

Nombres complexes

1- Objectifs :

Ce thème vise à :

Définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul ;

- Utiliser les caractérisations complexes pour interpréter des configurations élémentaires du plan ;
- Utiliser les nombres complexes pour Résoudre des problèmes.

Commentaires

La notion de nombres complexes est nouvelle pour les élèves. La construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas au programme ; on pourra en faire une présentation historique. Ce nouvel ensemble qui prolonge $\mathbb{R}$ offre un domaine riche d'activités numériques.

On fera ressortir l'intérêt des relations entre propriétés des complexes et celles des configurations géométriques ainsi que celui de l'utilisation de l'outil " nombres complexes" dans la résolution de problèmes géométriques.

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexes, mais d'utiliser ces écritures pour la résolution de problèmes.

2- Savoir et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Forme algébrique d'un nombre complexe. • Partie réelle (Re), partie imaginaire (Im). • Conjugué d'un nombre complexe, propriétés. • Somme, produit, quotient de deux nombres complexes. • Formule du binôme • Egalité de deux nombres complexes. • Module et argument d'un nombre complexe. • Module et argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe • Forme trigonométrique. • Affiche d'un point, d'un vecteur • Point image et vecteur image d'un nombre complexe. • Forme exponentielle ($z = re^{i\theta}$).	• Détermine la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe. • Calcule la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. • Développer $(a + b)^n$ • Détermine le conjugué d'un nombre complexe • Détermine le module et un argument d'un nombre complexe non nul donnés sous forme algébrique. • Représenter graphiquement un nombre complexe donné sous forme algébrique. • Calcule le produit et le quotient de deux nombres complexes écrits sous formes trigonométrique. • Passer à la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement.

Remarques et suggestions

Un imaginaire pur est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle. (0 est à la fois réel et imaginaire pur).

On s'interdira d'utiliser le symbole $\sqrt{\quad}$ avec un nombre complexe non réel positif.

L'acquisition des propriétés des nombres complexes pourra être vérifiée par des exercices de "méthodes" dépourvus de lourdeur de calculs.

L'écriture exponentielle sera le plus tôt possible afin d'alléger les expressions dans les calculs.

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
Formule de Moivre, formule d'Euler	Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour - reTrouve des formules trigonométriques ; - linéariser des puissances de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide des nombres complexes

Remarques et suggestions

La linéarisation des fonctions trigonométriques sera réinvestie dans le calcul intégral.

Pour la linéarisation des puissances de cosinus et sinus, on se limitera à des exposants peu élevés. Les formules trigonométriques obtenues ne sont pas à apprendre par cœur.

EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
- Racines carrées d'un nombre complexe non nul. - Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ - Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul. - Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ; interprétation graphique	- Détermine les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. - Résous une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ ou une équation s'y ramenant. - Détermine sous forme trigonométrique les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe et les représenter graphiquement

Remarques et suggestions

La propriété suivante :

" Pour deux complexes z et z' , $[z = z'] \Leftrightarrow |z| = |z'|$, $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z') \geq 0$ est un outil intéressant pour le calcul des racines carrés d'un nombre complexes.

On pourra intéresser les élèves à Trouve les n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe connaissant une racine et les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}})$. Caractérisations complètes : - D'un cercle ; - D'une droite.	• Détermine que des points sont cocycliques. • Démontre que des points sont alignés. Utiliser les caractérisations complexes pour : - Justifier une priorité géométrique ; - Détermine des lieux géométriques

Remarques et suggestions

A titre d'exercice, on pourra faire Démontre aux élèves que :

A, B, C, D étant quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c, d ,

A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right) + k\pi$ avec k entier relatif.

I- Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et ces sous -ensembles

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{\dots - 2; 0; 1; 2; \dots\}$.

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que : $\mathbb{Z}^+ = \{0; +1; \dots\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que : $\mathbb{Z}^- = \{\dots - 2; -1 \dots 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots - 2; -1; 1; 2; \dots\}$$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; \dots\}$$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots - 2; -1\}$$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q} \text{ avec } P \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est noté : $\mathbb{R}$ tel que : $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

RETENONS : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Activités :**Activité 1:**

Consigne : Résous dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x + 7 = 6$. Conclus.

Activité 2:

Consigne : Résous dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $3x = 1$. Conclus.

Activité 3:

Consigne : Résous dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2 = 0$. Conclus.

Activité 4:

Consigne : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Conclus.

Remarque : quant une équation n'a pas de solutions dans un ensemble, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand que le précédent. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$.

Ainsi un nouvel ensemble pris naissance au XVI^{ème} siècle par **JEROME CARDAN (Mathématicien Italien)** afin de Trouve des solutions pour l'équation : $x^2 + a = 0$

(avec $a \in \mathbb{R}_+$) ou des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera : **Ensemble des nombres complexes ou ensemble des corps complexes et sera noté $\mathbb{C}$.**

Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté **i** (**i** comme imaginaire).

Le nombre **i** est tel que **$i^2 = -1$** . L'équation $x^2 + 1 = 0$ possède alors deux solutions telles que $x^2 - i^2 = 0$ soit $(x - i)(x + i) = 0$ donc $x = i$ ou $x = -i$.

II- Définition ; vocabulaire et interprétation graphique**1) Définition :**

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels **a et b** tel que : **$Z = a + ib$** où **i est un imaginaire** tel que **$i^2 = -1$** .

2) Notation et vocabulaire :

Soit Z un nombre complexe tel que **$Z = a + ib$** .

- l'écriture **$Z = a + ib$** est appelée forme algébrique de **Z** .
- le nombre réel **a** est appelé partie réelle de **Z** et est noté **$\text{Re}(Z)$**
- le nombre réel **b** est appelé partie imaginaire de **Z** et est noté **$\text{Im}(Z)$**

NB :

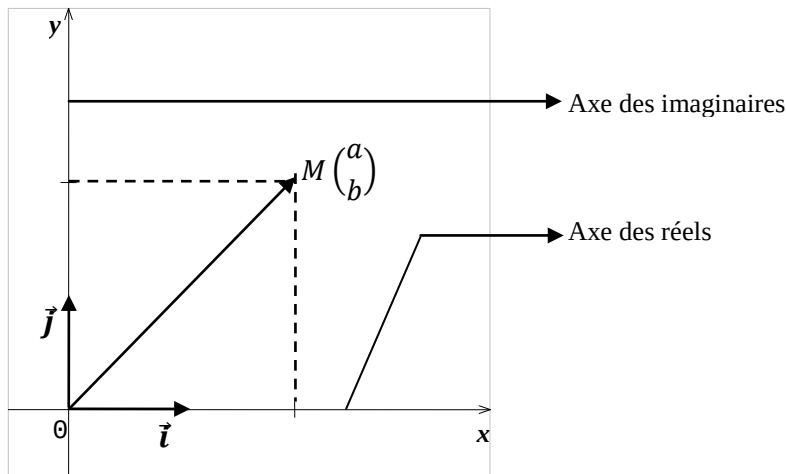
- Si $b = 0$; alors $Z = a$ (**Z est un nombre à la fois réel et complexe**) car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Si $a = 0$; alors $Z = ib$ (**Z est un imaginaire pur**).
- Si $a = 0$ et $b = 0$; alors $Z = 0$ (**Z est appelé complexe nul**).

3) Interprétation graphique :

A tout point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan P, on peut associer un nombre complexe $Z = a + ib$.

- M est le point image et Z l'afixe du point M .
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe $Z = a + ib$ l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Ainsi on a la représentation graphique du point M comme suit :

**III- Operations dans $\mathbb{C}$:**

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

1) Egalité :

Deux nombres complexes Z et Z' sont égaux si et seulement si $Z = Z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

2) Somme:

La somme des deux complexes Z et Z' est tel que : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

3) Produit :

Le Produit des deux complexes Z et Z' est tel que :

$$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \text{ avec } i^2 = -1$$

4) Quotient :

Le quotient de deux complexes Z et Z' est tel que :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

N.B : Le nombre $\frac{1}{Z}$ est appelé inverse du complexe Z tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

IV- Conjugué d'un nombre complexe :**1) Définition :**

Soit $Z = a + ib$ l'expression algébrique d'un nombre complexe.

On appelle conjugué de Z , le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z} = a - ib$.

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes :

$$P_1 : Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z \text{ est un réel}$$

$$P_5 : \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}} \text{ (avec } Z' \neq 0)$$

$$P_2 : Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow Z \text{ est un imaginaire pur}$$

$$P_6 : \overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}} \text{ (avec } Z' \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{R})$$

$$P_3 : \overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$$

$$P_7 : \overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$$

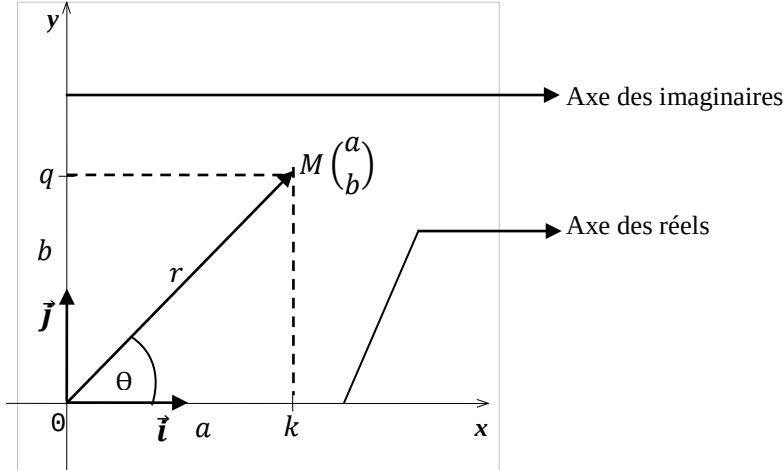
$$P_4 : \overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'}$$

$$P_8 : R_e(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \text{ et } I_m(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$$

V- Module et argument d'un nombre complexe :

1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$; plaçons le point M de Z dont l'affixe est $Z = a + ib \Rightarrow M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



D'après la figure ci-dessus, on a : $\overline{Ok} = a$; $\overline{Oq} = b$ et $\overline{OM} = r$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OkM , on a :

$$OM^2 = OM^2 + OM^2 \Leftrightarrow r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ou } |\overrightarrow{OM}| = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a- Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de Z , le nombre réel positif ou nul noté : $|Z|$ ou r tel que $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si M est le point image de Z alors $|Z| = d(O ; M) = \sqrt{a^2 + b^2}$

b- Propriétés :

$P_1 : |Z|$ est toujours positif ; $P_5 : |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ (Inégalité triangulaire)

$P_2 : |Z| = |\bar{Z}|$; $P_6 : \left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ (avec $Z' \neq 0$) ;

$P_3 : |Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$; $P_7 : \left| \frac{a}{Z} \right| = \frac{a}{|Z|}$ (avec $Z \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$) ;

$P_4 : |Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$; $P_8 : |Z^n| = |Z|^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

2) Argument :

a- Définition :

En observant la figure ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle θ , on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Soit Z est un nombre complexe de module $|Z|$ (avec $|Z| \neq 0$). On appelle argument de Z , le

nombre réel noté θ ou $\arg(Z)$ tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes d'arguments respectifs $\arg(Z)$ et $\arg(Z')$

$$P_1 : \arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z') \quad ; \quad P_4 : \arg\left(\frac{a}{Z}\right) = -\arg(Z) \text{ (avec } Z \neq 0)$$

$$P_2 : \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') \quad ; \quad P_5 : \arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$$

$$P_3 : \arg(Z^n) = n\arg(Z) \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*)$$

VI- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$$\theta \in [-\pi ; \pi[\text{ tel que : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ et $Z' = r' (\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$P_1 : Z \times Z' = r \times r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

$$P_3 : Z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

NB : si $r = 1$, on a : $Z^n = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ (**formule de Moivre**)

VII- Forme polaire d'un nombre complexe

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme polaire de Z toute écriture de Z de la forme $Z = [r ; \theta]$

2) Propriétés :

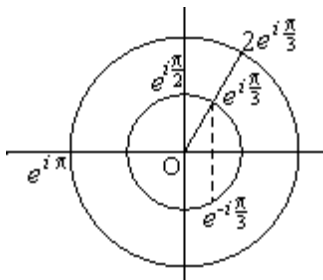
Soient Z et Z' deux complexes tels que $Z = [r ; \theta]$ et $Z' = [r' ; \theta']$

$$P_1 : Z \times Z' = [r \times r' ; \theta + \theta'] ; P_2 : \frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'} ; \theta - \theta' \right] ; P_3 : Z^n = [r^n ; n\theta]$$

VIII- Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z , toute écriture de Z se ramenant sous la forme $Z = r e^{i\theta}$ où son conjugué est $\bar{Z} = r e^{-i\theta}$



2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$Z = r e^{i\theta}$ et $Z' = r' e^{i\theta'}$. On a les propriétés suivantes :

$$P_1 : Z \cdot Z' = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')} ; P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')} ; P_3 : Z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$P_4 : Z \cdot \bar{Z} = r^2 e^{i(\theta - \theta)} = r^2 e^{i(0)} = r^2 \cdot 1 = r^2 \text{ (Avec } e^0 = 1)$$

$$P_5 : \text{Formule d'Euler} \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta) \\ e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin(n\theta) \end{cases}$$

IX- Formules de Moivre et formules d'Euler:

1) Formules de Moivre

a- Définition :

Soit Z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ . On appelle formule de **Moivre** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $Z^n = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ avec ($n \in \mathbb{N}^*$)

b- Application de la formule de Moivre :

Soit Z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que :

$$Z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad \bar{Z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

- Recherche de : $Z + \bar{Z}$ et $\cos\theta$

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \text{et} \\ \bar{Z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

$$\hline Z + \bar{Z} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{Z + \bar{Z}}{2}$$

- Recherche de : $Z - \bar{Z}$ et $\sin\theta$

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \text{et} \\ \bar{Z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

$$\hline Z - \bar{Z} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$$

- Recherche de : $Z \times \bar{Z}$

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \text{et} \\ \bar{Z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

$$\hline Z \times \bar{Z} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

De façons générales on a :

$$Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos(n\theta) \quad ; \quad Z^n - \bar{Z}^n = 2i\sin(n\theta) \quad \text{et} \quad Z^n \times \bar{Z}^n = 1$$

2) Formules d'Euler

a- Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument**. On appelle formule de **d'Euler** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $Z^n = e^{in\theta}$ avec ($n \in \mathbb{N}^*$)

b- Application de la formule d'Euler

En posant $Z = e^{i\theta}$ et $\bar{Z} = e^{-i\theta}$, on a :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$$

De façons générales on a :

$$e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$$

$$e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin(n\theta)$$

$$e^{in\theta} \times e^{-in\theta} = 1$$

3) Linéarisation : de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$

Pour **Linéariser $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$** ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules (**d'Euler ou de Moivre**) et du (**binôme de Newton ou du triangle de Pascal**).

Méthode :

$$- \text{ Développer et réduire : } \cos^n\theta = \frac{(z + \bar{z})^n}{2^n} \text{ ou } \sin^n\theta = \frac{(z - \bar{z})^n}{(2i)^n} \text{ (Moivre)}$$

$$\text{Ou encore } \cos^n\theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n}{2^n} \text{ ou } \sin^n\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n}{(2i)^n} \text{ (Euler)}$$

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et Exprime chacun deux en fonction des termes de la forme **Coskx** et **Sinkx**.

X- Equations dans $\mathbb{C}$ **1) Equation du premier degré :****a) Définition :**

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $aZ + b = 0$.

Avec ($a \in \mathbb{C}^*$)

b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation $aZ + b = 0$ est $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

2) Racines carrées d'un nombre complexe :**a) Définition :**

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que $Z = z^2$.

b) Résolution du cas général :

Si $Z = a + ib$ et $z = x + iy$. On dit que z est une racine carrée de Z si et seulement si

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = a + ib \\ \left| \sqrt{x^2 + y^2} \right|^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

NB : D'une manière plus concrète, les racines carrée du complexe $Z = a + ib$ sont données par :

$$\delta_1 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}}$$

3) Equation du second degré :**a) Définition:**

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$$aZ^2 + bZ + c = 0 \quad (\text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont tous des complexes avec } a \neq 0)$$

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite d'abord le calcul du discriminant associé Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$; on a : $Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$; on a : $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$; on a : $Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = x + iy$; on a : $Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$.

Où δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ .

4) Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle **racine $n^{\text{ième}}$** de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

b) Résolution :

Soit Z un complexe de forme polaire : $Z = [r ; \theta]$.

et z un complexe de forme polaire : $z = [r' ; \theta']$.

$$z^n = Z \Leftrightarrow [r' ; \theta']^n = [r ; \theta] \Leftrightarrow [(r')^n ; n\theta'] = [r ; \theta].$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta}{n} \left[\frac{2k\pi}{n} \right] = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \text{ Avec } k \in [0 ; n-1]$$

Ainsi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z sont données par la formule : $z = [r' ; \theta'] \Leftrightarrow$

$$Z_k = \left[\sqrt[n]{r} ; \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right] \text{ ou } Z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Avec $k \in [0 ; n-1]$

5) Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :

Soit Z un nombre complexe tel que $Z = 1$.

Les racines de $n^{\text{ièmes}}$ de Z c'est-à-dire 1, sont obtenues en utilisant la formule qui suit :

$$Z_k = \left[1 ; \frac{2k\pi}{n} \right]$$

XI- Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Figures	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A .		$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \alpha$ Avec $\alpha \in [0; \pi]$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$ Avec $\alpha \in [0; \pi]$
Triangle ABC équilatéral.		$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A .		$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ib \text{ ou } -ib$ Avec $b \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A .		$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$ et $ Z_B - Z_A = Z_C - Z_A $	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i \text{ ou } -i$
Points A, B, C alignés		$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0 + k\pi$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$)
Points A, B, C, D cocycliques		$\text{mes}(\hat{C}) \neq 0 + k\pi$ Ou $\text{mes}(\hat{C}) = \text{mes}(\hat{D}) + k\pi$	$\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_A} \in \mathbb{R}^*$

XII- Complexe et lieux géométriques :**1) Distance entre deux points A et B :**

Soient A et B, deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$$

2) Cercle de centre A et de rayon r :

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M et A d'affixe Z_A .

$$d(A, M) = r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$$

3) Médiatrice d'un segment :

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B .

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow$

$$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$$

4) Droite passant par un point A et faisant un angle α avec l'horizontale

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A un point d'affixe Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si $\arg(Z_M - Z_A) = \alpha + k\pi$

NB :

- Equation cartésienne d'un cercle : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Equation réduite d'un cercle : $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

XIII- Complexe et transformations géométriques du plan**1) Translation :**

La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$ (avec $q \in \mathbb{C}$)

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe $Z_A = a + ib$ en un point B d'affixe $Z_B = a' + ib'$ est : $f(Z_A) = Z_B \Leftrightarrow (a + ib) + q = (a' + ib') \Rightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Z + q$ pour Trouve la traduction complexe.

2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k et de centre ω est :

$$f(Z) = kZ + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C} \text{) ou } \overrightarrow{\Omega M'} = K\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = k(Z - \omega) \text{ avec :}$$

- Z' : image de Z
- k : le rapport
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi l'homothétie de rapport k qui transforme un point A d'affixe $Z_A = a + ib$ en un point B d'affixe $Z_B = a' + ib'$ est : $f(Z_A) = Z_B \Leftrightarrow k(a + ib) + q = (a' + ib') \Leftrightarrow$

$$q = (a' + ib') - k(a + ib).$$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = kZ + q$ pour Trouve la traduction complexe.

3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre ω est :

$$f(Z) = Ze^{i\theta} + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C} \text{) ou } \overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta}\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega) \text{ avec :}$$

- Z' : image de Z
- θ : l'angle
- ω : le centre d'affixe Z_Ω

Ainsi la rotation d'angle θ qui transforme un point A d'affixe $Z_A = a + ib$ en un point B d'affixe $Z_B = a' + ib'$ est : $f(Z_A) = Z_B \Leftrightarrow (a + ib)e^{i\theta} + q = (a' + ib') \Leftrightarrow$

$$q = (a' + ib') - (a + ib)e^{i\theta} \Leftrightarrow q = -(a + ib)(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Ze^{i\theta} + q$ pour Trouve la traduction complexe.

4) Similitude du plan :**Expression complexe :**

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe :**

$Z' = aZ + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- Son rapport $k = |a|$
- Son angle $\theta = \arg(a)$

- Son centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$

• **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

$Z' = a\bar{z} + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- Son rapport $k = |a|$
- Son axe (D) : $y = px + q$, avec $p = \frac{I_m(a)}{|a| + R_e(a)}$ (Coefficient directeur)
- Son centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

5) Caractérisation des transformations

Soit f la transformation : $z' = az + b$

- si $a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b .
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- si $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- si $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation d'angle α , d'argument $\theta = \arg(a)$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- si $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α , d'argument $\theta = \arg(a)$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = a\bar{z} + b$.
- Si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle, $\theta = \arg(a)$, d'axe (Δ) : $y = px + q$ et de centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$