple Calculons i^{219}

On écrit la division euclidienne de 219 par 4 alors on a : $219 = 54 \times 4 + 3$

D'où $i^{219} = i^{54\times4+3} = i^{54\times4} \times i^3 = -i$ car $i^{54\times4} = 1$ puisque $i^{4n} = 1$.

g) Conjugué d'un nombre complexe

- *Définition* Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Exemple

* $z = 4 + i \Rightarrow \bar{z} = 4 - i$, * $z = 7 \Rightarrow \bar{z} = 7$

* $z = -3 - 5i \Rightarrow \bar{z} = -3 + 5i$, * $z = -2i \Rightarrow \bar{z} = 2i$

Propriétés 2 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.

* $\bar{\bar{z}} = z$ * $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ * $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ * $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Propriétés 3 Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué alors on a :

z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$

z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

$z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

$z\bar{z} = a^2 + b^2$

3- Etude géométrique

a) Module d'un nombre complexe

Scanned by CamScanner

d) Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

e) l'inverse d'un nombre complexe

si $z = a + ib$ alors l'inverse de z est : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ bien sûr a, b ne sont pas tous nuls.

Exemple Ecrire sous forme algébrique l'inverse de $z = 2 - 3i$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{(2)^2+(-3)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

f) Puissances entière d'un nombre complexe

Soit i un nombre imaginaire pour tout entier naturel n on a

$i^2 = -1$, $\quad i^3 = i^{2+1} = i^2 \times i = -i$, $\quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ *et* $i^{4n+3} = -i$

Exemple Calculons i^{219}

On écrit la division euclidienne de 219 par 4 alors on a : $219 = 54 \times 4 + 3$

D'où $i^{219} = i^{54\times4+3} = i^{54\times4} \times i^3 = -i$ car $i^{54\times4} = 1$ puisque $i^{4n} = 1$.

g) Conjugué d'un nombre complexe

- *Définition* Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Exemple

* $z = 4 + i \Rightarrow \bar{z} = 4 - i$, * $z = 7 \Rightarrow \bar{z} = 7$

* $z = -3 - 5i \Rightarrow \bar{z} = -3 + 5i$, * $z = -2i \Rightarrow \bar{z} = 2i$

Propriétés 2 Soit z_1 *et* z_2 deux nombres complexes.

* $\bar{\bar{z}} = z$ * $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ * $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ * $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Propriétés 3 Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué alors on a :

z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$

z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

$z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

$z\bar{z} = a^2 + b^2$

3- Etude géométrique

a) Module d'un nombre complexe

Scanned by CamScanner

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On appelle module de z le nombre réel strictement positif noté et défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. on a aussi $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Exemple Déterminer le module de $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

$|z_1| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Propriétés 4 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, n un entier naturel on a:

- ✓ $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- ✓ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$
- ✓ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ avec $z \neq 0$
- ✓ $|z^n| = |z|^n$

Exemples

Soit deux nombres complexes : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 + i$

1) Calculer le module de z_1 et z_2.

2) En déduire le module de $Z_1 = z_1 \times z_2$, $Z_2 = \frac{z_1^2}{z_2^3}$.

Solution

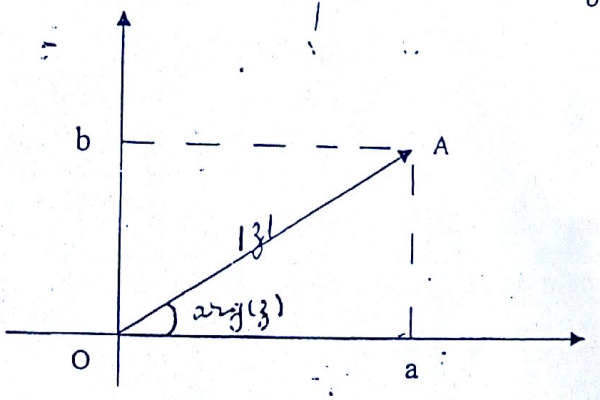
1) $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$, $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

2) $Z_1 = z_1 \times z_2 \Rightarrow |Z_1| = |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2}$

$Z_2 = \frac{z_1^2}{z_2^3} \Rightarrow |Z_1| = \left|\frac{z_1^2}{z_2^3}\right| = \frac{|z_1^2|}{|z_2^3|} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^3} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^3} = \frac{2}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$

b) Représentation graphique d'un nombre complexe

A tout nombre complexe $z = a + ib$ on lui associe le point $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ et le vecteur $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. A est appelé point image de z et z est l'affixe du point A souvent notée z_A. $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur image d'affixe notée $z_{\overrightarrow{OA}}$.



c) Argument d'un nombre complexe

Scanned by CamScanner

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On appelle argument de z la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{OA}$. Il est noté par : $\arg(z) = \theta = mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA})$ et défini par les données : Soit θ un argument de z on a :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Remarque Si α et θ sont deux arguments d'un nombre complexes z alors $\alpha = \theta + 2k\pi$.

Exemples: Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = -4 - 4i$

Solution

$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ d'où $\boxed{|z_1| = 2\sqrt{2}}$

Soit θ un argument de z alors $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ d'où $\boxed{arg z_1 = \frac{\pi}{3}}$

$|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ d'où $\boxed{|z_2| = 4\sqrt{2}}$

Soit θ un argument de z alors $\begin{cases} cos\theta = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ d'où $\boxed{arg z_2 = \frac{5\pi}{4}}$

Propriétés : soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel.

* $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
* $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
* $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

Exemples

1) Déterminer un argument des nombres complexes : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 - i$.
2) En déduire un argument de : $Z_1 = z_1 \times z_2$ et $Z_2 = \frac{z_1^3}{z_2^2}$.

Solution

On commence toujours à déterminer le module

1) $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$ et soit θ un argument de z. On a :

Scanned by CamScanner

$\begin{cases} cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ d'où $\boxed{arg(z_1) = \frac{5\pi}{6}}$

$|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et soit θ un argument de z. On a :

$\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$ d'où $\boxed{arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$

2) $\arg(Z_1) = \arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{14\pi}{24} = \frac{7\pi}{12}$ d'où $\boxed{\arg(Z_1) = \frac{7\pi}{12}}$

$\arg(Z_2) = \arg\left(\frac{z_1^3}{z_2^2}\right) = \arg(z_1^3) - \arg(z_2^2) = 3\arg(z_1) - 2\arg(z_2)$

$= 3\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{2} - \frac{7\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ d'où $\boxed{\arg(Z_2) = \frac{4\pi}{3}}$

d) Forme trigonométrique – forme exponentielle

Soit z un nombre complexe de module r d'argument θ, l'écriture définie par : $\boxed{z = r(cos(\theta) + isin(\theta))}$ est appelée forme trigonométrique de z: Celle définie par : $\boxed{z = re^{i\theta}}$ est la forme exponentielle.

4- Formule de Moivre- Formule d'Euler

a) *Formule de Moivre* :Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ alors $z = cos\theta + isin\theta$ d'après Moivre : $z^n = (cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

$z = cos\theta + isin\theta \Rightarrow \bar{z} = cos\theta - isin\theta$ alors

$z + \bar{z} = 2Re(z) = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$z - \bar{z} = 2iJm(z) = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $zz' = a^2 + b^2 = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ de même on aura : $cosn\theta = \frac{z^n+\bar{z}^n}{2}$, $sinn\theta = \frac{z^n-\bar{z}^n}{2i}$; $z^n\bar{z}^n = 1$;

Application : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Linéariser : $cos^5\theta$, $sin^3\frac{\theta}{2}$ et $sin^3\theta cos^2\theta$.

b) Formule d'Euler

Pour la formule d'Euler on pose : $z = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}$

On obtient : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a aussi : $cosn\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$, $sinn\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ et $e^{in\theta} \times e^{-in\theta} = 1$

Propriétés soit deux nombres complexes : $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ alors on a :

* $z_1 \times z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ * $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ * $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2}$ * $z_1^n = r_1^ne^{in\theta_1}$

5- Racines n-ième d'un nombre complexe

a) *Définitions* soit z et Z deux nombres complexes et n un entier naturel non nul avec $n \geq 2$. z est une racine n-ième de Z lorsque $z^n = Z$. On écrit : $\boxed{z^n = Z \Rightarrow z = \sqrt[n]{Z} \Rightarrow z = Z^{\frac{1}{n}}}$

b) *Détermination de la racine n-ième.*

Pour déterminer les racines n-ième de Z nous allons écrire z et Z sous forme trigonométrique, posons : $z = \rho(cos\alpha + isin\alpha)$, $Z = r(cos\theta + isin\theta)$

Alors si $z^n = Z \Rightarrow (\rho(cos\alpha + isin\alpha))^n = r(cos\theta + isin\theta)$ (Formule de Moivre)

$\Rightarrow \rho^n(cosn\alpha + isinn\alpha) = r(cos\theta + isin\theta)$

Scanned by CamScanner

$\begin{cases} cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ d'où $\boxed{arg(z_1) = \frac{5\pi}{6}}$

$|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et soit θ un argument de z. On a :

$\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$ d'où $\boxed{arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$

2) $\arg(Z_1) = \arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{14\pi}{24} = \frac{7\pi}{12}$ d'où $\boxed{\arg(Z_1) = \frac{7\pi}{12}}$

$\arg(Z_2) = \arg\left(\frac{z_1^3}{z_2^2}\right) = \arg(z_1^3) - \arg(z_2^2) = 3\arg(z_1) - 2\arg(z_2)$

$= 3\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{2} - \frac{7\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ d'où $\boxed{\arg(Z_2) = \frac{4\pi}{3}}$

d) Forme trigonométrique – forme exponentielle

Soit z un nombre complexe de module r d'argument θ, l'écriture définie par :

$\boxed{z = r(cos(\theta) + isin(\theta))}$ est appelée forme trigonométrique de z: Celle définie par :

$\boxed{z = re^{i\theta}}$ est la forme exponentielle.

4- Formule de Moivre- Formule d'Euler

a) *Formule de Moivre* :Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ alors $z = cos\theta + isin\theta$ d'après Moivre : $z^n = (cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

$z = cos\theta + isin\theta \Rightarrow \bar{z} = cos\theta - isin\theta$ alors

$z + \bar{z} = 2Re(z) = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$z - \bar{z} = 2iIm(z) = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $zz' = a^2 + b^2 = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ de même on aura : $cosn\theta = \frac{z^n+\bar{z}^n}{2}$, $sinn\theta = \frac{z^n-\bar{z}^n}{2i}$; $z^n\bar{z}^n = 1$.

Application : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Linéariser : $cos^5\theta$, $sin^3\frac{\theta}{2}$ *et* $sin^3\theta cos^2\theta$.

b) Formule d'Euler

Pour la formule d'Euler on pose : $z = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}$

On obtient : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ *et* $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a aussi : $cosn\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$, $sinn\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ *et* $e^{in\theta} \times e^{-in\theta} = 1$

Propriétés soit deux nombres complexes : $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ *et* $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ alors on a :

* $z_1 \times z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ * $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ * $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2}$ * $z_1^n = r_1^ne^{in\theta_1}$

5- Racines n-ième d'un nombre complexe

a) *Définitions* soit z et Z deux nombres complexes et n un entier naturel non nul avec $n \geq 2$. z est une racine n-ième de Z lorsque $z^n = Z$. On écrit : $\boxed{z^n = Z \Rightarrow z = \sqrt[n]{Z} \Rightarrow z = Z^{\frac{1}{n}}}$

b) *Détermination de la racine n-ième.*

Pour déterminer les racines n-ième de Z nous allons écrire z et Z sous forme trigonométrique, posons : $z = \rho(cos\alpha + isin\alpha)$, $Z = r(cos\theta + isin\theta)$

Alors si $z^n = Z \Rightarrow (\rho(cos\alpha + isin\alpha))^n = r(cos\theta + isin\theta)$ (Formule de Moivre)

$\Rightarrow \rho^n(cosn\alpha + isinn\alpha) = r(cos\theta + isin\theta)$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$ d'où les racines n-ième de Z sont de la forme : $z_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$ et écrire les solutions sous forme algébrique.

Solution

Résoudre cette équation revient à déterminer les racines $4^{ième}$ de $2(-1 + i\sqrt{3})$.

Pour cela posons : $Z = 2(-1 + i\sqrt{3})$. alors : $z^4 = Z$

Ecrivons Z et z sous forme trigonométrique :

Soit $z = \rho(cos\alpha + isin\alpha)$ ρ et α sont des réels a déterminer.

$Z = 2(-1 + i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} \Rightarrow |Z| = 4$

Soit θ un argument de Z.

$$\begin{cases} cos\theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ donc } Z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z^4 = Z \Rightarrow \left(\rho(cos\alpha + isin\alpha)\right)^4 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \rho^4(cos4\alpha + isin4\alpha) = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^4 = 4 \\ 4\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{4} \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = (4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

D'où les solutions de l'équation de la forme : $z_k = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$

Pour $k = 0$; $z_0 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Pour $k = 1$; $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

Pour $k = 2$; $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Pour $k = 3$; $z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

D'où la solution de l'équation est $S = \{z_0; z_1; z_2; z_3\}$

REMARQUE

- La somme des n racines n-ième d'un nombre complexe non nul est nulle.
- Les racines n-ième de l'unité sont de la forme : $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$. avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

c) ***Théorème*** Pour déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe sachant l'une d'entre elles on peut multiplier successivement la racine n-ième connue par les racines n-ième de l'unité.

Exemple

1) Trouver les racines cubiques de l'unité.
2) Calculer $(2 - i)^3$ et conclure.

Scanned by CamScanner

3) En déduire les racines cubiques de $2-11i$.

Solution

1) Les racines n-ième de l'unité sont de la forme : $u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ alors il suffit de prendre $n = 3$ pour déterminer les racines cubiques de l'unité on a :

$u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$. Avec $k \in \{0;1;2\}$

Pour $k = 0, u_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

Pour $k = 1, u_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Pour $k = 2, u_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) Calculons $(2-i)^3 = (2-i)^2(2-i) = (4-4i-1)(2-i) = (3-4i)(2-i)$

$= 6 - 3i - 8i - 4 = 2 - 11i$

$(2-i)^3 = 2 - 11i$ alors $2-i$ est une racine cubique de $2-11i$.

3) Les racines cubiques de $2-11i$ d'après le ***théorème*** sont :

$z_0 = (2-i)u_0 = (2-i) \times 1 = 2 - i$

$z_1 = (2-i)u_1 = (2-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = (2-i)u_2 = (2-i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-2\sqrt{3}}{2}i$

6- Racines carrées d'un nombre complexes.

Tout nombre complexe admet exactement deux racines opposées.

Soit à chercher les racines carrées du nombre complexe $z = x + iy$.

Supposons $a + ib$ une racine carrée de z alors $z = (a+ib)^2$

On a $z = x + iy = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ *(égalité de deux complexes)*

Déterminer les racines carrées de z revient à résoudre le système suivant :

$$z = (a+ib)^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = |z| \end{cases}$$

Exemple Trouver les racines carrées de $z = 3 + 4i$

Solution : soit $a + ib$ une racine carrée de z alors

$$z = (a+ib)^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & (1) \\ 2ab = 4 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3) \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

Si $a = 2$, dans (2) on a $4b = 4 \Rightarrow b = 1$ d'où $z_1 = 2 + i$ est une racine

Si $a = -2 \Rightarrow -4b = 4 \Rightarrow b = -1$, $z_2 = -2 - i$ est l'autre racine.

Les racines carrées de $z = 3 + 4i$ sont : $2 + i$ *et* $-2 - i$ les deux racines sont bien opposées.

7- Résolutions d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation du second degré $(E): az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une telle équation dans $\mathbb{C}$ on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Scanned by CamScanner

On désigne par : δ *et* $-\delta$ les racines carrées de Δ.

- Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une double racine $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) admet deux racines distinctes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{b+\delta}{2a}$

Exemples1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ (E): z^2 - 2z + 5 = 0$ $\quad b)\ (E): 2z^2 + z + 1 = 0$

Solution

$a)\ (E): z^2 - 2z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 \Rightarrow \Delta = 16i^2$ car $i^2 = -1$

$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16i^2}}{2(1)} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ *et* $z_2 = \frac{b+\delta}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16i^2}}{2(1)} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$

D'où $S = \{1 - 2i\,;\, 1 + 2i\}$

$b)\ (E): 2z^2 + z + 1 = 0$, $\quad \Delta = 7i^2$

$z_1 = \frac{-(1)-\sqrt{7i^2}}{2(2)} = \frac{-1-i\sqrt{7}}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, z_2 = \frac{-(1)+\sqrt{7i^2}}{2(2)} = \frac{-1+i\sqrt{7}}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$

D'où $S = \left\{-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i\ ,\ -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i\right\}$

Exemple2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E): iz^2 - \sqrt{5}z - 3 = 0$

On calcule $\Delta = \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 4(i)(-3) = 5 + 12i$

Cherchons maintenant les racines carrées de Δ.

Soit $a + ib$ une racine carrée de Δ. Alors $\Delta = (a + ib)^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & (1) \\ 2ab = 12 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13 & (3) \end{cases}$

$(1) + (3) \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = \pm 3$, dans la ligne (2)

Si $a = 3 \Rightarrow 6b = 12 \Rightarrow b = 2$

Si $a = -3 \Rightarrow -6b = 12 \Rightarrow b = -2$

alors les racines carrées de Δ sont : $3 + 2i$ *et* $-3 - 2i$.

En fin on a : $z_1 = \frac{-(-\sqrt{5})-3-2i}{2i} = -1 - \frac{\sqrt{5}-3}{2}i$ *et* $z_2 = \frac{-(-\sqrt{5})+3+2i}{2i} = 1 - \frac{\sqrt{5}+3}{2}i$

D'où $S = \left\{-1 - \frac{\sqrt{5}-3}{2}i;\ 1 - \frac{\sqrt{5}+3}{2}i\right\}$

8- Nombre complexe et configuration du plan

Scanned by CamScanner

a) *Mesure de l'angle formé par deux vecteurs*

Soit A, B, C et D quatre points du plan : on $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) *Egalités de vecteurs*

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$

c) *Egalité de distances*

Soit A, B, C et D quatre points du plan

$AB = CD \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$

d) *Alignement de trois points*

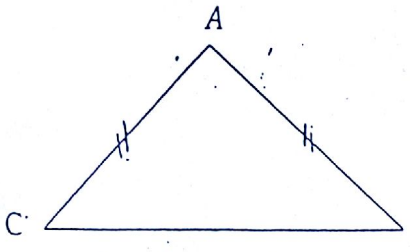
Trois distincts A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

Orthogonalité de deux droites

Soit (AB) et (CD) deux droites du plan. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

f) *Cas de quelques figures particulières*

- Triangle ABC isocèle en A

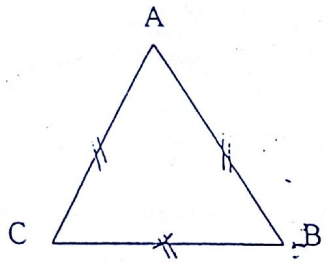


ABC est isocèle ssi : $AB = AC$ et $mes\hat{A} = \alpha$.

Caractérisation complexe

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$

- Triangle ABC équilatéral

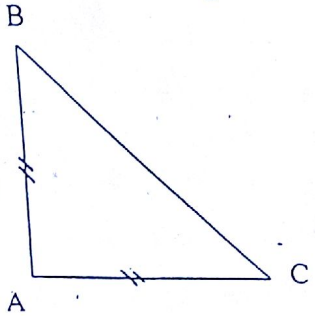


ABC est équilatéral ssi : $AB = AC$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.

Caractérisation complexe

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- Triangle rectangle et ABC isocèle en A



ABC est rectangle et isocèle ssi : $AB = AC$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$.

Caractérisation complexe

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$

Le triangle ABC est rectangle en A ssi $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Scanned by CamScanner

Points A, B, C et D cocycliques (c-à-d points situés sur le même cercle)

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si :

$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \times \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

9- Similitude directe du plan

a) **Définition** soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle similitude directe de rapport α toute transformation du plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N'; $M'N' = \alpha MN$.

b) **Propriétés :**

Toute similitude directe S du plan a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$.

Où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Transformation de l'écriture complexe

Soit S une application du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$ alors S est une transformation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $a \neq 1$ et ω soit solution de l'équation : $z = az + b \Rightarrow \omega = a\omega + b$

  $\Rightarrow b = \omega - a\omega$ remplaçons b dans $z' = az + b$

  $\Rightarrow z' = az + \omega - a\omega \Rightarrow z' - \omega = a(z - \omega)$.

Désignons par Ω le point d'affixe ω (Ω est un point invariant)

k le module de a et α un argument de a.

alors $\boxed{z' = az + b \Rightarrow z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)}$

d'où S est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle α.

$k = |a|$, $\alpha = \arg(a)$ et ω solution de l'équation : $z' = z$

α, k et Ω sont appelés les éléments caractéristiques de S.

Exemple1

Soit S une transformation d'écriture complexe :

$z' = (-1 + i\sqrt{3})z + 2(-1 + \sqrt{3}) + i(4 + \sqrt{3})$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

Solution

L'écriture complexe de S étant de la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ alors S est une similitude directe.

Déterminons maintenant les éléments caractéristiques de S.

- Le centre Ω de S est le point image de la solution de $z' = z$.

$$z' = z \Rightarrow z = (-1 + i\sqrt{3})z + 2(-1 + \sqrt{3}) + i(4 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow (1 + 1 - i\sqrt{3})z = 2(-1 + \sqrt{3}) + i(4 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow (2 - i\sqrt{3})z = 2(-1 + \sqrt{3}) + i(4 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow z = \frac{[2(-1+\sqrt{3})+i(4+\sqrt{3})]}{(2-i\sqrt{3})} = \frac{[2(-1+\sqrt{3})+i(4+\sqrt{3})](2+i\sqrt{3})}{(2)^2+(-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2(-2+2\sqrt{3})+i\sqrt{3}(-2+2\sqrt{3})+2i(4+\sqrt{3})-\sqrt{3}(4+\sqrt{3})}{4+3} = \frac{-4+4\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+6i+8i+2i\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3}{7}$$

$$= \frac{-7+14i}{7} = -1 + 2i \Rightarrow z = -1 + 2i \Rightarrow \Omega\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$ est le centre de la similitude.

Scanned by CamScanner

- Le rapport k de S est le module de a c'est-à-dire $k = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$
- L'angle α de S est l'argument de a c'est-à-dire $\alpha = \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$.

Conclusion :

On dit que S est une similitude directe de centre $\Omega\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ de rapport $k = 2$ *et* d' angle $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Exemple2

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ de rapport $k = 2$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Solution

L'écriture complexe d'une similitude directe est : $z' = az + b \Rightarrow z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$

$$\Rightarrow z' - (1 - i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 1 + i) \Rightarrow z' = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(z - 1 + i) + 1 - i$$

$$\Rightarrow z' = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 1 + i) + 1 - i = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)(z - 1 + i) + 1 - i$$

$$= \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)z + \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)(-1 + i) + 1 - i = -2\sqrt{2} + 1 - i$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)z - 2\sqrt{2} + 1 - i} \text{ est l'écriture complexe de } S.$$

Similitude indirecte

On appelle similitude indirecte toute transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ où a *et* b sont des nombres complexes tel que $a \neq 0$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (1+i)^2$, $z_2 = (2-3i)(2+3i)$, $z_3 = (2+i)(3-5i)$, $z_4 = (1+i)^3$

$z_5 = \frac{1+i}{1-i}$, $z_6 = \frac{3+6i}{3-4i}$, $z_7 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$, $z_8 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

Exercice 2

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = -5\sqrt{3} + 5i$, $z_2 = \left(\frac{-3+2i}{}\right)^{59}$, $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-3i}{}\right)^{26}$

Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes de module ρ et d'argument θ suivants :

$z_1 : \rho = 2$ *et* $\theta = \frac{\pi}{3}$; $z_2 : \rho = \sqrt{2}$ *et* $\theta = -\frac{\pi}{4}$; $z_3 : \rho = 1$ *et* $\theta = \frac{3\pi}{2}$; $z_4 : \rho = 4$ *et* $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Exercice 4

On donne $z = \sqrt{3} + i$. Ecrire sous forme algébrique z^{1996}

Exercice 5

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$, $z_2 = \frac{1-cos\alpha+isin\alpha}{1+cos\alpha-isin\alpha}$ $\alpha \in [0;\pi[$, $z_3 = -2(sinx + icosx)$,

$z_4 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$, $z_5 = \frac{-cos2x + isin2x}{2(cos3x - isin3x)}$

Exercice 6

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par : $(E): z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12) = 0$

1- Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.
2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) *(on notera z_3 la troisième solution)*
3- Démontrer que les points images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $-z^2 + 5z - 7 = 0$ 2) $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$

3) $|z| + z = 3 - 5i$ 4) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$

Scanned by CamScanner

Exercice 8

1- a) Déterminer les racines carrées de $u = 3 - 4i$.

b) En déduire l'ensemble de solution de l'équation $z \in \mathbb{C}, z^2 - iz - 1 + i = 0$.

2- soit l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, z^3 - 3iz^2 - (3 - i)z + 2 + 2i = 0$

a) Vérifier que $z_0 = 2i$ est solution de (E).

b) En déduire les autres solutions de (E).

3- Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z = (1 - 2i)^4$

b) Les racines quatrièmes de l'unité.

c) En déduire Les racines quatrièmes de $z = -7 + 24i$.

Exercice 9

On pose $a = \sqrt{2}(1 + i)$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = a^2 b$.

1- Déterminer le module et un argument pour chacun des nombres complexes a et b.

2- En déduire le module le module et un argument de c.

3- Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 10

Soit les points $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\Omega\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Dans chacun des cas suivants :

- Donner l'écriture complexe de la transformation.
- Déterminer l'image de A par cette transformation.

1- La symétrie de centre Ω.

2- L'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3- La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 11

Soit θ un nombre réel .

On considère les deux nombres complexes $z = e^{i\theta}$ et $Z = \frac{1+z}{1-z}$ avec $z \neq 1$.

1- Montrer que $Z = icotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ où $cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

2- Pour quelles valeurs de θ, l'argument de Z est –il défini ? A quoi est-il égal ? (On distinguera deux cas suivant les valeurs de θ).

3- Trouver le module de Z.

Exercice 12

On donne les deux nombres complexes définis ci-dessous :

Scanned by CamScanner

$z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1- Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

2- En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

3- Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 13

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$

1- Factoriser $P(z)$ en deux polynômes du second degré à coefficient complexes.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

3- Montrer que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels

Exercice 14

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$

2- En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left[(\sqrt{3} - i)z + i\right]^4 = 1$

Exercice 15

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^2 + 2\sqrt{3}z + 4$

1- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

b) Ecrire les solution sous forme trigonométrique.

2- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 4cm)

Soit les points A, B et C d'affixes respectives :

$a = 2i$, $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Soit $Z = \frac{a-b}{c-b}$. Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

c) Ecrire Z sous forme trigonométrique.

d) En déduire la nature du triangle ABC.

3- Soit S une similitude directe définie par : $S(-1 + i) = 1 + 2i$ et $S(i) = i$

a) Déterminer S.

b) Caractériser la similitude directe S.

Exercice16

Dans l'ensemble des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1- Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$

2- On considère l'équation (E): $z^2 = -8i$

a) Déduire de 1) une solution de l'équation (E).

b) L'équation (E) possède une autre solution, écrire cette solution sous forme algébrique.

3- Déduire également de 1) une solution de (E'): $z^3 = -8i$

4- On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Scanned by CamScanner

a) Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b) Montrer que b et c sont solutions de (E').

5- a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2cm), représenter les points A, B et C.

b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice17

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3}+i$ et $-\sqrt{3}+i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i.$$

1- Déterminer les images par S des points O et A.

2- Déterminer les éléments caractéristiques de S.

3- Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C') .

b) Construire (C) et (C') dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 18

On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + iy$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On note $Z = X + iY, (X,Y) \in \mathbb{R}^2$.

1- Ecrire X et Y en fonction de x et y.

2- Au complexe z on associe le point $M(x,y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que Z soit imaginaire pure non nul.

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$.

4- Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

Exercice 19

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$\forall z \in \mathbb{C}$, $h_n(z) = z^n(1-z)$.

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$. **(1pt)**

2-/ On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z)=1 \\ |z|=|1-z| \end{cases}$

a-/ Montrez que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions. **(0,5pt)**

b-/ Soit z_0 l'une de ces solutions, calculez, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0, l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$. **(1,5pt)**

c-/ En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$. **(0,5pt)**
Quel est l'ensemble des solutions du système ? *(d'après BAC 2014 TSE-Bamako)*

Exercice 20

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i, z(z + i)$ et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$

1- Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x\ ;\ y)$ de M.
2- Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :
a) z' soit réel
b) z' soit imaginaire pur.
3- On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifiez que $ZZ' = -3 + 4i$.
Puis calculer $|ZZ'|$.
4- a) Déterminez l'ensemble des ponts M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle. *(d'après BAC 2014 TSE-Région)*

Exercice 21

1- u désigne un nombre complexe différent de -1, de module 1 et d'argument θ. Calculer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{1-u}{1+u}$. En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que $u = \frac{2+iz}{2-iz}$.
2- Résoudre, dans le corps des nombres complexes l'équation : $(2 + iz)^5 = (2 - iz)^5$.

Exercice 22

Le plan complexe est muni du repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1cm pour unité graphique.
1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2- Soit A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$; $z_B = \overline{z_A}$; $z_C = 2z_B$; $z_D = 3$. Construire une fi et la compléter tout au long de l'exercice.
3- Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.
4- Calculer $\frac{z_C-3}{z_A-3}$ en déduire la nature du triangle DAC.
5- On note h l'homothétie de centre D et de rapport 2 et r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$. on appelle C' l'image de C par h et C'' l'image de C' par r . Montrer que les droites (AC) et $(C'C'')$ sont perpendiculaires.

Exercice 23

A /

1- Déterminer le nombre complexe z_1 tel que $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $arg[(1 + i\sqrt{3})z_1] = \frac{7\pi}{12}$
2- Soit $P(z) = z^2 - 4z + 8$

Scanned by CamScanner

a) Montrer que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. Trouver l'autre solution z_2.
b) Déterminer le module et un argument de z_2.

B-/ Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Déterminer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f, A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; $P(z)$ défini dans A-/ 2/.

Exercice 24

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$

1- Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.
2- Calculer $a + b$ et ab en déduire a et b.

Exercice 25

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1- Montrer que f est une similitude directe dont-on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.
2- M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$. Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par : $M_{n+1} = f(M_n)$.
a) En utilisant la 1ère question, calculer ΩM_n en fonction de n.
b) Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4.
c) A partir de quel rang n_0 a-t-on pour tout entier $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0{,}05$?
3- a) Calculer M_0M_1.
b) Pour tout entier naturel n on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.
c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

4- Pour tout entier naturel non nul n, on note G_n l'isobarycentre des points $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$.
a) Montrer que pour $n > 0, \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.
b) En déduire la position limite du point G lorsque n tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

a) Montrer que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. Trouver l'autre solution z_2.
b) Déterminer le module et un argument de z_2.

B-/ Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Déterminer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f, A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; $P(z)$ défini dans A-/ 2/.

Exercice 24

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$

1- Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.
2- Calculer $a + b$ et ab en déduire a et b.

Exercice 25

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1- Montrer que f est une similitude directe dont-on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.
2- M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$. Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par : $M_{n+1} = f(M_n)$.
a) En utilisant la 1ère question, calculer ΩM_n en fonction de n.
b) Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4.
c) A partir de quel rang n_0 a-t-on pour tout entier $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0{,}05$?
3- a) Calculer M_0M_1.
b) Pour tout entier naturel n on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.
c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

4- Pour tout entier naturel non nul n, on note G_n l'isobarycentre des points $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$.
a) Montrer que pour $n > 0, \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.
b) En déduire la position limite du point G lorsque n tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

a) Montrer que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. Trouver l'autre solution z_2.
b) Déterminer le module et un argument de z_2.

B-/ Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Déterminer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f, A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; $P(z)$ défini dans A-/ 2/.

Exercice 24

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose $a = z + z^2 + z^4$ *et* $b = z^3 + z^5 + z^6$

1- Démontrer que a *et* b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.
2- Calculer $a + b$ *et* ab en déduire a *et* b.

Exercice 25

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1- Montrer que f est une similitude directe dont-on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.
2- M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$. Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par : $M_{n+1} = f(M_n)$.
a) En utilisant la 1ere question, calculer ΩM_n en fonction de n.
b) Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 *et* M_4.
c) A partir de quel rang n_0 a-t-on pour tout entier $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0{,}05$?
3- a) Calculer M_0M_1.
b) Pour tout entier naturel n on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.
c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

4- Pour tout entier naturel non nul n, on note G_n l'isobarycentre des points $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$.

a) Montrer que pour $n > 0, \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.
b) En déduire la position limite du point G lorsque n tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

Exercice 26

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$(F): z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}) + 2z^2(3+2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$.

1-Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{z_0}$ est aussi solution de (F)).

2-Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (F).
En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.

3-Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).

4-Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm)

5-Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface.

Exercice 27

On considère les sommes

$S = 1 + cosx + cos2x + cos3x + cos4x + \cdots + cosnx$

$S' = 1 + sinx + sin2x + sin3x + sin4x + \cdots + sinnx, \forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

On pose $z = cosx + isinx$ et l'on suppose $z \neq 1$.

1-Montrer que $S + iS' = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

2-En déduire que $S = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $S' = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Exercice 28

Démontrer que $cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

En déduire la valeur de $cos\frac{2\pi}{11} + cos\frac{4\pi}{11} + cos\frac{6\pi}{11} + cos\frac{8\pi}{11} + cos\frac{10\pi}{11}$.

Exercice 29

1-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $[z^2 - 2(1+i)z + 4i](z^2 + 4z + 8) = 0$. Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C et D tels que

- A et B ont même abscisse
- A et C ont même ordonnée.

2-Définir la similitude directe $\mathcal{S}$ du plan complexe telle que : $S(A) = C$ et $S(B) = D$, en déduire l'angle, le rapport et le centre de S.

Exercice 30

A tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$ on associe le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.

Déterminer les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée

1) $|Z| = 1$ 2) $|Z| = 2$

3) Z est un nombre réel. 4) Z est un nombre imaginaire pur.

Scanned by CamScanner

SOLUTION

Exercice 1

Déterminons la forme algébrique des nombres complexes :

$z_1 = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$z_2 = (2-3i)(2+3i) = (2)^2 + (3)^2 = 13$

$z_3 = (2+i)(3-5i) = 6 - 10i + 3i + 5 = 11 - 7i$

$z_4 = (1+i)^3 = z_1 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = -2 + 2i$

$z_5 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1)^2+(-1)^2} = \frac{2i}{2} = i$

$z_6 = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3)^2+(-4)^2} = \frac{9+12i+18i-24}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

$z_7 = \left(\frac{1+i}{2+i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(1+i)^2}{(2+i)^2} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = \frac{2i}{4+4i-1} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = \frac{2i}{3+4i} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

$= \frac{2i(3-4i)}{(3)^2+(4)^2} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = \frac{8+6i}{13} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = \frac{8}{13} + \frac{6}{13}i - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = \frac{1}{65} + \frac{108}{65}i$

$z_8 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

Exercice 2

Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = -5\sqrt{3} + 5i$

$|z_1| = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{25 \times 3 + 25} = \sqrt{25 \times 4} = 10$

Soit θ un argument de z_1 alors $\begin{cases} cos\theta = -\frac{5\sqrt{3}}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

D'où $\boxed{z_1 = 10\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)}$

$z_2 = \left(\frac{-3+2i}{2+3i}\right)^{59} = \left(\frac{(-3+2i)(2-3i)}{2^2+3^2}\right)^{59} = \left(\frac{-6+9i+4i+6}{13}\right)^{59} = \left(\frac{13i}{13}\right)^{59} = i^{59} = i^{4\times14+3} = i^3 = -i$

Alors $|z_2| = |-i| = 1$ et $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$ d'où $\boxed{z_2 = cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

$z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-3i}{-7-7i}\right)^{26}$ pour z_3 posons $a_1 = \sqrt{3} - 3i$ et $a_2 = -7 - 7i$ sous forme trigonométrique

$|a_1| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Scanned by CamScanner

Soit θ un argument de a_1 alors $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow arga_1 = -\frac{\pi}{3}$.

$|a_2| = \sqrt{49+49} = \sqrt{2\times 49} = 7\sqrt{2}$

Soit θ un argument de a_2 alors $\begin{cases} cos\theta = -\frac{7}{7\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{7}{7\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow arga_2 = \frac{5\pi}{4}$

Alors on a $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-3i}{-7-7i}\right)^{26} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{26} = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{7\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}\right)^{26} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}\right)^{26} \times \frac{e^{-i\frac{26\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\times 26\pi}{4}}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}\right)^{26} \times \frac{e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{2}i}}$

$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}\right)^{26} \times e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}\right)^{26} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{z_3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}\right)^{26}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$

Exercice 3

Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes de module ρ et d'argument θ suivants :

$z_1: \rho = 2 \ et \ \theta = \frac{\pi}{3}$; $z_2: \rho = \sqrt{2} \ et \ \theta = -\frac{\pi}{4}$; $z_3: \rho = 1 \ et \ \theta = \frac{3\pi}{2}$; $z_4: \rho = 4 \ et \ \theta = \frac{5\pi}{6}$

On a $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{z_1 = 1 + i\sqrt{3}}$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$

$\Rightarrow \boxed{z_2 = 1 - i}$

$z_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i \Rightarrow \boxed{z_3 = -i}$

$z_4 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i \Rightarrow \boxed{z_4 = -2\sqrt{3} + 2i}$

Exercice 4

$z = \sqrt{3} + i$. Ecrions sous forme algébrique z^{1996}

Mettons d'abord z sous forme exponentielle

$|z| = 2$ et $argz = \frac{\pi}{6}$ alors $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z^{1996} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1996} = 2^{1996} \times e^{i\frac{1996\pi}{6}}$

$= 2^{1996} \times e^{i(6\times 332+4)\frac{\pi}{6}} = 2^{1996} \times e^{i(6\times 332)\frac{\pi}{6}} \times e^{4\times\frac{\pi}{6}i} = 2^{1996} \times e^{332i} \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$= 2^{1996}(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = 2^{1996}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z^{1996} = -2^{1995} + 2^{1995}i\sqrt{3}}$

Scanned by CamScanner

Exercice 5

Déterminons le module et un argument de:

$$z_1 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)} = \frac{-2isin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -itan\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow z_1 = -itan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Alors $|z_1| = \left|-itan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = |-i| \times \left|tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ car $tan\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

$$arg(z_1) = arg\left(-itan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = arg(-i) + \arg\left(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + 0$$

$$\boxed{|z_1| = tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \ et \ arg(z_1) = -\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = \frac{1-cos\alpha+isin\alpha}{1+cos\alpha-isin\alpha} = \frac{1+cos(\pi-\alpha)+isin(\pi-\alpha)}{1+cos(-\alpha)+isin(-\alpha)} = \frac{1+e^{i(\pi-\alpha)}}{1+e^{-i\alpha}} = \frac{e^{\frac{i(\pi-\alpha)}{2}}\left(e^{-\frac{i(\pi-\alpha)}{2}}+e^{\frac{i(\pi-\alpha)}{2}}\right)}{e^{\frac{-i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}+e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right)}$$

$$\frac{e^{\frac{i(\pi-\alpha+\alpha)}{2}} \times 2cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}{2cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} \times cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{i \times sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = itan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ \alpha \in [0;\pi[,$$

En fin puisque $\alpha \in [0;\pi[\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0.$

Alors $\boxed{|z_2| = tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ et \ arg z_2 = \frac{\pi}{2}}$

$$z_3 = -2(sinx + icosx) = 2(-sinx - icosx) = 2(\sin(\pi + x) + icos(\pi + x))$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi - x\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \pi - x\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

D'où $\boxed{|z_3| = 2 \ et \arg(z_3) = -\frac{\pi}{2} - x}$

$$z_4 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow |z_4| = \left|-3e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right| = |-3| \times \left|e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right| = 3 \times 1 = 3$$

$$\arg(z_4) = \arg\left(= -3e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right) = \arg(-3) + \arg\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

On a $\boxed{|z_4| = 3 \ et \arg(z_4) = \frac{\pi}{3}}$

$$z_5 = \frac{-cos2x+isin2x}{2(cos3x-isin3x)} = \frac{cos(\pi-2x)+isin(\pi-2x)}{2(cos(-3x)+isin(-3x))} = \frac{e^{i(\pi-2x)}}{2e^{-3ix}} = \frac{1}{2}e^{i(\pi-2x+3x)} = \frac{1}{2}e^{i(\pi+x)}$$

D'où $\boxed{|z_5| = \frac{1}{2} \ et \arg(z_5) = \pi + x}$

Scanned by CamScanner

Exercice 6

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par : $(E): z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12) = 0$

1- Démontrons que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.

- Soit $z_1 = a$ la solution réelle alors a vérifie (E) on a :

$a^3 + 9ia^2 + 2(6i-11)a - 3(4i+12) = 0$

$\Leftrightarrow a^3 + 9ia^2 + 12ia - 22a - 12i - 36 = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 22a - 36 + i(9a^2 + 12a - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 & (1) \\ 9a^2 + 12a - 12 = 0 & (2) \end{cases}$

Résolvons l'équation (2) qui semble facile à résoudre

$9a^2 + 12a - 12 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 - (3)(-4) = 16$

$a_1 = \frac{\cdots}{3} = -2$ et $a_2 = \frac{\cdots}{3} = \frac{\cdots}{3}$ nous retenons seulement celle qui vérifie (1)

$a_1 = -2$ dans (1) on a $(-2)^3 - 22(-2) - 36 = 0$ vraie $a_2 = \frac{2}{3}$ ne le vérifie pas

Alors la solution réelle est $\boxed{a = -2}$

- Soit $z_2 = ib$ la solution imaginaire pure alors ib vérifie (E) on a :

$(ib)^3 + 9i(ib)^2 + 2(6i-11)(ib) - 3(4i+12) = 0 \Leftrightarrow$

$-ib^3 - 9ib^2 - 12b - 22ib - 12i - 36 = 0 \Leftrightarrow -12b - 36 + i(-b^3 - 9b^2 - 22b - 12) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -12b - 36 = 0 & (1) \\ -b^3 - 9b^2 - 22b - 12 = 0 & (2) \end{cases}$ l'équation (1) est banale et $b = -3$ le résultat vérifie aussi (2). La solution imaginaire pure est $\boxed{z_2 = -3i}$

2- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) *(on notera z_3 la troisième solution)*

Puisque nous avons deux racines de (E), utilisons la méthode de Hoëner pour déterminer z_3 la troisième solution.

1	$9i$	$12i-22$	$-12i-36$	-2
	-2	$4-18i$	$12i+36$	
1	$-2+9i$	$-18-6i$	0	

1	$-2+9i$	$-18-6i$	$-3i$
	$-3i$	$18+6i$	
1	$-2+6i$	0	

En utilisant ensemble ces deux tableaux l'équation devient

$(E) \Leftrightarrow (z+2)(z+3i)(z-2+6i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+2=0 \ ou \\ z+3i=0 \ ou \\ z-2+6i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \ ou \\ z=-3i \ ou \\ z=2-6i \end{cases}$

Alors la troisième solution est $z_3 = 2 - 6i$

$(E) \Leftrightarrow S = \{-2; -3i; 2-6i\}$

3- Démontrons que les points images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

Soit A, B et C les points images d'affixes respectives : z_1, z_2 et z_3.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}^*$

On a $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{-2-2+6i}{-3i-2+6i} = \frac{-4+6i}{-2+3i} = \frac{2(-2+3i)}{-2+3i} = -2 \in \mathbb{R}^*$ alors les points images des solutions sont alignés.

Scanned by CamScanner

Exercice 7

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $-z^2+5z-7=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(-1)(-7)=1-28=-27=27i^2$

$z_1=\frac{-5-3i\sqrt{3}}{-2}=\frac{5}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$; $z_2=\frac{-5+3i\sqrt{3}}{-2}=\frac{5}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$ d'où $S=\{z_1;z_2\}$

2) $z^2-4\bar{z}-5=0$ pour des équations de ce type posons : $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$

On a $z^2-4\bar{z}-5=0 \Rightarrow (x+iy)^2-4(x-iy)-5=0$

$\Rightarrow x^2-y^2+2ixy-4x+4iy-5=0 \Rightarrow x^2-y^2-4x-5+i(2xy+4y)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2-4x-5=0 & (1) \text{ ou} \\ 2xy+4y=0 & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow 2y(x+2)=0 \Rightarrow y=0 \text{ ou } x=-2$

Dans (1) pour $y=0$

On a $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=5$ d'où les réel $z_1=-1$, $z_2=5$ sont solutions.

Dans (1) pour $x=-2$

$(-2)^2-y^2-4(-2)-5=0 \Rightarrow 4-y^2+8-5=0 \Rightarrow y^2=7 \Rightarrow y=\pm\sqrt{7}$

D'où les complexes $z_3=-2+i\sqrt{7}$, $z_4=-2-i\sqrt{7}$ sont solutions de l'équation

Finalement la solution de l'équation est $\boxed{S=\{-1;5;-2+i\sqrt{7};-2-i\sqrt{7}\}}$

2) $|z|+z=3-5i$ là aussi posons : $z=x+iy$ on aura alors :

$|z|+z=3-5i \Rightarrow |x+iy|+x+iy=3-5i \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+x+iy=3-5i$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+x=3 & (1) \\ y=-5 & (2) \end{cases}$ remplaçons $y=-5$ dans (1). on aura

$\sqrt{x^2+25}=3-x \Rightarrow x^2+25=(3-x)^2 \Rightarrow x^2+25=9-6x+x^2$

$\Rightarrow -6x=16 \Rightarrow x=-\frac{8}{3}$. Pour $y=-5$ on trouve $x=-\frac{8}{3}$ alors la solution de l'équation est $\boxed{S=\left\{-\frac{8}{3}-5i\right\}}$

3) $z^4-\sqrt{2}z^2+1=0$

Pour cette équation faisons un changement de variable en posant $Z=z^2$.

On aura $Z^2-\sqrt{2}Z+1=0 \Rightarrow \Delta=2-4=-2=2i^2$

$Z_1=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Revenons à la variable initiale z.

- $Z=z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors z est une racine carrée de $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Scanned by CamScanner

D'après le tableau $(E) \Rightarrow (z-2i)(z^2-iz-1+i)=0 \Rightarrow \begin{cases} z-2i=0 \\ z^2-iz-1+i=0 \end{cases}$ ou

D'après ceux qui précèdent $S=\{2i;1;-1+2i\}$

3- Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z=(1-2i)^4=((1-2i)^2)^2=(1-4i-4)^2=(-3-4i)^2=9+24i-16$

$\Rightarrow \boxed{z=(1-2i)^4=-7+24i}$

b) Les racines quatrièmes de l'unité sont de la forme $z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)$

Avec $k \in \{0;1;2;3\}$ mais les racines carrées de l'unités sont évidentes :

Elles sont : $1, i, -1$ et $-i$.

c) En déduisons Les racines quatrièmes de $z=-7+24i$

D'après 3)-a) $(1-2i)^4=-7+24i$ donc $1-2i$ est une racine 4ième de $-7+24i$

Par conséquent les racines $4^{ième}$ de $-7+24i$ sont :

$z_1=(1-2i)\times 1=1-2i$; $z_2=(1-2i)\times i=2+i$

$z_3=(1-2i)(-1)=-1+2i$ $z_4=(1-2i)\times(-i)=-2-i$

Exercice 9

On a $a=\sqrt{2}(1+i)$, $b=\sqrt{3}+i$ et $c=a^2b$.

1- Déterminons le module et un argument pour chacun des nombres complexes a et b.

$|a|=|\sqrt{2}(1+i)|=|\sqrt{2}|\times|1+i|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2 \Rightarrow \boxed{|a|=2}$

Soit θ un argument de a. alors $\begin{cases} \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\arg(a)=\frac{\pi}{4}}$

$|b|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2 \Rightarrow \boxed{|b|=2}$

Soit θ un argument de b. alors $\begin{cases} \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\arg(b)=\frac{\pi}{6}}$

2- En déduisons le module le module et un argument de c.

$c=a^2b \Rightarrow |c|=|a^2b|=|a|^2\times|b|=(2)^2\times 2=8 \Rightarrow \boxed{|c|=8}$

$c=a^2b \Rightarrow \arg(c)=\arg(a^2b)=2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\arg(c)=\frac{2\pi}{3}}$

3- Déduisons des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

On remarque que $\arg(ac)=\arg(a)+\arg(c)=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$ donc écrivons ac sous forme trigonométrique $|ac|=|a^3b|=|a|^3\times|b|=8\times 2=16$

Donc $ac=16\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

Mettons maintenant ac sous forme algébrique et égalisons les deux formes

$$ac=a^3b=\left(\sqrt{2}(1+i)\right)^3(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(\sqrt{3}+i)$$

Scanned by CamScanner

$= 2\sqrt{2}(2i)(1+i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{2}(-2+2i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{2}(-2\sqrt{3}-2i+2i\sqrt{3}-2)$

$= 2\sqrt{2}(-2\sqrt{3}-2) + 2i\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)$

alors $ac = 16\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = 2\sqrt{2}(-2\sqrt{3}-2) + 2i\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}(-2\sqrt{3}-2) \\ 16\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{2}(-2\sqrt{3}-2)}{16} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad et \quad \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 16

1-La symétrie de centre Ω

- L'écriture complexe de la symétrie

Soit ω l'affixe du centre Ω et $M'(z')$ image de $M(z)$ par la symétrie.

Alors $z' - \omega = -(z-\omega) \Rightarrow z' = -z + 2\omega \Rightarrow z' = -z + 2(-2+i)$

$\boxed{z' = -z - 4 + 2i}$

- Déterminons l'image de A par la symétrie

Soit A' l'image de A par cette symétrie

Alors $z_{A'} = -z_A - 4 + 2i = -(1-i) - 4 + 2i \Rightarrow z_{A'} = -5 + 3i \Rightarrow A'\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

2- L'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

- L'écriture complexe de L'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$

Soit ω l'affixe du centre Ω et $M'(z')$ image de $M(z)$ par l'homothétie de rapport k

Alors $z' - \omega = k(z-\omega) \Rightarrow z' - (-2+i) = -\frac{1}{2}(z+2-i) \Rightarrow \boxed{z' = -\frac{1}{2}z - 3 + \frac{3}{2}i}$

- Déterminons l'image de A par l' homothétie

Soit A' l'image de A par cette homothétie

Alors $z_{A'} = -\frac{1}{2}z_A - 3 + \frac{3}{2}i \Rightarrow z_{A'} = -\frac{1}{2}(1-i) - 3 + \frac{3}{2}i \Rightarrow z_{A'} = -\frac{7}{2} + 2i$ D'où

$A'\left(-\frac{7}{2}; 2\right)$

3- La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- L'écriture complexe de la rotation

Soit ω l'affixe du centre Ω et $M'(z')$ image de $M(z)$ par la rotation d'angle α

Alors on a $z' - \omega = e^{i\alpha}(z-\omega) \Rightarrow z' - (-2+i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z+2-i)$

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z+2-i) - 2 + i$

- Déterminons l'image de A par la rotation

Soit A' l'image de A par cette rotation

On a $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A + 2 - i) - 2 + i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 - i + 2 - i) - 2 + i$

Scanned by CamScanner

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-2i) - 2 + i = \frac{3}{2} - i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \sqrt{3} \Rightarrow z_{A'} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2} + \frac{-2+3\sqrt{3}}{2}i$

D'où $A'\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}; \frac{-2+3\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercice 11

Soit θ un nombre réel.

On considère les deux nombres complexes $z = e^{i\theta}$ et $Z = \frac{1+z}{1-z}$ avec $z \neq 1$.

1-Montrons que $Z = i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)$ où $\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

On a $Z = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{-e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = -\frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \times \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)$

2- les valeurs de θ, l'argument de Z pour lesquelles , Z est défini .

Z est défini ssi $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq \sin 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\theta}{2} \neq 2k\pi \\ \frac{\theta}{2} \neq \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \neq 4k\pi \\ \theta \neq 2\pi + 4k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$

Z est défini ssi $\boxed{\theta \in \mathbb{R} - \{4k\pi\,;\, 2\pi + 4k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\}}$

L'argument de Z est :

$Z = i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \arg(Z) = \arg\left(i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \arg(i) + \arg\left(\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$\boxed{\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ si } \cot an\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0}$ et $\boxed{\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \text{ si } \cot an\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0}$

3- Trouvons le module de Z.

$Z = i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow |Z| = \left|i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = |i| \times \left|\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

$\Rightarrow \boxed{|Z| = \left|\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$

Exercice 12

$z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1- Ecrivons $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

On a $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})} = \frac{-2(1+i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-2(1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3})}{4} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i}$

2- En déduisons le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Pour cela nous allons déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

De façons très évidente $|z_1| = \sqrt{2}, \arg(z_1) = \frac{5\pi}{4}$, $|z_2| = 1$, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$

Scanned by CamScanner

Alors $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11\pi}{12}}$$

3- Déduisons des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Mettons $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique et égalisons les deux formes

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice 13

Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = (z^2+3z)^2 + (3z+5)^2$

1- Factorisons $P(z)$ en deux polynômes du second degré à coefficient complexes.

$$P(z) = (z^2+3z)^2 + (3z+5)^2 = P(z) = (z^2+3z)^2 - \left(i(3z+5)\right)^2$$

$$= [z^2+3z-i(3z+5)][z^2+3z+i(3z+5)] \Rightarrow$$

$$\boxed{P(z) = [z^2+3(1-i)z-5i][z^2+3(1+i)z+5i]}$$

2- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+3(1+i)z+5i=0$.

$\Delta = \left(3(1+i)\right)^2 - 4(1)(5i) = 18i - 20i = -2i = (1-i)^2$

$z_1 = \frac{-3(1+i)-(1-i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$ et $z_2 = \frac{-3(1+i)+(1-i)}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$

d'où $\boxed{S = \{-2-i\,;-1-2i\}}$

En déduisons les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow [z^2+3(1-i)z-5i][z^2+3(1+i)z+5i] = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2+3(1-i)z-5i = 0 \text{ ou } z^2+3(1+i)z+5i = 0$$

Résolvons $z^2+3(1-i)z-5i=0$

$\Delta = \left(3(1-i)\right)^2 - 4(1)(-5i) = -18i + 20i = 2i = (1+i)^2$

$z_3 = \frac{-3(1-i)-(1+i)}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$ et $z_4 = \frac{-3(1-i)+(1+i)}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$

D'où $P(z)=0 \Leftrightarrow \boxed{S = \{-2-i\,;-1-2i\,;-2+i\,;-1+2i\}}$

Scanned by CamScanner

3- Montrons que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Puisque z_1, z_2, z_3, z_4 sont les racines du polynôme $P(z)$ alors :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

Remarquons que $z_3 = \bar{z}_1$ et $z_4 = \bar{z}_2$

On aura

$$P(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2) = [z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1][z^2 - (z_2 + \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_2]$$
$$= [z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1][z^2 - (z_2 + \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_2] = (z^2 + 4z + 5)(z^2 + 2z + 5)$$

D'où $\boxed{P(z) = (z^2 + 4z + 5)(z^2 + 2z + 5)}$

Exercice 14

Il s'agit de déterminer les racines $4^{ième}$ de l'unité et celles-ci sont évidentes. Elles sont : $1, -1, i$ et $-i$

2- En déduisons la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left[(\sqrt{3} - i)z + i\right]^4 = 1$

L'écriture de l'équation prouve que $(\sqrt{3} - i)z + i$ est une racine $4^{ième}$ de l'unité donc

$(\sqrt{3} - i)z + i = 1$ ou $(\sqrt{3} - i)z + i = -1$ ou $(\sqrt{3} - i)z + i = i$ ou $(\sqrt{3} - i)z + i = -i$

Alors les solutions de l'équation sont :

- $(\sqrt{3} - i)z + i = 1 \Rightarrow z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}-1}{4}i$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$$
- $(\sqrt{3} - i)z + i = -1 \Rightarrow z = \frac{-1-i}{\sqrt{3}-i} = -\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4}$
$$= -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$$
- $(\sqrt{3} - i)z + i = i \Rightarrow (\sqrt{3} - i)z = 0 \Rightarrow z = 0$
- $(\sqrt{3} - i)z + i = -i \Rightarrow (\sqrt{3} - i)z = -2i \Rightarrow z = \frac{-2i}{\sqrt{3}-i} = \frac{-2i(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D'où la solution de l'équation est

$$\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i\ ,\ -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i,\ -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i\ ,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$$

Exercice 15

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^2 + 2\sqrt{3}z + 4$

1- a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Calculons Δ. $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(4) = -4 = 4i^2$

$z_1 = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{2} = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{2} = -\sqrt{3} + i$ donc $\boxed{S = \{-\sqrt{3} - i\ ;\ -\sqrt{3} + i\}}$

b) Ecrivons les solution sous forme trigonométrique.

Pour $z_1 = -\sqrt{3} - i$

Scanned by CamScanner

3- Montrons que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.
Puisque z_1, z_2, z_3, z_4 sont les racines du polynôme $P(z)$ alors :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

Remarquons que $z_3 = \bar{z}_1$ et $z_4 = \bar{z}_2$
On aura

$$P(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2) = [z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1][z^2 - (z_2 + \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_2]$$
$$= [z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1][z^2 - (z_2 + \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_2] = (z^2 + 4z + 5)(z^2 + 2z + 5)$$

D'où $\boxed{P(z) = (z^2 + 4z + 5)(z^2 + 2z + 5)}$

Exercice 14

Il s'agit de déterminer les racines 4ième de l'unité et celles-ci sont évidentes. Elles sont : $1, -1, i$ et $-i$

2- En déduisons la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left[(\sqrt{3} - i)z + i\right]^4 = 1$

L'écriture de l'équation prouve que $(\sqrt{3} - i)z + i$ est une racine 4ième de l'unité donc
$(\sqrt{3} - i)z + i = 1$ ou $(\sqrt{3} - i)z + i = -1$ ou $(\sqrt{3} - i)z + i = i$ ou $(\sqrt{3} - i)z + i = -i$
Alors les solutions de l'équation sont :

- $(\sqrt{3} - i)z + i = 1 \Rightarrow z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}-1}{4} i$
$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4} i$
- $(\sqrt{3} - i)z + i = -1 \Rightarrow z = \frac{-1-i}{\sqrt{3}-i} = -\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4}$
$= -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4} i$
- $(\sqrt{3} - i)z + i = i \Rightarrow (\sqrt{3} - i)z = 0 \Rightarrow z = 0$
- $(\sqrt{3} - i)z + i = -i \Rightarrow (\sqrt{3} - i)z = -2i \Rightarrow z = \frac{-2i}{\sqrt{3}-i} = \frac{-2i(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

D'où la solution de l'équation est

$$\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4} i\ ,\ -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4} i,\ -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4} i\ ,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}}$$

Exercice 15

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^2 + 2\sqrt{3}z + 4$

1- a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
Calculons Δ. $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(4) = -4 = 4i^2$
$z_1 = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{2} = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{2} = -\sqrt{3} + i$ donc $\boxed{S = \{-\sqrt{3} - i\ ;\ -\sqrt{3} + i\}}$

b) Ecrivons les solution sous forme trigonométrique.
Pour $z_1 = -\sqrt{3} - i$

Scanned by CamScanner

$|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

Soit θ un argument de z_1 on a $\begin{cases} cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

D'où $\boxed{z_1 = 2\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)}$

Pour $z_2 = -\sqrt{3} + i$

$|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$

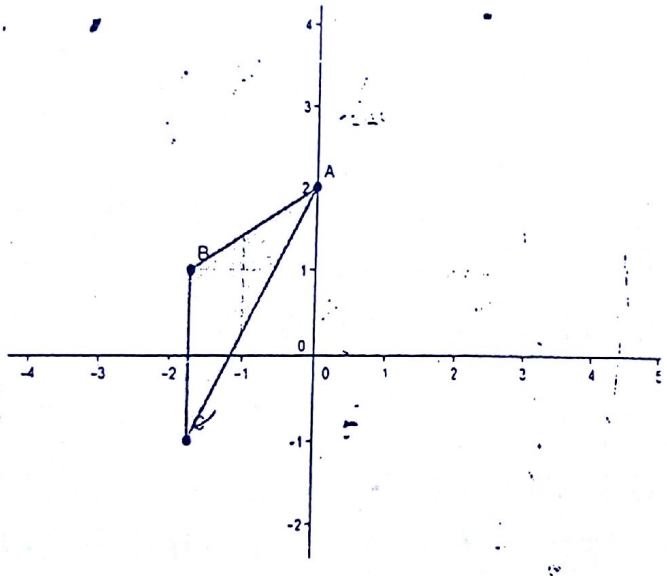
Soit θ un argument de z_2 on a $\begin{cases} cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

D'où $\boxed{z_2 = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$

2- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 4cm)
Soit les points A, B et C d'affixes respectives :

$a = 2i,\ b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$

a) Plaçons les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



b) Soit $Z = \frac{a-b}{c-b}$. Interprétons géométriquement le module et un argument de Z.

$|Z| = \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \frac{|a-b|}{|c-b|} = \frac{BA}{BC}$ et $\arg(Z) = \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = mes(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ d'où l'argument est la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, le module est le rapport de la distance des deux vecteurs.

c) Ecrivons Z sous forme trigonométrique.

$|Z| = \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \frac{|a-b|}{|c-b|} = \frac{|2i + \sqrt{3} - i|}{|-\sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i|} = \frac{|\sqrt{3} + i|}{|-2i|} = 1$

Scanned by CamScanner

$\arg(Z) = \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right) = \arg(\sqrt{3}+i) - \arg(2i) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$

Alors $\boxed{Z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

d) En déduisons la nature du triangle ABC.

$Z = \frac{a-b}{c-b} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'après le cours ABC est un triangle isocèle en B.

3- Soit S une similitude directe définie par : $S(-1+i) = 1+2i$ et $S(i) = i$

a) Déterminons S.

S est une similitude directe alors son écriture complexe est : $z' = az + b$ ou $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$

Avec $M'(z')$ image de $M(z)$ par S.

$S(-1+i) = 1+2i \Rightarrow 1+2i = (-1+i)a + b$

$S(i) = i \Rightarrow i = ia + b$. Formons un système de deux équations avec ces deux équations

on a $\begin{cases} \quad (1) \\ ia + b = i \quad (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow (-1+i-i)a = 1+2i-i \Rightarrow -a = 1+i \Rightarrow a = -1-i$, a dans (2)

$-i(1+i) + b = i \Rightarrow b = i(1+i) + i = -1+2i$

Finalement S est définie par : $z' = -(1+i)z - 1 + 2i$

b) Caractérisons la similitude directe S.

- Le centre de S est évident car $S(i) = i$ donc le point $\Omega\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un point invariant par suite il est le centre de la similitude.
- Le rapport de la similitude est $k = |-(1+i)| = \sqrt{2}$
- L'angle de la similitude est $\arg(-(1+i)) = \arg(-1) + \arg(1+i) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Exercice16

Dans l'ensemble des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1- Montrons que $(1+i)^6 = -8i$

On a $(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 = (1+2i-1)^3 = (2i)^3 = -8i$

2- On considère l'équation (E): $z^2 = -8i$

a) Déduisons de 1) une solution de l'équation (E).

En remarquant que $[(1+i)^3]^2 = -8i$ alors $(1+i)^3$ est une solution de (E).

b) Déterminons l'autre solution de l'équation (E) sous forme algébrique.

$(1+i)^3$ étant une solution de (E) alors son opposé $-(1+i)^3$ est aussi solution d' l'autre solution.

3- Déduisons également de 1) une solution de (E'): $z^3 = -8i$

On a $[(1+i)^2]^3 = -8i$ alors $(1+i)^2$ est une solution de (E')

4- On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Déterminons l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

L'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est

$r\left(O;\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow z' - z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_0)$ où z_0 est l'affixe du centre qui nulle. Alors on a

Image B de A par r $r(A) = B \Rightarrow z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A \Rightarrow b = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2i = 2i\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$= 2i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i \Rightarrow \boxed{b = -\sqrt{3} - i}$$

Image C de B par r : $r(B) = C \Rightarrow z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B \Rightarrow c = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times (-\sqrt{3} - i)$

$$= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(-\sqrt{3} - i) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i)$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - i \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{3} - i}$$

b) Montrons que b et c sont solutions de (E')

$b = -\sqrt{3} - i$ est solution de (E') ssi $(-\sqrt{3} - i)^3 = -8i$

On a $(-\sqrt{3} - i)^3 = (-\sqrt{3} - i)^2(-\sqrt{3} - i)$

$= (2 + 2i\sqrt{3})(-\sqrt{3} - i)$

$= -2\sqrt{3} - 2i - 6i + 2\sqrt{3} = -8i$ d'où b est solution de (E')

$c = \sqrt{3} - i$ est solution de (E') ssi $(\sqrt{3} - i)^3 = -8i$

On a $(\sqrt{3} - i)^3 = (\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i) = (2 - 2i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$

$= 2\sqrt{3} - 2i - 6i - 2\sqrt{3} = -8i$ d'où c est aussi solution de (E')

5- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2cm), représentons les points A, B et C. (voir figure)

a) Déterminons la nature de la figure que forment les images de ces solutions .

De façon plus simple : b et c sont conjugués donc leurs points images B et C sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{v})$ des ordonnées et A est un point de la médiatrice de $[BC]$ alors

$AC = AB = |b - a| = |-\sqrt{3} - i - 2i| = |-\sqrt{3} - 3i| = 2\sqrt{3}$ de plus

$BC = |\sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ d'où $AC = AB = BC = 2\sqrt{3}$ donc on ne peut dire que le triangle ABC est équilatéral.

b) Déterminons le centre de gravité de cette figure.

Soit G le centre de gravité du triangle alors l'affixe de G est :

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i}{3} = \frac{2}{3}i$ G est situer sur l'axe $(O, \vec{v})$.

Exercice 17

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} z - \sqrt{3} + i.$$

1- Déterminons les images par S des points O et A.

Image de O. Soit O' cette image on a :

Scanned by CamScanner

$z_{O'} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} z_O - \sqrt{3} + i = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \times 0 - \sqrt{3} + i = -\sqrt{3} + i \Rightarrow \boxed{z_{O'} = -\sqrt{3} + i}$

Image de A. Soit A' cette image on a :

$$z_{A'} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} z_A - \sqrt{3} + i = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i \Rightarrow \boxed{z_{A'} = \sqrt{3} + i}$$

2- Déterminons les éléments caractéristiques de S.

Le centre de la similitude :

On remarque que $z_A = z_{A'}$ c-à-d $S(A) = A$ alors A est un point invariant par suite A est le centre de la similitude.3

Le rapport k de la similitude

$$k = \left|\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

L'angle α de la similitude

Soit α un argument de $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ on a $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6}$

3- Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 *et* (C') son image par S.

a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (C').

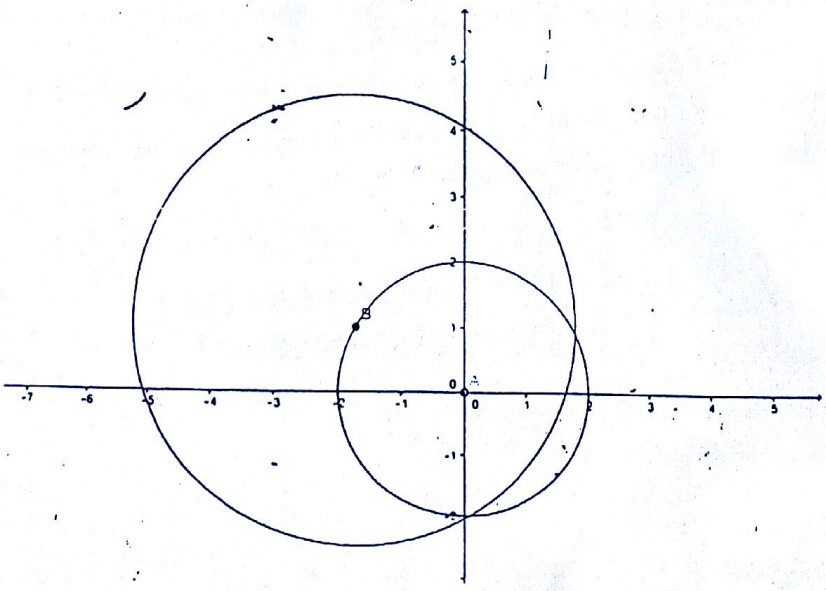
Tout d'abord par une similitude l'image d'un cercle est un cercle.

Le centre de O' de (C') est l'image de O par S. $O' = S(O) \Rightarrow z_{O'} = -\sqrt{3} + i = z_B$ d'où B est le centre de (C').

Le rayon r' de (C') est :$r' = kr = 2\sqrt{3}$

En fin (C') est aussi un cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{3}$

b) Construire (C) *et* (C') dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



Scanned by CamScanner

Exercice18

Soit le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On note $Z = X + iY, (X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

1- Ecrivons X et Y en fonction de x et y.

Remplaçons dans Z, z par $x + iy$

On a $Z = \frac{z^2}{z+i} = \frac{(x+iy)^2}{x+iy+i} = \frac{x^2-y^2+2ixy}{x+i(y+1)} = \frac{(x^2-y^2+2ixy)[x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$

$= \frac{x(x^2-y^2)-i(x^2-y^2)(y+1)+2ix^2y+2xy(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^3-xy^2-ix^2y-ix^2+iy^3+iy^2+2ix^2y+2xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}$

$= \frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{y^3+x^2y-x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2}$

$Z = X + iY = \frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{y^3+x^2y-x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2}$ *(Egalité de deux nombres complexes)*

$\Rightarrow X = \frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}$ et $Y = \frac{y^3+x^2y-x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2}$

2- Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un répère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Déterminons l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que Z soit imaginaire pure non nul.

Z est imaginaire pur ssi $Re(Z) = X = 0 \Rightarrow \frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2} = 0 \Rightarrow x^3 + xy^2 + 2xy = 0$ et $x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \Rightarrow (x, y) \neq (0; -1)$.

$\Rightarrow x^3 + xy^2 + 2xy = 0 \Rightarrow x(x^2 + y^2 + 2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + y^2 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$ d'où l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que Z soit imaginaire pure non nul est la réunion de l'axe des ordonnées et le cercle de centre $(0; -1)$ de rayon 1 privés du point $P(0; -1)$.

3- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (2i)^2 - 4(1)(-2) = 4$

$z_1 = \frac{-2i-2}{2} = -1 - i$ et $z_2 = \frac{-2i+2}{2} = 1 - i$ d'où $\boxed{S = \{-1 - i; 1 - i\}}$

4- Montrons que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

les images des solutions appartiennent à l'ensemble (Γ) ssi leurs affixes respectives vérifient l'équation de (Γ). Soit A et B les point images des solutions avec :

$z_1 = -1 - i \Rightarrow A\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $z_2 = 1 - i \Rightarrow B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Pour $A, x = -1$ et $y = -1$ on a : $(-1)^2 + (-1+1)^2 = 1$ vrai alors $A \in (\Gamma)$

Pour $B, x = 1$ et $y = -1$ on a : $(1)^2 + (-1+1)^2 = 1$ vrai alors $B \in (\Gamma)$.

Exercice19

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, resolvons l'équation $h_n(z) = h_0(z)$

$h_0(z) = 1 - z$

Donc $h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow z^n(1 - z) = 1 - z \Leftrightarrow (z^n - 1)(1 - z) = 0$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow z^n = 1 \; ou \; 1 - z = 0$, alors on a :

$z = 1 \; ou \; z^n = 1$, ce qui revient à chercher les racines n-ieme de l'unité.

Ainsi les solutions sont : $z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right] \; avec \; k \in \{0,1,2,3, \dots, n-1\}$, on pourra ecrire aussi $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ .L'ensemble solution est :

$$S = \left\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, avec k \in \{0,1,2,3, \dots, n-1\}\right\}$$

2-/ a) Montrons que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions :

Soit $z = x + iy$, $|z| = |1 - z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \; et \; y \in \mathbb{R}$ $\boxed{z = \frac{1}{2} + iy}$ avec $y \in \mathbb{R}$ L'équation admet donc une infinité de solutions.

AUTRE METHODE :

Soient les points $M(z) et \; A(1), on \; a$:

$|z| = |1 - z| \Leftrightarrow OM = AM$, les solutions sont les points appartenant à la médiatrice du segment $[OA]$ d'où l'equation admet une infinite de solutions.

b) soit z_0 l'une des solutions telle que $z_0 = [\rho, \theta]$; $|z_0| = |1 - z_0| \Rightarrow \boxed{|1 - z_0| = \rho}$

$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0 \Rightarrow 1 - z_0 = \frac{1}{2} - iy_0 \; donc \; 1 - z_0 = \overline{z_0}$, par conséquent $\boxed{\arg(1 - z_0) = -\theta}$

$\boxed{|{z_0}^n(1 - z_0)| = \rho^{n+1}}$ et $\boxed{\arg({z_0}^n(1 - z_0)) = n\theta - \theta = (n-1)\theta}$

c) En déduisons que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

$$(1) \begin{cases} {z_0}^n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n(1 - z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$$

Comme z_0 est solution alors, on a : ${z_0}^n(1 - z_0) = 1$ donc $\begin{cases} \rho^{n+1} = 1 \\ (n-1)\theta = 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0 \; alors \; |z_0| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + {y_0}^2 = 1 \; donc \; y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ou \; y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$; $(n-1)\theta = 2k\pi \Rightarrow (n-1)\frac{\pi}{3} = 2k\pi$ c'est-à-dire $n - 1 = 6k \; ou \; encore \; n \equiv 1[6]$

De même si $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $et \; \theta = -\frac{\pi}{3}$; on demontre alors que $n - 1 = 6k'$ c'est-à-dire $n \equiv 1[6]$.

Scanned by CamScanner

En conclusion le système n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

L'ensemble solution est $\boxed{\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

Exercice 20

$A(2-4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$, $z \neq i$

1) Exprimons les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M.

$$z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i} \quad \Leftrightarrow \quad x'+y'i = \frac{-i(x+yi)-2+4i}{(x+yi)+i}$$

$$\Leftrightarrow \quad x'+y'i = \frac{-3x+4y+4}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-x^2-y^2+4x+y+2}{x^2+(y+1)^2}$$

D'où $x' = \frac{-3x+4y+4}{x^2+(y+1)^2}$ et $y' = \frac{-x^2-y^2+4x+y+2}{x^2+(y+1)^2}$

2) Déterminons et représentons l'ensemble des points M tels que :

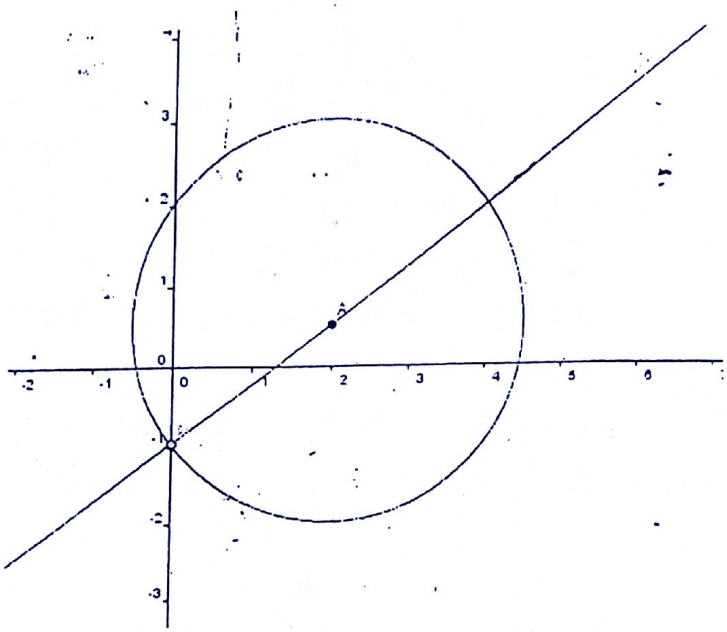
a) z' soit un réel :

$$z' \text{ est un réel} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-y^2+4x+y+2=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \\ (x;y) \neq (0;-1) \end{cases}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $I(2; \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{5}{2}$ privé du point $B(0; -1)$.

b) z' soit un imaginaire pur :

z' est un imaginaire pur $<=> \begin{cases} -3x+4y+4=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$ d'où l'ensemble des points M est la droite d'équation $-3x+4y+4=0$ privée du point $B(0; -1)$.



Scanned by CamScanner

3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$

$$ZZ' = (z + i)(z' + i) = (z + i)\left(\frac{-iz-2+4i}{z+i} + i\right) = -iz - 2 + 4i + iz - 1$$

On obtient bien $ZZ' = -3 + 4i$ d'où $|ZZ'| = \sqrt{9+16} \Rightarrow |ZZ'| = 5$

4) a) Détermination de l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

$M \in C_{(B,r)} \Leftrightarrow |z + i| = r$ On sait que $(z + i)(z' + i) = ZZ'$

Donc $|z + i||z' + i| = |ZZ'|$ D'où $|z' + i| = \frac{5}{r}$

M' décrit le cercle de centre B et de rayon $\frac{5}{r}$

b) Déterminons r pour que M et M' soient sur le même cercle.

M et M' sont sur le même cercle $\Leftrightarrow r = \frac{5}{r} \Leftrightarrow r^2 = 5 \Leftrightarrow r = \sqrt{5}$

Exercice 21

1- u désigne un nombre complexe différent de -1, de module 1 et d'argument θ.

Calculons le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{1-u}{1+u}$.

u est un nombre complexe différent de -1, de module 1 et d'argument θ

Alors $u = e^{i\theta}$ et on a $Z = \frac{1-u}{1+u} = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = -\frac{2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -itan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc $|Z| = \left|-itan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = |-i| \times \left|tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \Rightarrow \boxed{|Z| = \left|tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$

Et $\arg(Z) = \arg\left(-itan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \arg(-i) + \arg\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + \arg\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$$\arg(Z) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 0 \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \pi \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\arg(Z) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0 \end{cases}}$$

2- En déduisons le module et un argument du nombre complexe z tel que $u = \frac{2+iz}{2-iz}$.

On a $u = \frac{2+iz}{2-iz} \Rightarrow u(2 - iz) = 2 + iz \Rightarrow 2u - uiz = 2 + iz \Rightarrow z(1 + u) = 2i(1 - u)$

$\Rightarrow z = \frac{2i(1-u)}{1+u} \Rightarrow z = 2iZ = 2i\left(-itan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc $|z| = |2iZ| = |2i| \times |Z| = 2\left|tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \Rightarrow \boxed{|z| = 2\left|tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$

$$\arg(z) = \arg\left(2tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0 \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0 \\ \pi \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \text{ D'où } \boxed{\arg(z) = \begin{cases} 0 \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0 \\ \pi \; si \; tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0 \end{cases}}$$

3- Résolvons dans le corps des nombres complexes l'équation : $(2 + iz)^5 = (2 - iz)^5$

Scanned by CamScanner

$(2+iz)^5 = (2-iz)^5 \Rightarrow \frac{(2+iz)^5}{(2-iz)^5} = 1 \Rightarrow \left(\frac{2+iz}{2-iz}\right)^5 = 1 \Rightarrow u^5 = 1$ alors u est une racine $5^{ième}$ de l'unité d'où $u_k = e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ avec $k \in \{0;1;2;3;4\}$

Et on sait que $z = 2iZ = 2i\left(-itan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ avec $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ d'où la solution de l'équation est $\boxed{S = \left\{2\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \text{ avec } k \in \{0;1;2;3;4\}\right\}}$

Exercice 22

Le plan complexe est muni du repère orthogonal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1cm pour unité graphique.

1- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2$

$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$, $z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ alors $\boxed{S = \{1-i, 1+i\}}$

2- Soit A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = 1+i$; $z_B = \overline{z_A}$; $z_C = 2z_B$; $z_D = 3$.
Construisons une figure.

3- Montrons que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.

les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D ssi $AD = BD = CD = r$

$AD = |z_D - z_A| = |3 - 1 - i| = |2 - i| = \sqrt{5}$

$BD = |z_D - z_B| = |3 - 1 + i| = |2 + i| = \sqrt{5}$

$CD = |z_D - z_C| = |3 - 2 + 2i| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$

Puisque $AD = BD = CD = \sqrt{5}$ alors A, B,C sont cocycliques et que le rayon du cercle est $r = \sqrt{5}$

4- Calculons $\frac{z_C-3}{z_A-3}$ et en déduisons la nature du triangle DAC.

$$\frac{z_C-3}{z_A-3} = \frac{2-2i-3}{1+i-3} = \frac{1-2i}{-2+i} = \frac{(1-2i)(-2-i)}{5} = \frac{-2-i+4i-2}{5}$$

$= \frac{-4+3i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \Rightarrow \left|\frac{z_C-3}{z_A-3}\right| = 1 \Rightarrow \frac{DC}{DA} = 1 \Rightarrow DC = DA$ alors le triangle ABC est un triangle isocèle en D.

5- On note h l'homothétie de centre D et de rapport 2 et r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$. on appelle C' l'image de C par h et C'' l'image de C' par r.

Montrons que les droites (AC) et $(C'C'')$ sont perpendiculaires

- L'homothétie h de centre D et de rapport 2 est : $h_{(D,2)}: z' - z_D = 2(z - z_D)$

C' l'image de C par h alors $C' = h(C) \Rightarrow z_{C'} - z_D = 2(z_C - z_D) \Rightarrow z_{C'} = 2z_C - z_D$

$\Rightarrow z_{C'} = 2(2-2i) - 3 = 1 - 4i \Rightarrow z_{C'} = 1 - 4i$

- la rotation r de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $r_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)}: z' - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_D)$

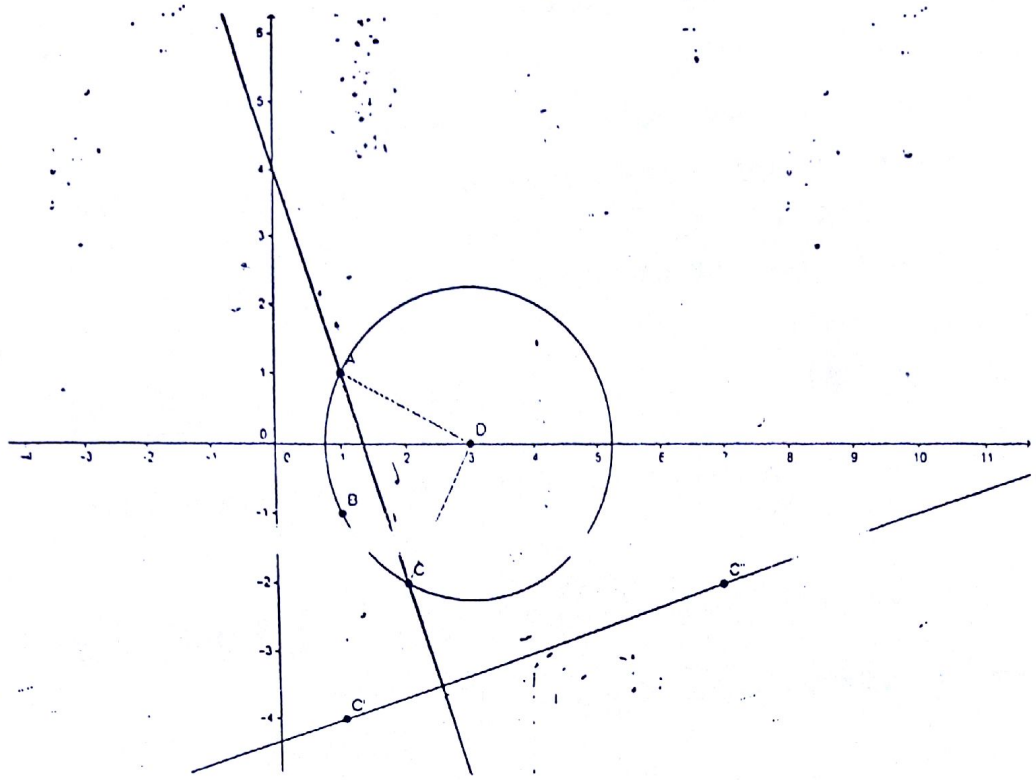
- C'' l'image de C' par r alors on $z_{C''} - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_{C'} - z_D)$

$\Rightarrow z_{C''} - 3 = i(1 - 4i - 3) \Rightarrow z_{C''} = 7 - 2i$

les droites (AC) et $(C'C'')$ sont perpendiculaires ssi $\frac{z_C-z_A}{z_{C''}-z_{C'}} \in i\mathbb{R}^*$

alors on a : $\frac{z_C-z_A}{z_{C''}-z_{C'}} = \frac{2-2i-1-i}{7-2i-1+4i} = \frac{1-3i}{6+2i} = \frac{1-3i}{2(3+i)} = \frac{(1-3i)(3-i)}{2\times10} = -\frac{12i}{20} = -\frac{3i}{5} \in i\mathbb{R}^*$ donc les droites (AC) et $(C'C'')$ sont perpendiculaires.

Scanned by CamScanner



Exercice 23

A /

1- Déterminons le nombre complexe z_1 tel que $|z_1| = 2\sqrt{2}$ *et* $\arg\left[(1+i\sqrt{3})z_1\right] = \frac{7\pi}{12}$

Puisqu'on déjà le module de z il ne reste qu'à déterminer son argument.

$\arg\left[(1+i\sqrt{3})z_1\right] = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow \arg(1+i\sqrt{3}) + \arg(z_1) = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{7\pi}{12} - \arg(1+i\sqrt{3})$

$\Rightarrow \arg(z_1) = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ car $\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Alors $z_1 = 2\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i \Rightarrow \boxed{z_1 = 2 + 2i}$

2- Soit $P(z) = z^2 - 4z + 8$

a) Montrons que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$.

z_1 est solution ssi $(z_1)^2 - 4z_1 + 8 = 0$

On a $(2+2i)^2 - 4(2+2i) + 8 = 4 + 8i - 4 - 8 - 8i + 8 = 0$ alors z_1 est solution de $P(z) = 0$. Trouvons l'autre solution z_2.

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 4 \Rightarrow z_2 = 4 - z_1 = 4 - 2 - 2i = 2 - 2i \Rightarrow \boxed{z_2 = 2 - 2i}$

b) Déterminons le module et un argument de z_2.

$|z_2| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{|z_2| = 2\sqrt{2}}$ soit θ un argument de z_2.

On $\begin{cases} cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ sin\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$

B-/ Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

Scanned by CamScanner

a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f.

f est de la forme $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_O)$;(z_O est l'affixe de l'origine du repère donc l'affixe du centre) alors f est une rotation de centre l'origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Déterminons sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f, A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; $P(z)$ défini dans A-/ 2/.

Alors l'affixe de A est : $z_A = 2 - 2i \Rightarrow z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

A' est l'image de A par f alors $A' = f(A) \Rightarrow z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\Rightarrow z_{A'} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\boxed{\Rightarrow z_{A'} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$ est la forme trigonométrique de l'affixe de A.

Forme algébrique : $z_{A'} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right) \Rightarrow \boxed{z_{A'} = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)}$

Exercice 24

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$

1- Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués

a et b sont conjugués ssi $a + b = 2Re(a)$

$a = z + z^2 + z^4 = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

Avec $\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ on aura

$a = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$\Rightarrow 2Re(a) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Maintenant calculons $a + b$

$a + b = z + z^2 + z^4 + z^3 + z^5 + z^6 = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}}$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$+ \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{7}\right)$

Scanned by CamScanner

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$
$$+ \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 2Re(a) \Rightarrow a + b = 2Re(a)$$ d'où a et b sont conjugués.

Montrons que la partie imaginaire de a est positive.

D'après ce qui précède $Im(a) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ la fonction sinus étant croissante alors on a $\frac{4\pi}{7} > \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$

$\frac{2\pi}{7} \in]0, \pi[\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$ par suite $\boxed{Im(a) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0}$

2- Calculons $a + b$ et ab

$a + b + 1 = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ cette somme est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison z. Une telle somme est définie par :

$$a + b + 1 = \frac{1 - z^7}{1 - z} = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}} = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

$$ab = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6) = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$$
$$= z^4 + z^6 + 3z^7 + z^5 + z^8 + z^9 + z^{10} = z^4 + z^6 + 3 + z^5 + z + z^2 + z^3$$
$$= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 2 = 0 + 2 \Rightarrow \boxed{ab = 2}$$

En déduisons a et b. On connait la somme et le produit de a et b il suffit de résoudre

$X^2 + X + 2 = 0$, $\Delta = (1)^2 - 4(1)(2) = -7 = 7i^2$

Soit $a = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$

D'après 1) $Im(a) > 0$ alors $\boxed{a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}}$

Exercice 25

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1- Montrons que f est une similitude directe dont-on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.

L'application f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donc f est une similitude directe.

- Le centre de la similitude est le point invariant, tel que $f(z) = z' = z$

Alors $z' = z \Rightarrow \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2} = z \Rightarrow z\left(\frac{1}{2}i - 1\right) = -\frac{1-3i}{2} \Rightarrow z = -\frac{1-3i}{2} \times \frac{2}{i-2} = -\frac{1-3i}{i-2}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow z = -\frac{(1-3i)(-2-i)}{5} = -\frac{-2-i+6i-3}{5} = -\frac{-5+5i}{5} = 1-i \Rightarrow z = 1-i$ d'où le centre de la similitude f est point $\Omega\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

- Le rapport k de la similitude f est le module de $\frac{1}{2}i$. Donc $k = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$
- L'angle θ de la similitude f est défini par l'argument de $\frac{1}{2}i$. Alors $\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$.

2- M_0 le point d'affixé $1 + 4\sqrt{3} + 3i$. Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par : $M_{n+1} = f(M_n)$.

a) En utilisant la 1ere question, calculer ΩM_n en fonction de n.

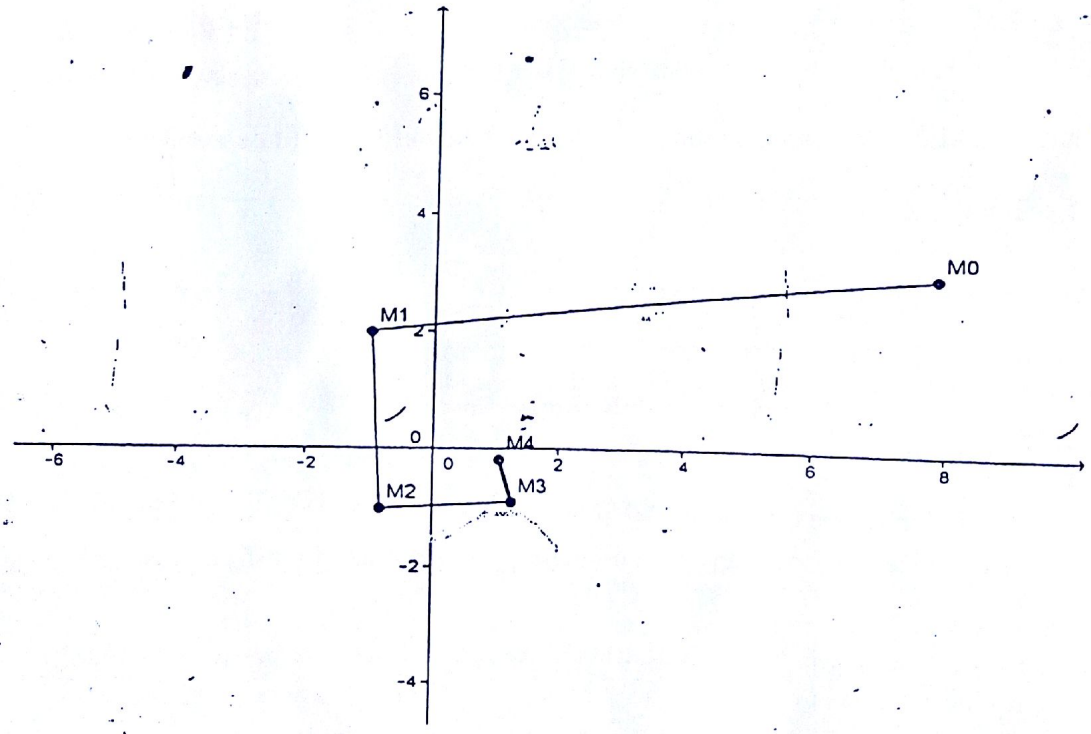
On a $M_{n+1} = f(M_n)$ f étant une similitude de rapport $k = \frac{1}{2}$ donc $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{2}\Omega M_n$ ici on a une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme M_0, la suite géométrique il s'agit de ΩM_n.

Calculons $\Omega M_0 = |z_{M_0} - z_\Omega| = |1 + 4\sqrt{3} + 3i - 1 + i| = |4\sqrt{3} + 4i| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = 8$

ΩM_n étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme ΩM_0 donc $\Omega M_n = \Omega M_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Omega M_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{2^n} = \frac{2^3}{2^n} \Rightarrow \boxed{\Omega M_n = \frac{1}{2^{n-3}}}$

b) Plaçons le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4.



c) Le rang n_0 pour lequel pour tout entier $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0{,}05$.

Le M_0 appartient au disque ssi la distance $\Omega M_n \leq 0{,}05$ or $\Omega M_n = \frac{1}{2^{n-3}} = 2^{3-n}$

Scanned by CamScanner

$\Omega M_n \leq 0{,}05 \Rightarrow 2^{3-n} \leq 0{,}05 \Rightarrow \ln\left(\frac{8}{2^n}\right) \leq \ln(0{,}05) \Rightarrow \ln(8) - \ln(2^n) \leq \ln(0.05)$

$\Rightarrow \ln(2^n) \geq \ln(8) - \ln(0{,}05) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(8)-\ln(0{,}05)}{\ln(2)} \Rightarrow n \geq 7{,}21$ donc $n = 8$. a partir du rang 8 le point M_0 appartient au disque

3-a) Calculons M_0M_1.

$M_{n+1} = f(M_n)$; $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$; $M_0 \rightarrow z_0 = 1 + 4\sqrt{3} + 3i$.

$M_1 = f(M_0) \Rightarrow z_{M_1} = \frac{1}{2}i(1 + 4\sqrt{3} + 3i) + \frac{1-3i}{2} = -1 + 2i\sqrt{3} - i$

$\Rightarrow z_{M_1} = -1 + 2i\sqrt{3} - i = z_1$

$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = |-1 + 2i\sqrt{3} - i - 1 - 4\sqrt{3} - 3i| = |-2 - 4\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 4)|$

$= \sqrt{(-2 - 4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} - 4)^2} = \sqrt{4 + 16\sqrt{3} + 48 + 12 - 16\sqrt{3} + 16} = \sqrt{80}$

$M_0M_1 = \sqrt{80}$

b) Pour tout entier naturel n on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrons que (d_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.

$\left.\begin{matrix} M_{n+1} = f(M_n) \\ M_{n+2} = f(M_{n+1}) \end{matrix}\right\| \Rightarrow M_{n+1}M_{n+2} = \frac{1}{2}M_nM_{n+1}$ par définition donc

$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{M_{n+1}M_{n+2}}{M_nM_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}M_nM_{n+1}}{M_nM_{n+1}} = \frac{1}{2}$ alors (d_n) est une suite géométrique de 1er terme $d_0 = M_0M_1 = \sqrt{80}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Calculons l_n en fonction de .

$l_n = \sum_{k=0}^{n} d_k = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{80}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{80}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{80}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

d'où $\boxed{l_n = 2\sqrt{80}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

En déduisons la limite de l_n en $+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{80}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2\sqrt{80} = 8\sqrt{5} \; car \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$$

D'où

$\boxed{\lim_{n\to\infty} l_n = 8\sqrt{5}}$.

4- Pour tout entier naturel non nul n , on note G_n l'isobarycentre des points $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$.

a) Montrons que pour $n > 0, \Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.

G_n est l'isobarycentre des points $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$ alors

$\overrightarrow{\Omega G_n} = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{\Omega M_0} + \overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega M_2} + \cdots\cdots + \overrightarrow{\Omega M_n}\right)$

$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega G_n}\right\| = \Omega G_n = \frac{1}{n+1}\left\|\overrightarrow{\Omega M_0} + \overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega M_2} + \cdots\cdots + \overrightarrow{\Omega M_n}\right\|$

$\Rightarrow \Omega G_n \leq \frac{1}{n+1}(\Omega M_0 + \Omega M_1 + \cdots\cdots + \Omega M_n)$ $(\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \Omega G_n \leq \frac{1}{n+1}\Omega M_0\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow \Omega G_n \leq \frac{1}{n+1}\Omega M_0 \times \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \Omega G_n \leq \frac{1}{n+1}\times 8 \times \frac{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1}\times 8 \times \frac{2(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}} \leq \frac{16}{n+1}\times\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$$

$\Rightarrow \boxed{\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} < 1$

b) En déduisons la position limite du point G lorsque n tend vers $+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{16}{n+1} = 0$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} \Omega G_n = 0$ donc à l'infini le barycentre G_n est confondu au centre Ω de la similitude f.

Exercice 26

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$(F): z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}) + 2z^2(3+2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$.

1- Démontrons que si le complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{z_0}$ est aussi solution de (F)).

si un complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors on a

$z_0^4 - 2z_0^3(1+\sqrt{3}) + 2z_0^2(3+2\sqrt{3}) - 4z_0(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z_0^4 - 2z_0^3(1+\sqrt{3}) + 2z_0^2(3+2\sqrt{3}) - 4z_0(2+\sqrt{3}) + 8} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow \bar{z}_0^4 - 2\bar{z}_0^3(1+\sqrt{3}) + 2\bar{z}_0^2(3+2\sqrt{3}) - 4\bar{z}_0(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z}_0$ est aussi solution de l'équation (F).

2- Vérifions que le complexe $z_0 = 1+i$ est une solution de l'équation (F).

En remplaçant z_0 par $1+i$ dans l'équation (F)

On a $(1+i)^4 - 2(1+i)^3(1+\sqrt{3}) + 2(1+i)^2(3+2\sqrt{3}) - 4(1+i)(2+\sqrt{3}) + 8$

$= -4 - 4i - 4i\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} + 12i + 8i\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} - 8i - 4i\sqrt{3} + 8 = 0$ donc $z_0 = 1+i$ est une solution de l'équation (F).

En déduisons une seconde solution z_1 de l'équation.

D'après 1) $z_0 = 1+i$ est une solution de (F) alors $\bar{z}_0 = 1-i$ est aussi solution de (F).

3- Déterminons les deux autres solutions z_2 *et* z_3 de l'équation (F).

L'équation (F) peut s'écrire $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)(az^2+bz+c) = 0$ où a *et* b sont des nombres complexes alors $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)(az^2+bz+c) = 0$

$\Leftrightarrow [z^2 - (z_0+\bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0](az^2+bz+c) = 0$ avec $z_0+\bar{z}_0 = 2$ *et* $z_0\bar{z}_0 = 2$

$\Leftrightarrow (z^2-2z+2)(az^2+bz+c) = 0$

$\Leftrightarrow az^4 + (-2a+b)z^3 + (2a-2b+c)z^2 + (2b-2c)z + 2c = 0$

Par identification des coefficients on a $\begin{cases} a = 1 \\ -2a+b = -2(1+\sqrt{3}) \\ 2c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$

D'où l'équation (F) s'écrit $(z^2-2z+2)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0$

Scanned by CamScanner

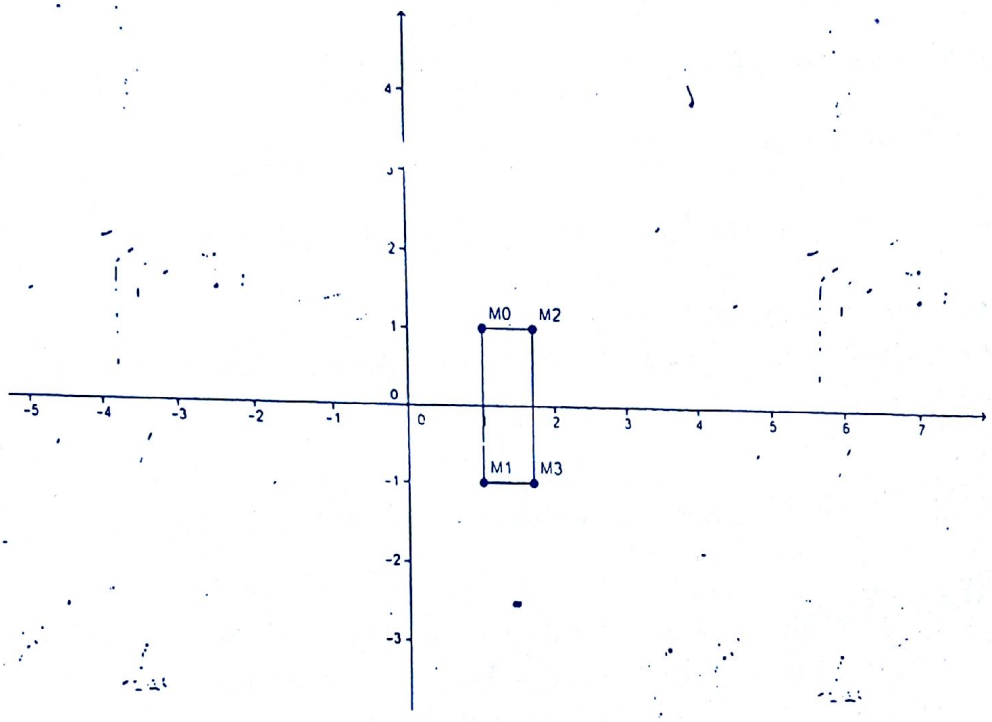
$\begin{cases} z^2 - 2z + 2 = 0 \quad (1) \; ou \\ z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$ les solutions de (1) sont : $1 + i$ *et* $1 - i$.

Pour (2) $\Delta' = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - (1)(4) = -1 = i^2$ les deux autres solutions sont :

$z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = \sqrt{3} - i$

4- Représentons dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm)

Soit M_0, M_1, M_2, M_3 les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3.



Déterminons la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis

On a $\overrightarrow{M_0M_1}(0;1)$; $\overrightarrow{M_0M_2}(\sqrt{3}-1;0)$ *et* $\overrightarrow{M_1M_3}(\sqrt{3}-1;0)$

$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = 0 \\ \overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{M_1M_3} \end{matrix}\right\| \Longrightarrow$ le quadrilatère $M_0M_1\ M_3M_2$ est un rectangle

Calculons en cm^2 l'aire de sa surface

L'aire du rectangle $M_0M_1\ M_3M_2$ est $M_0M_1 \times M_0M_2 = 2\left(\sqrt{3}-1\right)cm^2 = 1{,}45cm^2$

Scanned by CamScanner