

NOMBRES COMPLEXES

I) INTRODUCTION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 1 = 0$

L'insuffisance de $\mathbb{R}$ permet de créer un ensemble contenant $\mathbb{R}$ appelé ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES noté $\mathbb{C}$

II) DEFINITIONS

- On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme $a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et i est un élément imaginaire tel que $i^2 = -1$

EXEMPLE : $1-2i$; $3i$; 7

- Soit $z = a+ib$ un nombre complexe
 - a est la partie réelle de z on note $\text{Re}(z) = a$
 - b est la partie imaginaire de z on note $\text{Im}(z) = b$
 - si $b=0$ alors $z=a$ est un nombre complexe réel
 - si $a=0$ et $b \neq 0$ alors $z = ib$ est un nombre complexe imaginaire pur
 - si $a=0$ et $b=0$ alors $z=0$ est un nombre complexe nul

EXEMPLE : Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants
 $z_1 = 3+2i$; $z_2 = 2-i$; $z_3 = 5i$; $z_4 = -3$

III) DIFFERENTES ECRITURES D'UN NOMBRE COMPLEXE

1°) FORME ALGEBRIQUE

a°) DEFINITION

On appelle forme algébrique d'un nombre complexe la forme $a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$

b°) OPERATION DANS $\mathbb{C}$

Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$

ADDITION

$$z+z' = a+ib+a'+ib' = (a+a') + i(b+b')$$

MULTIPLICATION

$$z \cdot z' = (a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

QUOTIENT

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ia')(a'+ib')}{a'^2+b'^2}$$

c°) CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z le nombre complexe noté

$$\bar{z} = a-ib$$

EXEMPLE : déterminer le conjugué des nombres complexes suivants

Nombres complexes	Nombres complexes conjugués
$3+5i$	$3-5i$
$2-i$	$2+i$
$3i$	$-3i$
-5	-5

PROPRIETES :

➤ Soient z et z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\bar{\bar{z}} = z$
- z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec $z' \neq 0$
- $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$

➤ Soient $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$.

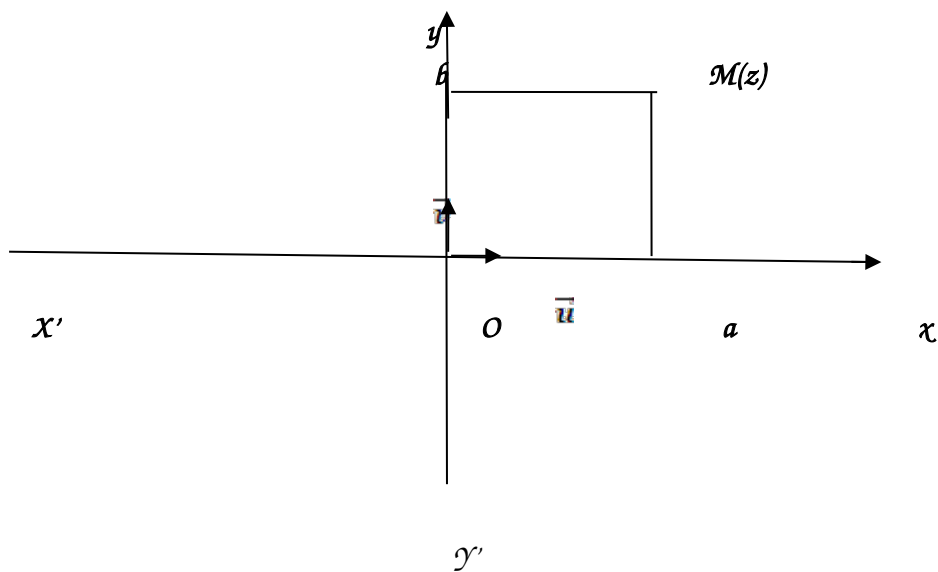
- $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ou $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $z - \bar{z} = 2ib \Rightarrow b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ou $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$

EXEMPLE : Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$Z = (2+i)^3; \quad z = (1+i)(5i-2); \quad z = \frac{3-i}{1+i}$$

d°) REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

tout nombre complexe $z = a+ib$ peut être représenté par le point $M(a, b)$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$



$M(a, b)$ est le point image de $z = a+ib$

$Z = a+ib$ est l'affixe du point $M(a, b)$

EXEMPLE: $Z = 5 - 3i \Rightarrow M(5, -3)$

$$A(0, 4) \Rightarrow z_A = 4i$$

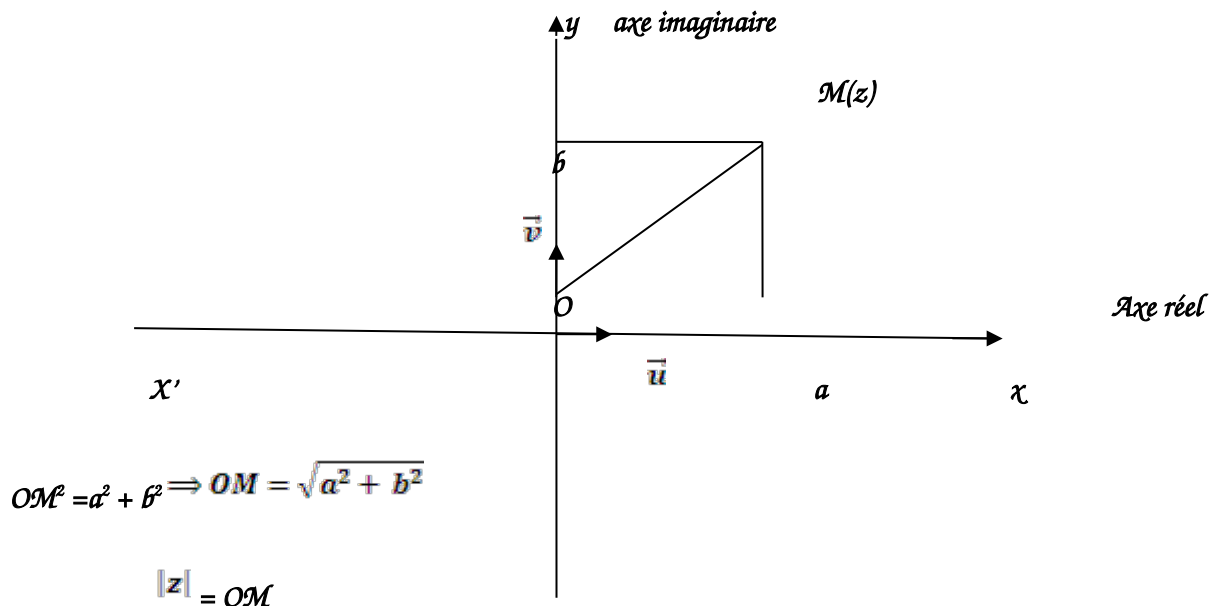
Soient A un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B , l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

e°) MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de z le réel positif défini et noté par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



EXEMPLE : Calculer le module des nombres complexes suivants : $z = 3-4i$; $z = 1+i\sqrt{3}$; $z = 5i$; $z = -7$

PROPRIETES : $z, z' \in \mathbb{C} ; n \in \mathbb{Z}$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z + z'| = |z| + |z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\text{pour } z' \neq 0 ; \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\text{Soit } z = a + ib ; |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

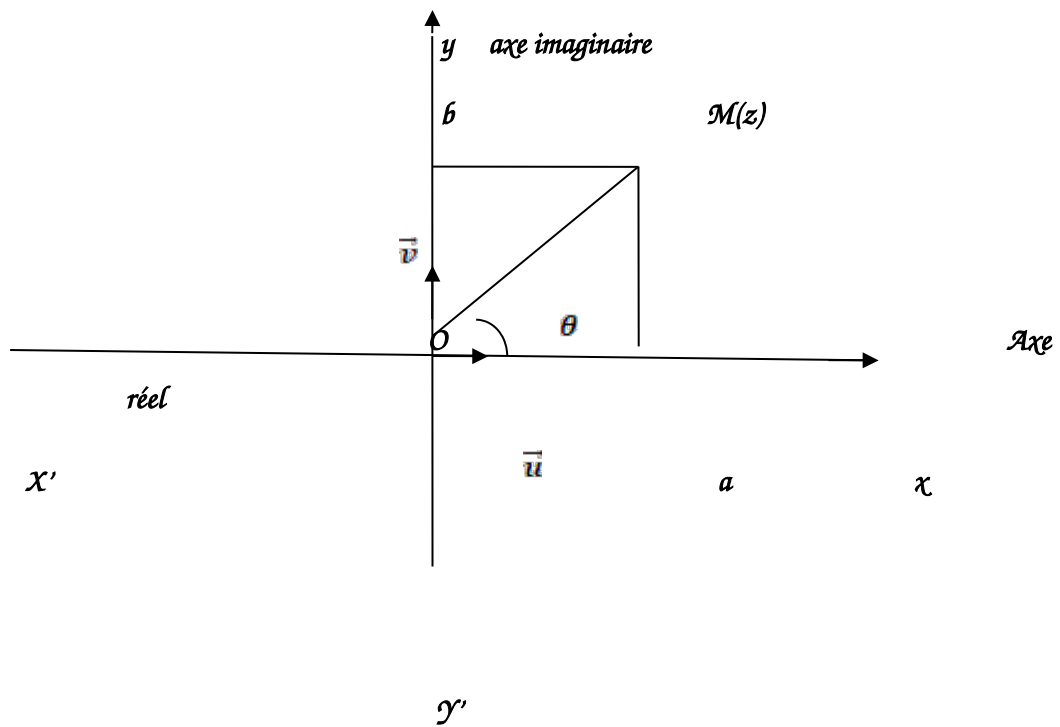
$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

$$\text{Soient } A \text{ un point d'affixe } z_A, \text{ et } B \text{ un point d'affixe } z_B \text{ on a } AB = |z_B - z_A|$$

2°) FORME TRIGONOMETRIQUE

a°) ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe non nul ; $M(a,b)$ le point image de z



La détermination principale de la mesure en radian de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ est appelé l'argument principal de z on note $\text{ARG}(z) = \theta$

Toute autre mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ est un argument d z on note $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Pour déterminer θ on utilise la relation :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

EXEMPLE : Déterminer un argument de $z = 1 + i\sqrt{3}$

PROPRIETES DE L'ARGUMENT

Soit $z = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

✚ si $a > 0$ alors $\arg(z) = 0$;

✚ si $a < 0$ alors $\arg(z) = \pi$

✚ Le nombre complexe nul n'a pas d'argument

Soit $z = ib$ ($b \in \mathbb{R}^*$)

✚ Si $b > 0$ alors $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$

✚ Si $b < 0$ alors $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier relatif

✚ $\text{Arg}(z * z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$

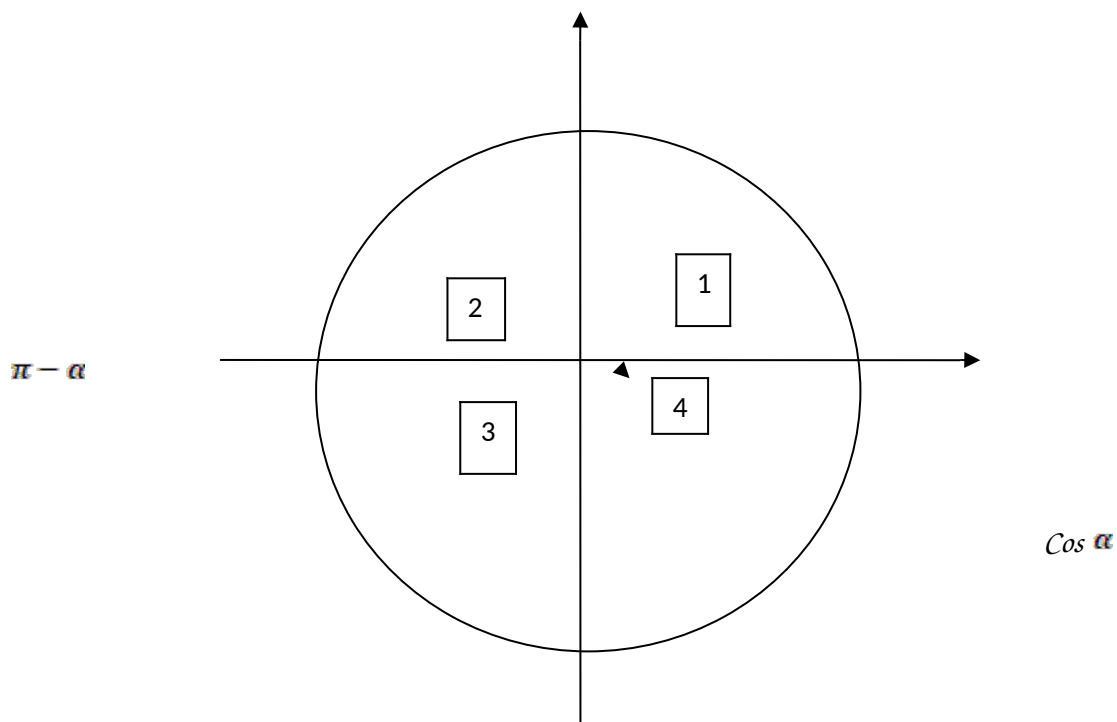
✚ $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$

✚ $\text{Arg}(z^n) = n * \text{Arg}(z)$

✚ $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$

RAPPELS

Angles θ	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$
rapport						
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



$$\pi + \alpha$$

$$-\alpha$$

EXEMPLE : Déterminer un argument du nombre complexe $z = -\sqrt{3} + i$

b°) FORME TRIGONOMETRIQUE

Soit z un nombre complexe non nul de module r et θ l'un de ses arguments, sous forme trigonométrique

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

EXEMPLE : Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $Z_1 = 1 + i$;

$$Z_2 = -1 + i\sqrt{3} ; Z_3 = \sqrt{3} - i ; Z_4 = -2 - 2i$$

c°) FORMULE DE MOIVRE

Soit z un nombre complexe non nul de module 1 et d'argument θ . $z = \cos \theta + i \sin \theta$

D'après Moivre $\forall n \in \mathbb{Z}, z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

3°) NOTATION EXPONENTIELLE

a°) Définition

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ sous forme exponentielle

$$z = r e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ se lit << exponentielle $i\theta$ >>

EXEMPLE : Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe suivant $z = 1 + i$;

b°) Propriétés : soient les nombres complexes $z = r e^{i\theta}$; $z' = r' e^{i\theta'}$

$$z * z' = r r' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\bar{z} = r e^{-i\theta} ; z^n = r^n e^{in\theta}$$

c°) FORMULES D'EULER

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

d°) LINEARISATION DES POLYNÔMES TRIGONOMETRIQUES

FORMULES DE LINEARISATION

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ;$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos n \theta$$

$$e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i \sin n \theta$$

EXEMPLE: linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\cos^4 2x$, $\cos^2 x * \sin^3 x$

AUTRE FORMULES DE LINEARISATION

$$\text{Soit } z = \cos \theta + i \sin \theta ; \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$z + \bar{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$z - \bar{z} = 2i \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z * \bar{z} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

D'autre part

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \qquad z^n + \bar{z}^n = 2 \cos n\theta \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\bar{z}^n = \cos n\theta - i \sin n\theta \qquad z^n - \bar{z}^n = 2i \sin n\theta$$

IV' EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1°) RACINES CARREES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soient $z = a + ib$ et $\delta = x + iy$ deux nombres complexes

δ est une racine carrée de z si et seulement si $\delta^2 = z$

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (1)$$

$$|\delta|^2 = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

De (1) et (2) on a :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$
, la résolution de ce système permet de trouver les racines carrées

de z

Exemple :

Déterminer les racines carrées de $z = 5 + 12i$

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = z$ et $|\delta|^2 = |z|$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \\ xy = 6 & (3) \end{cases}$$

De (1) + (2) on a $x = 3$ ou $x = -3$

Dans (3)

Pour $x = 3$ on a $y = 2$

Pour $x = -3$ on a $y = -2$

Donc les racines carrées de $z = 5 + 12i$ sont : $\delta_1 = 3 + 2i$ et $\delta_2 = -3 - 2i$

1. Résolution d'équations :

a) Equation du premier degré :

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z - 1 + i = 0; s = \left\{ \frac{1-i}{2} \right\}$

b) Equation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) :

Pour résoudre une telle équation on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

1^{er} cas : a, b et c sont tous réels

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions complexes $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a- $2z^2 - 5z + 2 = 0$

b- $z^2 + 4z + 4 = 0$

c- $z^2 - 4z + 5 = 0$

d- $z^2 + z + 1 = 0$

2^{ème} cas : a, b et c non tous réels

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a- $z^2 - 2iz - 2 = 0$

b- $z^2 + iz - 3i + 1 = 0$

V Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1. Définition :

Etant donné deux nombres complexes z et Z et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On dit que z est une racine n -ième de Z si et seulement si $z^n = Z$

2. Recherche des racines n -ièmes d'un nombre complexe

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

d'où les racines n -ièmes sont :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

Remarque : Les racines n -ièmes de l'unité ($Z = 1$) sont $z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right]$ avec

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

Exemple :

a- Trouver les racines quatrièmes de $Z = 1 + i\sqrt{3}$ (c'est-à-dire résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$)

b- Trouver les racines cubiques de l'unité

c- Trouver les racines quatrièmes de l'unité

Remarques :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (o, u, v) :

- Les points images des n racines n -ièmes d'un nombre complexe Z forment un polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$
- Soit z une racine n -ième de Z . Pour trouver les n racines n -ièmes de Z on multiplie successivement z par les racines n -ièmes de l'unité

Exemple :

- Calculer $(2 + i)^4$
- En déduire les racines quatrièmes de $Z = -7 + 24i$
- Placer les points images de ces racines dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

VI Nombres complexes et géométrie

Soient A, B et C les points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C :

$$\arg(\widehat{AB, AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

-
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C sont alignés
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ ($b \in \mathbb{R}^*$) alors ABC est un triangle rectangle en A
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $e^{-i\alpha}$ ($\alpha \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$) alors ABC est un triangle isocèle en A
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $-i$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ alors ABC est un triangle équilatéral.