



Fiche 6 : Nombres complexes

Plan de la fiche

- I - Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes
- II - Nombre complexe conjugué
- III - Module et argument
- IV - Les différentes écritures d'un nombre complexe non nul
- V - Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels
- VI - Nombres complexes et géométrie
- VII - Ecriture complexe de transformations géométriques

I - Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Théorème (admis) et définitions

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes, qui vérifie les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui ont les mêmes propriétés que leurs homologues dans $\mathbb{R}$;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$;
- Pour tout nombre complexe z il existe un unique couple (a, b) de réels tel que $z = a + ib$.

Forme algébrique d'un nombre complexe

L'égalité $z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe z .

Partie réelle, partie imaginaire :

Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z , le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z .

On note : $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. Par conséquent $z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$.

Exemple

$$\text{Re}(3 - 5i) = 3 \text{ et } \text{Im}(3 - 5i) = -5$$

Calculs avec les complexes

Les calculs se font comme avec les nombres réels avec la convention $i^2 = -1$.

Exemple

$$(5 + 2i) \times (3 - 5i) = 5 \times 3 - 5 \times 5 \times i + 2 \times i \times 3 - 2 \times i \times 5 \times i = 15 - 25i + 6i - 10i^2 = 15 - 25i + 6i + 10 = 25 - 19i$$

Nombres réels et nombres imaginaires purs

Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

On appelle imaginaire pur tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle.

Le réel 0 est le seul nombre complexe qui est réel et imaginaire pur.

Egalité de deux nombres complexes

$a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

Exemple

$$x + iy = 3 - 5i \text{ équivaut à } x = 3 \text{ et } y = -5$$

Nullité d'un nombre complexe

En particulier $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$.

Le plan complexe

On considère un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ce plan est « le plan complexe » dès lors que :

- A tout point M de coordonnées (x_M, y_M) on associe le complexe $x_M + iy_M$, noté z_M et appelé affixe de M.
- A tout complexe $x + iy$ (avec x et y réels) on associe le point M dont le couple de coordonnées est (x, y) , noté $M(x + iy)$ et appelé image du nombre complexe $x + iy$.

Conséquence : affixe d'un vecteur.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. C'est pourquoi l'affixe z du point M est aussi l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
Pour tous points A et B, il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Le point M et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ont donc pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ et pour affixe $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$. De $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A)$ il résulte que $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Exemple

Soit $A(-1, 3)$ et $B(4, 7)$. Alors :

$$z_A = -1 + 3i \text{ et } z_B = 4 + 7i$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (4 + 7i) - (-1 + 3i) = 5 + 4i$$

Vocabulaire

- L'axe des abscisses est aussi dénommé « axe réel » car il est l'ensemble des points pour lesquels $y = 0$.
- L'axe des ordonnées est aussi dénommé « axe imaginaire » car il est l'ensemble des points pour lesquels $x = 0$.

II - Nombre complexe conjugué

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec x et y réels

Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Exemple

Le conjugué de $3 - 5i$ est $3 + 5i$.

Le conjugué de -7 est -7 car $-7 = -7 + 0i$ et son conjugué sera $-7 - 0i = -7$.

Nombre complexe conjugué, nombre réel et imaginaire pur

Soit z un nombre complexe :

- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$;
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

▶ À SAVOIR

Opérations sur les nombres complexes conjugués

Pour tous complexes z et z'

$$\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{(-z)} = -\bar{z}$$

$$\overline{(z \times z')} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{(z)^n} = (\bar{z})^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}, \text{ avec } z' \neq 0$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \text{ avec } z' \neq 0$$

Produit $z\bar{z}$

$z = x + iy$, avec x et y réels, entraîne $z\bar{z} = x^2 + y^2$, nombre réel positif.

Pour tout $z \neq 0$, ce produit est un nombre réel strictement positif.

Inverse d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un complexe non nul, avec x et y réels. Pour déterminer partie réelle et partie imaginaire de $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

La forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est donc $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

Exemple

$$\frac{1}{3 - 5i} = \frac{3 + 5i}{(3 - 5i)(3 + 5i)} = \frac{3 + 5i}{3^2 - (5i)^2} = \frac{3 + 5i}{9 + 25} = \frac{3}{34} + i \frac{5}{34}$$

III - Module et argument

Coordonnées polaires (rappels)

Etant donné un point O et un vecteur unitaire $\vec{e}_1$ tout point M du plan distinct de O est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) où le réel strictement positif r est égal à la distance OM et le réel θ est une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ dans le plan orienté par le repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- Les couples (r, θ) et (r', θ') repèrent le même point si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' [2\pi]$.
- Le point M de coordonnées polaires (r, θ) par rapport à $(O, \vec{e}_1)$ a pour coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.
- Le point M de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ a pour coordonnées polaires (r, θ) par rapport à $(O, \vec{e}_1)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

Module d'un nombre complexe

- Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$. On note : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Lorsque $z = x + iy$ avec x et y réels on a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Dans le plan complexe, le module du nombre complexe z est égal à la distance OM , où M est le point d'affixe z .
- Lorsque le point M d'affixe non nulle z a pour coordonnées polaires (r, θ) par rapport à $(O, \vec{e}_1)$, alors on a $|z| = r$.

Exemple

$$|3 - 5i| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Module et valeur absolue

Lorsque le complexe z est réel, il vient $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, avec les notations ci-dessus. Dans ce cas le module est égal à la valeur absolue.

Le module est une extension aux nombres complexes de la notion de valeur absolue.

► À SAVOIR

Opérations sur les modules

Pour tous complexes z et z'

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$|-z| = |z|$$

$$|z^n| = |z|^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ avec } z \neq 0$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ avec } z' \neq 0$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un complexe non nul et M le point d'affixe z dans le plan complexe. Toute mesure θ de $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ est un argument de z . On note $\arg z = \theta \quad [2\pi]$.

Conséquence : tout point M d'affixe z non nulle a pour coordonnées polaires $(|z|, \arg z)$ par rapport à $(O, \vec{e}_1)$. Il en résulte les formules suivantes :

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = |z| \sin(\arg z)$$

Exemple

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. En désignant par θ un argument de z il vient

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Le réel $\frac{\pi}{3}$ étant une solution de ce système, on conclut que $\arg(z) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Argument d'un réel non nul, d'un imaginaire pur

- Le complexe z est un réel strictement positif si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad [2\pi]$.
- Le complexe z est un réel strictement négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi \quad [2\pi]$.
- Le complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg z = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

▶ À SAVOIR

Opérations sur les arguments

Pour tous complexes z et z' non nuls et pour n entier relatif

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(-z) = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$$

☞ Méthode : « Evaluer la mesure d'un angle à l'aide d'un quotient de nombres complexes », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

IV - Les différentes écritures d'un nombre complexe non nul

Formes trigonométriques

L'égalité $z = r \times (\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe non nul z , avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z \quad [2\pi]$.

Nombre complexe de module 1 (nombre complexe unitaire)

Tout nombre complexe de module 1 a pour forme trigonométrique $\cos \theta + i \sin \theta$ où θ est un de ses arguments.

On convient de désigner le nombre complexe unitaire $\cos \theta + i \sin \theta$ par la notation $e^{i\theta}$ (on lit : e puissance $i\theta$).

Cette nouvelle notation conduit aux formules ci-dessous, avec θ et θ' réels et n entier relatif :

$$\bullet \quad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\bullet \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$

Exemples

$$e^{i0} = 1 \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Formes exponentielles

L'égalité $z = r \times e^{i\theta}$ est une forme exponentielle du nombre complexe non nul z , avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z [2\pi]$.

Exemples

a) Déterminer la forme algébrique du complexe $3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$3 \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 3 \times \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

b) Déterminer formes trigonométrique et exponentielle du complexe $z = \sqrt{3} + i$.

Il vient :

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{Par suite : } \sqrt{3} + i = 2 \times \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

☞ Méthode : « Ecriture des solutions sous forme algébrique, trigonométrique », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

Applications de ces trois écritures aux calculs dans $\mathbb{C}$.

On utilise la forme algébrique pour les additions et soustractions, la forme trigonométrique (ou exponentielle) pour les produits, quotients, puissances.

Exemple

Pour déterminer la forme algébrique du complexe $(1 + i\sqrt{3})^{20}$ il est préférable d'utiliser les formes exponentielles plutôt que d'effectuer des multiplications successives...

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2$$

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ entraîne } 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}. \text{ On en déduit } (1 + i\sqrt{3})^{20} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{20} = 2^{20} \times e^{i \times 20 \times \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Or } 20 \times \frac{\pi}{3} = (18 + 2) \times \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3} = 3 \times (2\pi) + \frac{2\pi}{3}, \text{ et } 3 \times (2\pi) + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

$$\text{D'où } (1 + i\sqrt{3})^{20} = 2^{20} \times e^{i \times 20 \times \frac{\pi}{3}} = 2^{20} \times \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{20} \times \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Conclusion : } (1 + i\sqrt{3})^{30} = -2^{19} + i \times 2^{19} \times \sqrt{3}.$$

▶ À SAVOIR

Formules de Moivre et Euler

- Formules de Moivre :

$$\text{Pour tout réel } \theta \text{ et tout entier relatif } n : \begin{cases} (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \\ (\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) \end{cases}$$

- Formules d'Euler :

$$\text{Pour tout réel } \theta : \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

V - Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels

On considère une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a réel non nul, b et c réels.
Le discriminant de l'équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Lorsque $\Delta = 0$ alors l'équation admet pour unique solution le réel $-\frac{b}{2a}$
- Lorsque $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet exactement deux solutions :
 - si $\Delta > 0$ alors ces deux solutions sont les réels $-\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $-\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - si $\Delta < 0$ alors ces deux solutions sont les complexes conjugués $-\frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $-\frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple

Le discriminant de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$ est -7 .

Cette équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$, mais a deux solutions dans $\mathbb{C}$, qui sont les deux complexes conjugués

$$\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \text{ et } \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

VI - Nombres complexes et géométrie

Colinéarité et orthogonalité de vecteurs.

On considère des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ d'afixes respectives z et z' .

$$\text{Alors : } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' = (\vec{e}_1, \vec{u}) - (\vec{e}_1, \vec{u}') = (\vec{u}', \vec{u}) \quad [2\pi]$$

Par suite les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont :

- colinéaires si et seulement si le complexe $\frac{z}{z'}$ est réel,
- orthogonaux si et seulement si le complexe $\frac{z}{z'}$ est imaginaire pur.

Distance de deux points

La distance de deux points A et B est $|z_B - z_A|$.

Exemple

La distance des deux points $A(-1, 3)$ et $B(4, 7)$ est $|z_B - z_A| = |5 + 4i| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

☞ Méthode : « Calculer des distances », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

☞ Méthode : « Evaluer une distance à l'aide d'un quotient de nombres complexes », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

Affixe d'un barycentre

On considère un système de points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ avec $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$.

Alors le barycentre G de ce système de points pondérés a pour affixe :
$$z_G = \frac{a_1 z_{A_1} + a_2 z_{A_2} + \dots + a_n z_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

☞ Méthode : « Déterminer un barycentre », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

VII - Ecriture complexe de transformations géométriques

Dans toute cette partie, à un point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' .

Translation

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ associe au point M(z) le point M'(z') tel que $z' = z + z_{\overrightarrow{AB}}$.

Homothétie

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k (k réel non nul) associe au point M(z) le point M'(z') tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$.

☞ Méthode : « Ecriture complexe d'une homothétie », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

Rotation

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ associe au point M(z) le point M'(z') tel que :

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega).$$

☞ Méthode : « Ecriture complexe d'une rotation », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».

☞ Méthode : « Reconnaître une transformation géométrique », fiche exercices n°6 « Nombres complexes ».