

Nombres Complexes

Classe : TSE

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Thème : Nombres Complexes

Compétences	Composantes	Manifestations
Résoudre une situation problème	Diagnostiquer la situation – problème	Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation.
		Etablir des relations entre les données retenues.
		Comparer cette situation – problème avec des situations semblables déjà résolues
		Formuler le problème
	Mettre à l'essai des pistes de solutions	Inventorier les différentes pistes de solutions
		Choisir une piste parmi un éventail de possibilités.
		Appliquer cette piste.
	Partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique	Se servir de contre – exemples pour ajuster des démarches
		Expliquer des résultats
Mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques	Exercer son jugement critique sur les retombées de la science et de la technologie	– Tirer une conclusion.
		– Analyser les retombées à long terme de la science et de la technologie sur l'individu, la société, l'environnement et l'économie.
		– Examiner leurs effets sur le mode de vie des individus.

		– Identifier des questions et des enjeux sur le plan éthique
	Comprendre le fonctionnement d'objets techniques	– Manifester de la curiosité à l'égard de certains objets techniques.
		– Les démonter
		– En identifier les pièces – Expliquer le fonctionnement des objets techniques
	Comprendre des phénomènes naturels	– S'interroger sur certains phénomènes
		– Les décrire de manière qualitative.
		– S'en donner une représentation schématique.
		– Expliquer les phénomènes à l'aide de lois et de modèles.
		– Vérifier la cohérence de l'explication donnée.
		– S'appropriier les concepts pertinents.
		– Dégager le caractère évolutif des concepts.
Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique	Participer à des échanges d'informations à caractère scientifique, technologique et mathématique.	– Respecter les points de vue des autres
		– Consulter au besoin différentes sources d'information.
		– Comparer ses données à sa démarche avec celles des autres.

		– Valider son point de vue ou sa solution en les confrontant avec d'autres.
	Partager des savoirs ou des résultats scientifiques, technologiques et mathématiques	– Recourir à divers formats de présentation (symbole, tableau, dessin technique, etc.)
		– Sélectionner des modes de représentation selon l'objet du message et l'interlocuteur
	Produire des messages à caractère scientifique, technologique et mathématique	– Utiliser des informations scientifiques, technologiques provenant de diverses sources
		– Vérifier des sources.
		– Recourir à des modes de représentations conformes aux conventions propres à la science, à la technologie et à la mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Pré évaluation : Compléter le tableau des angles remarquables

Situation Problème :

Y a-t-il ou non un nombre dont son carré est égal à -1 ?

Contenus :

Fiche de séquence 1 : Etude Algébrique

Activité 1 : Notion de nombre complexe

Soit l'équation (E): $x^2 + 4x + 5 = 0$

a) Vérifier que : $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$

b) En déduire que : $(E) \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -1$

c) Cette équation a-t-elle une solution dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

d) Supposons qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$ et conservons les règles de calculs utilisées dans $\mathbb{R}$:

- Démontrer alors que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i .
- Résoudre de même les équations : $x^2 - 6x + 13 = 0$ et $x^2 + 5 = 0$

Synthèse Partielle 1 :

Le nombre i tel que $i^2 = -1$ est appelé nombre imaginaire, il n'est pas un réel.

Définition :

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Activité 2 : Opération dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

a) Ecrire la somme $z + z'$ et le produit zz' sous la forme $X + iY$ où X et Y sont des réels écrits en fonction de $a; b; a'$ et b' .

b) Même question pour $\frac{z}{z'}$ en supposant que $z' \neq 0$

Synthèse Partielle 2 :

La somme de deux nombres complexes, le produit de deux nombres complexes et la division de deux nombres complexes (si le dénominateur n'est pas nul) sont des nombres complexes.

On dit que l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne de $\mathbb{C}$.

Activité 3 : Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = 1 + i$ un nombre complexe et M son point image dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M' le symétrique du point M par rapport à l'axe $(O; I)$ et $\bar{z}$ l'affixe du point M' .

Déterminer $\bar{z}$.

Synthèse Partielle 3 :

Le complexe $\bar{z} = 1 - i$ est le conjugué du nombre complexe $z = 1 + i$.

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z , le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - ib$.

Exemples : $z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i$

$$z = 2i \Rightarrow \bar{z} = -2i ; \quad z = -3 \Rightarrow \bar{z} = -3$$

Activité 4 : Module d'un nombre complexe

Soit $z = 1 + i$ un nombre complexe et M le point image de z dans un repère orthonormé $(O ; I; J)$.

Exprimer la distance $d(O ; M)$ en fonction de a et b .

Synthèse Partielle 4 :

La distance $d(O ; M) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ est appelée module du nombre complexe z et noté $|z|$.

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$. On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Synthèse Générale :

Notation et vocabulaire :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$

- L'écriture $a + ib$ est appelée forme algébrique de z .

Le nombre réel a est appelé partie réel de z et noté $Re(z)$

Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z et noté $Im(z)$

- Si $b = 0$, alors $z = a$; z est un nombre réel ; tout nombre réel est un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit imaginaire pur.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a :

$$- z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi sont égales.

$$- z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

$$- 0 \text{ est appelé nombre complexe nul.}$$

Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) Le point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé point image du nombre complexe $z = a + ib$.

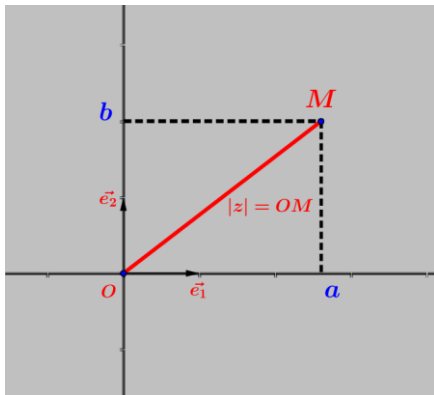
$z = a + ib$ est appelé affixe du point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

b) Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé vecteur image du nombre complexe $z = a + ib$.

$z = a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

c) Le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé plan complexe. Un point M d'affixe z de ce plan est souvent noté $M(z)$.

d) les droites de repère $(O, \vec{e}_1)$ et $(O, \vec{e}_2)$ sont respectivement appelées axe réel et axe imaginaire.



Propriétés :

- $(\mathbb{C}; +)$ est un groupe commutatif
- $(\mathbb{C}^*; \times)$ est un groupe commutatif
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition. On dit que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif.

Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z , le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ et $z + \bar{z} = 0$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec $z' \neq 0$

Module d'un nombre complexe :

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$. On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque :

- Si $b = 0$, on a : $|z| = |a| = \sqrt{a^2}$
- Pour tout nombre complexe z , on a : $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- Soit z un nombre complexe ; on a :

$|z| = 1$ si et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$)

$|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

$$a) |zz'| = |z| \times |z'| \qquad b) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (\text{si } z \neq 0)$$

$$c) |z^n| = |z|^n \qquad d) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (\text{si } z' \neq 0)$$

$$e) |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

Evaluation :

Exercice 1 :

1)- Ecrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$a) Z_1 = 3(2 - i) + i(3 + 2i) \quad ; \quad b) Z_2 = (2 - i)^2 - 2(1 + 3i)^2 \quad ; \quad c) Z_3 = \frac{-2 + i}{2 + i}$$

$$d) Z_4 = (5 + 2i)(5 - 2i) \quad ; \quad e) Z_5 = \frac{(3 - i)(1 + 2i)}{(1 - 3i)(2 + i)} \quad ; \quad f) Z_6 = \frac{(4 - 3i)(2 + 3i)}{5 - 2i}$$

2)- a) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 1 + i + i^2 + i^3 \quad ; \quad B = i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202}$$

b) Calcule :

$$\sum_{k=0}^{2000} i^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2002} (-i)^k$$

Exercice 2 :

1)- Pour chacun des nombres complexes ci-dessous : sans calcul donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre Z puis donner l'écriture algébrique du conjugué de Z :

$$a) Z = (2 - i)(5 + 3i) \quad ; \quad b) Z = i(3 + 2i) - 3 + i \quad ; \quad c) Z = \frac{5 - 2i}{i - 2}$$

$$d) Z = \frac{(3 - 2i)(1 - i)}{1 + i}$$

2)- Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$a) Z = -3\sqrt{3} + 3i \quad ; \quad b) Z = \frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4} \quad ; \quad c) Z = 1 - \cos x - i \sin x \quad ; \quad \text{pour } x \in [\pi; 2\pi]$$

$$d) Z = \frac{1 - \cos x + i \sin x}{1 + \cos x - i \sin x} \quad ; \quad \text{pour } x \in [0; \pi[\quad ; \quad e) Z = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}} \quad ;$$

$$f) Z = \cos \frac{\pi}{19} - i \sin \frac{\pi}{19}$$

Fiche de séquence 2 : Etude trigonométrique

Activité 1 : Argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z = 1 + i$ et A le point image de z dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

a) Placer le point A dans le repère.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OA})$

Synthèse Partielle 1 :

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OA})$ est un argument du nombre complexe $z = 1 + i$.

Définition :

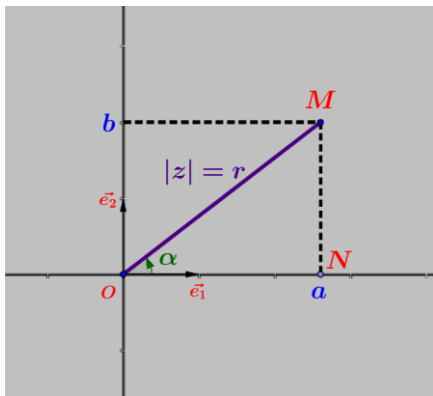
Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$.

On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1 ; \overrightarrow{OM})$.

Activité 2 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul tel que : $z = a + ib$ et M son image dans le plan complexe. Désignons r le module de z et α un argument de z .

Exprimer z en fonction de r et α .



Synthèse Partielle 2 :

L'écriture $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est la forme trigonométrique de z .

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α .

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Exemple :

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

Activité 3 : Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe :

Soit les nombres complexes : $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = -i$

Vérifier que : $z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = i$ et $z_0 + z_1 + z_2 = 0$

Synthèse Partielle 3 :

Les nombres complexes z_0 , z_1 et z_2 sont les racines cubiques du nombre complexes i .

Définition :

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Synthèse Générale :

Propriété :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$

Remarque :

- Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $r \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Si $r > 0$, la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$
- Si $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $z = -r(\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi))$ et $\arg(z) \equiv \alpha + \pi [2\pi]$
- **Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :**

Pour écrire $z = a + ib$ sous forme trigonométrique :

(1) On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) On détermine un argument α de z par la relation
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z|} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \alpha = ?$$

La forme trigonométrique de z est :

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

- **Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :**

Pour écrire $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ sous forme algébrique, il suffit tout simplement de développer et calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Formule de Moivre :

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif n , on a :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

Notation exponentielle :

Pour tout nombre réel α on pose : $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$. On déduit de cette notation la définition suivante :

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α .

On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = r e^{i\alpha}$.

Exemples :

$$1 = e^{i0} \quad ; \quad -1 = e^{i\pi} \quad ; \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que : $z = r e^{i\alpha}$ et $z' = r' e^{i\alpha'}$, n un entier relatif. On a :

$$(1) \quad z z' = r r' e^{i(\alpha+\alpha')} ; \quad (2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\alpha} ; \quad (3) \quad z^n = r^n e^{i n \alpha} ; \quad (4) \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\alpha-\alpha')}$$

Formules d'Euler :

$$\text{Pour tout nombre réel } \alpha, \text{ on a : } \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Linéarisation :

$$Z = \cos x + i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$z + \bar{z} = 2 \cos x \quad z - \bar{z} = 2i \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \sin x = \left(\frac{1}{2i}\right)(z - \bar{z})$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n (z + \bar{z})^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (e^{ix} + e^{-ix})^n$$

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (z - \bar{z})^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (e^{ix} - e^{-ix})^n$$

De $Z^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ et $\bar{Z}^n = \cos(nx) - i\sin(nx)$ on déduit que

$$z^n + \bar{z}^n = e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx) \quad ; \quad z^n - \bar{z}^n = e^{inx} - e^{-inx} = 2i\sin(nx)$$

Remarque :

$$z \times \bar{z} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad z^n \times \bar{z}^n = 1$$

Exemple :

Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$.

Racines n^{èmes} d'un nombre complexe non nul :

Définition :

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On appelle racine n^{ème} de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Propriétés :

Soit $Z = re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

(1) Z admet n racines n^{èmes} telles que : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

En effet, soit $z = \rho e^{i\theta}$ une racine n^{ème} de Z .

$$\text{On a : } z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

(2)- Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

(3)- La somme des n racines n^{èmes} d'un nombre complexe non nul est nulle.

Racines carrées :

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de $Z = a + ib$.

$$\text{Donc } z^2 = Z \Rightarrow |z^2| = |Z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = |Z| \quad (1)$$

$$\text{Et } z^2 = Z \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \text{Re}(Z) \quad (2) \text{ et } 2ab =$$

$$\text{Im}(Z) \quad (3)$$

$$(1); (2) \text{ et } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(Z) \\ 2xy = \operatorname{Im}(Z) \end{cases}$$

Evaluation :

Exercice 1 :

A) On donne les nombres complexes

$$u = -1 + i; v = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ et } w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ On pose } z = \frac{(v)^2(\overline{w})}{(\overline{u})^3}$$

- 1) Déterminer $|u|$; $\arg(u)$; $|v|$; $\arg(v)$; $|w|$; $\arg(w)$.
- 2) Déterminer la forme polaire de z .
- 3) Placer dans le repère orthonormé $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ les points A , B et C d'affixes respectives $2i - 3$; $1 - 2i$ et 3

B) On donne $a = -1 + i\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ et $c = -4i$

- 1) Calculer : $|a|$; $\arg(a)$; $|b|$; $\arg(b)$; $|c|$; $\arg(c)$
- 2) On pose $z = \frac{1}{abc}$
- a) Déterminer $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ puis l'écriture trigonométrique de z .
- b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 :

I) Compléter le tableau suivant :

Nombres Complexes	$z = 2(i)^{777}(\sqrt{3} + i)$	$z = \frac{3}{-(2i)} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$
Forme		
Polaire de z		
Trigonométrique de z		
Exponentielle de z		

Exercice 3 :

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

- 1) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2
- 2) Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $z_1 \times z_2$.
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

4) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a) Z = \cos\alpha - i\sin\alpha ; \quad b) Z = -\sin\alpha + i\cos\alpha ; \quad c) Z = 1 + itan\alpha ; \quad d) Z = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$$

5) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes ci-dessous :

$$a) Z = -3\sqrt{3} + 3i ; \quad b) Z = \frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4} ; \quad c) Z = 1 - \cos x - i\sin x ; \quad \text{pour } x \in [\pi; 2\pi]$$

$$d) Z = \frac{1 - \cos x + i\sin x}{1 + \cos x - i\sin x} ; \quad \text{pour } x \in [0; \pi[; \quad e) Z = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}} ; \quad f) Z = \cos \frac{\pi}{19} - i\sin \frac{\pi}{19}$$

6) Linéariser : $A = \cos 2x \times \sin 3x$ et $B = \sin 3x \times (\cos x)^3$

Exercice 5 : (Bac SBT 2008)

Soit les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} - i ; \quad z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_3 = -1 + i\sqrt{3}$$

1°/ Déterminer le module et un argument des complexes z_1 , z_2 et z_3 . En déduire que les points M_1 , M_2 et M_3 d'affixe respectifs z_1 , z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Faire la représentation graphique.

2°/ On pose $z_4 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$. Mettre z_4 sous la forme algébrique.

3°/ Déterminer les racines carrées de z_4 .

4°/ On pose $z_5 = -4z_1z_3$. Déterminer les racines quatrièmes de z_5 .
Faire la représentation graphique dans le plan.

5°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Ecrire chacune des solutions sous forme exponentielle.

Fiche de séquence 3 : Utilisation des nombres complexes

Activité 1 : Equations du second degré

Dans chacun des cas suivants mettre sous la forme canonique puis résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 + 4z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

Synthèse Partielle 1 :

Toute équation du second degré admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Activité 2 : Interprétation géométrique du langage complexe

Dans le plan complexe $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ On donne les points A , B et C d'affixes respectifs $z_1 = -1 + i$; $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = -1 - i$

- 1) Placer les points $A ; B$ et C puis déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$
- 2) Calculer les distances $AB ; AC$ et BC . Quelle est la nature du triangle ABC

Synthèse Partielle 2 :

Soient $z_A ; z_B ; z_C$ trois nombres complexes distincts d'images respectives $A ; B$; et C dans le plan complexe P .

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par la formule : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- La distance AB est calculée par la formule : $AB = |z_B - z_A|$
- $mes(\vec{e}_1 ; \overrightarrow{AB}) = Arg(z_B - z_A)$
- $mes(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

Activité 3 : Transformations du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ on considère les points $A ; B ; C$ d'affixes respectifs $z_A ; z_B$ et z_C tels que :

$$z_A = 1 - 2i ; z_B = 2 + 3i \text{ et } z_C = 5 - 4i$$

- 1) Déterminer les images respectives des points $A ; B$ et C par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2) Déterminer les images respectives des points $A ; B$ et C par la symétrie centrale de centre $I \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Synthèse Partielle 3 :

La translation ; la symétrie centrale , la rotation sont des transformations du plan dans lui-même.

Synthèse Générale :

Méthode de résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$:

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré : $az^2 + bz + c = 0$, on procède de la façon suivante :

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

On pourra distinguer 4 cas :

1^{er} cas : Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet 2 solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2^{em} cas : Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3^{iem} cas : Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

4^{iem} cas : Si Δ est de la forme $\Delta = x + iy$, alors on détermine une racine carrée δ de Δ . L'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Exemple :

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a)** $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; **b)** $-2Z^2 + Z + 1 = 0$; **c)** $Z^2 - 4Z + 4 = 0$;
d) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

Solution

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - 2i$$

$$\Rightarrow S = \{ 1 - 2i ; 1 + 2i \}$$

$$Z_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + 2i$$

b) $-2Z^2 + Z + 1 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(1) = 9 = (3)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(1) - \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1 - 3}{-4} = 1$$

$$\Rightarrow S = \{ -2 ; 1 \}$$

$$Z_2 = \frac{-(1) + \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1 + 3}{-4} = -\frac{1}{2}$$

c) $Z^2 - 4Z + 4 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow S = \{ 2 \}$$

$$d) 4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$$

$$\Delta = [-4(1+i)]^2 - 4(4)[- (45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i) \\ = 720 + 448i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 & (1) \\ xy = 224 & (2) \\ x^2 + y^2 = 848 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 1568 \Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = -28 \text{ ou } x = 28$$

$$(2) : xy = 224 \Rightarrow y = \frac{224}{x}$$

- Si $x = -28 \Rightarrow y = \frac{224}{-28} = -8$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -28 - 8i$

- Si $x' = 28 \Rightarrow y' = \frac{224}{28} = 8$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -28 - 8i$ et $\delta_2 = 28 + 8i$

$$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -3 - \frac{1}{2}i ; 4 + \frac{3}{2}i \right\}$$

Equation se ramenant au second degré :

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$, sachant quelle admet une racine imaginaire pure.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Solution 1

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$, sachant quelle admet une racine imaginaire pure.

Soit $Z_0 = ib$ cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6 + i)Z_0 + 3i - 1 = 0,$$

$$\Leftrightarrow (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6 + i)(ib) + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - 1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b - 1) = 0 & (1) \\ (-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

NB : On résout toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(1)** qui est la plus facile à résoudre : $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

Et par vérification dans **(2)**, on obtient :

$$-(1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 4 - 6 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ Vraie}$$

D'où $Z_0 = ib = i$ est la solution imaginaire

Factorisons : $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$ (En utilisant la méthode d'Hörner)

	1	$-4i$	$-6-i$	$3i-1$
i		i	3	$-3i+1$
	1	$-3i$	$-3-i$	0

↓

↓

↓

↓

$$Z_0 \quad a \quad b \quad c$$

$$\Rightarrow Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1 = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$\Leftrightarrow Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1 = (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i)$$

$$\text{D'où } Z^3 - 4i Z^2 - (6 + i) Z + 3i - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z - i = 0 \quad \text{ou} \quad Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = i$$

$$\text{Ou } Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0 \Rightarrow \Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-3 - i) = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$(2) : xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

- Si $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$

- Si $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z sont : $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow S = \{ i ; -1 + i ; 1 + 2i \}$$

Solution 2

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3 - (3 + 5i)Z_0^2 + (-4 + 9i)Z_0 + 6 - 4i = 0,$$

$$\Leftrightarrow (a)^3 - (3 + 5i)(a)^2 + (-4 + 9i)(a) + 6 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 5ia^2 - 4a + 9ai + 6 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) + i(-5a^2 + 9a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) = 0 & (1) \\ (-5a^2 + 9a - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

NB : On résout toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (2) : $-5a^2 + 9a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (9)^2 - 4(-5)(-4) = 1$

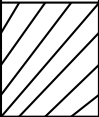
$$\Rightarrow a_1 = 1 \text{ et } a_2 = \frac{4}{5}$$

Et par vérification dans (1), on remarque que :

$a_1 = 1$ est la seule solution qui vérifie l'équation (1)

D'où $Z_0 = a = 1$ est la solution réelle

Factorisons : $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$ (En utilisant la méthode d'Horner)

	1	$-3 - 5i$	$-4 + 9i$	$6 - 4i$
1		1	$-2 - 5i$	$-6 + 4i$
	1	$-2 - 5i$	$-6 + 4i$	0
Z_0	a	b	c	

$$= > Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$< = > Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = (Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i]$$

$$\text{D'où } Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0 < = >$$

$$(Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$$

$$< = > Z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$$

$$= > Z = 1$$

$$\text{Ou } [Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0 = > \Delta = [-(2 + 5i)]^2 - 4(1)(-6 + 4i)$$

$$= > \Delta = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} < = > \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 = > x^2 = 4 = > x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$(2) : xy = 2 = > y = \frac{2}{x}$$

- Si $x = -2 = > y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy = > \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 = > y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' = > \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z sont : $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{4i}{2} = 2i$$

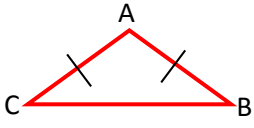
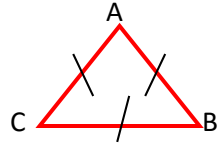
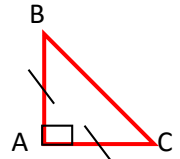
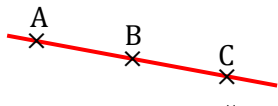
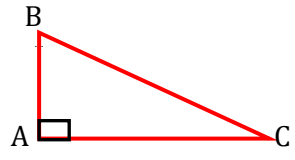
$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

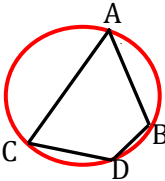
$$= > S = \{ \mathbf{1} ; \mathbf{2i} ; \mathbf{2 + 3i} \}$$

Interprétation de la nature d'un triangle :

Soit $A ; B$ et C trois points du plan d'affixes respectifs $z_A ; z_B$ et z_C .

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A 	$AB = AC$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \alpha$ $(\alpha \in [0 ; \pi])$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral 	$AB = AC = BC$ Et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	$AB = AC$ Et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Points A, B, C alignés 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 + K\pi$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$
Triangle ABC rectangle en A 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ ou $-ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$

Points A, B, C, D cocycliques 	$\text{mes } \hat{C} \equiv (\text{mes } D) [\pi]$ Ou $\text{mes } \hat{C} \neq 0 [\pi]$	$\left. \begin{array}{l} \frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} \\ \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^*$
--	--	--

Exemples

Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

- 1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).
- 2) Déterminer l'afixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

- 1) Etudier la nature des triangles ABC et BCD.
- 2) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

SOLUTIONS :

Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

$$Z_A = -1 - i \Rightarrow A(-1 ; -1)$$

$$Z_B = 2 + 3i \Rightarrow B(2 ; 3)$$

$$Z_C = -10 - 13i \Rightarrow C(-10 ; -13)$$

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

A ; B ; C sont alignés si $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (3)(-12) - (4)(-9) = -36 + 36 = 0$$

Puis que $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$; alors les points A ; B ; C sont alignés.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

$$Z_A = 3 + i \Rightarrow A(3 ; 1)$$

$$Z_B = 2i \Rightarrow B(0 ; 2)$$

$$Z_C = 2 - 2i \Rightarrow C(2 ; -2)$$

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

$$A ; B ; C \text{ est un triangle rectangle et isocèle en A si : } \begin{cases} \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\text{Or } \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2 - 2i) - (3 + i)}{(2i) - (3 + i)} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3)^2 + (1)^2} = \frac{10i}{10} = i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

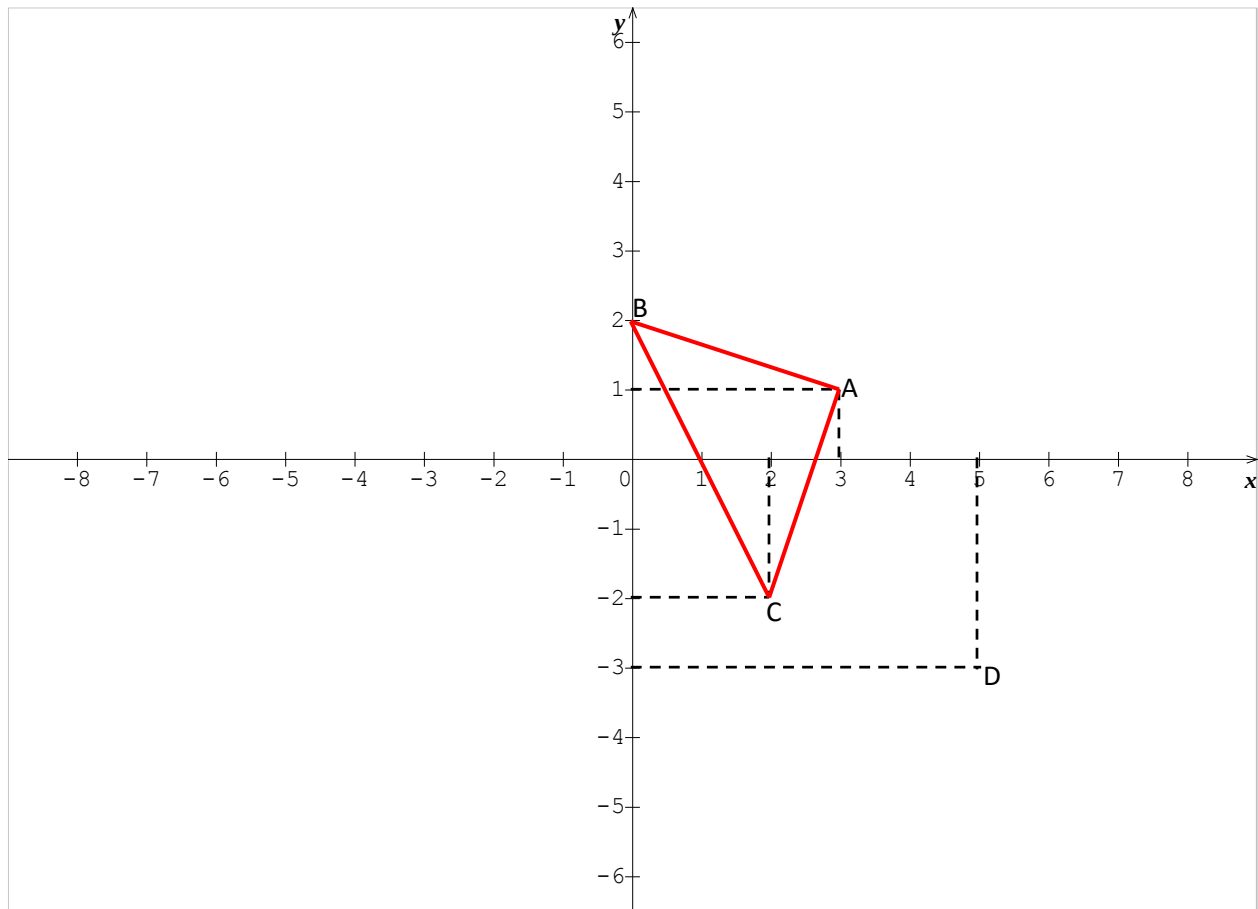
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

Conclusion :

$$\text{Puisque : } \begin{cases} \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$$

Alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

(Figure représentant cette situation)



2) Déterminons l'abscisse de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Avec $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x \\ -2 - y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - x \\ -2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -3 \\ -2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

D'où $D \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'abscisses respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

$$Z_A = -1 + i \Rightarrow A(-1 ; 1)$$

$$Z_B = -1 - i \Rightarrow B(-1 ; -1)$$

$$Z_C = 2i \Rightarrow C(0 ; 2)$$

$$Z_D = -2 - 2i \Rightarrow D(2 ; -2)$$

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

Pour le triangle ABC

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2i) - (-1 + i)}{(-1 - i) - (-1 + i)} = \frac{1 + i}{-2i} = \frac{(1 + i)(2i)}{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2 + 2i}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (-1 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

Alors le triangle ABC est quelconque.

Pour le triangle BCD

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{(2 - 2i) - (-1 - i)}{(2i) - (-1 - i)} = \frac{3 - i}{1 + 3i} = \frac{(3 - i)(1 - 3i)}{(1)^2 + (3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Soit $\Omega(x; y)$ les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

$$d(A; \Omega) = d(B; \Omega) = d(C; \Omega) = d(D; \Omega) = r$$

$$d(A; \Omega) = d(B; \Omega) \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow -2y = 2y \Rightarrow y = 0$$

$$d(C; \Omega) = d(D; \Omega) \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$$

En remplaçant $y = 0$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$$-4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{D'où } \Omega\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Or le rayon r est tel que $r = d(A; \Omega) = d(B; \Omega) = d(C; \Omega) = d(D; \Omega)$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

D'où les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$

Complexe et lieux géométriques :

Cercle de centre A et de rayon r :

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M . A d'affixe Z_A .

$$d(A, M) = r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$$

Exemple

Trouver l'ensemble (r) des points (M) du plan d'affixe Z tel que : $|Z - 1 + 4i| = 3$

Solution

$$Z - 1 + 4i = 0 \Rightarrow Z = 1 - 4i \Rightarrow A(1 ; -4)$$

Ici l'ensemble cherché est le cercle de centre A (1 ; -4) et de rayon r = 3.

Médiatrice d'un segment :

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B .

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

Exemple

Déterminer l'ensemble (r) des points M du plan tel que : $|Z - 2| = |Z + 2 + i|$

Solution

$$\text{Posons : } Z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad Z + 2 + i = 0$$

$$\Rightarrow Z = 2 \quad \text{et} \quad Z = -2 - i$$

$$\Rightarrow A(2 ; 0) \quad \text{et} \quad B(-2 ; -1)$$

Ici l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB] avec A (2, 0) et B(-2 ; - 1).

Evaluation :

Exercice1 :

Soit l'équation $(E_m) : z^2 - m(m + i)z + im^3 = 0$ avec m un paramètre complexe et z l'inconnue complexe. 1) On pose $m = 1 + i$; écrire et résoudre l'équation (E_{1+i}) ainsi obtenue.

2) On pose $m = 0$; écrire et résoudre l'équation (E_0) ainsi obtenue.

3) On pose $m = i$; écrire et résoudre l'équation (E_i) ainsi obtenue.

4) Résoudre l'équation (E_m) dans le cas général et montrer que les racines s'écrivent simplement en fonction de $m \in \mathbb{C} - \{0 ; i\}$

5) On pose $m = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $(r \in \mathbb{R}^*)$ et $\theta \in \mathbb{R}$; écrire sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E_m) en fonction de r et θ .

6) On pose $m = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$; écrire m sous forme trigonométrique et déterminer les racines de l'équation $(E_{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}})$ obtenue. On désigne par z la racine qui n'est pas imaginaire pure.

Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $t^3 = z$ et représenter géométriquement les images des solutions dans le plan complexe.