

Fiche de séquence

Classe : 10^{ème} commune

Durée :

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Compétences

- Résoudre une situation problème ;
- Mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques

Composantes, contenus : Nombres complexes

- Définition ;
- Conjugué d'un nombre complexe ;
- Module d'un nombre complexe ;
- Argument d'un nombre complexe non nul ;
- Linéarisation, racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe son module et son argument ;
- Equation du second degré
- Applications géométriques ;
- Nombres complexes et transformations

Manifestation :

- Mettre sous la forme algébrique la somme, le produit et le quotient de nombres complexes écrits sous la forme $a + ib$ (on entrainera les élèves à calculer dans $\mathbb{R}$ en utilisant de plus l'égalité $i^2 = -1$;
- Un nombre complexe étant donné sous sa forme algébrique :
 - ❖ Placer son point image dans le plan rapporté à un repère orthonormé ;
 - ❖ Calculer son module et son argument ;
 - ❖ L'écrire sous forme trigonométrique ;
- Ecrire un nombre complexe sous sa forme algébrique connaissant son module et son argument ;
- Traduire une situation géométrique par une relation dans $\mathbb{C}$ et inversement : par exemple $M \in C(0 ; 5) \Leftrightarrow |Z| = 5$ ou Z est l'affixe respective de M et M'
- Retrouver certaines formules trigonométriques en utilisant la propriété de Moivre ;
- Linéariser les puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$;
- Retrouver une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$ en utilisant les nombres complexes (a, b, c étant des constantes réelles) ;
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients complexes ;
- Trouver le module et un argument des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe et les représenter sur un cercle.

Ressources éducatives

Ressources matérielles : matériel didactique (règle, équerre, compas, rapporteur, tableau, craie, cahier de recherche)

Stratégie d'animation : Travail en groupe

Déroulement des activités

R.L.P :

Situation d'apprentissage (Méthode, pédagogie active)

Nombres complexes

I-Définition

Activité 1 :

1. Etude algébrique, Définition :

1.1. Notion de nombre complexe :

Activité 1 :

Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble donné :

- a) $x-1=0$ dans $\mathbb{N}$;
- b) $x+1=0$ dans $\mathbb{N}$;
- c) $x+1=0$ dans $\mathbb{Z}$;
- d) $2x-1=0$ dans $\mathbb{Z}$;
- e) $2x-1=0$ dans $\mathbb{Q}$;
- f) $x^2-3=0$ dans $\mathbb{Q}$;
- g) $x^2-3=0$ dans $\mathbb{R}$;
- h) $x^2+1=0$ dans $\mathbb{R}$;
- i) $x^2+x+1=0$ dans $\mathbb{R}$;
- j) $z^2-2z+5=0$ dans $\mathbb{R}$.

Nous remarquons que les équations **h)** ; **i)** et **j)** n'admettent pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Supposons qu'il existe un nombre i tel que $i^2=-1$ et résolvons les équations **h)** ; **i)** et **j)**.

1.1.1. Définition :

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme ou pouvant se ramener à la forme $a+ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2=-1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemples : $3+2i$; $-2-\sqrt{3}i$; $3i$; $\sqrt{2}$; 0 .

1.1.2. Forme algébrique d'un nombre complexe :

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+ib$.

L'écriture $a+ib$ est appelée forme algébrique de z .

Le réel a est appelé partie réelle de z et noté $\operatorname{Re}(z)$.

Le réel b est appelé partie imaginaire de z et noté $\operatorname{Im}(z)$.

NB :

- Si $b=0$, alors $z=a$; z est un nombre réel.
- Si $a=0$ et $b \neq 0$, alors $z=ib$; le nombre z est dit imaginaire pur.

Exemples :

- a) $z=-2+3i$, alors $\operatorname{Re}(z)=-2$ et $\operatorname{Im}(z)=3$.

b) $z = -\frac{1}{2}i$, alors $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}$; z est imaginaire pur.

c) $z = 5$, alors $\operatorname{Re}(z) = 5$ et $\operatorname{Im}(z) = 0$; z est réel.

1.1.3. Propriété :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où a, b, a' et b' sont des nombres réels. On a :

- $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(Z) = \Re(Z') \\ \operatorname{Im}(Z) = \Im(Z') \end{cases}$$

- $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

1.1.4. Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

- L'application qui à tout nombre complexe $a + ib$ associe le point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

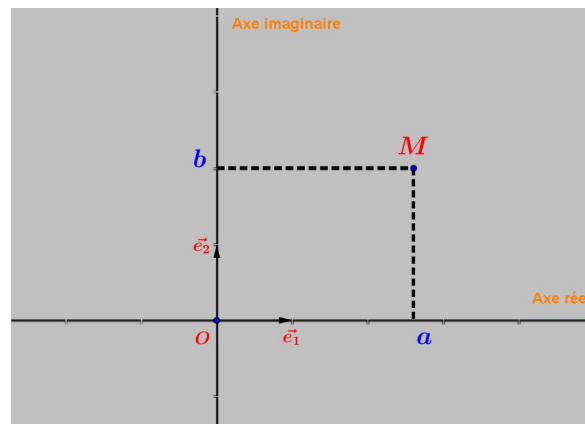
est une bijection de $\mathbb{C}$ vers le plan.

L'image du nombre complexe $a + ib$ est le point M de coordonnées $(a; b)$.

$a + ib$ est appelé affixe du point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Notation :

L'affixe du point M est notée z_M .



Activité 2 :

- a) Placer dans le plan complexe les images respectives A, B et C des nombres complexes : $z_A = -1 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_C = 2i$.

- b) Ecrire les affixes des points $D \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- L'application qui à tout nombre complexe $a+ib$ associe le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.

Le vecteur-image du nombre complexe $a+ib$ est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$a+ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Activité 3 :

- Ecrire les affixes des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = 3\vec{e}_1$.
- Dessiner un représentant du vecteur-image de chacun des nombres complexes suivants : $Z_{\vec{u}} = 2+3i$; $Z_{\vec{v}} = -2-3i$ et $Z_{\vec{w}} = 3i$.

1.2. Opérations dans $\mathbb{C}$:

1.2.1. Aspects algébriques :

a) Addition :

Soit $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$; on a : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

b) Multiplication : $Z * Z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

c) Division : $\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a')^2 + (b')^2}$ avec $(a'; b') \neq (0; 0)$

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien ; $(\mathbb{C}^*, *)$ est un groupe commutatif.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$, d'où $(\mathbb{C}, +, *)$ est un corps.

Activité 4 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- $(1+3i) - (2-5i)$
- $(1-2i)(2+i)$
- $i(2-3i)^2$
- $i^5 + i^4 + i^3 + i^2 + i + 1$
- $i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202}$
- $\sum_{k=0}^{2000} i^k$
- $\sum_{k=0}^{2014} (-i)^k$

- L'opposé de tout nombre complexe $a+ib$ est le nombre complexe $-a-ib$.

- L'inverse de tout nombre complexe non nul $a+ib$ est le nombre complexe

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Activité 5 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\frac{3-2i}{1+i}$

b) $\frac{i}{-3+4i}$

c) $\frac{3+4i}{i}$

1.2.2. Interprétations géométriques :

Soit k un nombre réel ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$; A , B et C trois points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

- L'affixe du vecteur somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces deux vecteurs :

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}.$$

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la différence $z_B - z_A$.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

- L'affixe du vecteur $k\vec{u}$ est le nombre complexe $k z_{\vec{u}}$.

$$z_{k\vec{u}} = k z_{\vec{u}}$$

- L'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est : $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

- L'affixe du centre de gravité G du triangle ABC est :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

- Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, n$ points et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, n$ nombres réels dont la somme est non nulle ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

L'affixe du barycentre G de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.$$

Activité 6 :

Placer dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives $3+i$, $-2-i$ et $-1+4i$.

- Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- Calculer l'affixe du milieu M du segment $[AB]$.
- Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC .
- Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.3. Conjugué et module d'un nombre complexe :

1.3.1. Conjugué d'un nombre complexe :

- Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

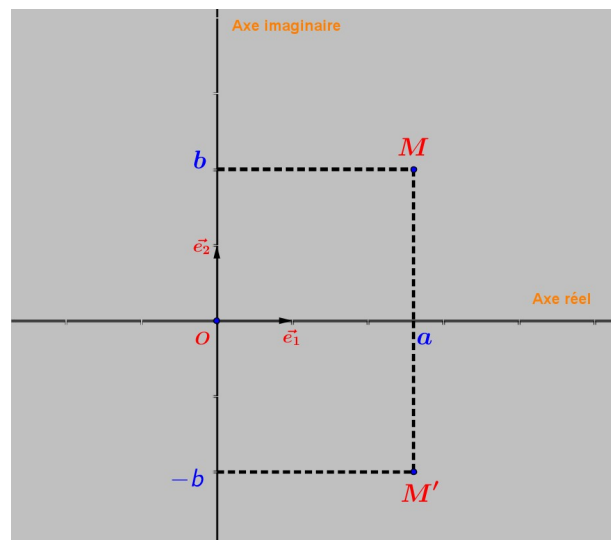
On appelle conjugué de z le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que : $\bar{z} = a - ib$.

- Exemples :

- $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$
- $\overline{-1 + i} = -1 - i$
- $\overline{3i - \sqrt{3}} = -3i - \sqrt{3}$
- $\overline{-i} = i$
- $\overline{-5} = -5$

- Interprétation géométrique :

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



- Propriétés 1 :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$. On a :

$$P1) \hat{z} = z$$

$$\text{En effet } \hat{z} = a + i\hat{b} = \overline{a - ib} = a + ib = z$$

$$P2) z \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } z \bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 - i^2 b^2 \\ z \bar{z} &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$P3) z + \bar{z} = 2\Re(z)$$

$$\text{En effet } z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\Re(z)$$

$$P4) z - \bar{z} = 2i\Im(z)$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } z - \bar{z} &= a + ib - (a - ib) \\ &= a + ib - a + ib \\ &= 2ib \\ &= 2i\Im(z) \end{aligned}$$

$$P5) z \text{ est réel si et seulement si } \bar{z} = z.$$

$$z \text{ est réel} \Leftrightarrow z = a \text{ d'où } \bar{z} = \bar{a} = a = z.$$

$$P6) z \text{ est imaginaire pur si et seulement si } \bar{z} = -z.$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow z = ib \text{ et } b \neq 0 \text{ d'où } \bar{z} = \overline{ib} = -ib = -z.$$

- Propriétés 2 :

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

$$P1) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$P2) \overline{-z} = -\bar{z}$$

$$P3) \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$$

$$P4) \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0)$$

$$P5) \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z \neq 0)$$

$$P6) \overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad (z \neq 0)$$

Démonstrations :

Posons : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned} P1) \overline{z + z'} &= \overline{a + ib + a' + ib'} \\ &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\ &= a + a' - i(b + b') \\ &= a - ib + a' - ib' \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \end{aligned}$$

$$\text{P2) } \overline{-z} = -\overline{z} = -\overline{a+ib} = -\overline{a+ib} = -\overline{a+ib} = -\overline{z}$$

$$\text{P3) On a : } \overline{z z'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} =$$

$$= \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = aa' - iab'$$

$$\overline{z z'} = \overline{z} \overline{z'}$$

$$\text{P4) Si } z \neq 0, \text{ on a : } z \times \frac{1}{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow z \times \frac{1}{z} = \overline{1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z} \left(\frac{1}{z} \right) = 1 \text{ d'après P3)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\text{P5) } \overline{\left(\frac{z}{z'} \right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \left(\frac{1}{z'} \right) = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

P6).

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n$ avec $z \neq 0$.

On a $z \neq 0$, donc $\overline{z^0} = 1$ et $(\overline{z})^0 = 1$; $\overline{z^0} = (\overline{z})^0$.

L'égalité est vraie à l'ordre 0.

Supposons l'égalité vraie à l'ordre n et montrons qu'elle l'est à l'ordre $n+1$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$.

Elle est vraie à l'ordre $n+1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

- Pour $n < 0$, on a $\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}} \right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{(\overline{z})^{-n}} = (\overline{z})^n$.

Activité 7 :

A. Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $(4 - i\sqrt{3})(1 + i)$

b) $\frac{(2 - 3i)(1 + i)}{(2 - i)^2}$

B. Soit $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$.

Démontrer, sans calcul, que $z_1 + z_2$ est un nombre réel et $z_1 - z_2$ un nombre imaginaire pur.

1.3.2. Module d'un nombre complexe :

- Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Exemples :

a) $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

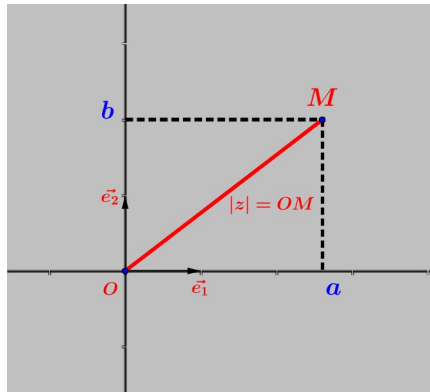
b) $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

c) $|-2i| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

- Interprétation géométrique :

(1) Si $z = a + ib$ est l'afixe d'un point M , on a : $|z| = OM$.



(2) Si z est l'afixe d'un vecteur $\vec{u}$, on a : $|z| = \|\vec{u}\|$.

(3) Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B ,

on a : $AB = |z_B - z_A|$.

- Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

(1) $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

(2) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

(3) $|zz'| = |z||z'|$.

(4) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ avec $z \neq 0$.

(5) $|z^n| = |z|^n$ avec $z \neq 0$.

(6) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z \neq 0$.

(7) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire).

Remarque :

Pour tout nombre complexe z ,

- $z \bar{z} = |z|^2$.
- Si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Activité 8 :

Calculer le module des nombres complexes suivants :

a) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-3 + 4i)$

b) $\frac{3(2+i)}{(-1+i)^2}$

2. Étude trigonométrique :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

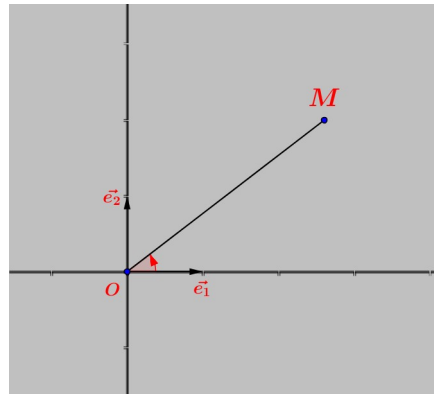
2.1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

2.1.1. Arguments d'un nombre complexe non nul :

• Définition :

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.



• Notation :

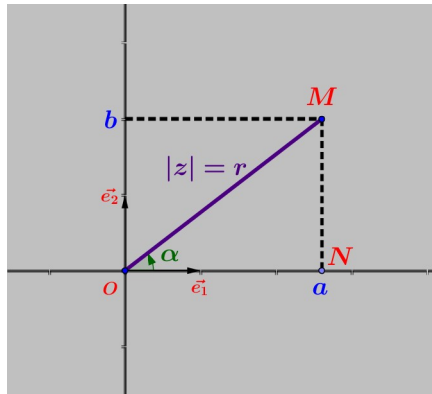
Si α et α' sont deux arguments de z , on a : $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On note : $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$.

2.1.2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M son image.

Désignons par r le module de z et α un argument de z .



Dans le triangle OMN , on a : $\cos \alpha = \frac{ON}{OM}$ et $\sin \alpha = \frac{MN}{OM}$.

Or $OM = |z| = r$; $ON = a$ et $MN = b$.

Donc $\cos \alpha = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r \cos \alpha$ et $\sin \alpha = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r \sin \alpha$.

On en déduit que $z = a + ib$

$$= r \cos \alpha + i r \sin \alpha$$

$$z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

L'écriture $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est appelée forme trigonométrique de z .

Activité 9 :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

- a) $\sqrt{3} + 3i$
- b) $1 - i$
- c) $2\sqrt{3} - 2i$
- d) $-2 - 2i$
- e) $-3i$
- f) $2i$
- g) 2
- h) -5
- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :
Pour écrire $z = a + ib$ sous forme trigonométrique :

(1) On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) On détermine un argument α de z par la relation $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z|} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow$

$\alpha = ?$.

La forme trigonométrique de z est :

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

- Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

Pour écrire $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ sous forme algébrique, il suffit tout simplement de développer et calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

2.1.3. Arguments d'un produit et d'un quotient :

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

$$(1) \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$$

$$(2) \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$$

$$(3) \arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi$$

$$(4) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$$

Remarques :

Soit A , B et C trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C . On a :

$$\bullet \arg(z_B - z_A) = \text{Mes}(\widehat{\vec{e}_1, \vec{AB}}) + 2k\pi$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \text{Mes}(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) + 2k\pi$$

Activité 10 :

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

a) $(-1 + i\sqrt{3})(1 + i)$

b) $\frac{1}{-1 + i\sqrt{3}}$

c) $(1 + i)^3$

d) $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

e) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^2$

Activité 11 :

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

- Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
- Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $z_1 z_2$.

c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Activité 12 :

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\cos \theta + i \sin \theta$

b) $\cos \theta - i \sin \theta$

c) $-\cos \theta + i \sin \theta$

d) $-\cos \theta - i \sin \theta$

e) $-\sin \theta + i \cos \theta$

f) $1 + i \tan \theta$

g) $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$

2.1.4. Formule de Moivre :

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif n , on a :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Démonstration :

Soit $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

On a ; $|z| = 1$ et $\arg(z) = \alpha$.

Donc $|z^n| = 1$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z) = n\alpha$.

D'où $z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Conclusion : $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Activité 13 :

Ecrire sous forme algébrique $(1+i)^{2011}$.

2.2. Notation exponentielle d'un nombre complexe :

2.2.1. Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α .

On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = r e^{i\alpha}$.

Exemples :

a) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

c) $3 = 3e^{0i}$

d) $-1 = e^{i\pi}$

$$e) \quad 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$f) \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

2.2.2. Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = r e^{i\alpha}$ et $z' = r' e^{i\alpha'}$, n un entier relatif. On a :

$$(1) \quad z z' = r r' e^{i(\alpha + \alpha')}$$

$$(2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\alpha}$$

$$(3) \quad z^n = r^n e^{in\alpha}$$

$$(4) \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\alpha - \alpha')}$$

Remarque :

Si $z = r e^{i\alpha}$, alors $\bar{z} = r e^{-i\alpha}$.

Activité 14 :

a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = 1 - i\sqrt{3}$ et $z' = -1 - i$.

b) En déduire le module et un argument des nombres complexes

$$(\bar{z} z')^2 \text{ et } \frac{z^2}{z'}$$

2.2.3. Formules d'Euler :

Soit α un nombre réel. On a :

$$\begin{cases} \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} & (1) \\ \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Leftrightarrow 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Linéarisation:

1) Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

Pour $n = 2$ d'après la formule de Moivre $(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$

D'après la formule du binôme de Newton

$$(\cos x + i \sin x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(\sin x \cos x)$$

Par identification on a : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Même procédé pour $n = 3 ; 4 ; 5 \dots$

2) Linéarisation :

$$Z = \cos x + i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$Z + \bar{Z} = 2 \cos x$$

$$Z - \bar{Z} = 2i \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$$

$$\sin x = \left(\frac{1}{2i}\right)(Z - \bar{Z})$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n (Z + \bar{Z})^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (e^{ix} + e^{-ix})^n$$

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (Z - \bar{Z})^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (e^{ix} - e^{-ix})^n$$

De $Z^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ et $\bar{Z}^n = \cos(nx) - i \sin(nx)$ on déduit que

$$Z^n + \bar{Z}^n = e^{inx} + e^{-inx} = 2 \cos(nx) \quad ; \quad Z^n - \bar{Z}^n = e^{inx} - e^{-inx} = 2i \sin(nx)$$

Remarque : $z^* \bar{z} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $Z^n \bar{Z}^n = 1$.

Exemple : Linéariser $\cos^3 x$; et $\sin^4 x$.

2.3. Racines nièmes d'un nombre complexe :

2.3.1. Définition :

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On appelle racine nième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

2.3.2. Propriétés :

Soit $Z = r e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

(1) Z admet n racines nièmes telles que : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec

$$k \in \{0; 1; \dots; n-1\}.$$

En effet, soit $z = \rho e^{i\theta}$ une racine nième de Z .

$$\text{On a : } z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}.$$

(2) Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

(3) La somme des n racines nièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.

Activité 15 :

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$.

b) Ecrire chacune des solutions sous forme algébrique et vérifier que leur somme est nulle.

c) Calculer les racines cubiques de 1.

3. Utilisations des nombres complexes :

3.1. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$:

3.1.1. Racines carrées d'un nombre complexe :

Soit $z = a + ib$ une racine carrée de $Z = x + iy$.

$$\text{Donc } z^2 = Z \Rightarrow |z^2| = |Z| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = |Z| \quad (*)$$

$$\text{et } z^2 = Z \Leftrightarrow (a + ib)^2 = x + iy \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = x + iy \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \Re(Z) \quad (**) \text{ et}$$

$$2ab = \Im(Z) \quad (***)$$

$$(*) ; (**) \text{ et } (***) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = |Z| \\ a^2 - b^2 = \Re(Z) \\ 2ab = \Im(Z) \end{cases}$$

Activité 16 :

Calculer les racines carrées de $3 - 4i$.

Cas où les coefficients sont des nombres complexes :

Si le discriminant Δ est un nombre complexe de racines carrées δ_1 et δ_2 alors les solutions de l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ ($a \neq 0$) sont :

$$Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$$

Exemple ; résoudre

dans $\mathbb{C}$: $(2i)Z^2 - 3Z - (1 + 3i) = 0$

$\Delta = -15 + 8i$. Cherchons les racines carrées de Δ .

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\delta|$. On a $|\Delta| = 17$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 & (1) \\ x^2 - y^2 = -15 & (2) \\ 2xy = 8 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \quad a^2 = 1 ; a = 1 \text{ ou } a = -1$$

Si $a = 1$ alors (3) donne $b = 4$; donc $\delta_1 = 1 + 4i$

Si $a = -1$ alors (3) $b = -4$; donc $\delta_2 = -1 - 4i$

$$Z_1 = \frac{3 + 1 + 4i}{4i} = \frac{4 + 4i}{4i} = \frac{1 + i}{i} = \frac{-1 + i}{-1} = 1 - i ; \quad Z_1 = 1 - i$$

$$Z_2 = \frac{3 - 1 - 4i}{4i} = \frac{2 - 4i}{4i} = -1 - \frac{1}{2}i ; \quad Z_2 = -1 - \frac{1}{2}i$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{ 1-i ; -1-\frac{1}{2}i \right\}$

4-Applications géométriques

1) Interprétation géométrique du langage complexe :

Soient $Z_A ; Z_B ; Z$ trois nombres complexes distincts d'images respectives A ; B ; et M dans le plan complexe P .

$$Z = \frac{Z - Z_B}{Z - Z_A} \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| = \frac{MB}{MA} \\ \text{Arg}(Z) = (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) \end{array} \right.$$

D'autre part

$$\arg(Z_B - Z_A) = (i ; \overrightarrow{AB}) + 2k\pi . \quad -\arg(Z_B - Z_A) = (\overrightarrow{AB} ; i) + 2k\pi .$$

En particulier :

$$Z_A \mapsto A$$

$$Z_B \mapsto B \quad \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|ZC - ZA|}{|ZB - ZA|} = \frac{AC}{AB} \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{ZC - ZA}{ZB - ZA}\right) \end{array} \right.$$

$$Z_C \mapsto C$$

2) Traductions complexes de certaines configurations usuelles :

a) Vecteurs orthogonaux- vecteurs colinéaires :

Soit les complexes $Z_A ; Z_B$ et Z_C d'images respectives A ; B ; C.

$$- \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux } (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\frac{ZC - ZA}{ZB - ZA} \text{ est imaginaire pur.}$$

$$- \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires } (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi] \text{ ou } \pi[2\pi]$$

$$\frac{ZC - ZA}{ZB - ZA} \text{ est un réel.}$$

b) Exemple :

Soit les complexes $-1 - i ; 1 + i ; -1 + i$ d'images respectives les points A ; B ; C.

Déterminer le module et l'argument de $Z = \frac{ZC - ZA}{ZB - ZA}$ En déduire la nature du triangle ABC.

Solution

$$ZA = -1 - i \mapsto A(-1; -1); ZB = 1 + i \mapsto B(1; 1); ZC = -1 + i \mapsto C(-1; 1)$$

$$|Z| = \frac{|ZC - ZA|}{|ZB - ZA|} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{Arg}(Z) = \text{Arg}\left(\frac{ZC - ZA}{ZB - ZA}\right) = \text{Arg}\left(\frac{2i}{2+2i}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}i\right) = \theta$$

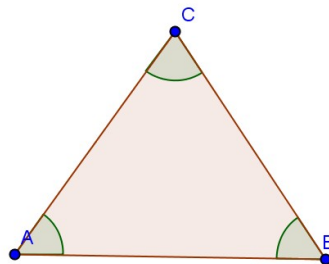
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{d'où} \quad \text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{4} \quad . \quad Z \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4} \right].$$

Nature du triangle ABC

$$\arg\left(\frac{ZC - ZA}{ZB - ZA}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4} [2\pi]. \quad \text{De façon analogue on a:}$$

$$\arg\left(\frac{ZB - ZC}{ZA - ZC}\right) = \arg\left(\frac{2}{-2i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\arg\left(\frac{ZA - ZB}{ZC - ZB}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{4} [2\pi]. \quad \text{D'où ABC est un triangle rectangle et isocèle.}$$



IX- Nombres complexes et transformations :

1-Translations

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs Z et Z'. Le vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

La transformation : $Z' = Z + a$, avec $a \in \mathbb{C}$, définit M' comme l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

Exemple : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $Z\vec{u} = 2 + i$.

Déterminer l'écriture complexe de la transformation t.

Soit M' le point d'affixe Z', image de M d'affixe Z par la translation t.

$$t_{\vec{u}}(M)=M'$$

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$

$$Z'-Z=Z_{\vec{u}}\Leftrightarrow Z'-Z=2$$

$$+i\Leftrightarrow Z'=Z+(2+i).$$