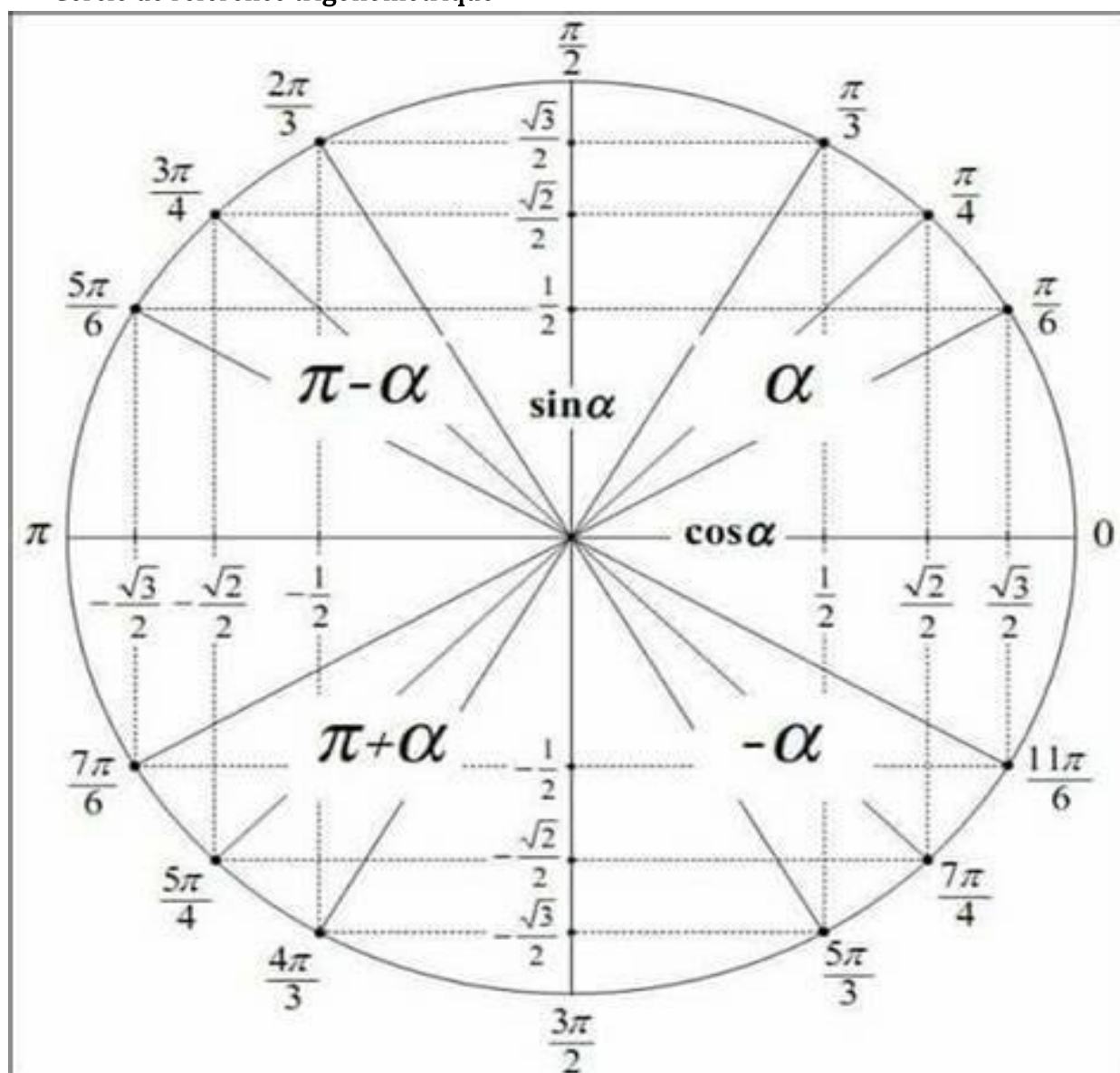


Formules usuelles de la trigonométrie

❖ Rapport trigonométrique des angles remarquables

α (en rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0
$\cotan \alpha$	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		X

❖ Cercle de référence trigonométrique



❖ **Relation entre cosinus, sinus, tangente et cotangente :**

Pour tout réel x , on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 ; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x ; \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ et } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} ;$$

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ et } 1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ pour } x \neq k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

❖ **Formules d'addition :**

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

❖ **Formules de duplication**

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a ; \cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 ; \cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos(a) = \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) ; \cos(a) = 2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1 ; \cos(a) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a ; \sin(a) = 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} ; \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \text{ et } \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

❖ **Transformation de produit en somme**

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

❖ **Transformation de somme en produit**

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

Angles associés

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cotan \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$		
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$		

❖ Résolution d'équations trigonométriques

➤ Equations du type $\cos \alpha = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle β qui vérifie cette relation.

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $S = \emptyset$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors il existe β tel que si $\cos \beta = a$

$$\text{Ainsi } \cos \alpha = a \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

➤ Equations du type $\sin \alpha = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle β qui vérifie cette relation.

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $S = \emptyset$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors il existe β tel que si $\sin \beta = a$

$$\text{Ainsi } \sin \alpha = a \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

➤ Equations du type $\tan \alpha = a$ ($a \in \mathbb{R}$):

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle β qui vérifie cette relation.

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $S = \emptyset$.
- Si $a \in [-1; 1]$ Si $a \in [-1; 1]$ alors il existe β tel que si $\tan \beta = a$
 $\tan \alpha = a \Leftrightarrow \tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$

➤ Equations du type $a \cos x + b \sin y + c = 0$

Résoudre de telles équations revient à mettre en évidence trois cas de résolution :

- **Premier cas** : si $a = 0$ et $b = 0$ alors on a : $\begin{cases} S = \mathbb{R} \text{ si } c = 0 \\ S = \emptyset \text{ si } c \neq 0 \end{cases}$
- **Deuxième cas** : si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation devient :
 $b \sin x = -c \Leftrightarrow \sin x = \frac{-c}{b}$
 - Si $\left|\frac{-c}{b}\right| > 1$ alors $S = \emptyset$.
 - Si $\left|\frac{-c}{b}\right| \leq 1$ alors l'équation se ramène sous la forme : $\sin \alpha = a$.
- **Troisième cas** : si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors on calcule :

- Le module r tel que : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- L'angle θ tel que :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \text{et} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

L'équation $\cos(x - \theta) = \frac{-c}{r}$ dévient que l'on sait résoudre

NB : Si $a^2 + b^2 < C^2$ alors $S = \emptyset$.