

Chapitre 4

Nombres complexes (1)

Du niveau de base au niveau concours

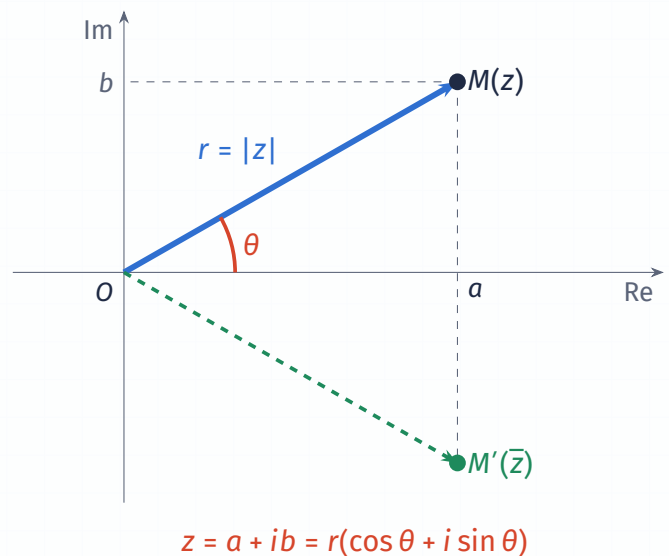
À connaître par cœur

$$|z|^2 = z \bar{z}$$

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$$

Défi de concours

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{24} = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1 L'ensemble $\mathbb{C}$, forme algébrique	6
1.1 L'ensemble des nombres complexes	6
1.2 Calculs dans $\mathbb{C}$	6
2 Le plan complexe	7
3 Le conjugué	8
4 Le module	9
5 Argument, forme trigonométrique	10
6 Calculs en forme trigonométrique	12
7 La formule de Moivre	13
7.1 $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$	14
7.2 Sommes de cosinus et de sinus	14
8 Interprétation géométrique	15
8.1 Points cocycliques	16
9 Ensembles de points	17
10 Équations dans $\mathbb{C}$	18
10.1 Premier degré, équations avec $\bar{z}$	18
10.2 Systèmes, équation $z^2 = a$ avec a réel	18
11 Les pièges classiques	19
12 Les astuces des concours	20
13 L'essentiel du chapitre en une page	22
14 Niveau 1 · Bases	23
15 Niveau 2 · Bac	24
16 Niveau 3 · Approfondissement	26
17 Niveau 4 · Concours	27
18 Forme algébrique et conjugué	29

19 Module et inégalités	31
20 Forme trigonométrique et Moivre	33
21 Géométrie et complexes	35
22 Ensembles de points	37
23 Défis de concours	38
24 Corrigés du niveau 1	41
25 Corrigés du niveau 2	43
26 Corrigés du niveau 3	46
27 Corrigés du niveau 4	49
28 Corrigés : forme algébrique	51
29 Corrigés : module et inégalités	55
30 Corrigés : forme trigonométrique	58
31 Corrigés : géométrie et complexes	62
32 Corrigés : ensembles de points	66
33 Corrigés : défis de concours	69

Comment utiliser ce livret**Les 4 niveaux d'exercices****Niveau 1 · Bases ★**

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Forme algébrique et conjugué, Module et inégalités, Forme trigonométrique et Moivre, Géométrie et complexes, Ensembles de points, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|---|
| ☐ calculer sous forme algébrique (inverse, i^n) ; | ☐ exprimer $\cos n\theta$ en fonction de $\cos \theta$; |
| ☐ placer des points, calculer milieux et barycentres ; | ☐ calculer $\sum \cos k\theta$ et $\sum \sin k\theta$; |
| ☐ utiliser le conjugué pour prouver « réel » ; | ☐ traduire un angle, un alignement, un angle droit ; |
| ☐ calculer un module sans développer ; | ☐ trouver la nature d'un triangle, d'un quadrilatère ; |
| ☐ utiliser l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité ; | ☐ montrer que quatre points sont cocycliques ; |
| ☐ trouver un argument et la forme $[r, \theta]$; | ☐ déterminer un ensemble de points, résoudre une équation. |
| ☐ multiplier, diviser en forme $[r, \theta]$; | |
| ☐ calculer z^n avec la formule de Moivre ; | |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 L'ensemble $\mathbb{C}$, forme algébrique

1.1 L'ensemble des nombres complexes

Définition : théorème admis

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui ont les **mêmes règles de calcul** (commutativité, associativité, distributivité ; tout élément non nul a un inverse), et qui contient un nombre i tel que $i^2 = -1$.

Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon **unique** $z = a + ib$ avec a et b **réels** : c'est la **forme algébrique** de z . Le réel $a = \operatorname{Re}(z)$ est la **partie réelle** de z , le réel $b = \operatorname{Im}(z)$ sa **partie imaginaire**.

- z est **réel** $\iff \operatorname{Im}(z) = 0$; z est **imaginaire pur** $\iff \operatorname{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Démonstration de l'unicité. Soit $a + ib = a' + ib'$ avec a, b, a', b' réels. Si l'on avait $b \neq b'$, alors $i = \frac{a - a'}{b' - b}$ serait réel, et son carré $i^2 = -1$ serait positif : absurde. Donc $b = b'$, puis $a = a'$. $\square$

Égalité de deux complexes

Pour a, b, a', b' **réels** : $a + ib = a' + ib' \iff (a = a' \text{ et } b = b')$; $a + ib = 0 \iff a = b = 0$.

1.2 Calculs dans $\mathbb{C}$

Opérations, puissances de i , inverse

- $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$ et $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$: on calcule **comme dans** $\mathbb{R}$ en remplaçant i^2 par -1 . Les identités remarquables restent vraies ; en particulier $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.
- $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$: pour $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i^{4k+r} = i^r$ (i^n ne dépend que du reste de n modulo 4).
- Si $z = a + ib \neq 0$, alors $a^2 + b^2 > 0$ et $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ (on multiplie par la **quantité conjuguée** $a - ib$).
- $zz' = 0 \iff (z = 0 \text{ ou } z' = 0)$: si $z \neq 0$, on multiplie par $\frac{1}{z}$.

Exemple : calculs rédigés

- $(2-3i)(4+i) = 8+2i-12i-3i^2 = 11-10i$; $(1-2i)^3 = 1-3(2i)+3(2i)^2-(2i)^3 = 1-6i-12+8i = -11+2i$.
- $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, donc $(1+i)^{12} = (2i)^6 = 64i^6 = -64$.
- $i^{2030} = i^{4 \times 507 + 2} = -1$; $i \times i^2 \times i^3 \times \dots \times i^{100} = i^{1+2+\dots+100} = i^{5050} = i^{4 \times 1262 + 2} = -1$.
- $\frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{5} = \frac{5-10i}{5} = 1-2i$.
- $\frac{1}{3+i} + \frac{1}{3-i} = \frac{(3-i)+(3+i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (un réel : la somme de deux conjugués, section 3).

Exemple : avec $z = x + iy$, x et y réels

Soit $Z = z^2 + 2z$. $Z = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy = \underbrace{(x^2 - y^2 + 2x)}_{\text{Re}(Z)} + i \underbrace{2y(x+1)}_{\text{Im}(Z)}$ (accolades **réelles**).

Z est réel $\iff y(x+1) = 0 \iff (y=0 \text{ ou } x=-1)$: le point $M(x,y)$ décrit la réunion de l'axe des abscisses et de la droite d'équation $x = -1$.

Attention, piège !

- $\text{Im}(2-5i) = -5$ (un **réel**), et non $-5i$. L'identification ne vaut que pour des parties **réelles** : $1+i \times i = 0+i \times 0$, et pourtant $1 \neq 0$.
- Il n'y a **pas d'ordre** compatible avec la multiplication dans $\mathbb{C}$: si l'on avait $i > 0$ ou $i < 0$, on aurait dans les deux cas $i \times i > 0$, soit $-1 > 0$. On n'écrit donc jamais $z \geq 0$ ou $z < z'$ pour des complexes non réels.

2**Le plan complexe****Définition**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au complexe $z = a + ib$ (a, b réels) on associe le point $M(a, b)$ et le vecteur $\vec{w}(a, b)$: z est l'**affixe** de M et de $\vec{w}$, et M est l'**image** de z ; on note $M(z)$, z_M , $\vec{w}(z)$ ou $z_{\vec{w}}$. On définit ainsi une bijection du plan sur $\mathbb{C}$. L'axe $(O, \vec{u})$ est l'**axe réel**, l'axe $(O, \vec{v})$ l'**axe imaginaire**.

Théorème

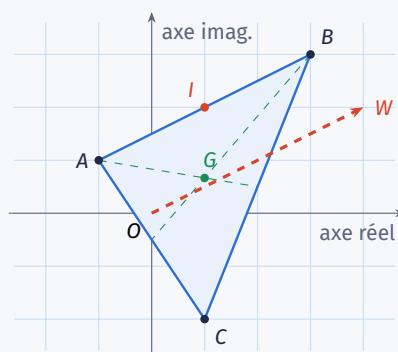
Soit $A(a), B(b), C(c), D(d)$ des points, $\vec{w}, \vec{w}'$ des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$; le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{a+b}{2}$; $z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$, et $z_{\lambda\vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}$.
2. Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le barycentre G de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ a pour affixe $g = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$ ($\gamma = 0$: deux points).
3. Si $\vec{w}' \neq \vec{0}$: $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ colinéaires $\iff \frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w}'}} \in \mathbb{R}$; si $A \neq B$: A, B, C alignés $\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
4. $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff a+c = b+d$.

Démonstration. 1. Les coordonnées de $\vec{AB}$ sont celles de B moins celles de A , et les opérations sur les vecteurs se lisent coordonnée par coordonnée ; le milieu est le barycentre de $\{(A, 1), (B, 1)\}$.
 2. Par définition, $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$, soit, en affixes, $\alpha(a - g) + \beta(b - g) + \gamma(c - g) = 0$; on isole g .
 3. Colinéaires $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{w} = \lambda\vec{w}' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, z_{\vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}'}$.
 4. $\vec{AB} = \vec{DC} \iff b - a = c - d$; $a + c = b + d$ dit que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. $\square$

Exemple : $A(-1 + i), B(3 + 3i), C(1 - 2i)$ (figure)

- $\vec{AB}$ a pour affixe $b - a = 4 + 2i$: c'est l'affixe du point W tel que $\vec{OW} = \vec{AB}$.
- Le milieu de $[AB]$ est $I(1 + 2i)$; le centre de gravité de ABC est $G\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = G\left(1 + \frac{2}{3}i\right)$.
- Le barycentre de $\{(A, 3), (C, -1)\}$ a pour affixe $\frac{3a - c}{3 - 1} = \frac{-4 + 5i}{2}$; $ABCD$ est un parallélogramme pour $d = a + c - b = -3 - 4i$.
- $E(-7 - 2i)$: $\frac{e - a}{b - a} = \frac{-6 - 3i}{4 + 2i} = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$: A, B, E sont alignés, et $\vec{AE} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$ (A est entre E et B).



$\vec{OW} = \vec{AB}$: même affixe $b - a$

3

Le conjugué

Définition

Le **conjugué** de $z = a + ib$ (a, b réels) est $\bar{z} = a - ib$. Le point $M'(\bar{z})$ est le **symétrique** de $M(z)$ par rapport à l'axe réel (figure de la section 5).

Théorème

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\bar{\bar{z}} = z$; $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$; $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$.
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$; $\overline{z^n} = \bar{z}^n$; si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$; $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Démonstration. 1 et 3 : calcul direct ; par exemple $\bar{\bar{z}} = z \iff a - ib = a + ib \iff 2ib = 0 \iff b = 0$.
 2 : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$, donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b) = (a - ib)(a' - ib')$; puis $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ par récurrence ; de $z' \times \frac{1}{z'} = 1$ on tire $\bar{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{1} = 1$; enfin $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$. $\square$

Méthode : montrer qu'un complexe Z est réel ou imaginaire pur, sans le calculer

On calcule $\bar{\bar{Z}}$ avec les règles ci-dessus : si $\bar{\bar{Z}} = Z$, alors $Z \in \mathbb{R}$; si $\bar{\bar{Z}} = -Z$, alors $Z \in i\mathbb{R}$.

Exemples : $z^3 + \bar{z}^3 = \bar{z}^3 + z^3$, donc $z^3 + \bar{z}^3 \in \mathbb{R}$; $\overline{z\bar{w}} - \bar{z}w = \bar{z}w - z\bar{w}$, donc $\overline{z\bar{w}} - \bar{z}w \in i\mathbb{R}$.

Polynôme à coefficients réels

Si $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ avec des a_k **réels**, alors $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$: si z_0 est racine de P , $\bar{z}_0$ l'est aussi.

Exemple : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$. On a $(1+i)^2 = 2i$ et $(1+i)^3 = -2+2i$, donc $P(1+i) = -2+2i-6i+4+4i-2 = 0$, puis $P(1-i) = \overline{P(1+i)} = 0$; de plus $P(1) = 0$. On vérifie $P(z) = (z-1)(z-1-i)(z-1+i)$: les racines de P sont $1, 1+i, 1-i$ (produit nul).

Produit scalaire et déterminant

Si $\vec{w}(x, y)$ et $\vec{w}'(x', y')$ ont pour affixes z et z' , alors $\bar{z}z' = (x-iy)(x'+iy') = (xx'+yy')+i(xy'-yx')$:

$$\operatorname{Re}(\bar{z}z') = \vec{w} \cdot \vec{w}' \quad \operatorname{Im}(\bar{z}z') = \det(\vec{w}, \vec{w}').$$

Ainsi $\vec{w} \perp \vec{w}' \iff \bar{z}z' \in i\mathbb{R}$, et $\vec{w}, \vec{w}'$ colinéaires $\iff \bar{z}z' \in \mathbb{R}$.

Exemple : $A(1+2i), B(4+3i), C(2-i)$: $\overline{(b-a)}(c-a) = (3-i)(1-3i) = 3-9i-i+3i^2 = -10i \in i\mathbb{R}$: le triangle ABC est rectangle en A , et son aire vaut $\frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \times 10 = 5$.

4**Le module****Définition**

Le **module** de $z = a + ib$ (a, b réels) est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Si $M(z)$, alors $|z| = OM$; si $A(a)$ et $B(b)$, alors $AB = |b-a|$. Pour z réel, $|z|$ est la valeur absolue.

Théorème

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $|z| = 0 \iff z = 0$; $|\bar{z}| = |-z| = |z|$; $|z|^2 = z\bar{z}$; si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$; $\operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$; $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.
- $|zz'| = |z||z'|$; $|z^n| = |z|^n$; si $z' \neq 0$: $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration. 2 : $|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, et $a = \sqrt{a^2 + b^2} \iff (a \geq 0 \text{ et } b = 0)$; enfin $a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \leq 2(a^2 + b^2)$ car $2|ab| \leq a^2 + b^2$. 3 : $|zz'|^2 = zz' \overline{zz'} = z\bar{z} z' \overline{z'} = |z|^2 |z'|^2$, et les modules sont positifs ; puis récurrence, et $|z'| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = 1$. $\square$

Inégalité triangulaire

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$:

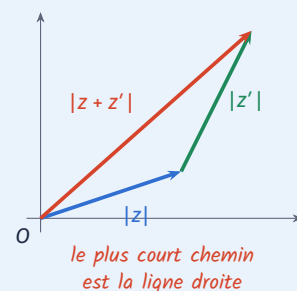
$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

Cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'| \iff z\bar{z'} \in \mathbb{R}_+ \iff (z' = 0 \text{ ou } z = \lambda z' \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+)$.

Démonstration. $|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$, car $\bar{z}z'$ est le conjugué de $z\bar{z}'$. Or $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z||z'|$, donc $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$, d'où l'inégalité (nombres positifs). Il y a égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$, soit $z\bar{z}' = \mu \in \mathbb{R}_+$; si $z' \neq 0$, en multipliant par z' : $z|z'|^2 = \mu z'$, soit $z = \lambda z'$ avec $\lambda = \frac{\mu}{|z'|^2} \geq 0$ (et réciproquement).

Enfin $|z| = |(z-z') + z'| \leq |z-z'| + |z'|$, donc $|z| - |z'| \leq |z-z'|$; en échangeant z et z' , on obtient $|z'| - |z| \leq |z-z'|$. $\square$

En géométrie : pour trois points, $AC \leq AB + BC$, avec égalité si et seulement si $B \in [AC]$. Le **cercle** de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - \omega| = R$; le disque fermé correspond à $|z - \omega| \leq R$.



Exemple : calculer un module sans développer ; majorer, minorer

$$\bullet \left| \frac{(1+i)^4(3-4i)}{(2+i\sqrt{5})^2} \right| = \frac{|1+i|^4 |3-4i|}{|2+i\sqrt{5}|^2} = \frac{(\sqrt{2})^4 \times 5}{9} = \frac{20}{9}.$$

• Pour $|z| \leq 1$: $|z^2 - 3z + 5| \leq |z|^2 + 3|z| + 5 \leq 9$, avec égalité pour $z = -1$; et, avec la seconde inégalité, $|z^2 - 3z + 5| \geq 5 - |z^2 - 3z| \geq 5 - (|z|^2 + 3|z|) \geq 1$. En particulier, $z^2 - 3z + 5$ ne s'annule pas dans le disque $|z| \leq 1$.

• **Cas d'égalité.** $|z-1| + |z+1| = 2 \iff M(z) \in [AB]$ avec $A(-1)$, $B(1)$: en effet $2 = |(z+1) - (z-1)| \leq |z+1| + |z-1|$, avec égalité si et seulement si $\vec{AM}(z+1)$ et $\vec{MB}(1-z)$ ont même direction et même sens (ou l'un est nul), c'est-à-dire $M \in [AB]$: les solutions sont les réels $z \in [-1, 1]$.

Attention, piège !

$|z|^2 \neq z^2$ en général : $|i|^2 = 1$ mais $i^2 = -1$; c'est $|z|^2 = z\bar{z}$. Et $|z+z'| \neq |z| + |z'|$ en général : $|1+i| = \sqrt{2} < |1| + |i| = 2$.

5

Argument, forme trigonométrique

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $M(z)$. On appelle **argument** de z toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OM})$; on note $\arg z \equiv \theta [2\pi]$. Le nombre 0 n'a pas d'argument. L'argument appartenant à $]-\pi, \pi]$ est l'**argument principal**.

Théorème (forme trigonométrique)

Soit $z = a + ib \neq 0$ et $r = |z|$. Un réel θ est un argument de $z \iff \cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$. Alors

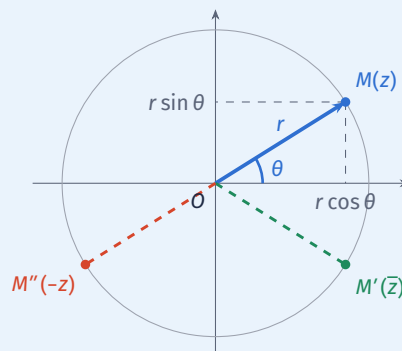
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ noté } z = [r, \theta] \quad (\text{forme trigonométrique}).$$

Unicité : pour $r > 0$ et $r' > 0$, $[r, \theta] = [r', \theta'] \iff (r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi])$.

Démonstration. Le point N tel que $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$ est sur le cercle trigonométrique et $(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) : \theta$ est une mesure de cet angle si et seulement si $N(\cos \theta, \sin \theta)$, c'est-à-dire $\frac{a}{r} = \cos \theta$ et $\frac{b}{r} = \sin \theta$. Unicité : en prenant le module, $r = |[r, \theta]| = |[r', \theta']| = r'$; puis $\cos \theta = \cos \theta'$ et $\sin \theta = \sin \theta'$, donc $\theta \equiv \theta' [2\pi]$. $\square$

Cas particuliers ($\rho > 0$) : $\arg \rho \equiv 0$, $\arg(-\rho) \equiv \pi$, $\arg(i\rho) \equiv \frac{\pi}{2}$, $\arg(-i\rho) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. Pour $z \neq 0$: $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 [\pi]$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Symétries (figure) : $\arg \bar{z} \equiv -\theta$, $\arg(-z) \equiv \pi + \theta$, $\arg(-\bar{z}) \equiv \pi - \theta [2\pi]$.



Les angles usuels (à connaître par cœur)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$[1, \theta]$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	-1

Pour $-\theta$, on prend le conjugué : $[1, -\theta] = \overline{[1, \theta]}$. À reconnaître : $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$, $\sqrt{3} + i = \left[2, \frac{\pi}{6} \right]$, $1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3} \right]$, $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right]$, $-1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

Méthode : passer de $a + ib$ à la forme trigonométrique

- Calculer $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis écrire $z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$ et reconnaître $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$ (angles remarquables).
- Sinon, utiliser l'arctangente (chapitre 1) : si $a > 0$, $\arg z \equiv \arctan \frac{b}{a}$; si $a < 0$, $\arg z \equiv \pi + \arctan \frac{b}{a} [2\pi]$.

Justification de 2. Si $a > 0$, $\theta_0 = \arctan \frac{b}{a} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta_0}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta_0 = \tan \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{b}{r}$. Si $a < 0$, on l'applique à $-z$.

Exemple : formes trigonométriques

z	$\sqrt{6} - i\sqrt{2}$	$-2 + 2i$	$-1 - i\sqrt{3}$	$3 + 3i\sqrt{3}$	$3 + 4i$
$r = z $	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2	6	5
$\cos \theta ; \sin \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5} ; \frac{4}{5}$
$z = [r, \theta]$	$[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}]$	$[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}]$	$[2, -\frac{2\pi}{3}]$	$[6, \frac{\pi}{3}]$	$[5, \arctan \frac{4}{3}]$

Méthode : les bonnes réécritures (le module doit être > 0 , le signe central doit être « + »)

$$\begin{aligned} \cos \theta - i \sin \theta &= [1, -\theta] \text{ (conjugué)} & -\cos \theta + i \sin \theta &= [1, \pi - \theta] \\ -\cos \theta - i \sin \theta &= [1, \pi + \theta] \text{ (opposé)} & \sin \theta + i \cos \theta &= [1, \frac{\pi}{2} - \theta] \end{aligned}$$

Exemple : un module qui dépend du signe

Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$, $\alpha \neq 0$, et $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$. Avec $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$:

$$z = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right].$$

- Si $0 < \alpha < \pi$: $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, donc $z = \left[2 \sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi - \alpha}{2} \right]$.
- Si $-\pi < \alpha < 0$: $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$; on écrit $z = \left(-2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \left(-(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right)$ avec $\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}$, et $-(\cos \varphi + i \sin \varphi) = [1, \varphi + \pi]$ (symétrie de centre O) : $z = \left[-2 \sin \frac{\alpha}{2}, \frac{3\pi - \alpha}{2} \right] = \left[-2 \sin \frac{\alpha}{2}, -\frac{\pi + \alpha}{2} \right]$.

6**Calculs en forme trigonométrique****Théorème**

Soit $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ ($r, r' > 0$), $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$zz' = [rr', \theta + \theta'] \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right] \quad \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right] \quad \bar{z} = [r, -\theta] \quad z^n = [r^n, n\theta] \quad (\text{section 7})$$

$\lambda z = [\lambda r, \theta]$ si $\lambda > 0$ et $\lambda z = [-\lambda r, \theta + \pi]$ si $\lambda < 0$. En arguments, modulo 2π :

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \quad \arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' \quad \arg \frac{1}{z} \equiv \arg \bar{z} \equiv -\arg z \quad \arg z^n \equiv n \arg z.$$

Démonstration. Avec les formules d'addition :

$$zz' = rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')] = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')].$$

Ainsi $[r, \theta] \times \left[\frac{1}{r}, -\theta \right] = [1, 0] = 1$, d'où l'inverse ; le quotient est le produit par l'inverse ; enfin $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$. $\square$

Méthode : produit, quotient, puissance

On écrit chaque facteur sous forme trigonométrique ; on **multiplie les modules** et on **additionne les arguments** (on soustrait ceux du dénominateur) ; on revient à la forme algébrique à la fin si besoin.

Exemple

Avec $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = \left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6} \right]$ et $z_2 = -2 + 2i = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$ (section 5) :

$$\bullet \quad z_1 z_2 = \left[8, \frac{7\pi}{12} \right] ; \quad \frac{z_1}{z_2} = \left[1, -\frac{11\pi}{12} \right] ; \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \left[1, \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right] = \left[1, -\frac{7\pi}{12} \right] ; \quad -z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

$$\bullet \quad z_1^3 z_2^2 = \left[(2\sqrt{2})^5, 3 \times \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2 \times \frac{3\pi}{4} \right] = \left[128\sqrt{2}, \pi \right], \text{ donc } z_1^3 z_2^2 = -128\sqrt{2} \text{ (un réel, sans aucun développement !).}$$

Exemple : avec un paramètre : $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Soit $Z = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$. Comme $\cos \alpha > 0$ (c'est indispensable : le module doit être positif) :

$$1 + i \tan \alpha = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha} = \left[\frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \right] \quad \text{et} \quad 1 - i \tan \alpha = \overline{1 + i \tan \alpha} = \left[\frac{1}{\cos \alpha}, -\alpha \right].$$

Donc $Z = [1, 2\alpha] = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$: quand α décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le point d'affixe Z décrit le cercle trigonométrique privé du point d'affixe -1 .

7

La formule de Moivre

Théorème (formule de Moivre)

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Par conséquent, pour $r > 0$: $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$, c'est-à-dire $|z^n| = |z|^n$ et $\arg z^n \equiv n \arg z [2\pi]$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$ ($1 = \cos 0 + i \sin 0$) ; si c'est vrai au rang n , la formule du produit (section 6) donne $[1, \theta]^{n+1} = [1, n\theta] \times [1, \theta] = [1, (n+1)\theta]$. Pour $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$: $[1, \theta]^{-p} = \frac{1}{[1, p\theta]} = [1, -p\theta]$ (inverse). Enfin $[r, \theta]^n = r^n [1, \theta]^n = [r^n, n\theta]$. $\square$

Exemple : les puissances de $1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$

Pour $n \in \mathbb{N}$: $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$.

- $(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R} \iff \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \iff n$ est multiple de 3 ; il est réel **positif** $\iff n$ est multiple de 6.
- Il n'est **jamais** imaginaire pur : $\cos \frac{n\pi}{3} = 0 \iff \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff 2n = 3(2k+1)$, impossible (pair = impair).
- $2026 = 6 \times 337 + 4$, donc $(1 + i\sqrt{3})^{2026} = \left[2^{2026}, \frac{4\pi}{3}\right] = 2^{2026} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{2025} (1 + i\sqrt{3})$.
- $1 - i\sqrt{3} = \overline{1 + i\sqrt{3}}$, donc $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2 \operatorname{Re}((1 + i\sqrt{3})^n) = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$ (un entier !).

7.1 $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

Formules

Pour tout réel θ , en notant $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$:

$$\cos 3\theta = 4c^3 - 3c \quad \sin 3\theta = 3s - 4s^3 \quad \cos 4\theta = 8c^4 - 8c^2 + 1 \quad \sin 4\theta = 4sc(2c^2 - 1).$$

Démonstration. D'après Moivre, $\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$. On identifie les parties réelles et imaginaires (tous ces nombres sont réels) : $\cos 3\theta = c^3 - 3cs^2 = c^3 - 3c(1 - c^2) = 4c^3 - 3c$ et $\sin 3\theta = 3c^2s - s^3 = 3(1 - s^2)s - s^3 = 3s - 4s^3$. De même, $(c + is)^2 = (c^2 - s^2) + 2ics$, puis

$$\cos 4\theta + i \sin 4\theta = ((c^2 - s^2) + 2ics)^2 = (c^2 - s^2)^2 - 4c^2s^2 + 4ics(c^2 - s^2),$$

donc $\cos 4\theta = (2c^2 - 1)^2 - 4c^2(1 - c^2) = 8c^4 - 8c^2 + 1$ et $\sin 4\theta = 4sc(c^2 - s^2) = 4sc(2c^2 - 1)$. $\square$

Exemple : valeurs exactes et équations

- Avec $\theta = \frac{\pi}{9}$: $4c^3 - 3c = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$: $\cos \frac{\pi}{9}$ est une solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.
- Avec $\theta = \frac{\pi}{8}$: $8c^4 - 8c^2 + 1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, donc $c^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$; comme $c = \cos \frac{\pi}{8} > \cos \frac{\pi}{4}$, on a $c^2 > \frac{1}{2}$, d'où $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

7.2 Sommes de cosinus et de sinus

Théorème

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n\theta}{2} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{n\theta}{2}.$$

Démonstration. Lemme (angle moitié) : pour tout réel t , $1 - \cos t - i \sin t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} - 2i \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = -2i \sin \frac{t}{2} (\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2})$.

Soit $w = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$ (car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$). Comme dans $\mathbb{R}$, $(1 - w)(1 + w + \dots + w^n) = 1 - w^{n+1}$, et $w^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$ (Moivre), donc

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta + i \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} = \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \left[1, \frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{-2i \sin \frac{\theta}{2} \left[1, \frac{\theta}{2}\right]} = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2}\right).$$

Le facteur $\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ est réel : on identifie les parties réelles et imaginaires. $\square$

Exemple : la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

Avec $\theta = \frac{2\pi}{5}$ et $n = 4$: $\sin \frac{5\theta}{2} = \sin \pi = 0$, donc $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$. Or $\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5} = 2c^2 - 1$ avec $c = \cos \frac{2\pi}{5}$: $1 + 2c + 2(2c^2 - 1) = 0$, soit

$$4c^2 + 2c - 1 = 0. \text{ Comme } c > 0 : \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

8

Interprétation géométrique

Théorème (angles et distances)

Si $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$ sont deux vecteurs non nuls : $(\vec{w}, \vec{w}') \equiv \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$. En particulier, pour $A \neq B$ et $C \neq D$:

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg \frac{d-c}{b-a} [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{CD}{AB} = \left| \frac{d-c}{b-a} \right|; \quad (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg \frac{c-a}{b-a} [2\pi].$$

Démonstration. Si $\vec{OM} = \vec{w}$, alors $M(z)$ et $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv \arg z$. Par la relation de Chasles : $(\vec{w}, \vec{w}') \equiv (\vec{w}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{w}') \equiv -\arg z + \arg z' \equiv \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$. On applique ceci à $\vec{AB}(b-a)$ et $\vec{CD}(d-c)$. $\square$

Conséquences (A, B, C distincts, $C \neq D$)

- A, B, C alignés $\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$; $(AB) \perp (AC) \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.
- $(AB) \parallel (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$; $(AB) \perp (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Méthode : nature d'un triangle ou d'un quadrilatère

On calcule $Z = \frac{c-a}{b-a}$ (sommet A), sous forme algébrique **et** trigonométrique :

$ Z = 1$	$Z \in i\mathbb{R}$	$Z = \pm i$	$Z = \left[1, \pm \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$
isocèle en A	rectangle en A	rectangle isocèle en A	équilatéral

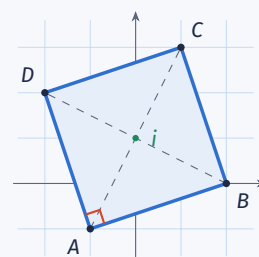
Quadrilatère ABCD : parallélogramme $\iff a+c = b+d$; un parallélogramme est un **rectangle** si $\frac{d-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$, un **losange** si $\frac{d-b}{c-a} \in i\mathbb{R}$ (diagonales perpendiculaires), un **carré** si $\frac{d-a}{b-a} = \pm i$.

Exemple : un triangle équilatéral, un carré

- $A(1+i), B(3+i), C(2+(1+\sqrt{3})i)$: $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$,
donc $AC = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$: ABC est **équilatéral**.
- $A(-1-i), B(2), C(1+3i), D(-2+2i)$ (figure) : $a+c = 2i = b+d$,
donc ABCD est un parallélogramme ; et

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{10} = \frac{10i}{10} = i,$$

donc $AD = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}$: ABCD est un **carré**, de côté $|b-a| = \sqrt{10}$.



Exemple : les points $M(z)$, $N(z^2)$, $P(z^3)$, avec $z \notin \{-1, 0, 1\}$ (un grand classique)

Les trois points sont distincts ($z^2 = z \iff z \in \{0, 1\}$; $z^3 = z \iff z \in \{-1, 0, 1\}$; $z^3 = z^2 \iff z \in \{0, 1\}$), et

$$\frac{p - m}{n - m} = \frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z+1 \quad (\text{sommet } M).$$

- M, N, P alignés $\iff z+1 \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$; MNP rectangle en $M \iff z+1 \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re} z = -1$ (droite $x = -1$ privée du point -1).
- MNP isocèle en $M \iff |z+1| = 1$: cercle de centre -1 et de rayon 1 , privé de 0 .
- MNP équilatéral $\iff z+1 = \left[1, \pm \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \iff z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$: on retrouve j et $\bar{j} = j^2$ (section 12), et $\{M, N, P\} = \{1, j, j^2\}$.

8.1 Points cocycliques**Théorème**

Soit A, B, C, D quatre points distincts, avec A, B, C non alignés. Alors

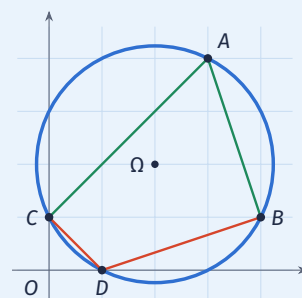
$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) [\pi] \iff \frac{c-a}{b-a} \times \frac{d-b}{d-c} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La première équivalence est le théorème de l'angle inscrit (version orientée, admise) : D est sur le cercle circonscrit à ABC si et seulement si l'on « voit » $[BC]$ depuis A et depuis D sous le même angle, à π près. Pour la seconde :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{c-a}{b-a}$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg \frac{c-d}{b-d} [2\pi]$, donc

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \right) [2\pi],$$

avec $\frac{b-d}{c-d} = \frac{d-b}{d-c}$. Or un complexe non nul a un argument $\equiv 0 [\pi]$ si et seulement s'il est réel. $\square$

**Exemple : $A(3+4i)$, $B(4+i)$, $C(i)$, $D(1)$ (figure ci-dessus)**

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-3-3i}{1-3i} = \frac{(-3-3i)(1+3i)}{10} = \frac{3-6i}{5} \quad \text{et} \quad \frac{d-b}{d-c} = \frac{-3-i}{1-i} = \frac{(-3-i)(1+i)}{2} = -1-2i,$$

de produit $\frac{(3-6i)(-1-2i)}{5} = \frac{-15}{5} = -3 \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{c-a}{b-a} \notin \mathbb{R}$, les points A, B, C ne sont pas alignés : les quatre points sont **cocycliques**. Contrôle : avec $\Omega(2+2i)$, les modules $|a-\omega| = |1+2i|$, $|b-\omega| = |2-i|$, $|c-\omega| = |-2-i|$ et $|d-\omega| = |-1-2i|$ valent tous $\sqrt{5}$.

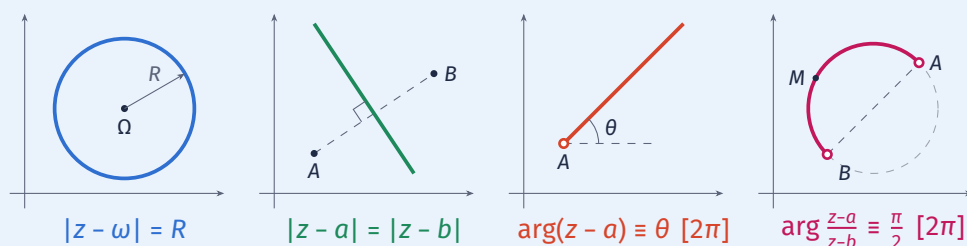
9

Ensembles de points

Les ensembles de référence ($A(a) \neq B(b)$, $\Omega(\omega)$, $R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$)

Condition sur $M(z)$	Ensemble	Condition sur $M(z)$	Ensemble
$ z - \omega = R$	cercle $C(\Omega, R)$	$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$	droite (AB) privée de B
$ z - \omega \leq R$	disque fermé	$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}_-$	segment ouvert $]AB[$
$ z - a = z - b $	médiatrice de $[AB]$	$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$	cercle de diamètre $[AB]$ privé de B
$\arg(z - a) \equiv \theta [2\pi]$	demi-droite ouverte d'origine A	$\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv \theta [2\pi]$, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	arc de cercle d'extrémités A et B (exclues)

Justification. Pour $M \neq A$ et $M \neq B$: $\frac{z-a}{z-b} = \frac{a-z}{b-z}$, donc $\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv (\vec{MB}, \vec{MA}) [2\pi]$. Ce nombre est réel $\iff M \in (AB)$; réel négatif $\iff (\vec{MB}, \vec{MA}) \equiv \pi \iff M \in]AB[$; imaginaire pur $\iff (MA) \perp (MB) \iff M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$; et le point $M = A$ donne 0, réel et imaginaire pur. L'arc de cercle découle du théorème de l'angle inscrit.



Méthode : déterminer un ensemble de points

- Lecture géométrique :** faire apparaître $|z - a|$, $\arg(z - a)$ ou $\frac{z-a}{z-b}$ (factoriser le coefficient de z , utiliser $|\overline{w}| = |w|$, $|iw| = |w|$) ;
- sinon, calcul en coordonnées :** poser $z = x + iy$ et traduire la condition par une équation en x et y ;
- ne pas oublier les **points exclus** (valeurs interdites, argument de 0).

Exemple : trois ensembles

- $|iz + 1 - i| = |\bar{z} - 3|$: $iz + 1 - i = i\left(z + \frac{1-i}{i}\right) = i(z - (1+i))$ et $|\bar{z} - 3| = |\overline{z-3}| = |z-3|$. La condition s'écrit $|z - (1+i)| = |z-3|$: c'est la **médiatrice** de $[AB]$ avec $A(1+i)$ et $B(3)$.
- $|z-2| = 2|z+1|$: avec $z = x+iy$, $(x-2)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2) \iff 3x^2 + 12x + 3y^2 = 0 \iff (x+2)^2 + y^2 = 4$: c'est le **cercle** de centre $\Omega(-2)$ et de rayon 2.
- $Z = \frac{z-2i}{z-2}$ ($z \neq 2$), avec $A(2i)$ et $B(2)$. $Z \in i\mathbb{R} \iff M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$ (centre $1+i$, rayon $\sqrt{2}$), privé de B . **Contrôle :** $Z = \frac{(z-2i)(\bar{z}-2)}{|z-2|^2}$ et $(z-2i)(\bar{z}-2) = (x^2+y^2-2x-2y) + i(4-2x-2y)$, d'où $\operatorname{Re} Z = 0 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Enfin $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff (\operatorname{Re} Z = 0, \operatorname{Im} Z > 0)$: c'est l'**arc** du côté de O ($x+y < 2$), sans A ni B .

10

Équations dans $\mathbb{C}$ 10.1 Premier degré, équations avec $\bar{z}$

Théorème

- Si $a \neq 0$, l'équation $az + b = 0$ a pour unique solution $z = -\frac{b}{a}$.
- Soit a, b, c dans $\mathbb{C}$ avec $|a| \neq |b|$. L'équation $az + b\bar{z} = c$ a une **unique** solution :

$$z = \frac{\bar{a}c - b\bar{c}}{|a|^2 - |b|^2}.$$

Démonstration du second point. Pour tout z , on pose $w = az + b\bar{z} - c$; en développant, $\bar{a}w - b\bar{w} = (|a|^2 - |b|^2)z - (\bar{a}c - b\bar{c})$. Si z est solution, $w = 0$, d'où la formule : il y a au plus une solution. Réciproquement, pour ce z , on a $\bar{a}w = b\bar{w}$, donc $|a| |w| = |b| |w|$, et $w = 0$ puisque $|a| \neq |b|$. $\square$

Exemple

- $(1 + 2i)z - 3 + i = 0 \iff z = \frac{3 - i}{1 + 2i} = \frac{(3 - i)(1 - 2i)}{5} = \frac{1 - 7i}{5}$.
- $2z + i\bar{z} = 3 - 3i$ ($|2| \neq |i|$). Avec $z = x + iy$: $2x + 2iy + i(x - iy) = (2x + y) + i(x + 2y)$, d'où le système $2x + y = 3$, $x + 2y = -3$, soit $x = 3$, $y = -3$: $z = 3 - 3i$ (la formule donne $\frac{2(3-3i)-i(3+3i)}{4-1} = \frac{9-9i}{3}$).
- Si $|a| = |b|$, tout peut arriver : $z + \bar{z} = 2 \iff \operatorname{Re} z = 1$ (une infinité de solutions) ; $z - \bar{z} = 2$ n'a aucune solution ($z - \bar{z} \in i\mathbb{R}$).

10.2 Systèmes, équation $z^2 = a$ avec a réel

Exemple : un système linéaire

$\begin{cases} z + iz' = 2 + 3i \\ (1 - i)z + z' = 4 - i \end{cases}$ La seconde équation donne $z' = 4 - i - (1 - i)z$; on reporte : $z + i(4 - i) - i(1 - i)z = 2 + 3i$, soit $z + 4i + 1 - (i + 1)z = 2 + 3i$, donc $-iz = 1 - i$ et $z = \frac{1 - i}{-i} = 1 + i$; puis $z' = 4 - i - (1 - i)(1 + i) = 2 - i$. Solution : $(1 + i, 2 - i)$.

Théorème (l'équation $z^2 = a$, a réel)

Si $a \geq 0$: les solutions de $z^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$; si $a < 0$: ce sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Démonstration. Si $a < 0$, on pose $w = i\sqrt{-a}$: $w^2 = i^2(-a) = a$, donc $z^2 = a \iff z^2 - w^2 = 0 \iff (z - w)(z + w) = 0 \iff z = w$ ou $z = -w$ (produit nul). Même calcul avec $w = \sqrt{a}$ si $a \geq 0$. $\square$

Exemples : $z^2 = -7 \iff z = \pm i\sqrt{7}$; $(2z - 1)^2 = -16 \iff 2z - 1 = \pm 4i \iff z = \frac{1}{2} \pm 2i$; $z^4 = 81 \iff (z^2 - 9)(z^2 + 9) = 0 \iff z \in \{3, -3, 3i, -3i\}$.

Exemple : une équation avec $\bar{z}$: $\bar{z} = z^3$

Si $\bar{z} = z^3$, alors $|z| = |z|^3$, donc $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. Si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et l'équation devient $z^4 = 1$, soit $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, d'où $z \in \{1, -1, i, -i\}$. Réciproquement, $0, \pm 1$ et $\pm i$ conviennent ($\bar{i} = -i = i^3$) : $S = \{0, 1, -1, i, -i\}$.

Exemple : une équation avec le module

Résoudre $|z| - z = 1 + 2i$. Avec $z = x + iy$: $(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - iy = 1 + 2i$, donc $y = -2$ et $\sqrt{x^2 + 4} = 1 + x$. Cette égalité impose $x \geq -1$, puis $x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2$, soit $x = \frac{3}{2}$ (qui convient). Solution unique : $z = \frac{3}{2} - 2i$ (contrôle : $|z| = \frac{5}{2}$).

11 Les pièges classiques

× Faux	✓ Vrai
« $\operatorname{Im}(3 - 4i) = -4i$ »	$\operatorname{Im}(3 - 4i) = -4$: la partie imaginaire est un réel
« $a + ib = a' + ib' \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$ » pour tous a, b, a', b'	seulement pour a, b, a', b' réels : $1 + i \times i = 0 + i \times 0$
« $z^2 \geq 0$ » ; « $z < z'$ »	pas d'ordre dans $\mathbb{C}$; z^2 n'est même pas toujours réel : $(1 + i)^2 = 2i$
« $ z ^2 = z^2$ » ; « $z\bar{z} = z $ »	$ z ^2 = z\bar{z}$: $ i ^2 = 1$ et $i^2 = -1$
« $ z + z' = z + z' $ »	seulement $\leq$; égalité si z et z' ont même direction et même sens
« $-2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \left[-2, \frac{\pi}{3}\right]$ »	le module est > 0 : c'est $\left[2, \frac{4\pi}{3}\right]$
« $3(\cos \theta - i \sin \theta) = [3, \theta]$ »	le signe central doit être $+$: c'est $[3, -\theta]$
« $\arg(z + z') \equiv \arg z + \arg z'$ »	vrai pour le produit : $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}$, mais $\arg 1 + \arg i \equiv \frac{\pi}{2}$
« $\arg(-z) \equiv -\arg z$ » ; « $\arg(\lambda z) \equiv \arg z$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) »	$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z$; $\arg(\lambda z) \equiv \arg z + \pi$ si $\lambda < 0$
« $\arg \frac{c-a}{b-a} \equiv (\vec{AC}, \vec{AB})$ »	c'est $(\vec{AB}, \vec{AC})$: le vecteur du dénominateur vient en premier
« $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \iff M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$ »	privé de B (valeur interdite) ; A convient car $0 \in i\mathbb{R}$
« $z^2 = -9$ n'a pas de solution »	dans $\mathbb{C}$: $z = 3i$ ou $z = -3i$
« $\arg 0 \equiv 0$ »	0 n'a pas d'argument : écarter $z = a$ dans $\arg(z - a)$

12

Les astuces des concours

★ **Astuce de concours :** $|z| = 1 \iff \frac{1}{z} = \bar{z}$

Pour $z \neq 0$: $|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$. On remplace alors **chaque** conjugué par un inverse.

Exemple : si $|a| = |b| = 1$ et $ab \neq -1$, alors $Z = \frac{a+b}{1+ab}$ est réel, car $\bar{Z} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{ab}} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{ab+1}{ab}} = Z$.

★ **Astuce de concours :** l'identité du parallélogramme

$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$: on développe avec $|w|^2 = w\bar{w}$, les termes $zz' + \bar{z}\bar{z}'$ se compensent. Application (théorème de la médiane) : si I est le milieu de $[BC]$, d'affixe m , on pose $z = b - a$ et $z' = c - a$: $z + z' = 2(m - a)$ et $z - z' = b - c$, donc $4AI^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, soit $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

★ **Astuce de concours :** $\frac{z-a}{z-b}$ réel : on ne garde que le numérateur

$\frac{z-a}{z-b} = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{b})}{|z-b|^2}$ et $|z-b|^2 > 0$: $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}((z-a)(\bar{z}-\bar{b})) = 0$. Inutile de calculer le dénominateur ! (De même pour « imaginaire pur » avec la partie réelle.)

★ **Astuce de concours :** quand $z + \frac{1}{z}$ est-il réel ?

Pour $z \neq 0$: $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \iff (z - \bar{z}) - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \iff (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1)$.

★ **Astuce de concours :** le nombre j et le triangle équilatéral

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$: $j^3 = [1, 2\pi] = 1$, $\bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}$, et $1 + j + j^2 = 0$ car $(j-1)(1+j+j^2) = j^3 - 1 = 0$ avec $j \neq 1$.

Application : ABC est équilatéral direct $\iff a + jb + j^2c = 0$. En effet, avec $j^2 = -1 - j$: $a + jb + j^2c = (a-c) + j(b-c)$, qui est nul $\iff \frac{a-c}{b-c} = -j = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right] \iff CA = CB$ et $(\vec{CB}, \vec{CA}) \equiv -\frac{\pi}{3}$, soit $(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

★ **Astuce de concours :** $\cos \frac{\pi}{12}$ par un produit

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$: $(1+i\sqrt{3})(1-i) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right] \times \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$, et en forme algébrique $(1+i\sqrt{3})(1-i) = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$. En identifiant :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}.$$

★ *Astuce de concours : une somme trigonométrique par Moivre*

Si $|w| = 1$ et $w \neq 1$, alors $\operatorname{Re} \frac{1}{1-w} = \frac{1}{2}$: en effet $\frac{1}{1-w} = \frac{1-\bar{w}}{|1-w|^2}$ et $|1-w|^2 = 2 - 2 \operatorname{Re} w = 2 \operatorname{Re}(1-\bar{w})$.

Avec $w = \left[1, \frac{\pi}{7}\right]$: $w^7 = [1, \pi] = -1$, donc $w + w^3 + w^5 = \frac{w-w^7}{1-w^2} = \frac{w+1}{(1-w)(1+w)} = \frac{1}{1-w}$. En prenant les parties réelles (Moivre) :

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

★ *Astuce de concours : la factorisation par l'angle moitié*

Pour tous réels u et v , on met $\left[1, \frac{u+v}{2}\right]$ en facteur, puis $[1, t] + [1, -t] = 2 \cos t$ et $[1, t] - [1, -t] = 2i \sin t$:

$$[1, u] + [1, v] = 2 \cos \frac{u-v}{2} \left[1, \frac{u+v}{2}\right] \quad [1, u] - [1, v] = 2i \sin \frac{u-v}{2} \left[1, \frac{u+v}{2}\right].$$

Exemple : pour $\alpha \in]-\pi, \pi[$, $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = [1, 0] + [1, \alpha] = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ (ici $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$), donc, par Moivre, $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \left[2^n \cos^n \frac{\alpha}{2}, \frac{n\alpha}{2}\right]$. Si $\cos \frac{u-v}{2} < 0$, on ajoute π à l'argument.

★ *Astuce de concours : l'identité de Lagrange*

$|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2)$ (développer les deux carrés avec $|w|^2 = w\bar{w}$). Ainsi, si $|a| < 1$ et $|b| < 1$, alors $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$; et si $|a| = 1$ et $\bar{a}b \neq 1$, alors $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$.

13

L'essentiel du chapitre en une page

Forme algébrique (a, b réels)

$$z = a + ib, \operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b ; i^2 = -1, i^{4k+r} = i^r$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} ; (1+i)^2 = 2i$$

$$a+ib = a'+ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Plan complexe

$$\overrightarrow{AB}(b-a) ; \text{milieu } \frac{a+b}{2} ; \text{barycentre } \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$ABCD \text{ parallélogramme} \iff a+c = b+d$$

Conjugué $\bar{z} = a - ib$ (symétrie d'axe réel)

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}', \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \overline{z^n} = \bar{z}^n, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z ; z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$$

$$\operatorname{Re}(\bar{z}z') = \vec{w} \cdot \vec{w}' ; \operatorname{Im}(\bar{z}z') = \det(\vec{w}, \vec{w}')$$

Module

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} ; |z|^2 = z\bar{z} ; AB = |b-a| ; \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$|zz'| = |z| |z'| ; \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} ; |z^n| = |z|^n$$

$$||z| - |z'|| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\text{égalité à droite} \iff z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+ \text{ (même sens)}$$

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

Argument et forme trigonométrique ($z \neq 0$)

$$\arg z \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi] ; z = [r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r = |z| > 0, \cos \theta = \frac{a}{r}, \sin \theta = \frac{b}{r}$$

$$a > 0 : \theta \equiv \arctan \frac{b}{a} ; a < 0 : \theta \equiv \pi + \arctan \frac{b}{a}$$

$$\arg \bar{z} \equiv -\theta ; \arg(-z) \equiv \pi + \theta ; z \in \mathbb{R}^* \iff \theta \equiv 0 [\pi]$$

$$1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] ; 1+i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3} \right] ; \sqrt{3}+i = \left[2, \frac{\pi}{6} \right]$$

Ensembles de points $M(z)$ (arguments à 2π près)

$$|z-\omega| = R : \text{cercle} ; |z-a| = |z-b| : \text{médiatrice}$$

$$\arg(z-a) \equiv \theta : \text{demi-droite ouverte d'origine } A$$

$$\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) ; \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} : (AB) \text{ privée de } B$$

$$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} : \text{cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B$$

$$\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv \theta \ (\theta \notin \pi\mathbb{Z}) : \text{arc d'extrémités } A \text{ et } B$$

Calculs et formule de Moivre

$$[r, \theta][r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'] ; \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right] ; \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta] ; [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \ (n \in \mathbb{Z})$$

$$\cos 3\theta = 4c^3 - 3c ; \sin 3\theta = 3s - 4s^3$$

$$\cos 4\theta = 8c^4 - 8c^2 + 1 ; \sin 4\theta = 4sc(2c^2 - 1)$$

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n\theta}{2} \ (\theta \notin 2\pi\mathbb{Z})$$

$$\sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{n\theta}{2}$$

$$[1, u] + [1, v] = 2 \cos \frac{u-v}{2} \left[1, \frac{u+v}{2} \right] \text{ (angle moitié)}$$

Géométrie

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \frac{d-c}{b-a} [2\pi] ; \frac{CD}{AB} = \left| \frac{d-c}{b-a} \right|$$

$$Z = \frac{c-a}{b-a} \text{ (sommet } A) : Z \in \mathbb{R} : A, B, C \text{ alignés}$$

$$Z \in i\mathbb{R} : \text{rectangle en } A ; |Z| = 1 : \text{isocèle en } A$$

$$Z = \pm i : \text{rectangle isocèle} ; Z = \left[1, \pm \frac{\pi}{3} \right] : \text{équilatéral}$$

$$A, B, C \text{ non alignés. } A, B, C, D \text{ cocycliques}$$

$$\iff \frac{c-a}{b-a} \times \frac{d-b}{d-c} \in \mathbb{R}$$

Équations

$$z^2 = a, a \in \mathbb{R} : z = \pm \sqrt{a} \ (a \geq 0) ; z = \pm i\sqrt{-a} \ (a < 0)$$

$$az+b\bar{z} = c, |a| \neq |b| : z = \frac{\bar{a}c - b\bar{c}}{|a|^2 - |b|^2} \text{ (ou } z = x+iy)$$

Astuces

$$|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ (remplacer les conjugués)}$$

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z| = 1)$$

$$j = \left[1, \frac{2\pi}{3} \right] : j^3 = 1, 1+j+j^2 = 0, \bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}$$

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}((z-a)(\bar{z}-\bar{b})) = 0$$

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

14 Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Forme algébrique et égalité ★

corrigé p. 41

1. Écrire sous forme algébrique : $a = (2 - i)^3$; $b = \frac{7+i}{3-i}$; $c = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; $d = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2026}$.
2. Déterminer les réels x et y tels que $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = \frac{5+i}{2}$.
3. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $Z = \frac{m+2i}{1+mi}$. Écrire Z sous forme algébrique ; pour quelles valeurs de m Z est-il réel ? imaginaire pur ? Montrer que $|Z| > 1$.

Exercice 2 Conjugué et module ★

corrigé p. 41

1. Sans développer, calculer le module de $u = (1 - 2i)(2 + i)^3$, $v = \frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^3}$ et $w = \frac{(2+3i)^2}{3-2i}$.
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $z\bar{z}' + \bar{z}z'$ est réel et que $z\bar{z}' - \bar{z}z'$ est imaginaire pur.
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$. En déduire que, si $|z| = 1$, alors $\frac{z^2-1}{z}$ est imaginaire pur et $\frac{(1+z)^2}{z}$ est un réel positif.

Exercice 3 Points, vecteurs et barycentres ★

corrigé p. 41

On considère les points $A(-2 + i)$, $B(2 + 3i)$ et $C(1 - 2i)$.

1. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et les distances AB , AC , BC .
2. Calculer les affixes du milieu I de $[BC]$, du centre de gravité G de ABC , du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme et du barycentre H de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, -1)$. Vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
3. Déterminer le réel y tel que $E(4 + yi) \in (AB)$, puis le réel x tel que $F(x + 2i)$ vérifie $(CF) \perp (AB)$.

Exercice 4 Forme trigonométrique ★

corrigé p. 42

1. Forme trigonométrique de : $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$; $z_2 = -5i$; $z_3 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_4 = -3\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$; $z_5 = 2\left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}\right)$.
2. En déduire la forme trigonométrique de $z_1 z_3$, $\frac{z_1^2}{z_3}$, $z_2 z_4$ et $\bar{z}_1^3$, puis la forme algébrique de $\bar{z}_1^3$.
3. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Forme trigonométrique de $u = \sin \theta + i(1 - \cos \theta)$ et de $v = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$.

Exercice 5 Puissances et formule de Moivre ★

corrigé p. 42

1. Calculer $(1-i)^{10}$, $(\sqrt{3}+i)^9$ et $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{24}$.
2. Soit $w = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$. Écrire w sous forme algébrique et sous forme trigonométrique ; en déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$. Pour quels entiers naturels n le nombre w^n est-il réel ? Calculer w^{12} .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (1+i)^n + (1-i)^n$. Montrer que $u_n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$; calculer u_{2024} et u_{2026} .

Exercice 6 Alignement, orthogonalité, triangles ★

corrigé p. 42

1. Soient $A(2+i)$, $B(4+5i)$, $C(-2+3i)$. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC .
2. Soient $P(1+2i)$, $Q(3-i)$, $R(-1-2i)$, $S(5+2i)$ et $T(-3+8i)$. Montrer que $(PQ) \perp (RS)$ et que P, Q, T sont alignés.
3. Nature du triangle ABC lorsque $\frac{c-a}{b-a}$ vaut : a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ b) $3i$ c) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $1+i$.

Exercice 7 Ensembles de points ★

corrigé p. 43

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : a) $|z+1-2i| = 2$ b) $|3iz-6| = 9$ c) $|\bar{z}+2i| = |z-4|$
 d) $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ e) $\frac{z-2i}{z+1} \in \mathbb{R}$ f) $\frac{z-2i}{z+1} \in i\mathbb{R}$ g) $\arg \frac{z-2i}{z+1} \equiv \pi [2\pi]$.

Exercice 8 Équations et systèmes ★

corrigé p. 43

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $(2-i)z+3i=1+4i$ b) $iz+2\bar{z}=1-i$ c) $\frac{z-1}{z+i}=2i$ d) $z^2=-12$ e) $(z+3)^2=-2$
 f) $z^4-5z^2-36=0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système : $(1+i)z-iz'=-2$ et $(2+i)z+(2-i)z'=-i$.

15

Niveau 2 • Bac**Exercice 9** Moivre : $\sin 5\theta$ et $\sin \frac{\pi}{5}$ ★★

corrigé p. 43

1. Montrer que $\sin 5\theta = \sin \theta (16 \sin^4 \theta - 20 \sin^2 \theta + 5)$ pour tout réel θ (formule de Moivre).
2. En déduire que $\sin^2 \frac{\pi}{5}$ et $\sin^2 \frac{2\pi}{5}$ sont les solutions de $16X^2 - 20X + 5 = 0$, puis que $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ et $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.
3. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Résoudre enfin dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x = 5 \sin x$.

Exercice 10 Type examen national (1) ★★

corrigé p. 44

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes $a = \sqrt{3}-i$, $b = 1+i\sqrt{3}$ et $c = a+b$.

1. a) Écrire a et b sous forme trigonométrique. b) Vérifier que $b = ia$; en déduire la nature du triangle OAB , puis celle du quadrilatère $OACB$.
2. a) Montrer que $c = (1+i)a$; en déduire la forme trigonométrique de c . b) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
3. Montrer que $c^6 = 512i$, puis déterminer les entiers naturels n tels que c^n soit imaginaire pur.

4. Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points $M(z)$, $z \neq b$, tels que $\frac{z-a}{z-b}$ soit imaginaire pur. Vérifier que $O \in (\Gamma)$ et $C \in (\Gamma)$.

Exercice 11 Type examen national (2) ★★

corrigé p. 44

On considère les points A, B, C d'affixes $a = -1 - i$, $b = 3 + i$, $c = 1 + 5i$, et le point $\Omega(2i)$.

1. a) Écrire $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique, puis trigonométrique. b) Montrer que $\frac{a-b}{c-b} = i$; en déduire la nature du triangle ABC . c) Calculer $\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^{2026}$.
2. Déterminer l'affixe d du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Montrer que $ABCD$ est un carré de centre Ω .
3. a) Montrer que A, B, C, D sont sur le cercle (Γ) de centre Ω et de rayon $\sqrt{10}$. b) Soit $E(3 + 3i)$. Calculer $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{e-b}{e-c}$ et en déduire, sans calculer ΩE , que $E \in (\Gamma)$.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg \frac{z-a}{z-c} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (on pourra calculer $\frac{b-a}{b-c}$).

Exercice 12 Équations non linéaires ★★

corrigé p. 45

Résoudre dans $\mathbb{C}$ (on pourra poser $z = x + iy$, x et y réels) : a) $z^2 = \bar{z}$ b) $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 13 + 12i$ c) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$ d) $z^2 + |z|^2 = 2 + 2i$ e) $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

Exercice 13 Ensembles de points et quotient ★★

corrigé p. 45

Soient $A(-1)$ et $B(i)$. Pour $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z+1}{z-i}$ et $z = x + iy$ (x, y réels).

1. Exprimer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de x et y .
2. Déterminer et représenter les ensembles de points M tels que : $(E_1) : Z \in \mathbb{R}$; $(E_2) : Z \in i\mathbb{R}$; $(E_3) : |Z| = 1$; $(E_4) : |Z| = \sqrt{2}$; $(E_5) : \arg Z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Vérifier que $O \in (E_5)$.

Exercice 14 Module : encadrements et cas d'égalité ★★

corrigé p. 45

1. Soit z tel que $|z - 2i| = 1$. Montrer que $1 \leq |z| \leq 3$; pour quels z a-t-on $|z| = 1$? $|z| = 3$?
2. Soit z tel que $|z| \leq 1$. Montrer que $1 \leq |z^2 - 4z + 6| \leq 11$, la valeur 11 étant atteinte. Qu'en déduit-on pour l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$?
3. Déterminer les complexes z tels que : a) $|z + 2| = |z| + 2$ b) $|z - i| = |z| - 1$.

Exercice 15 Moivre, sommes et équations trigonométriques ★★

corrigé p. 46

1. On rappelle que $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $8 \cos^3 x - 6 \cos x + \sqrt{2} = 0$.
2. À l'aide du théorème du cours sur les sommes de cosinus, montrer que, pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = \frac{\sin 2x \cos(3x/2)}{\sin(x/2)}$. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Exercice 16 Barycentre et lignes de niveau ★★

corrigé p. 46

Soient $A(-1 + 2i)$, $B(5 - i)$ et G le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

1. Calculer l'affixe g de G et vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2 \operatorname{Re}(u\bar{v})$ ($u, v \in \mathbb{C}$). En écrivant $z - a = (z - g) + (g - a)$ et $z - b = (z - g) + (g - b)$, en déduire que, pour tout point $M(z)$: $2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 30$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $2MA^2 + MB^2 = k$, pour $k = 42$, $k = 30$, puis $k = 21$.

16

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Triangle inscrit dans le cercle unité ★★★

corrigé p. 46

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ distincts sur le cercle (U) de centre O et de rayon 1 (ainsi $\bar{a} = \frac{1}{a}$, etc.).

1. Montrer que $AB^2 = 2 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, puis que : ABC est isocèle en $A \iff a^2 = bc$.
2. Montrer que $Z = \frac{c-a}{b-a}$ vérifie $\bar{Z} = \frac{b}{c} Z$. En déduire que A, B, C ne sont pas alignés, et que : ABC est rectangle en $A \iff b + c = 0$.
3. Montrer que : ABC est équilatéral $\iff a + b + c = 0$.
4. Application : $a = 1$, $b = i$. Existe-t-il c tel que ABC soit équilatéral ? Déterminer c pour que ABC soit isocèle en A ; rectangle en A ; rectangle en B .

Exercice 18 Cordes du cercle unité ★★★

corrigé p. 47

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ quatre points distincts du cercle (U) de centre O et de rayon 1.

1. Montrer que : $M(z) \in (AB) \iff z + ab\bar{z} = a + b$.
2. Montrer que : $(AB) \perp (CD) \iff ab + cd = 0$, et $(AB) \parallel (CD) \iff ab = cd$.
3. On suppose $(AB) \perp (CD)$. Montrer que ces droites se coupent au point P d'affixe $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, puis que $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4$.

Exercice 19 L'application $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ ★★★

corrigé p. 47

Pour $z \neq 1$, on pose $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, et on note $A(1)$, $M(z)$, $M'(f(z))$.

1. Montrer que $(f(z) - 1)(z - 1) = 2$. En déduire que $f(z) \neq 1$, que $f(f(z)) = z$, que $AM \times AM' = 2$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) [2\pi]$.
2. Que décrit M' lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon 2 ? la demi-droite ouverte d'origine A dirigée par le vecteur d'affixe $1 + i$?
3. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$, et que $f(z) \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.
4. Déterminer les points fixes de f (solutions de $f(z) = z$), puis l'ensemble des points M tels que $f(z) = \bar{z}$.

Exercice 20 Quand $1, z, z^2, z^3$ sont-ils cocycliques ? ★★★

corrigé p. 47

Soit z un complexe non réel tel que $z^3 \neq 1$. On considère les points $A(1)$, $M(z)$, $N(z^2)$, $P(z^3)$.

1. Montrer que ces quatre points sont distincts, et que A, M, N ne sont pas alignés.
2. Montrer que $\frac{z^2-1}{z-1} \times \frac{z^3-z}{z^3-z^2} = \frac{(z+1)^2}{z}$.
3. Montrer que, pour $w \in \mathbb{C}^*$: $w + \frac{1}{w} \in \mathbb{R} \iff (w \in \mathbb{R} \text{ ou } |w| = 1)$. En déduire que A, M, N, P sont cocycliques si et seulement si $|z| = 1$; préciser alors le cercle.

Exercice 21 Équations : se ramener à $z^2 = a$ ★★★

corrigé p. 48

1. Déterminer les complexes $z \neq 0$ tels que $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z|$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système : $z + z' = 2$ et $zz' = 5$.
3. Vérifier que $z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4 = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 = -3$, et vérifier que ses solutions sont de module 1.

Exercice 22 Sommes d'angles impairs ★★★

corrigé p. 48

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $w = \cos x + i \sin x$.

1. Montrer que $w^2 \neq 1$ et que $\sum_{k=1}^n w^{2k-1} = \frac{w(1-w^{2n})}{1-w^2}$.
2. À l'aide de l'égalité $1 - (\cos t + i \sin t) = -2i \sin \frac{t}{2} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right)$ ($t \in \mathbb{R}$), montrer que $\sum_{k=1}^n w^{2k-1} = \frac{\sin nx}{\sin x} (\cos nx + i \sin nx)$, puis que $\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$ et $\sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.
3. Montrer que $\cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$ (pour $n = 3$: une astuce du cours).

Exercice 23 Racines d'un polynôme à coefficients réels ★★★

corrigé p. 48

Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$.

1. Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; en déduire que, si α est racine de P , alors $\bar{\alpha}$ aussi.
2. Calculer $P(2i)$ et en déduire deux racines de P . Trouver deux réels p, q tels que, pour tout z , $P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + pz + q)$, puis résoudre $P(z) = 0$.
3. Montrer que les images A, B, C, D des racines $1 + i, 1 - i, -2i, 2i$ sont cocycliques ; préciser le centre et le rayon du cercle.
4. Plus généralement, soient α, β non réels tels que $\operatorname{Re} \alpha \neq \operatorname{Re} \beta$. Montrer que les points d'affixes $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ sont cocycliques.

17

Niveau 4 · Concours**Exercice 24** La droite de Simson ★★★

corrigé p. 49

Soient $A(a), B(b), C(c)$ distincts sur le cercle (U) de centre O et de rayon 1, $M(m)$ un point distinct de B , et P, Q, R ses projetés orthogonaux sur $(BC), (CA), (AB)$. On admet (exercice 18) que (BC) a pour équation $z + bc\bar{z} = b + c$.

1. Justifier que $\frac{p-m}{c-b}$ est imaginaire pur, et en déduire que $p - bc\bar{p} = m - bc\bar{m}$, puis que $p = \frac{1}{2}(b + c + m - bc\bar{m})$.
2. En déduire que $q - p = \frac{1}{2}(a - b)(1 - c\bar{m})$ et $r - p = \frac{1}{2}(a - c)(1 - b\bar{m})$.
3. Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si $M \in (U)$ (théorème de Simson).

Exercice 25 Le théorème de Miquel ★★★

corrigé p. 49

Soient ABC un triangle, $P \in (BC), Q \in (CA), R \in (AB)$ distincts de A, B, C , $M(m)$ distinct de ces six points, et (XYZ) le cercle circonscrit à XYZ .

1. Montrer que A, R, Q ne sont pas alignés, et que $\frac{q-a}{r-a} \cdot \frac{m-r}{m-q} \times \frac{r-b}{p-b} \cdot \frac{m-p}{m-r} \times \frac{p-c}{q-c} \cdot \frac{m-q}{m-p} \in \mathbb{R}^*$.
2. En déduire que si M est sur deux des cercles $(ARQ), (BPR), (CQP)$, il est sur le troisième.
3. Si P, Q, R sont alignés et $M \in (BPR) \cap (CQP)$, montrer (2. dans le triangle ARQ) que $M \in (ABC)$.

Exercice 26 Deux inégalités de concours ★★★

corrigé p. 50

1. Soient $z = x + iy$ (x, y réels) et $r = |z|$. a) Montrer que $|1 + z^2|^2 = 1 + r^4 - 2r^2 + 4x^2$ et $|1 + z|^2 = 1 + 2x + r^2$. b) Montrer par l'absurde que : $|1 + z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.
2. Soit $z = \cos t + i \sin t$ ($t \in \mathbb{R}$). Montrer que $|1 - z| = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|$ et $|1 + z^2| = 2 |\cos t|$, puis que $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$. Cas d'égalité ?

Exercice 27 Où sont les racines d'un polynôme ? ★★★★★

corrigé p. 50

- (Borne de Cauchy.) Soient $n \geq 1$, $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ (les a_k complexes) et $K = \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$. Si z est une racine de P avec $|z| > 1$, montrer que $|z|^n \leq K(1 + |z| + \dots + |z|^{n-1})$, puis que $|z| < 1 + K$. Conclure : toute racine de P vérifie $|z| < 1 + K$.
- (Théorème d'Eneström–Kakeya.) Soient des réels $0 < c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_n$ ($n \geq 1$) et $Q(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$. Développer $(1 - z)Q(z)$, puis montrer par l'absurde que toute racine z de Q vérifie $|z| \leq 1$.
- Application : résoudre $1 + 2z + 3z^2 = 0$ et vérifier sur cet exemple les deux résultats.

Exercice 28 Le théorème de Brahmagupta ★★★★★

corrigé p. 50

Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle (U) de centre O et de rayon 1 ; ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires et se coupent en P . On note K et L les milieux de $[CD]$ et de $[AB]$.

- À l'aide de l'exercice 18, justifier que $ac + bd = 0$ et que $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.
- Montrer que $\frac{k-p}{b-a} = -\frac{a+b}{2(b-a)}$ est imaginaire pur. En déduire que la perpendiculaire à (AB) passant par P passe par le milieu K du côté opposé $[CD]$.
- Montrer que $OLPK$ est un parallélogramme, puis que $c + d = \frac{d}{a}(a - b)$. En déduire que la distance de O au côté $[CD]$ vaut $\frac{1}{2}AB$.

Exercice 29 La lemniscate de Bernoulli ★★★★★

corrigé p. 51

Soient $A(1)$, $B(-1)$ et (L) l'ensemble des points $M(z)$, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), tels que $MA \times MB = 1$.

- Montrer que $M \in (L) \iff |z^2 - 1| = 1 \iff (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$. Symétries et points sur l'axe réel ?
- Si $z = [r, \theta]$, montrer avec Moivre que $M \in (L) \iff r^2 = 2 \cos 2\theta$; en déduire que $OM \leq \sqrt{2}$ et $|y| \leq |x|$ sur (L) .
- Sur (L) , exprimer y^2 en fonction de OM^2 ; en déduire $|y| \leq \frac{1}{2}$, avec égalité en quatre points : ceux où $(MA) \perp (MB)$. Tracer (L) .

Exercice 30 Deux sommes et leurs limites ★★★★★

corrigé p. 51

Soient $x \in]0, \pi[$, $q = \cos x (\cos x + i \sin x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $C_n = \sum_{k=0}^n \cos^k x \cos kx$, $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^k x \sin kx$.

- Montrer que $1 - q = -i \sin x (\cos x + i \sin x)$, puis que $\frac{1}{1-q} = 1 + i \frac{\cos x}{\sin x}$.
- Montrer que $C_n + iS_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, puis que $C_n = 1 + \frac{\cos^{n+1} x \sin nx}{\sin x}$ et $S_n = \frac{\cos x - \cos^{n+1} x \cos nx}{\sin x}$.
- En déduire les limites de (C_n) et (S_n) . Application : limites de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos \frac{k\pi}{3}$ et de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \sin \frac{k\pi}{3}$.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

18 Forme algébrique et conjugué

On calcule comme dans $\mathbb{R}$ avec $i^2 = -1$, et l'on identifie parties réelles et imaginaires (qui sont des **réels**). Le conjugué prouve qu'un nombre Z est réel ($\bar{Z} = Z$) ou imaginaire pur ($\bar{Z} = -Z$) sans le calculer ; devant $\bar{z}$ ou $|z|$ dans une équation, on pose $z = x + iy$.

Exercice 31 Calculer dans $\mathbb{C}$ ★

corrigé p. 51

1. Écrire sous forme algébrique :

$$\text{a) } (2+i)(3-2i) - (1-i)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \quad \text{c) } \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} \quad \text{d) } \frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$$

2. a) Soit $m \in \mathbb{N}$. Simplifier $(4m+1)i^{4m+1} + (4m+2)i^{4m+2} + (4m+3)i^{4m+3} + (4m+4)i^{4m+4}$.

b) En déduire la forme algébrique de $T = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 100i^{100}$.

3. a) Déterminer les réels x et y tels que $(3+2i)x + (1-i)y = 7+3i$.

b) Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $Z_m = \frac{2+mi}{1-2i}$. Déterminer le réel m pour que Z_m soit réel, puis pour que Z_m soit imaginaire pur ; préciser Z_m dans chaque cas.

Exercice 32 Le conjugué au travail ★

corrigé p. 52

1. Sans poser $z = x + iy$, montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $A = z\bar{z} + i(z - \bar{z})$ est réel et $B = \frac{z - \bar{z}}{2 + z\bar{z}}$ est imaginaire pur ; que, si $z \notin \mathbb{R}$, $C = \frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$ est imaginaire pur ; et que, si $z \neq 0$, $D = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ est réel.

2. On pose $z = x + iy$ (x, y réels). Exprimer A et D en fonction de x et y . Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $A = 0$.

3. On considère, pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$.

a) Vérifier que $P(i) = 0$. Sans calcul, en déduire $P(-i)$.

b) Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ (on pourra écrire $z^2 - 2z + 5 = (z-1)^2 + 4$).

Exercice 33 Équations avec $\bar{z}$ ou $|z|$ ★★

corrigé p. 52

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$\text{a) } 3z - 2i\bar{z} = 8 - 7i \quad \text{b) } z^2 + 2\bar{z} = 0 \quad \text{c) } \bar{z}^2 + |z|^2 = 2 + 2i \quad \text{d) } z^2 + |z| = 0$$

Pour b), vérifier ensuite que les solutions non nulles ont toutes le même module.

Exercice 34 Un paramètre, un système ★★

corrigé p. 53

1. Pour tout réel m , on pose $z_m = \frac{m+i}{1+mi}$.a) Justifier que z_m est bien défini et l'écrire sous forme algébrique.b) Montrer, sans utiliser a), que $|z_m| = 1$.c) Déterminer les réels m pour lesquels z_m est réel, puis ceux pour lesquels z_m est imaginaire pur.d) Montrer que $z_m \neq -i$ pour tout m . Réciproquement, soit z un complexe de module 1, $z \neq -i$, et $\mu = \frac{i-z}{iz-1}$. Montrer que μ est réel (calculer $\bar{\mu}$ avec $\bar{z} = \frac{1}{z}$), puis que $z = z_\mu$. Quel est l'ensemble des points $M(z_m)$, $m \in \mathbb{R}$?2. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système
$$\begin{cases} (1+i)z - iw = 4 \\ (2+i)z + (2-i)w = 5 + 3i \end{cases}$$
 d'inconnues z et w .**Exercice 35** Carrés réels ; somme et produit réels ★★★

corrigé p. 54

1. Soit $z = x + iy$ (x, y réels). Montrer que $z^2 \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in i\mathbb{R})$, puis que $z^2 \in \mathbb{R}_+ \iff z \in \mathbb{R}$ et $z^2 \in \mathbb{R}_- \iff z \in i\mathbb{R}$.2. Soit z et w deux complexes tels que $s = z + w$ et $p = zw$ soient réels.a) Montrer que $(z - w)^2 = s^2 - 4p$.b) En déduire : si $s^2 - 4p \geq 0$, alors z et w sont réels ; si $s^2 - 4p < 0$, alors $z \notin \mathbb{R}$ et $w = \bar{z}$.

3. Applications.

a) Déterminer les couples (z, w) de complexes tels que $z + w = 4$ et $zw = 13$.b) Déterminer les complexes $z \neq 0$ tels que $z + \frac{1}{z} = 1$, puis calculer z^3 pour chacun d'eux.4. Montrer que $z^3 \in \mathbb{R} \iff y(3x^2 - y^2) = 0$. Représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que z^3 soit réel.**Exercice 36** Les applications $z \mapsto az + b\bar{z}$ ★★★

corrigé p. 54

Soit a et b deux complexes, et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b\bar{z}$.1. a) Calculer $f(1)$ et $f(i)$, puis exprimer a et b en fonction de $f(1)$ et $f(i)$.b) En déduire que si $az + b\bar{z} = a'z + b'\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors $a = a'$ et $b = b'$.c) Déterminer a et b sachant que $f(1) = 1 + 2i$ et $f(i) = 2 + i$.2. Montrer que $f(z)$ est réel pour tout $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si $b = \bar{a}$.3. On suppose $|a| \neq |b|$. Montrer que $f(z) = 0 \iff z = 0$, puis que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$.

4. Dans cette question, $f(z) = z + i\bar{z}$ (ici $|a| = |b|$).
- Pour $z = x + iy$, montrer que $f(z) = (x + y)(1 + i)$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z) = 0$.
 - Pour quels complexes c l'équation $f(z) = c$ admet-elle des solutions ?
5. a) Montrer que, pour tout z : $f(f(z)) = (a^2 + |b|^2)z + b(a + \bar{a})\bar{z}$.
- En déduire que : $f(f(z)) = z$ pour tout $z \iff (a^2 + |b|^2 = 1 \text{ et } b \operatorname{Re}(a) = 0)$.
 - Vérifier que $g(z) = iz + \sqrt{2}\bar{z}$ convient. Déterminer toutes les applications f convenables lorsque a est réel.

19

Module et inégalités

Trois outils : $|zz'| = |z||z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ (on ne développe pas) ; $|z|^2 = z\bar{z}$, d'où $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$; l'inégalité triangulaire $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$, avec égalité à droite si et seulement si $z\bar{w} \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 37 Modules et distances ★

corrigé p. 55

1. Calculer le module de chacun des nombres suivants, sans les écrire sous forme algébrique :

$$\text{a) } (2 - i)^3(1 + 3i) \quad \text{b) } \frac{(4 + 3i)^2}{(1 - 2i)^3} \quad \text{c) } \frac{(\sqrt{3} + i)^5}{(1 - i)^4} \quad \text{d) } \frac{i\bar{z}^3}{z^2} \quad (z \in \mathbb{C}^*)$$

2. Calculer $\left| \frac{3 - 4i}{4 + 3i} \right|$, puis écrire ce quotient sous forme algébrique et en déduire $\left(\frac{3 - 4i}{4 + 3i} \right)^{2026}$.
3. Déterminer le complexe z tel que $|z| = |z - 2| = |z - 2i|$. Interpréter géométriquement.
4. a) Montrer que, pour tous $z, w \in \mathbb{C}$: $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\operatorname{Re}(z\bar{w})$.
- En déduire que $|z + w| = |z - w| \iff z\bar{w} \in i\mathbb{R}$. Interpréter à l'aide des vecteurs $\vec{a}(z)$ et $\vec{b}(w)$ et du parallélogramme qu'ils définissent ; vérifier avec $z = 2 + 3i$ et $w = 3 - 2i$.

Exercice 38 Équations et modules ★

corrigé p. 56

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$\text{a) } |z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1| \quad \text{b) } z|z| = -4i \quad \text{c) } |z| - 2\bar{z} = -3 + 6i \quad \text{d) } |z - 1| = |z + i| = |z - 2 - i|$$

Pour b), commencer par calculer $|z|$. Pour d), interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 39 L'inégalité triangulaire en action ★★

corrigé p. 56

1. Montrer que, si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.
2. Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$.
- Montrer que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$.
 - En déduire que $2 \leq |1 + z| + |1 - z| \leq 2\sqrt{2}$, et déterminer les z pour lesquels chacune des bornes est atteinte.

- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3 + 4i| = |z| + 5$.
- Soit z et w deux complexes. Montrer que $|z| + |w| \leq |z + w| + |z - w|$, avec égalité si et seulement si $w = z$ ou $w = -z$.

Exercice 40 Sur le cercle de rayon 2 ★★

corrigé p. 57

Dans tout l'exercice, z est un complexe tel que $|z| = 2$; on note $A(-1)$, $B(1)$ et $M(z)$.

- Montrer que $|z - 1|^2 = 5 - 2 \operatorname{Re}(z)$ et $|z + 1|^2 = 5 + 2 \operatorname{Re}(z)$. En déduire que $MA^2 + MB^2 = 10$.
- a) Montrer que $|z^2 - 1| \leq 5$ (on pourra utiliser $2pq \leq p^2 + q^2$), et déterminer les z tels que $|z^2 - 1| = 5$.
b) Montrer que $|z^2 - 1| \geq 3$, et déterminer les z tels que $|z^2 - 1| = 3$.
- En déduire que $4 \leq MA + MB \leq 2\sqrt{5}$, et préciser les positions de M pour lesquelles ces bornes sont atteintes.
- Montrer que $z + \frac{4}{z}$ est un réel de l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 41 Sur le cercle unité ★★★

corrigé p. 57

Dans tout l'exercice, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$ (ainsi $|z| = 1$), et l'on pose $S(z) = |1 + z| + |1 - z + z^2|$.

- a) Montrer que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$, puis que $1 - z + z^2 = (2 \cos \theta - 1)z$. En déduire $|1 - z + z^2|$ en fonction de θ .
b) Montrer que $|1 + z| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$.
- On pose $t = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$. Montrer que $t \in [0, 1]$ et que $S(z) = f(t)$, où $f(t) = 2t + |4t^2 - 3|$.
- Étudier les variations de f sur $[0, 1]$ (distinguer $t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$). En déduire que $\sqrt{3} \leq S(z) \leq \frac{13}{4}$ pour tout complexe z de module 1.
- Déterminer les complexes z de module 1 tels que $S(z) = \sqrt{3}$, puis ceux tels que $S(z) = \frac{13}{4}$. Vérifier que les premiers sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

Exercice 42 Un polynôme unitaire sur le cercle unité ★★★

corrigé p. 58

Soit a et b deux complexes et, pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^2 + az + b$.

- Montrer que $P(1) + P(-1) - P(i) - P(-i) = 4$.
- En déduire que l'un au moins des nombres $|P(1)|$, $|P(-1)|$, $|P(i)|$, $|P(-i)|$ est supérieur ou égal à 1.
- Soit u_1, u_2, u_3, u_4 des complexes de module ≤ 1 tels que $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4$. Montrer que $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ (comparer $\operatorname{Re}(u_k)$ et $|u_k|$).
- On suppose que $|P(z)| \leq 1$ pour tout complexe z de module 1. Montrer que $a = b = 0$.
- Soit $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ deux points. Montrer qu'il existe un point M du cercle (U) de centre O et de rayon 1 tel que $MA \times MB \geq 1$. Dans quel cas a-t-on $MA \times MB \leq 1$ pour tout point M de (U) ?
- Soit $c \in \mathbb{C}$ et $Q(z) = z^3 + az^2 + bz + c$. Calculer $Q(1) - Q(-1) + iQ(i) - iQ(-i)$. En déduire que, pour tous points A, B, C , il existe un point M de (U) tel que $MA \times MB \times MC \geq 1$.

20 Forme trigonométrique et Moivre

Dans $[r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, le module r doit être **strictement positif** et le signe central « + ». Pour un produit, un quotient ou une puissance, on multiplie les modules et on ajoute les arguments ; la formule de Moivre transforme puissances et sommes géométriques en trigonométrie.

Exercice 43 Écrire sous forme trigonométrique ★

corrigé p. 58

1. Écrire sous forme trigonométrique :

a) $-3 + 3i\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

c) $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

d) $-5\left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}\right)$

e) $-\sin \frac{\pi}{9} + i \cos \frac{\pi}{9}$

f) $1 + i \tan \frac{\pi}{5}$

2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$. Montrer que $z = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$. En déduire la forme trigonométrique de z lorsque $\theta \in]0, \pi[$, puis lorsque $\theta \in]\pi, 2\pi[$. Que vaut z si $\theta = \pi$?

Exercice 44 Calculer en forme trigonométrique ★

corrigé p. 59

On pose $a = -1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2 - 2i$.

1. Écrire a et b sous forme trigonométrique.
2. En déduire la forme trigonométrique de ab , $\frac{a}{b}$, $\frac{b^2}{a}$ et $-ia$. Quelle relation simple lie $\frac{b^2}{a}$ et $-ia$?
3. Écrire sous forme algébrique $a^6 b^4$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^{2026}$.
4. Déterminer les entiers naturels n tels que a^n soit réel (calculer alors a^n), puis ceux tels que b^n soit imaginaire pur.

Exercice 45 Le cube d'un quotient ★★

corrigé p. 59

On note A et B les points d'affixes 1 et -1 . Pour $z \neq -1$, on note M le point d'affixe z et l'on pose $Z = \frac{z-1}{z+1}$. On cherche l'ensemble (E) des points M tels que Z^3 soit réel.

1. On écrit $z = x + iy$ (x, y réels). Montrer que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$.
2. On suppose $Z \neq 0$ et l'on note φ un argument de Z . À l'aide de la formule de Moivre, montrer que $Z^3 \in \mathbb{R} \iff \varphi \equiv 0 \left[\frac{\pi}{3} \right]$, puis que $Z^3 \in \mathbb{R} \iff (\operatorname{Im}(Z) = 0 \text{ ou } \operatorname{Im}(Z) = \sqrt{3} \operatorname{Re}(Z) \text{ ou } \operatorname{Im}(Z) = -\sqrt{3} \operatorname{Re}(Z))$.
3. En déduire que (E) est la réunion de la droite (AB) et de deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) passant par A et B , dont on précisera les centres et les rayons, privée du point B .
4. Soit C le point d'affixe $i\sqrt{3}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral, puis écrire $\frac{i\sqrt{3}-1}{i\sqrt{3}+1}$ sous forme trigonométrique et vérifier que $C \in (E)$. Interpréter (E) à l'aide de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.

Exercice 46 Une somme pondérée par les rangs ★★

corrigé p. 60

Soit $n \geq 2$ un entier, $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ et, pour $1 \leq k \leq n$, A_k le point d'affixe w^k . On pose $T = \sum_{k=1}^n k w^k = w + 2w^2 + \dots + n w^n$.

1. Montrer que $w^n = 1$, que $w \neq 1$ et que $w + w^2 + \dots + w^n = 0$.
2. Calculer $T - wT$. En déduire que $T = \frac{n w}{w - 1}$.
3. Montrer que $w - 1 = 2i \sin \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)$, puis que $T = \frac{n}{2} - i \frac{n}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$.
4. En déduire $\sum_{k=1}^n k \cos \frac{2k\pi}{n}$ et $\sum_{k=1}^n k \sin \frac{2k\pi}{n}$. Vérifier ces deux résultats pour $n = 4$.
5. Soit G_n le barycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ affectés des coefficients $1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire le point d'affixe $g_n = \frac{T}{1 + 2 + \dots + n}$. Montrer que $g_n = \frac{1}{n+1} \left(1 - i \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right)$, puis déterminer la limite de $\operatorname{Re}(g_n)$ et celle de $\operatorname{Im}(g_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 47 Un produit qui tourne sans fin ★★★

corrigé p. 60

Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = (1+i) \left(1 + \frac{i}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{i}{n}\right)$, $r_n = |P_n|$ et $\theta_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k}$.

1. Écrire $1 + \frac{i}{k}$ sous forme trigonométrique. En déduire que $P_n = [r_n, \theta_n]$ et que $r_n^2 = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.
2. Montrer que (r_n) est croissante et que $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)(k^2 - 1) \leq k^2$; en déduire que $r_n^2 \leq \frac{4n}{n+1}$ (télescopage), puis que (r_n) converge vers un réel $L \in]\sqrt{2}, 2]$.
3. Montrer que $\arctan x \geq \frac{x}{2}$ pour $x \in [0, 1]$, puis que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ vérifie $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et $H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ ($m \in \mathbb{N}$). En déduire que $\theta_n \rightarrow +\infty$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Sachant que $0 < \theta_{n+1} - \theta_n \leq \frac{\pi}{4}$, montrer qu'il existe n et m tels que $\theta_n \in \left[2p\pi - \frac{\pi}{4}, 2p\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ et $\theta_m \in \left[2p\pi + \frac{3\pi}{4}, 2p\pi + \frac{5\pi}{4}\right]$. En déduire que (P_n) n'a pas de limite.

Exercice 48 Les polynômes de Tchebychev ★★★

corrigé p. 61

On définit les polynômes T_n par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et $T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$.

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5 .
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $w = \cos \theta + i \sin \theta$.
 - a) Montrer que $w^{n+1} + w^{n-1} = 2 \cos \theta w^n$ pour $n \geq 1$ (calculer $w + \frac{1}{w}$), puis que $\cos((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos((n-1)\theta)$.
 - b) Montrer par récurrence que $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comparer avec les formules du cours.
3. Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, T_n est de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} .
4. Soit $n \geq 1$ et, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$.
 - a) Montrer que les réels $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts et que $T_n(x_k) = 0$.
 - b) On admet qu'un polynôme de degré n , de coefficient dominant γ , ayant n racines réelles distinctes $a_1, \dots, a_n$, est égal à $\gamma(x - a_1) \dots (x - a_n)$. Montrer que $T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (x - x_k)$.

c) En calculant $T_4(0)$ de deux façons, montrer que $\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} = \frac{1}{8}$.

21 Géométrie et complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Angles, alignement, orthogonalité, nature d'un triangle et cocyclicité se lisent sur des quotients d'affixes.

Exercice 49 Barycentres et alignement ★

corrigé p. 62

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + 5i$, $b = -1 - i$ et $c = 4 + i$.

1. Écrire $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2. Soit G le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$ et J le milieu de $[AC]$. Calculer les affixes g et j , puis montrer que G est le milieu de $[BJ]$.
3. Soit K le barycentre de $\{(B, 2), (C, 1)\}$. Calculer $\frac{g-a}{k-a}$; en déduire que A, G, K sont alignés et écrire $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AK}$.
4. Déterminer des réels α, β, γ tels que O soit le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$. En déduire que O appartient à la droite (BJ) .

Exercice 50 Des quotients qui parlent ★

corrigé p. 62

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = 4 + 3i$ et $c = 5i$.

1. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire la nature du triangle ABC .
2. Déterminer l'affixe d du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Montrer que $ABDC$ est un carré.
3. Écrire $\frac{d-a}{b-a}$ sous forme algébrique puis trigonométrique. En déduire $\frac{AD}{AB}$ et une mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AD})$.
4. Calculer $\frac{d-a}{c-b}$. Que peut-on en déduire pour les diagonales du carré ?

Exercice 51 Les angles d'un triangle ★★

corrigé p. 63

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 0$, $b = 1 + \sqrt{3}$ et $c = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

1. Écrire $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme trigonométrique. En déduire $\frac{AC}{AB}$ et une mesure de $(\vec{AB}, \vec{AC})$.
2. Écrire $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique et en déduire une mesure de $(\vec{BC}, \vec{BA})$.
3. a) Montrer que $(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \pi [2\pi]$ et en déduire une mesure de $(\vec{CA}, \vec{CB})$.
b) Écrire $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme algébrique, puis en déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
4. Soit Ω le point d'affixe $\omega = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Montrer que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , puis écrire ω sous forme trigonométrique.

Exercice 52 Type examen : quatre points cocycliques ★★

corrigé p. 64

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 3$, $b = 2 + 3i$, $c = -1$ et $d = -i$.

1. a) Écrire $\frac{d-a}{b-a}$ sous forme algébrique et en déduire la nature du triangle ABD .
 b) Écrire $\frac{c-a}{b-a}$ et $\frac{d-b}{d-c}$ sous forme algébrique, puis montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques.
2. Déterminer l'affixe ω du centre Ω et le rayon r du cercle (Γ) passant par A, B, C et D .
3. Soit $M(z)$ un point de (Γ) distinct de B et de D . On pose $u = \frac{z-\omega}{r}$ et $v = \frac{b-\omega}{r}$. Montrer que $\frac{z-b}{z-d} = \frac{u-v}{u+v}$, puis que ce nombre est imaginaire pur. Interpréter.
4. Calculer $\frac{d-c}{b-c}$, puis l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 53 Le centre du cercle circonscrit ★★★

corrigé p. 64

Soit $B(b)$ et $C(c)$ deux points tels que O, B, C ne soient pas alignés. On note $\Omega(\omega)$ le centre du cercle circonscrit au triangle OBC , R son rayon et S l'aire du triangle OBC .

1. Montrer que $\overline{bc} - b\overline{c} = 2i \operatorname{Im}(\overline{bc})$, puis que $\overline{bc} - b\overline{c} \neq 0$.
2. Montrer que $\Omega O = \Omega B \iff \overline{b}\omega + b\overline{\omega} = |b|^2$.
3. En déduire que $\omega = \frac{|b|^2c - |c|^2b}{\overline{bc} - b\overline{c}} = \frac{bc(\overline{b} - \overline{c})}{\overline{bc} - b\overline{c}}$.
4. a) Application : $b = 4$ et $c = 1 + 3i$. Calculer ω et R .
 b) En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle de sommets $A_1(1+i)$, $B_1(5+i)$, $C_1(2+4i)$.
5. On admet que $S = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\overline{bc})|$. Montrer que $R = \frac{OB \times OC \times BC}{4S}$.

Exercice 54 Une caractérisation des triangles équilatéraux ★★★

corrigé p. 65

Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts. On pose $u = \frac{c-a}{b-a}$.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $u = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $u = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2 - u + 1 = 0$ (on pourra l'écrire $(u - \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$). En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si $u^2 - u + 1 = 0$.
3. Montrer que : ABC est équilatéral $\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
4. a) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$. Que devient-elle si le centre de gravité de ABC est O ? Exemple : $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$, $c = -1 - i\sqrt{3}$.
 b) Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$, avec z non réel, tels que le triangle de sommets $P(1)$, $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ soit équilatéral.

22 Ensembles de points

Dans tout ce thème, M désigne le point d'affixe $z = x + iy$ (x, y réels). Outils : cercles, médiatrices, demi-droites, $\arg \frac{z-b}{z-a} \equiv (\vec{MA}, \vec{MB})$ (arcs de cercle), cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Exercice 55 Six ensembles à reconnaître ★

corrigé p. 66

Déterminer, puis représenter, l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |2z - 4 + 2i| = 6 & \text{b) } |\bar{z} - 1 - i| = |z + 2i| & \text{c) } |(1 - i)z + 2i| = 2 \\ \text{d) } \arg(z - 1 - i) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] & \text{e) } \arg(i\bar{z}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] & \text{f) } |z - 3| \leq |z + 1 - 2i| \end{array}$$

Exercice 56 Réel ou imaginaire pur : deux méthodes ★

corrigé p. 66

On pose $Z = (z + 1)(\bar{z} - 2i)$.

1. Exprimer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que Z soit réel, puis l'ensemble (E_2) des points M tels que Z soit imaginaire pur.
3. Soit $A(-1)$ et $B(-2i)$. Vérifier que $Z = (z + 1)\overline{(z + 2i)}$, puis retrouver géométriquement (E_1) et (E_2) .

Exercice 57 L'égalité dans l'inégalité triangulaire ★★

corrigé p. 67

On rappelle que, pour tous complexes u et v : $|u + v| = |u| + |v| \iff u = 0$ ou il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $v = \lambda u$.

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts.

1. Montrer que $MA + MB = AB$ si et seulement si $M \in [AB]$.
2. Montrer que $MA = MB + AB$ si et seulement si il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $\vec{BM} = \lambda \vec{AB}$. Décrire cet ensemble.
3. Déterminer, puis représenter, les ensembles :

$$(E_1) : |z - 2i| + |z + 2| = 2\sqrt{2} \quad (E_2) : |z - 3| - |z + i| = \sqrt{10} \quad (E_3) : |z - 1 - 3i| + |z + 2 + i| \leq 5$$

4. Le problème de Héron. Soit $P(1 + i)$ et $Q(4 + 3i)$. Déterminer le minimum de $MP + MQ$ lorsque M décrit l'axe des réels, et le point où il est atteint. (Utiliser le point P' d'affixe $\overline{1 + i}$.)

Exercice 58 Arcs de cercle et angles orientés ★★

corrigé p. 67

Soit $A(1 + i)$ et $B(3 - i)$. Pour $z \notin \{1 + i, 3 - i\}$, on pose $Z = \frac{z - 3 + i}{z - 1 - i}$.

1. Justifier que $\arg Z \equiv (\vec{MA}, \vec{MB}) [2\pi]$ pour tout point M distinct de A et de B .
2. Montrer que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 4x + 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{2(x + y - 2)}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$.
3. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que Z soit réel et $Z < 0$, puis l'ensemble (E_2) des points M tels que Z soit réel et $Z > 0$. Interpréter à l'aide de l'angle $(\vec{MA}, \vec{MB})$.
4. Déterminer les ensembles $(E_3) : \arg Z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $(E_4) : \arg Z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $(E_5) : \arg Z \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

5. Représenter les ensembles. Que vaut $(E_4) \cup (E_5) \cup \{A, B\}$? Pourquoi son centre est-il sur (E_3) ?

Exercice 59 Le point M' d'affixe $1/\bar{z}$ ★★★

corrigé p. 68

À tout point $M(z)$ distinct de O , on associe le point $M'(z')$ avec $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. On note A le point d'affixe 1.

1. a) Montrer que $z' = \frac{z}{|z|^2}$. En déduire que $M' \in [OM)$ et que $OM \times OM' = 1$.
 b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$. Quel est le point associé à M' ?
2. Soit (D) la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ et (C) le cercle de centre A et de rayon 1.
 a) Montrer que $M \in (D) \iff |z - 1| = |z|$, puis que $|z' - 1| = \frac{|z - 1|}{|z|}$.
 b) En déduire que $M \in (D) \iff M' \in (C)$, puis l'ensemble décrit par M' quand M décrit (D) .
3. Soit (Γ) le cercle de centre $\Omega(2)$ et de rayon 1. Montrer que $M \in (\Gamma) \iff |2z' - 1| = |z'|$, puis que M' décrit un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon. Représenter (D) , (C) , (Γ) , (Γ') et le cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 60 Points décrits par un paramètre ★★★

corrigé p. 69

1. Pour tout réel t , on pose $z_t = \frac{1 + it}{1 - it}$.
 a) Montrer que $|z_t| = 1$ et $z_t \neq -1$. Calculer z_1 et $z_{\sqrt{3}}$.
 b) Soit z un complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. Montrer que $t = \frac{z - 1}{i(z + 1)}$ est réel et que $z = z_t$.
 c) En déduire l'ensemble des points d'affixe z_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
2. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, on pose $w_\theta = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$.
 a) Écrire w_θ sous forme trigonométrique, puis calculer $(w_\theta)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $(w_{\pi/3})^6$.
 b) Déterminer l'ensemble des points d'affixe w_θ lorsque θ décrit $]-\pi, \pi[$.

23

Défis de concours

Six problèmes de concours : cocyclicité, inégalités de modules, angles d'un triangle et suites de complexes. Chaque question prépare la suivante ; la rédaction doit être rigoureuse.

Exercice 61 Cocyclicité : un critère, deux familles ★★★

corrigé p. 69

Pour quatre points distincts $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, on pose $q = \frac{c - a}{b - a} \times \frac{d - b}{d - c}$. On rappelle le théorème du cours : si A, B, C ne sont pas alignés, alors A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $q \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Montrer, sans le théorème de l'angle inscrit, que $\bar{q} = q$.
2. On suppose A, B, C alignés. Montrer que $q \in \mathbb{R} \iff D \in (AB)$. Conclure : $q \in \mathbb{R}$ si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.
3. Soit z un complexe non réel. Montrer que les points $A(1)$, $B(-1)$, $M(z)$ et $N\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ sont distincts et cocycliques, et que le centre de leur cercle a pour affixe $\frac{|z|^2 - 1}{2 \operatorname{Im}(z)} i$. Exemple : $z = 2i$. Que se

passé-t-il si $|z| = 1$?

4. Soit z un complexe non réel, $z \neq -i$, et les points $M(z)$, $N(iz)$. Montrer que O , $A(1)$, M , N sont distincts et que le nombre q associé à (O, A, M, N) vaut $\frac{iz-1}{i-1}$. En déduire, avec $z = x + iy$, que ces quatre points sont cocycliques si et seulement si $x - y = 1$, puis retrouver ce résultat à l'aide du cercle de diamètre $[MN]$.

Exercice 62 L'inégalité de Hlawka ★★★★★

corrigé p. 70

Soit a, b, c trois complexes. On note $p = |a|$, $q = |b|$, $r = |c|$, $s = |a + b + c|$, $u = |b + c|$, $v = |c + a|$, $w = |a + b|$ et $T = p + q + r + s$.

- Montrer que $u^2 + v^2 + w^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$.
- Montrer que $T(T - u - v - w) = (p + q - w)(r + s - w) + (q + r - u)(p + s - u) + (r + p - v)(q + s - v)$.
- Montrer que chacun des six facteurs du membre de droite est positif ou nul, puis en déduire l'inégalité de Hlawka :

$$|a + b| + |b + c| + |c + a| \leq |a| + |b| + |c| + |a + b + c|.$$

- Vérifier qu'il y a égalité lorsque $a + b + c = 0$, ainsi que lorsque a, b, c sont des réels positifs.
- Application. Soit $O(0)$, $A(1)$, $B(i)$ et $C(1 + i)$. Montrer que, pour tout point M du plan : $MA + MB \leq MO + MC + 2 - \sqrt{2}$. Étudier le cas $M = C$.

Exercice 63 Du demi-plan au disque ★★★★★

corrigé p. 70

On note $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

- Pour $z \neq -i$, on pose $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
 - Montrer que $|g(z)| < 1 \iff z \in H$. Interpréter à l'aide des points $I(i)$ et $J(-i)$.
 - Montrer que g réalise une bijection de H sur D , de réciproque $w \mapsto i \frac{1+w}{1-w}$.
- Soit $a \in D$.
 - Montrer que, pour tout complexe z : $|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2)$.
 - Pour $|z| \leq 1$, justifier que $1 - \bar{a}z \neq 0$ et on pose $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $|f(z)| < 1$ si $|z| < 1$, et que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.
 - Montrer que f réalise une bijection de D sur D , de réciproque $w \mapsto \frac{w+a}{1+\bar{a}w}$.
 - Application. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'inéquation $|2z - 1| \leq |2 - z|$.

Exercice 64 Cosinus des angles d'un triangle ★★★★★

corrigé p. 71

Soit ABC un triangle non aplati, de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et α, β, γ ses angles géométriques en A, B, C . On note u, v, w les affixes des vecteurs unitaires $\frac{1}{c}\vec{AB}$, $\frac{1}{a}\vec{BC}$ et $\frac{1}{b}\vec{CA}$.

- Montrer que $\operatorname{Re}(\bar{u}v) = -\cos \beta$, $\operatorname{Re}(\bar{v}w) = -\cos \gamma$ et $\operatorname{Re}(\bar{w}u) = -\cos \alpha$ (penser au produit scalaire).
- Soit λ, μ, ν trois réels. Montrer que $|\lambda u + \mu v + \nu w|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2(\lambda\mu \cos \beta + \mu\nu \cos \gamma + \nu\lambda \cos \alpha)$, et en déduire :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \geq 2(\lambda\mu \cos \beta + \mu\nu \cos \gamma + \nu\lambda \cos \alpha). \quad (I)$$

3. Justifier que $cu + av + bw = 0$ et que u et v ne sont pas colinéaires. En déduire qu'il y a égalité dans (I) si et seulement si (λ, μ, ν) est proportionnel à (c, a, b) .
4. Applications. Montrer que $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$, puis que $\cos \alpha + \sqrt{2}(\cos \beta + \cos \gamma) \leq 2$. Préciser dans chaque cas les triangles pour lesquels il y a égalité.

Exercice 65 L'ensemble de Mandelbrot ★★★★★

corrigé p. 71

Pour $c \in \mathbb{C}$, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$; on note M l'ensemble des complexes c pour lesquels la suite $(|z_n|)$ est majorée.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 pour $c = i$, puis pour $c = -2$; en déduire que $i \in M$ et $-2 \in M$. Montrer que, si $|c| \leq \frac{1}{4}$, alors $|z_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout n .
2. On suppose qu'il existe un entier k tel que $|z_k| > 2$ et $|z_k| \geq |c|$, et on pose $\rho = |z_k| - 1$.
 - a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq k$: $|z_n| \geq |z_k|$ et $|z_{n+1}| \geq \rho |z_n|$. En déduire que $\lim |z_n| = +\infty$.
 - b) En déduire que M est contenu dans le disque fermé de centre O et de rayon 2, et que, si $c \in M$, alors $|z_n| \leq 2$ pour tout n .
3. On suppose c réel (la suite (z_n) est alors réelle).
 - a) Si $c > \frac{1}{4}$, montrer que $z_{n+1} - z_n \geq c - \frac{1}{4}$ pour tout n , et en déduire que $c \notin M$.
 - b) Si $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$, on pose $\beta = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$. Montrer que $\beta^2 + c = \beta$ et que $-\beta \leq c$, puis que $-\beta \leq z_n \leq \beta$ pour tout n .
 - c) Conclure : $M \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

Exercice 66 Trois perles de concours ★★★★★

corrigé p. 72

1. Soit a, b, c trois complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$.
 - a) Montrer que $ab + bc + ca = abc$.
 - b) Développer $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$. En déduire que l'un des nombres a, b, c vaut 1 et que les deux autres sont opposés.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$. Montrer que $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, et que ces deux bornes sont atteintes.
3. Soit $z_1, \dots, z_n$ des complexes ($n \geq 1$) et $L = |z_1| + \dots + |z_n|$.
 - a) Montrer que $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ pour tout complexe z .
 - b) Soit P la somme des $\operatorname{Re}(z_k)$ strictement positifs et N celle des $-\operatorname{Re}(z_k)$ strictement positifs ; P' et N' sont définis de même avec les parties imaginaires. Montrer que $P + N + P' + N' \geq L$, puis qu'il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\left|\sum_{k \in J} z_k\right| \geq \frac{L}{4}$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

24 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

1. $a = 8 - 12i + 6i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = \boxed{2 - 11i}$; $b = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{20+10i}{10} = \boxed{2+i}$; $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$, donc $c = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 (1+i)^2 = i^3 \times 2i = \boxed{2}$. d est une somme géométrique de raison $i \neq 1$: $d = \frac{1-i^{2027}}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} = \boxed{i}$, car $2027 = 4 \times 506 + 3$ et $i^{2027} = i^3 = -i$.
2. L'égalité s'écrit $\frac{x(1-i)}{2} + \frac{y(1+2i)}{5} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$. Comme x, y sont réels, on identifie: $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{5}{2}$ et $-\frac{x}{2} + \frac{2y}{5} = \frac{1}{2}$. En ajoutant: $\frac{3y}{5} = 3$, d'où $\boxed{y = 5}$ et $\boxed{x = 3}$.
3. $Z = \frac{(m+2i)(1-mi)}{(1+mi)(1-mi)} = \frac{m-m^2i+2i+2m}{1+m^2} = \frac{3m}{1+m^2} + i \frac{2-m^2}{1+m^2}$. $Z \in \mathbb{R} \iff m^2 = 2 \iff \boxed{m = \pm\sqrt{2}}$; $Z \in i\mathbb{R} \iff \boxed{m = 0}$ (et $Z = 2i$). Enfin $|Z|^2 = \frac{|m+2i|^2}{|1+mi|^2} = \frac{m^2+4}{m^2+1} = 1 + \frac{3}{m^2+1} > 1$.

■ Corrigé de l'exercice 2

1. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, et $|\bar{z}| = |z|$: $|u| = \sqrt{5}(\sqrt{5})^3 = \boxed{25}$; $|v| = \frac{(\sqrt{2})^8}{2^3} = \boxed{2}$; $|w| = \frac{|2+3i|^2}{|3-2i|} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \boxed{\sqrt{13}}$.
2. Soient $A = \bar{z}z' + \bar{z}z'$ et $B = \bar{z}z' - \bar{z}z'$. Comme $\overline{\bar{z}z'} = \bar{\bar{z}}\bar{z}' = z$ et $\bar{z} = \bar{z}$: $\bar{A} = \bar{z}z' + \bar{z}z' = A$, donc $A \in \mathbb{R}$; $\bar{B} = \bar{z}z' - \bar{z}z' = -B$, donc $B \in i\mathbb{R}$. (En fait $A = 2 \operatorname{Re}(zz')$, $B = 2i \operatorname{Im}(zz')$.)
3. $z\bar{z} = |z|^2$ et $z \neq 0$, donc $|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$. Si $|z| = 1$: $\frac{z^2-1}{z} = z - \frac{1}{z} = z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z \in i\mathbb{R}$, et $\frac{(1+z)^2}{z} = \frac{1}{z} + 2 + z = 2 + z + \bar{z} = \boxed{2(1 + \operatorname{Re} z)}$, réel positif car $\operatorname{Re} z \geq -|z| = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 3

1. $\vec{AB}(4+2i)$, $\vec{AC}(3-3i)$, $\vec{BC}(-1-5i)$; $AB = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$, $AC = \sqrt{18} = \boxed{3\sqrt{2}}$, $BC = \boxed{\sqrt{26}}$.
2. $z_l = \frac{b+c}{2} = \frac{3+i}{2}$; $g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1+2i}{3}$; $ABCD$ parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC} \iff d = a + c - b = \boxed{-3-4i}$; $h = \frac{a+2b-c}{1+2-1} = \frac{1+9i}{2}$. Enfin $g - a = \frac{7-i}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7-i}{2} = \frac{2}{3}(z_l - a)$: $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{Al}$ ✓.
3. $\frac{e-a}{b-a} = \frac{(6+(y-1)i)(4-2i)}{20} = \frac{(2y+22)+(4y-16)i}{20}$ est réel $\iff \boxed{y = 4}$. $\frac{f-c}{b-a} = \frac{(x-1+4i)(4-2i)}{20} = \frac{(4x+4)+(18-2x)i}{20}$ est imaginaire pur $\iff \boxed{x = -1}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- $z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left[4, -\frac{\pi}{6}\right]$; $z_2 = \left[5, -\frac{\pi}{2}\right]$; $z_3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$;
 $z_4 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right) = \left[3, \frac{6\pi}{5}\right]$ (le module est 3, pas -3); $z_5 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \left[2, \frac{3\pi}{8}\right]$.
- On multiplie les modules, on ajoute les arguments : $z_1 z_3 = \left[8\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$; $\frac{z_1^2}{z_3} = \left[\frac{16}{2\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right] = \left[4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$; $z_2 z_4 = \left[15, -\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{5}\right] = \left[15, \frac{7\pi}{10}\right]$; $\overline{z_1}^3 = \left[4, \frac{\pi}{6}\right]^3 = \left[64, \frac{\pi}{2}\right] = \left[64i\right]$.
- $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$, donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$. Avec $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$:
 $u = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \left[2\sin\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]$. Puis $v = -iu$ et $-i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$: $v = \left[2\sin\frac{\theta}{2}, \frac{\theta - \pi}{2}\right]$.

■ Corrigé de l'exercice 5

- $(1-i)^{10} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]^{10} = \left[32, -\frac{5\pi}{2}\right] = \left[-32i\right]$; $(\sqrt{3}+i)^9 = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]^9 = \left[512, \frac{3\pi}{2}\right] = \left[-512i\right]$; $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$, donc la puissance 24 vaut $\left[2^{12}, 14\pi\right] = \left[4096\right]$.
- $w = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ et $w = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, -\frac{\pi}{6}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{12}\right]$. En identifiant : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
 $w^n = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n, \frac{5n\pi}{12}\right]$ (Moivre) est réel $\iff \frac{5n}{12} \in \mathbb{Z}$. Si $5n = 12k$, alors $n = 25n - 24n = 12(5k - 2n)$;
 d'où $w^n \in \mathbb{R} \iff n \in 12\mathbb{N}$, et $w^{12} = \left[2^{-6}, 5\pi\right] = \left[-\frac{1}{64}\right]$.
- $(1-i)^n = \overline{(1+i)^n}$, donc $u_n = 2\operatorname{Re}((1+i)^n) = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$. $\frac{2024\pi}{4} = 506\pi$: $u_{2024} = \left[2^{1013}\right]$; $\frac{2026\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{2}$: $u_{2026} = \left[0\right]$.

■ Corrigé de l'exercice 6

- $\frac{c-a}{b-a} = \frac{(-4+2i)(2-4i)}{20} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$: $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$: ABC est **rectangle isocèle en A**.
- $\frac{s-r}{q-p} = \frac{(6+4i)(2+3i)}{13} = 2i \in i\mathbb{R}$: $(PQ) \perp (RS)$; $\frac{t-p}{q-p} = \frac{-4+6i}{2-3i} = -2 \in \mathbb{R}$: P, Q, T alignés (P entre Q et T).
- $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\frac{c-a}{b-a}$. a) $\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$: **isocèle en A** (angle au sommet $\frac{\pi}{6}$). b) $\left[3, \frac{\pi}{2}\right]$: **rectangle en A**. c) $\left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$: **équilatéral**. d) $c-b = (c-a) - (b-a) = i(b-a)$, donc $\frac{a-b}{c-b} = i$: **rectangle isocèle en B**.

■ Corrigé de l'exercice 7

a) **Cercle** de centre $\Omega_1(-1+2i)$, de rayon 2. b) $3iz - 6 = 3i(z+2i)$, donc $|z+2i| = 3$: **cercle** de centre $\Omega_2(-2i)$, de rayon 3. c) $\bar{z} + 2i = \overline{z-2i}$: la condition s'écrit $|z-2i| = |z-4|$: **médiatrice** de $[PQ]$ avec $P(2i)$, $Q(4)$ (droite $y = 2x - 3$). d) $z \neq -1$ et $(\vec{u}, \vec{KM}) \equiv \frac{\pi}{3}$ avec $K(-1)$: **demi-droite ouverte** d'origine K dirigée par $\vec{w}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

Pour e), f), g), soient $A(2i)$ et $B(-1)$: pour $M \neq A, B$, $\frac{z-2i}{z+1} = \frac{a-z}{b-z}$ a pour argument $(\vec{MB}, \vec{MA})$; $M = A$ donne 0. e) $(MA) \parallel (MB)$ ou $M = A$: **droite (AB) privée de B** ($y = 2x + 2$). f) $(MA) \perp (MB)$ ou $M = A$: **cercle de diamètre [AB] privé de B** (centre $-\frac{1}{2} + i$, rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$). g) $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ de sens contraires : **segment ouvert]AB[**.

■ Corrigé de l'exercice 8

- a) $z = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}$. b) Avec $z = x+iy$: $iz+2\bar{z} = (2x-y)+i(x-2y)$; on identifie : $2x-y = 1$, $x-2y = -1$, d'où $\boxed{z = 1+i}$. c) Pour $z \neq -i$: $z-1 = 2iz-2 \iff (1-2i)z = -1 \iff z = \boxed{-\frac{1+2i}{5}}$ (bien $\neq -i$). d) $z^2 = (2i\sqrt{3})^2$: $\boxed{z = \pm 2i\sqrt{3}}$. e) $z+3 = \pm i\sqrt{2}$: $\boxed{z = -3 \pm i\sqrt{2}}$. f) $z^4 - 5z^2 - 36 = (z^2 - 9)(z^2 + 4)$: $\boxed{S = \{3, -3, 2i, -2i\}}$.
- La première équation donne $z' = -i((1+i)z+2) = (1-i)z - 2i$. Dans la seconde : $(2+i)z + (2-i)i(1-i)z - 2i(2-i) = -i$, soit $(3-2i)z - 2 - 4i = -i$, d'où $z = \frac{2+3i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3+2i)}{13} = i$ et $z' = (1-i)i - 2i = 1-i$: $\boxed{(z, z') = (i, 1-i)}$.

25

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- Avec $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$: $\cos 5\theta + i \sin 5\theta = (c + is)^5$ (Moivre) ; on développe (coefficients 1, 5, 10, 10, 5, 1) et on prend la partie imaginaire : $\sin 5\theta = 5c^4s - 10c^2s^3 + s^5 = 5s(1-s^2)^2 - 10s^3(1-s^2) + s^5 = s(16s^4 - 20s^2 + 5)$.
- Pour $\theta \in \{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\}$: $\sin 5\theta = 0$ et $\sin \theta \neq 0$, donc $X = \sin^2 \theta$ vérifie $16X^2 - 20X + 5 = 0$. Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, $\sin^2 \frac{\pi}{5} < \sin^2 \frac{2\pi}{5}$: ce sont les **deux solutions** $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$, et $\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$. Les sinus étant positifs : $\boxed{\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ et $\boxed{\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.
- $\cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$ et $\cos \frac{\pi}{5} > 0$: $\boxed{\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$. Le produit des solutions vaut $\frac{5}{16}$, d'où $\boxed{\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}}$.
Avec $s = \sin x$: $\sin 5x - 5 \sin x = s(16s^4 - 20s^2) = 4s^3(4s^2 - 5)$ et $4s^2 - 5 < 0$: $\sin 5x = 5 \sin x \iff \sin x = 0 \iff \boxed{x \in \pi\mathbb{Z}}$.

■ Corrigé de l'exercice 10

$$1. a) a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]; \quad b = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right].$$

b) $ia = i\sqrt{3} + 1 = b$, donc $\frac{b}{a} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$: $OA = OB$ et $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}$: OAB est **rectangle isocèle en O**. Comme $0 + c = a + b$, $[OC]$ et $[AB]$ ont même milieu : $OACB$ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs égaux : c'est un **carré**.

$$2. a) c = a + ia = (1 + i)a = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[2, -\frac{\pi}{6}\right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]. \quad b) \text{ Or } c =$$

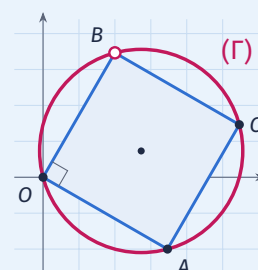
$$(\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1); \text{ en identifiant : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$3. c^6 = \left[\left(2\sqrt{2}\right)^6, \frac{\pi}{2}\right] = [512, \frac{\pi}{2}] = [512i]. \quad c^n = \left[\left(2\sqrt{2}\right)^n, \frac{n\pi}{12}\right] \in i\mathbb{R} \iff \frac{n\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff n \equiv 6 [12],$$

soit $n \in \{6, 18, 30, \dots\}$.

4. Pour $M \neq A, B$: $\arg \frac{z-a}{z-b} \equiv (\vec{MB}, \vec{MA})$, donc $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \iff (MA) \perp (MB)$; et $M = A$ donne $0 \in i\mathbb{R}$. Ainsi (Γ) est le **cercle de diamètre $[AB]$ privé de B** , de centre $\frac{c}{2}$ (le centre du carré) et de rayon $\frac{|b-a|}{2} = \frac{|a||i-1|}{2} = \sqrt{2}$. $\frac{0-a}{0-b} = \frac{a}{b} = -i$ et $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a} = i$ sont imaginaires purs : $O, C \in (\Gamma)$; (Γ) est le cercle circonscrit au carré, privé de B .



■ Corrigé de l'exercice 11

$$1. a) \frac{c-a}{b-a} = \frac{(2+6i)(4-2i)}{20} = 1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]. \quad b) \frac{a-b}{c-b} = \frac{(-4-2i)(-2-4i)}{20} = i :$$

$BA = BC$ et $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}$: ABC est **rectangle isocèle en B**. c)

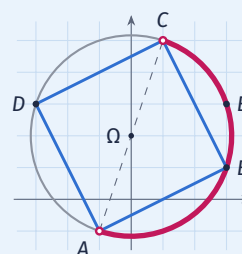
$$(1+i)^{2026} = \left[2^{1013}, 506\pi + \frac{\pi}{2}\right] = [2^{1013}i].$$

2. $a + c = b + d \iff d = [-3 + 3i]$. Le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en B et $BA = BC$: c'est un **carré**, de centre le milieu de $[AC]$, d'affixe $\frac{a+c}{2} = 2i$: c'est Ω .

3. a) Les diagonales du carré ont même milieu Ω et même longueur $AC = |2 + 6i| = 2\sqrt{10}$: $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{10}$.

b) $\frac{e-b}{e-c} = \frac{2i}{2-2i} = \frac{-1+i}{2}$, donc le produit vaut $\frac{(1+i)(-1+i)}{2} = [-1] \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{c-a}{b-a} \notin \mathbb{R}$, A, B, C ne sont pas alignés : A, B, C, E sont co-cycliques (critère du cours), et E est sur l'unique cercle passant par A, B, C : $E \in (\Gamma)$.

4. Il faut $z \neq a$ (le quotient nul n'a pas d'argument) et $z \neq c$. Alors $\arg \frac{z-a}{z-c} \equiv (\vec{MC}, \vec{MA})$ et la condition équivaut à : $\frac{z-a}{z-c} \in i\mathbb{R}$ et $\text{Im} \frac{z-a}{z-c} > 0$. La première place M sur le cercle de diamètre $[AC]$, c'est-à-dire (Γ) . Pour la seconde, $\frac{z-a}{z-c} = \frac{(z-a)(\overline{z-c})}{|z-c|^2}$ et, avec $z = x + iy$, $\text{Im} \left(\frac{(z-a)(\overline{z-c})}{|z-c|^2} \right) = (x-1)(y+1) - (x+1)(y-5) = 6x - 2y + 4$; comme (AC) a pour équation $y = 3x + 2$, la condition $3x - y + 2 > 0$ décrit le demi-plan ouvert contenant B (où $\frac{b-a}{b-c} = i$). L'ensemble est le **demi-cercle de (Γ) d'extrémités A, C contenant B (et E), privé de A et C** (en rouge ; en D , $\frac{d-a}{d-c} = -i$).



■ Corrigé de l'exercice 12

Avec $z = x + iy$ (x, y réels), on identifie parties réelles et imaginaires.

a) $x^2 - y^2 = x$ et $2xy = -y$, soit $y(2x + 1) = 0$. Si $y = 0 : x \in \{0, 1\}$; si $x = -\frac{1}{2} : y^2 = \frac{3}{4}$.

$$S = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

b) $x^2 + y^2 + 6iy = 13 + 12i : y = 2$ et $x^2 = 9 : S = \{3 + 2i, -3 + 2i\}$. c) $(x^2 - y^2 + 2x + 1) + 2iy(x - 1) = 0$.

Si $y = 0 : (x + 1)^2 = 0$; si $x = 1 : y^2 = 4$. $S = \{-1, 1 \pm 2i\}$.

d) $z^2 + |z|^2 = 2x^2 + 2ixy = 2 + 2i : x^2 = 1$ et $xy = 1 : S = \{1 + i, -1 - i\}$. e) $z^4 + 3z^2 - 4 = (z^2 - 1)(z^2 + 4)$
: $S = \{1, -1, 2i, -2i\}$.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. $Z = \frac{(z+1)\overline{(z-i)}}{|z-i|^2}$ et $(x + 1 + iy)(x - i(y - 1)) = (x^2 + y^2 + x - y) + i(x - y + 1)$, d'où $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y-1)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{x - y + 1}{x^2 + (y-1)^2}$.

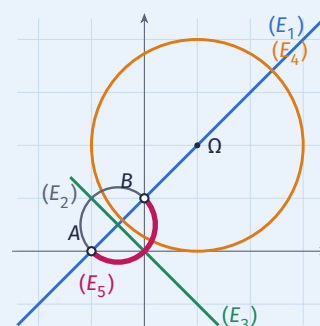
2. $(E_1) : x - y + 1 = 0$: droite (AB) ($y = x + 1$) privée de B .

$(E_2) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$: cercle de diamètre $[AB]$ privé de B .

$(E_3) : |z + 1| = |z - i|$: médiatrice de $[AB]$ ($y = -x$).

$(E_4) : (x + 1)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(y - 1)^2 \iff (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
: cercle de centre $\Omega(1 + 2i)$ et de rayon 2.

$(E_5) : \operatorname{Re} Z = 0$ et $\operatorname{Im} Z > 0 : M \in (E_2)$ et $y < x + 1$: demi-cercle de (E_2) sous (AB) , privé de A et B (en rouge). En $O : Z = \frac{1}{-i} = i$, d'argument $\frac{\pi}{2} : O \in (E_5) \checkmark$.



■ Corrigé de l'exercice 14

1. $|z| = |(z - 2i) + 2i| \leq |z - 2i| + |2i| = 3$ et $|z| \geq |2i| - |z - 2i| = 1$. Avec $z = x + iy : |z| = 1$ et $|z - 2i| = 1$ donnent $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 1$, d'où $y = 1, x = 0 : z = i$; de même $|z| = 3$ donne $9 - 4y + 4 = 1 : z = 3i$.

2. $|z^2 - 4z + 6| \leq |z|^2 + 4|z| + 6 \leq 11$ et $|z^2 - 4z + 6| \geq 6 - |z^2 - 4z| \geq 6 - |z|^2 - 4|z| \geq 1$; pour $z = -1 : 1 + 4 + 6 = 11$. Ainsi $z^2 - 4z + 6 \neq 0$ pour $|z| \leq 1$: l'équation n'a aucune solution dans ce disque (ses solutions $2 \pm i\sqrt{2}$ sont de module $\sqrt{6}$).

3. a) $|z + 2|^2 = |z|^2 + 4\operatorname{Re} z + 4$ et $(|z| + 2)^2 = |z|^2 + 4|z| + 4$; les deux membres étant positifs, l'égalité équivaut à $\operatorname{Re} z = |z|$, soit $y = 0$ et $x \geq 0 : z \in [0, +\infty[$.

b) Avec $w = z - i$, la condition s'écrit $|w + i| = |w| + 1$. Or $|w + i|^2 = |w|^2 + i(\overline{w} - w) + 1 = |w|^2 + 2\operatorname{Im} w + 1$ et $(|w| + 1)^2 = |w|^2 + 2|w| + 1$: l'égalité équivaut à $\operatorname{Im} w = |w|$, soit $w = it, t \geq 0 : z = iy, y \geq 1$ (demi-droite de l'axe imaginaire).

■ Corrigé de l'exercice 15

- $8 \cos^3 x - 6 \cos x + \sqrt{2} = 2 \cos 3x + \sqrt{2}$. L'équation équivaut à $\cos 3x = \cos \frac{3\pi}{4} \iff 3x \equiv \pm \frac{3\pi}{4} [2\pi] \iff x \equiv \pm \frac{\pi}{4} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$: $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{7\pi}{4} \right\}$.
- Le théorème avec $n = 3$ et $\theta = x \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $\sum_{k=0}^3 \cos kx = \frac{\sin(4x/2)}{\sin(x/2)} \cos \frac{3x}{2}$ ✓. En $x = 0$, la somme vaut 4. Pour $x \in]0, 2\pi[$, $\sin \frac{x}{2} \neq 0$: l'équation équivaut à $\sin 2x = 0$, soit $x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$, ou $\cos \frac{3x}{2} = 0$, soit $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$: $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 16

- $g = \frac{2a+b}{3} = \frac{3+3i}{3} = 1+i$; $g - a = 2 - i$ et $b - a = 6 - 3i = 3(2 - i)$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ✓.
- $|u+v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) = |u|^2 + |v|^2 + u\overline{v} + \overline{u}v = |u|^2 + |v|^2 + 2 \operatorname{Re}(u\overline{v})$. Avec $u = z - g$, en additionnant :

$$2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + 2 \operatorname{Re}((z - g)\overline{2(g - a) + (g - b)}),$$
où $2(g - a) + (g - b) = 3g - 2a - b = 0$, $GA^2 = |2 - i|^2 = 5$ et $GB^2 = |-4 + 2i|^2 = 20$: $2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 30$.
- $2MA^2 + MB^2 = k \iff MG^2 = \frac{k-30}{3}$: $k = 42$: **cercle de centre G, de rayon 2** ; $k = 30$: **le point G** ; $k = 21$: **ensemble vide**.

26

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- $AB^2 = (b - a)(\overline{b} - \overline{a}) = (b - a)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; de même $AC^2 = 2 - \frac{a}{c} - \frac{c}{a}$. Donc

$$AB^2 - AC^2 = a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \frac{c-b}{a} = (c-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{bc}\right) = \frac{(c-b)(bc - a^2)}{abc},$$
et, comme $b \neq c$: ABC isocèle en A $\iff AB^2 = AC^2 \iff a^2 = bc$.
- $\overline{Z} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{(a-c)/(ac)}{(a-b)/(ab)} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a-c}{a-b} = \frac{b}{c} Z$, avec $Z \neq 0$. Ainsi $Z \in \mathbb{R} \iff \overline{Z} = Z \iff b = c$: impossible, donc A, B, C ne sont jamais alignés ; et $Z \in i\mathbb{R} \iff \overline{Z} = -Z \iff \frac{b}{c} = -1$: ABC rectangle en A $\iff b + c = 0$ ([BC] est un diamètre).
- Si $a + b + c = 0$, en conjuguant : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, soit $ab + bc + ca = 0$; donc $bc = -a(b + c) = a^2$: ABC est isocèle en A ; de même $ca = b^2$: isocèle en B ; il est **équilatéral**. Réciproquement, s'il est équilatéral, $a^2 = bc$ et $b^2 = ca$, d'où $a^2 - b^2 = c(b - a)$, soit $(a - b)(a + b + c) = 0$, et $a + b + c = 0$.
- Équilatéral : il faudrait $c = -1 - i$, de module $\sqrt{2} \neq 1$: **impossible**. Isocèle en A : $c = \frac{a^2}{b} = \frac{1}{i} = -i$; rectangle en A : $c = -b = -i$ (le même point : ABC est rectangle isocèle en A) ; rectangle en B (question 2 au sommet B) : $a + c = 0$, $c = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 18

1. Pour $z \neq a$: $M \in (AB) \iff \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \iff \frac{z-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$. Or $\bar{b}-\bar{a} = \frac{a-b}{ab}$ et $\bar{z}-\bar{a} = \frac{a\bar{z}-1}{a}$, donc le second membre vaut $\frac{b(a\bar{z}-1)}{a-b}$, et l'égalité s'écrit $z-a = -b(a\bar{z}-1)$, soit $\boxed{z+ab\bar{z}=a+b}$. Le point $z=a$ vérifie aussi cette équation.
2. $W = \frac{b-a}{d-c} \neq 0$ et $\bar{W} = \frac{(a-b)/(ab)}{(c-d)/(cd)} = \frac{cd}{ab} W$. Donc $(AB) \perp (CD) \iff \bar{W} = -W \iff \boxed{ab+cd=0}$, et $(AB) \parallel (CD) \iff \bar{W} = W \iff \boxed{ab=cd}$.
3. Les droites, perpendiculaires, se coupent en un point P ; d'après 1., $p+ab\bar{p}=a+b$ et $p+cd\bar{p}=c+d$, avec $cd=-ab$. En ajoutant : $\boxed{2p=a+b+c+d}$. Pour $x \in \{a, b, c, d\}$ ($|x|=1$) : $|p-x|^2 = |p|^2 - 2\operatorname{Re}(p\bar{x}) + 1$. En sommant, avec $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=2\bar{p}$:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4|p|^2 - 2\operatorname{Re}(2p\bar{p}) + 4 = \boxed{4}.$$

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $f(z)-1 = \frac{(z+1)-(z-1)}{z-1} = \frac{2}{z-1}$, d'où $(f(z)-1)(z-1) = 2$ et $f(z) \neq 1$. Alors $f(f(z)) = 1 + \frac{2}{f(z)-1} = 1 + (z-1) = z$. En modules : $AM' \times AM = 2$; en arguments ($M \neq A$) : $\arg(f(z)-1) + \arg(z-1) \equiv \arg 2 \equiv 0$, d'où $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi}$.
2. Si $AM = 2$, alors $AM' = 1$: M' est sur le cercle C' de centre A et de rayon 1. Réciproquement, tout point $N(w)$ de C' est l'image du point d'affixe $f(w)$ (car $f(f(w)) = w$), qui vérifie $|f(w)-1| = \frac{2}{|w-1|} = 2$: M' décrit **tout le cercle** C' . De même, $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{4} \iff (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv -\frac{\pi}{4}$: M' décrit la **demi-droite ouverte d'origine A dirigée par $\vec{w}(1-i)$** .
3. $f(z) \in \mathbb{R} \iff \frac{2}{z-1} \in \mathbb{R} \iff z-1 \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$. $f(z) \in i\mathbb{R} \iff f(z) + \overline{f(z)} = 0 \iff (z+1)(\bar{z}-1) + (\bar{z}+1)(z-1) = 0 \iff 2|z|^2 - 2 = 0 \iff |z| = 1$.
4. $f(z) = z \iff z+1 = z^2 - z \iff (z-1)^2 = 2 \iff \boxed{z = 1 \pm \sqrt{2}}$. $f(z) = \bar{z} \iff z+1 = |z|^2 - \bar{z} \iff 2x = x^2 + y^2 - 1 \iff (x-1)^2 + y^2 = 2$: **cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$** (cohérent avec 1. : M' est alors le symétrique de M par rapport à l'axe réel, donc $AM' = AM$ et $AM^2 = 2$).

■ Corrigé de l'exercice 20

1. $z \notin \mathbb{R}$, donc $z \neq 0$, $z \neq \pm 1$, $z^2 \neq 1$. Ainsi $1, z, z^2, z^3$ sont distincts : $z^3 \neq 1$ (hypothèse), $z^2 - z = z(z-1) \neq 0$, $z^3 - z = z(z-1)(z+1) \neq 0$, $z^3 - z^2 = z^2(z-1) \neq 0$. Et $\frac{z^2-1}{z-1} = z+1 \notin \mathbb{R}$: A, M, N ne sont pas alignés.
 2. $\frac{z^2-1}{z-1} = z+1$ et $\frac{z^3-z}{z^2-z^2} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z^2(z-1)} = \frac{z+1}{z}$: le produit vaut $\frac{(z+1)^2}{z}$.
 3. $w + \frac{1}{w} \in \mathbb{R} \iff w + \frac{1}{w} = \bar{w} + \frac{1}{\bar{w}} \iff (w-\bar{w}) - \frac{w-\bar{w}}{w\bar{w}} = 0 \iff (w-\bar{w})\left(1 - \frac{1}{|w|^2}\right) = 0 \iff (w \in \mathbb{R} \text{ ou } |w| = 1)$.
- A, M, N n'étant pas alignés, le critère du cours donne : A, M, N, P cocycliques $\iff \frac{(z+1)^2}{z} = z+2 + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff \boxed{|z| = 1}$ (car $z \notin \mathbb{R}$). Le cercle est alors le **cercle de centre O et de rayon 1**, puisque $|1| = |z| = |z^2| = |z^3| = 1$.

■ Corrigé de l'exercice 21

- $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \iff |z| = 1$. Avec $z = x + iy$: $x^2 + y^2 = 1$ et $|1 - z|^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 = 2 - 2x = 1$, d'où $x = \frac{1}{2}$, $y^2 = \frac{3}{4}$: $S = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$.
- $z' = 2 - z$ et $z(2 - z) = 5 \iff z^2 - 2z + 5 = 0 \iff (z - 1)^2 = -4 = (2i)^2 \iff z = 1 \pm 2i$: $S = \{(1 + 2i, 1 - 2i), (1 - 2i, 1 + 2i)\}$.
- $(z^2 + 2 - 2z)(z^2 + 2 + 2z) = (z^2 + 2)^2 - (2z)^2 = z^4 + 4$. Puis $(z - 1)^2 = -1 \iff z = 1 \pm i$ et $(z + 1)^2 = -1 \iff z = -1 \pm i$: $S = \{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$.
- Pour $z \neq i$, $u = \frac{z+i}{z-i}$ vérifie $u^2 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, soit $u = \pm i\sqrt{3}$. Si $u = i\sqrt{3}$: $z + i = i\sqrt{3}z + \sqrt{3}$, d'où $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$; si $u = -i\sqrt{3}$: $z = -\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$. $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \right\}$, de module $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ (normal : $u \in i\mathbb{R}$ signifie que M est sur le cercle de diamètre $[B'B]$, $B(i)$, $B'(-i)$).

■ Corrigé de l'exercice 22

- $w^2 = [1, 2x] = 1 \iff 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \iff x \in \pi\mathbb{Z}$: exclu. La somme est géométrique de raison $w^2 \neq 1$: $\sum_{k=1}^n w^{2k-1} = w(1 + w^2 + \dots + (w^2)^{n-1}) = \frac{w(1-w^{2n})}{1-w^2}$.
- Par Moivre, $w^{2n} = [1, 2nx]$ et $w^2 = [1, 2x]$; le rappel donne $1 - w^{2n} = -2i \sin nx [1, nx]$ et $1 - w^2 = -2i \sin x [1, x]$ ($\sin x \neq 0$). D'où $\sum_{k=1}^n w^{2k-1} = [1, x] \cdot \frac{\sin nx}{\sin x} [1, nx - x] = \frac{\sin nx}{\sin x} (\cos nx + i \sin nx)$. Or cette somme vaut $\sum_{k=1}^n (\cos(2k-1)x + i \sin(2k-1)x)$ (Moivre) ; $\frac{\sin nx}{\sin x}$ étant réel, on identifie : $\sum \cos(2k-1)x = \frac{\sin nx \cos nx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$ et $\sum \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.
- Avec $x = \frac{\pi}{2n+1} \notin \pi\mathbb{Z}$: $\sin 2nx = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2n+1}\right) = \sin x$, donc la somme vaut $\frac{\sin x}{2 \sin x} = \frac{1}{2}$. Pour $n = 3$: $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 23

- Les coefficients de P sont réels et $\overline{z^k} = \overline{z}^k$: $\overline{P(z)} = \overline{z}^4 - 2\overline{z}^3 + 6\overline{z}^2 - 8\overline{z} + 8 = P(\overline{z})$. Si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = \overline{0} = 0$.
- $P(2i) = 16 + 16i - 24 - 16i + 8 = 0$: $2i$ et $\overline{2i} = -2i$ sont racines. $(z^2 + 4)(z^2 + pz + q) = z^4 + pz^3 + (q + 4)z^2 + 4pz + 4q$ coïncide avec $P(z)$ pour $p = -2$, $q = 2$. Puis $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z - 1)^2 = -1 \iff z = 1 \pm i$: $S = \{2i, -2i, 1 + i, 1 - i\}$.
- $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1-3i}{-2i} = \frac{3-i}{2} \notin \mathbb{R}$; A, B, C ne sont pas alignés ; $\frac{d-b}{d-c} = \frac{-1+3i}{4i} = \frac{3+i}{4}$; le produit vaut $\frac{(3-i)(3+i)}{8} = \frac{5}{4} \in \mathbb{R}$: A, B, C, D sont **cocycliques**. Le centre Ω est sur la médiatrice de $[AB]$, l'axe réel : $\omega = t \in \mathbb{R}$, et $\Omega A = \Omega D \iff (1-t)^2 + 1 = t^2 + 4 \iff t = -1$. Centre $\Omega(-1)$, rayon $|2 + i| = \sqrt{5}$.
- Les points $A(\alpha)$, $B(\overline{\alpha})$, $C(\beta)$, $D(\overline{\beta})$ sont distincts ($\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \alpha \neq \operatorname{Re} \beta$) ; A et B sont sur la droite d'équation $x = \operatorname{Re} \alpha$, qui ne contient pas C : A, B, C ne sont pas alignés. Soit $Q = \frac{c-a}{b-a} \times \frac{d-b}{d-c}$. Comme $\overline{a} = b$, $\overline{b} = a$, $\overline{c} = d$, $\overline{d} = c$: $\overline{Q} = \frac{d-b}{a-b} \times \frac{c-a}{c-d} = Q$. Donc $Q \in \mathbb{R}$: les quatre points sont **cocycliques** (ils forment un trapèze isocèle).

27

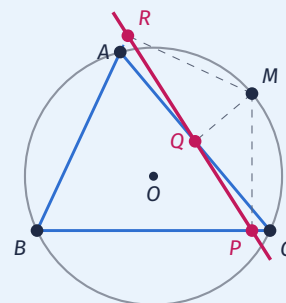
Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- Si $P = M$, $\frac{p-m}{c-b} = 0 \in i\mathbb{R}$; sinon $(MP) \perp (BC)$ et $\frac{p-m}{c-b} \in i\mathbb{R}$. Ce nombre est donc égal à l'opposé de son conjugué : $\frac{p-m}{c-b} = -\frac{\bar{p}-\bar{m}}{\bar{c}-\bar{b}}$, avec $\bar{c}-\bar{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}$; d'où $p-m = bc(\bar{p}-\bar{m})$, soit $p-bc\bar{p} = m-bc\bar{m}$. Comme $P \in (BC)$: $p+bc\bar{p} = b+c$. En ajoutant : $p = \frac{1}{2}(b+c+m-bc\bar{m})$.
- Par permutation circulaire des rôles : $q = \frac{1}{2}(c+a+m-ca\bar{m})$ et $r = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m})$. Donc $q-p = \frac{1}{2}(a-b+bc\bar{m}-ca\bar{m}) = \frac{1}{2}(a-b)(1-c\bar{m})$, et de même $r-p = \frac{1}{2}(a-c)(1-b\bar{m})$.
- $b\bar{m} = 1 \iff \bar{m} = \frac{1}{b} = \bar{b} \iff m = b$: exclu, donc $r \neq p$. Ainsi P, Q, R sont alignés si et seulement si $W = \frac{q-p}{r-p} = \frac{(a-b)(1-c\bar{m})}{(a-c)(1-b\bar{m})}$ est réel. Avec $\bar{a} = \frac{1}{a}$, etc. :

$$\overline{W} = \frac{\frac{b-a}{ab} \left(1 - \frac{m}{c}\right)}{\frac{c-a}{ac} \left(1 - \frac{m}{b}\right)} = \frac{(a-b)(m-c)}{(a-c)(m-b)}.$$

Donc $W = \overline{W} \iff (1-c\bar{m})(m-b) = (m-c)(1-b\bar{m}) \iff -b-c|m|^2 = -c-b|m|^2 \iff (c-b)(1-|m|^2) = 0 \iff |m| = 1$ (car $b \neq c$). Les projetés de M sont alignés **si et seulement si M est sur le cercle circonscrit** : c'est la **droite de Simson** de M . (Pour $|m| = 1$, $W = \frac{(a-b)(m-c)}{(a-c)(m-b)}$ est le quotient du critère de cocyclicité pour A, C, B, M .)



■ Corrigé de l'exercice 25

- Si A, R, Q étaient alignés, on aurait $(AB) = (AR) = (AQ) = (AC)$ (car $R \neq A$ et $Q \neq A$) : A, B, C alignés, absurde ; de même pour B, P, R et pour C, Q, P . Les facteurs contenant m se simplifient : le produit vaut $\frac{q-a}{q-c} \cdot \frac{r-b}{r-a} \cdot \frac{p-c}{p-b}$. Comme Q, A, C sont alignés et $Q \notin \{A, C\}$, $\frac{q-a}{q-c} = \frac{a-q}{c-q}$ est un réel non nul ; de même pour les deux autres facteurs.
- Les trois facteurs $k_1 = \frac{q-a}{r-a} \cdot \frac{m-r}{m-q}$, k_2, k_3 (non nuls) du produit sont les quotients du critère du cours pour (A, R, Q, M) , (B, P, R, M) , (C, Q, P, M) , et $k_1 k_2 k_3 = \lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $M \in (ARQ) \cap (BPR)$, alors $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (A, R, Q et B, P, R non alignés), donc $k_3 = \frac{\lambda}{k_1 k_2} \in \mathbb{R}$ et $M \in (CQP)$ (C, Q, P non alignés). De même dans les autres cas : **les trois cercles sont concourants**.
- Dans le triangle ARQ , les points $P \in (RQ)$, $C \in (QA)$, $B \in (AR)$ sont distincts de A, R, Q ($P = R$ ou $P = Q$ imposerait $P = B$ ou $P = C$), et M est distinct des six points. Les cercles de 2. sont alors (ABC) , (RPB) , (QCP) ; M est sur les deux derniers, donc $M \in (ABC)$.

■ Corrigé de l'exercice 26

1. a) $|1 + z^2|^2 = (1 + z^2)(1 + \bar{z}^2) = 1 + 2 \operatorname{Re}(z^2) + |z|^4$, avec $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = 2x^2 - r^2$: $|1 + z^2|^2 = 1 + r^4 - 2r^2 + 4x^2$. Et $|1 + z|^2 = (1 + x)^2 + y^2 = 1 + 2x + r^2$.
 b) Supposons $|1 + z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|1 + z^2| < 1$. La première donne $1 + 2x + r^2 < \frac{1}{2}$, donc $-2x > r^2 + \frac{1}{2} > 0$ et $4x^2 > \left(r^2 + \frac{1}{2}\right)^2$. Alors

$$|1 + z^2|^2 - 1 = r^4 - 2r^2 + 4x^2 > r^4 - 2r^2 + \left(r^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2r^4 - r^2 + \frac{1}{4} = 2\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} > 0,$$

ce qui contredit $|1 + z^2| < 1$. Donc $|1 + z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.

2. D'après le cours, $1 - z = -2i \sin \frac{t}{2} \left[1, \frac{t}{2}\right]$, d'où $|1 - z| = 2 \left|\sin \frac{t}{2}\right|$; et $1 + z^2 = 1 + \cos 2t + i \sin 2t = 2 \cos t (\cos t + i \sin t)$, d'où $|1 + z^2| = 2 |\cos t|$. Avec $u = \left|\sin \frac{t}{2}\right| \in [0, 1]$ et $\cos t = 1 - 2u^2$: $|1 - z| + |1 + z^2| = 2g(u)$, où $g(u) = u + |1 - 2u^2|$.

• Sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$: $g(u) = 1 + u - 2u^2 \leq 1 + u < 2$ et $g(u) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - u\right)\left(u + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.

• Sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$: $g(u) = 2u^2 + u - 1$ est croissante, de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $g(1) = 2$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq g \leq 2$ et $\boxed{\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4}$. Égalité à gauche $\iff u = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos t = 0 \iff \boxed{z = \pm i}$; à droite $\iff u = 1 \iff \boxed{z = -1}$.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. $P(z) = 0$ donne $z^n = -(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$ et, par l'inégalité triangulaire, $|z|^n \leq \sum |a_k| |z|^k \leq K(1 + |z| + \dots + |z|^{n-1}) = K \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$. Si $K = 0$, $|z|^n \leq 0$: absurde. Sinon, $K \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < \frac{K|z|^n}{|z| - 1}$, d'où $|z|^n < \frac{K|z|^n}{|z| - 1}$, puis $|z| - 1 < K$. Bilan : une racine de module > 1 vérifie $|z| < 1 + K$; une racine de module ≤ 1 aussi si $K > 0$; et si $K = 0$, $P(z) = z^n$ n'a que la racine 0.
 2. Par télescopage : $(1 - z)Q(z) = c_0 + (c_1 - c_0)z + \dots + (c_n - c_{n-1})z^n - c_n z^{n+1}$. Si $Q(z) = 0$ avec $|z| > 1$, alors $c_n z^{n+1} = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})z^k$ et, les $c_k - c_{k-1}$ étant positifs :

$$c_n |z|^{n+1} \leq c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})|z|^k < |z|^n \left(c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})\right) = c_n |z|^n$$

(inégalité stricte car $c_0 > 0$ et $1 < |z|^n$). D'où $|z| < 1$: absurde. Toute racine de Q vérifie $\boxed{|z| \leq 1}$.

3. $1 + 2z + 3z^2 = 0 \iff \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9} \iff \boxed{z = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i}$, de module $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Cauchy ($z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}$, $K = \frac{2}{3}$) : $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{5}{3}$ ✓; Eneström–Kakeya ($1 \leq 2 \leq 3$) : $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq 1$ ✓.

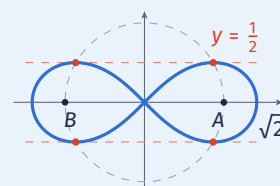
■ Corrigé de l'exercice 28

1. On applique l'exercice 18 aux cordes $[AC]$ et $[BD]$: $(AC) \perp (BD) \iff \boxed{ac + bd = 0}$, et ces droites se coupent au point d'affixe $\frac{1}{2}(a + c + b + d)$, d'où $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.
 2. $k = \frac{c+d}{2}$, donc $k - p = -\frac{a+b}{2}$. Or $\overline{\left(\frac{a+b}{b-a}\right)} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{a+b}{a-b} = -\frac{a+b}{b-a} : \frac{a+b}{b-a}$, donc $\frac{k-p}{b-a}$, est imaginaire pur. Si $K \neq P$, $(PK) \perp (AB)$: la perpendiculaire à (AB) passant par P est (PK) , elle passe par K ; si $K = P$, c'est immédiat.

3. $l + k = \frac{1}{2}(a + b + c + d) = p = 0 + p : [OP]$ et $[LK]$ ont même milieu, $OLPK$ est un **parallélogramme**.
De $ac + bd = 0 : c = -\frac{bd}{a}$, d'où $c + d = d\left(1 - \frac{b}{a}\right) = \frac{d}{a}(a - b)$ et $|c + d| = |a - b| = AB$. Comme K est le milieu de la corde $[CD]$, $(OK) \perp (CD)$: la distance de O à (CD) est $OK = \frac{|c+d|}{2} = \boxed{\frac{1}{2}AB}$.

■ Corrigé de l'exercice 29

1. $MA \times MB = |z - 1| |z + 1| = |z^2 - 1|$ et $|z^2 - 1|^2 = (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1$.
L'équation est invariante par $x \mapsto -x$ et par $y \mapsto -y$: **symétries par rapport aux deux axes** ;
 $y = 0$ donne $x^4 = 2x^2$: points $\boxed{O, (\pm\sqrt{2})}$.
2. Moivre : $z^2 = [r^2, 2\theta]$, d'où $|z^2 - 1|^2 = (r^2 \cos 2\theta - 1)^2 + r^4 \sin^2 2\theta = r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1$ et $M \in (L) \iff \boxed{r^2 = 2 \cos 2\theta}$. Donc $OM^2 \leq 2$, et $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \geq 0$, d'où $(\times r^2) x^2 \geq y^2$ (vrai aussi en O).
3. Avec $u = OM^2 : 2(x^2 - y^2) = u^2$ et $x^2 + y^2 = u$, d'où $4y^2 = 2u - u^2 = 1 - (u - 1)^2 \leq 1 : |y| \leq \frac{1}{2}$. Égalité $\iff u = 1, y^2 = \frac{1}{4}, x^2 = \frac{3}{4}$, soit $\boxed{z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i}$ (points de (L)). Comme $M \neq A, B, (MA) \perp (MB) \iff OM = 1$ (cercle de diamètre $[AB]$) : ce sont ces quatre points.



■ Corrigé de l'exercice 30

1. $1 - q = 1 - \cos^2 x - i \sin x \cos x = \sin x (\sin x - i \cos x) = -i \sin x (\cos x + i \sin x)$. Comme $\sin x \neq 0$, $q \neq 1$ et $\frac{1}{1-q} = \frac{\cos x - i \sin x}{-i \sin x} = \frac{\sin x + i \cos x}{\sin x} = 1 + i \frac{\cos x}{\sin x}$.
2. Moivre : $q^k = \cos^k x (\cos kx + i \sin kx)$, donc $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Comme $\sin x + i \cos x = \left[1, \frac{\pi}{2} - x\right] : \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{\cos^{n+1} x}{\sin x} \left[1, (n+1)x + \frac{\pi}{2} - x\right] = \frac{\cos^{n+1} x}{\sin x} (-\sin nx + i \cos nx)$. Ainsi $C_n + iS_n = 1 + i \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos^{n+1} x}{\sin x} (\sin nx - i \cos nx)$ et on identifie (tout est réel) : $C_n = 1 + \frac{\cos^{n+1} x \sin nx}{\sin x}, S_n = \frac{\cos x - \cos^{n+1} x \cos nx}{\sin x}$.
3. $|\cos x| < 1$, donc $\cos^{n+1} x \rightarrow 0$; comme $|\sin nx| \leq 1$ et $|\cos nx| \leq 1 : \boxed{C_n \rightarrow 1}$ et $\boxed{S_n \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}}$.
- Pour $x = \frac{\pi}{3} (\cos x = \frac{1}{2}) : \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos \frac{k\pi}{3} \rightarrow \boxed{1}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \sin \frac{k\pi}{3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

28

Corrigés : forme algébrique

■ Corrigé de l'exercice 31

1. a) $(2+i)(3-2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$ et $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$, donc $(2+i)(3-2i) - (1-i)^2 = 8 - i + 2i = \boxed{8+i}$.
- b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, puis $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2 = \boxed{-1}$.
- c) $\frac{5+5i}{3-4i} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{15+20i+15i+20i^2}{25} = \frac{-1+7i}{5}$ et $\frac{20}{4+3i} = \frac{20(4-3i)}{25} = \frac{16-12i}{5}$; la somme vaut $\frac{15-5i}{5} = \boxed{3-i}$.
- d) $(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$; $(1-i)^2 = -2i$. Ainsi $\frac{-2+2i}{-2i} = \frac{1-i}{i} = -i(1-i) = \boxed{-1-i}$.

2. a) Comme $i^{4m} = (i^4)^m = 1$: $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$, $i^{4m+4} = 1$, et la somme vaut

$$(4m+1)i - (4m+2) - (4m+3)i + (4m+4) = \boxed{2-2i} \quad (\text{indépendant de } m).$$

b) Les 100 termes de T forment 25 paquets de quatre termes consécutifs ($m = 0, 1, \dots, 24$), donc $T = 25(2-2i) = \boxed{50-50i}$.

3. a) $(3+2i)x + (1-i)y = (3x+y) + i(2x-y)$. Comme x et y sont **réels**, on identifie : $3x+y=7$ et $2x-y=3$, d'où $5x=10$: $\boxed{x=2, y=1}$.

b) $Z_m = \frac{(2+mi)(1+2i)}{5} = \frac{(2-2m) + i(4+m)}{5}$, avec $2-2m$ et $4+m$ réels.

$$Z_m \in \mathbb{R} \iff 4+m=0 \iff \boxed{m=-4}, \text{ et alors } Z_{-4} = \frac{10}{5} = 2; \quad Z_m \in i\mathbb{R} \iff 2-2m=0 \iff \boxed{m=1}, \text{ et alors } Z_1 = \frac{5i}{5} = i.$$

■ Corrigé de l'exercice 32

1. On utilise $\bar{\bar{z}} = z$ et les règles de calcul du conjugué :

- $\bar{A} = \overline{z\bar{z} - i(\bar{z} - z)} = z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = A$, donc $A \in \mathbb{R}$;
- $2 + z\bar{z} = 2 + |z|^2 > 0$, et $\bar{B} = \frac{\bar{z} - z}{2 + z\bar{z}} = -B$, donc $B \in i\mathbb{R}$;
- si $z \notin \mathbb{R}$, alors $z - \bar{z} \neq 0$ et $\bar{C} = \frac{\bar{z} + z}{z - \bar{z}} = -C$, donc $C \in i\mathbb{R}$;
- si $z \neq 0$, alors $\bar{z} \neq 0$ et $\bar{D} = \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} = D$, donc $D \in \mathbb{R}$.

2. $z - \bar{z} = 2iy$, donc $i(z - \bar{z}) = -2y$ et $\boxed{A = x^2 + y^2 - 2y}$. Ensuite $D = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{2 \operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, soit

$$\boxed{D = \frac{2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}}.$$

$A = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 = 1$: l'ensemble cherché est le **cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon 1** (il passe par O).

3. a) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, donc $P(i) = 1 + 2i - 6 - 2i + 5 = \boxed{0}$. Les coefficients de P sont **réels**, donc $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ pour tout z ; ainsi $P(-i) = \overline{P(i)} = \boxed{0}$.

b) $(z^2 + 1)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^4 + \alpha z^3 + (\beta + 1)z^2 + \alpha z + \beta$. Par identification avec P : $\alpha = -2$ et $\beta = 5$ ($\beta + 1 = 6$ ✓). Réciproquement, ces valeurs conviennent : $\boxed{P(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 5)}$.

c) $P(z) = 0 \iff z^2 = -1$ ou $(z-1)^2 = -4$ (produit nul) $\iff z = \pm i$ ou $z-1 = \pm 2i$.
 $\boxed{S = \{i, -i, 1+2i, 1-2i\}}$.

Les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels vont par paires conjuguées.

■ Corrigé de l'exercice 33

Dans tout le corrigé, $z = x + iy$ avec x et y réels ; on identifie parties réelles et imaginaires.

a) $3z - 2i\bar{z} = 3x + 3iy - 2ix - 2y = (3x - 2y) + i(3y - 2x)$. Le système $3x - 2y = 8$, $-2x + 3y = -7$ donne (en ajoutant $3 \times$ la 1^{re} et $2 \times$ la 2^e) $5x = 10$, puis $x = 2$ et $y = -1$: $\boxed{S = \{2 - i\}}$. Contrôle : $3(2 - i) - 2i(2 + i) = 6 - 3i - 4i + 2 = 8 - 7i$ ✓.

b) $z^2 + 2\bar{z} = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy - 2y)$. L'équation équivaut à $y(x - 1) = 0$ et $x^2 - y^2 + 2x = 0$.

• Si $y = 0$: $x^2 + 2x = 0$, donc $x = 0$ ou $x = -2$. Si $x = 1$: $3 - y^2 = 0$, donc $y = \pm\sqrt{3}$.

$S = \{0, -2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$. Les solutions non nulles ont pour module $|-2| = |1 \pm i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. C'était prévisible : $z^2 = -2\bar{z}$ donne $|z|^2 = 2|z|$, donc $|z| = 0$ ou $|z| = 2$.

c) $\bar{z}^2 + |z|^2 = (x^2 - y^2 - 2ixy) + (x^2 + y^2) = 2x^2 - 2ixy$. L'équation équivaut à $x^2 = 1$ et $xy = -1$: $(x, y) = (1, -1)$ ou $(-1, 1)$. $S = \{1 - i, -1 + i\}$.

d) $z^2 + |z| = (x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) + 2ixy$. La partie imaginaire impose $xy = 0$.

• Si $x = 0$: $-y^2 + |y| = 0$, soit $|y|(1 - |y|) = 0$, donc $y \in \{0, 1, -1\}$. Si $y = 0$: $x^2 + |x| = 0$, donc $x = 0$.

$S = \{0, i, -i\}$ (contrôle : $i^2 + |i| = -1 + 1 = 0$).

■ Corrigé de l'exercice 34

1. a) $\operatorname{Re}(1 + mi) = 1 \neq 0$, donc $1 + mi \neq 0$ et z_m est défini. Avec le conjugué du dénominateur :

$$z_m = \frac{(m+i)(1-mi)}{1+m^2} = \frac{m-m^2i+i-mi^2}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2} + i \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

$$b) |z_m| = \frac{|m+i|}{|1+mi|} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{1+m^2}} = 1.$$

$$c) z_m \in \mathbb{R} \iff 1-m^2 = 0 \iff m = \pm 1 \quad (z_1 = 1, z_{-1} = -1); \quad z_m \in i\mathbb{R} \iff 2m = 0 \iff m = 0 \quad (z_0 = i).$$

d) $z_m = -i \iff m+i = -i(1+mi) = m-i \iff i = -i$: impossible. Soit $|z| = 1$, $z \neq -i$. Alors $iz - 1 \neq 0$ (sinon $z = \frac{1}{i} = -i$), et, comme $\bar{z} = \frac{1}{z}$:

$$\bar{\mu} = \frac{-i - \bar{z}}{-i\bar{z} - 1} = \frac{-i - \frac{1}{z}}{-\frac{i}{z} - 1} = \frac{-iz - 1}{-i - z} = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Or $(i-z)(z+i) = iz + i^2 - z^2 - iz = -1 - z^2$ et $(iz+1)(iz-1) = i^2z^2 - 1 = -1 - z^2$: ces produits en croix sont égaux, donc $\bar{\mu} = \mu$ et μ est réel. Enfin $\mu(iz-1) = i-z$ donne $z(1+i\mu) = \mu+i$, et $1+i\mu \neq 0$ (μ réel), donc $z = \frac{\mu+i}{1+i\mu} = z_\mu$.

Conclusion : lorsque m décrit $\mathbb{R}$, $M(z_m)$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1, privé du point d'affixe $-i$.

2. La première équation donne $iw = (1+i)z - 4$, donc $w = -i((1+i)z - 4) = (1-i)z + 4i$. On reporte dans la seconde, avec $(2-i)(1-i) = 1-3i$ et $(2-i)4i = 4+8i$:

$$(2+i)z + (1-3i)z + 4+8i = 5+3i \iff (3-2i)z = 1-5i \iff z = \frac{(1-5i)(3+2i)}{13} = \frac{13-13i}{13} = 1-i.$$

$$\text{Puis } w = (1-i)^2 + 4i = -2i + 4i = 2i. \quad S = \{(1-i, 2i)\}.$$

■ Corrigé de l'exercice 35

$$1. z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy, \text{ donc } z^2 \in \mathbb{R} \iff xy = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0) \iff (z \in i\mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{R}).$$

Si $z^2 \in \mathbb{R}_+$: z^2 est réel, donc $x = 0$ ou $y = 0$; si $x = 0$, alors $z^2 = -y^2 \geq 0$ impose $y = 0$. Dans tous les cas $y = 0$, et réciproquement $x^2 \geq 0$: $z^2 \in \mathbb{R}_+ \iff z \in \mathbb{R}$. De même, si $z^2 \in \mathbb{R}_-$ et $y = 0$, alors $x^2 \leq 0$ impose $x = 0$: $z^2 \in \mathbb{R}_- \iff z \in i\mathbb{R}$.

$$2. a) (z - w)^2 = (z + w)^2 - 4zw = \boxed{s^2 - 4p}.$$

b) Si $s^2 - 4p \geq 0$: $(z - w)^2 \in \mathbb{R}_+$, donc $z - w \in \mathbb{R}$ (question 1), puis $z = \frac{s + (z - w)}{2} \in \mathbb{R}$ et $w = s - z \in \mathbb{R}$.

Si $s^2 - 4p < 0$: $(z - w)^2 \in \mathbb{R}_-$ et $z \neq w$, donc $z - w = i\beta$ avec β réel non nul (question 1). Alors $z = \frac{s + i\beta}{2} \notin \mathbb{R}$ et $w = \frac{s - i\beta}{2} = \bar{z}$.

$$3. a) s = 4, p = 13 : (z - w)^2 = 16 - 52 = -36, \text{ donc } z - w = \pm 6i ; \text{ avec } z + w = 4 \text{ (et réciproquement } (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13 \text{ ✓) :}$$

$$\boxed{(z, w) = (2 + 3i, 2 - 3i) \text{ ou } (z, w) = (2 - 3i, 2 + 3i)}.$$

b) On applique 2 à z et $w = \frac{1}{z}$: $s = 1, p = 1$, donc $(z - \frac{1}{z})^2 = 1 - 4 = -3$ et $z - \frac{1}{z} = \pm i\sqrt{3}$. En ajoutant

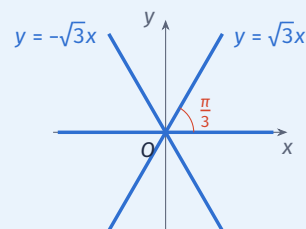
$z + \frac{1}{z} = 1$: $2z = 1 \pm i\sqrt{3}$, soit $\boxed{z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}$. Réciproquement, ces nombres sont de module 1, donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$ et $z + \frac{1}{z} = 2 \operatorname{Re} z = 1$ ✓.

De $z + \frac{1}{z} = 1$, on tire $z^2 = z - 1$, puis $z^3 = z^2 - z = \boxed{-1}$ pour chacun des deux nombres.

$$4. z^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3), \text{ donc :}$$

$$z^3 \in \mathbb{R} \iff y(3x^2 - y^2) = 0 \iff (y = 0 \text{ ou } y = \sqrt{3}x \text{ ou } y = -\sqrt{3}x).$$

L'ensemble cherché est la **réunion de trois droites passant par 0** : l'axe réel et les droites d'équations $y = \pm\sqrt{3}x$, qui font avec l'axe réel des angles de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (figure).



■ Corrigé de l'exercice 36

$$1. a) f(1) = a + b \text{ et } f(i) = ai + b\bar{i} = i(a - b), \text{ donc } a + b = f(1) \text{ et } a - b = -i f(i), \text{ d'où}$$

$$\boxed{a = \frac{f(1) - i f(i)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = \frac{f(1) + i f(i)}{2}}.$$

b) Les applications $z \mapsto az + b\bar{z}$ et $z \mapsto a'z + b'\bar{z}$ ont alors les mêmes valeurs en 1 et en i ; d'après a), $a = a'$ et $b = b'$.

$$c) a = \frac{1+2i-i(2+i)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ et } b = \frac{1+2i+i(2+i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i : \boxed{f(z) = z + 2i\bar{z}} \text{ (contrôle : } f(i) = i + 2i(-i) = 2 + i \text{ ✓)}.$$

$$2. \overline{f(z)} = \overline{az + b\bar{z}} = \bar{a}\bar{z} + \bar{b}z. \text{ Donc } f(z) \in \mathbb{R} \text{ pour tout } z \iff \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} = az + b\bar{z} \text{ pour tout } z \iff \text{(question 1.b) } \bar{b} = a \text{ et } \bar{a} = b \iff \boxed{b = \bar{a}}. \text{ (On a alors } f(z) = az + \bar{a}z = 2 \operatorname{Re}(az).)$$

$$3. \text{ Si } f(z) = 0, \text{ alors } az = -b\bar{z}, \text{ donc } |a| |z| = |b| |\bar{z}| = |b| |z|, \text{ soit } (|a| - |b|) |z| = 0 : \text{ comme } |a| \neq |b|, |z| = 0 \text{ et } z = 0 \text{ (réciproque évidente).}$$

$$\text{Pour tous } z, z' : f(z) - f(z') = a(z - z') + b(\bar{z} - \bar{z}') = f(z - z'). \text{ Donc } f(z) = f(z') \Rightarrow f(z - z') = 0 \Rightarrow z = z'.$$

4. a) $f(z) = x + iy + i(x - iy) = (x + y) + i(x + y) = \boxed{(x + y)(1 + i)}$. $f(z) = 0 \iff y = -x$: c'est la **droite d'équation** $y = -x$. Ici f s'annule en une infinité de points : l'hypothèse $|a| \neq |b|$ de la question 3 était indispensable.
- b) Tout $f(z)$ est de la forme $t(1 + i)$ avec t réel. Réciproquement, si $c = t(1 + i)$ avec $t \in \mathbb{R}$, alors $f(t) = c$. L'équation $f(z) = c$ a des solutions $\iff \boxed{c = t(1 + i), t \in \mathbb{R}} \iff \operatorname{Re} c = \operatorname{Im} c$; ses solutions forment alors la droite d'équation $x + y = t$.
5. a) $f(f(z)) = a(az + b\bar{z}) + b(\bar{a}\bar{z} + \bar{b}z) = \boxed{(a^2 + |b|^2)z + b(a + \bar{a})\bar{z}}$ (avec $b\bar{b} = |b|^2$).
- b) $f(f(z)) = z = 1 \cdot z + 0 \cdot \bar{z}$ pour tout $z \iff$ (question 1.b) $a^2 + |b|^2 = 1$ et $b(a + \bar{a}) = 2b \operatorname{Re}(a) = 0$.
- c) Pour $g : a = i, b = \sqrt{2}, a^2 + |b|^2 = -1 + 2 = 1$ et $\operatorname{Re}(a) = 0 : g \circ g = \operatorname{Id}$. Contrôle direct : $g(g(z)) = i(iz + \sqrt{2}\bar{z}) + \sqrt{2}(-i\bar{z} + \sqrt{2}z) = -z + 2z = z \checkmark$.
- Si a est réel, les conditions s'écrivent $a^2 + |b|^2 = 1$ et $ab = 0$: soit $b = 0$ et $a = \pm 1$, soit $a = 0$ et $|b| = 1$. Les applications cherchées sont $\boxed{z \mapsto z, z \mapsto -z, z \mapsto b\bar{z} \text{ avec } |b| = 1}$ (par exemple $z \mapsto \bar{z}$, symétrie par rapport à l'axe réel).

29

Corrigés : module et inégalités

■ Corrigé de l'exercice 37

1. On utilise $|zz'| = |z| |z'|$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $|z^n| = |z|^n$ et $|\bar{z}| = |z|$:
- a) $(\sqrt{5})^3 \sqrt{10} = 5\sqrt{50} = \boxed{25\sqrt{2}}$; b) $\frac{5^2}{(\sqrt{5})^3} = \frac{25}{5\sqrt{5}} = \boxed{\sqrt{5}}$; c) $\frac{2^5}{(\sqrt{2})^4} = \frac{32}{4} = \boxed{8}$; d) $\frac{1 \times |z|^3}{|z|^2} = \boxed{|z|}$.
2. $|3 - 4i| = |4 + 3i| = 5$, donc le module vaut $\boxed{1}$. $\frac{3 - 4i}{4 + 3i} = \frac{(3 - 4i)(4 - 3i)}{25} = \frac{12 - 9i - 16i + 12i^2}{25} = \frac{-4 - 25i}{25} = \boxed{-\frac{4}{25} - i}$, puis, comme $2026 = 4 \times 506 + 2$:

$$\left(\frac{3 - 4i}{4 + 3i}\right)^{2026} = (-i)^{2026} = (-1)^{2026} i^{2026} = i^2 = \boxed{-1}.$$

3. Avec $z = x + iy : |z|^2 = |z - 2|^2 \iff x^2 = (x - 2)^2 \iff x = 1$, et $|z|^2 = |z - 2i|^2 \iff y^2 = (y - 2)^2 \iff y = 1$. Donc $\boxed{z = 1 + i}$.

Le point $\Omega(1 + i)$ est à égale distance de $O, A(2)$ et $B(2i)$: c'est le **centre du cercle circonscrit** au triangle OAB (rectangle en O , donc Ω est le milieu de l'hypoténuse $[AB]$), de rayon $|1 + i| = \sqrt{2}$.

4. a) $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$, car $\bar{z}w = \overline{z\bar{w}}$. De même $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$; on soustrait.

- b) Les modules étant positifs : $|z + w| = |z - w| \iff |z + w|^2 = |z - w|^2 \iff \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0 \iff \boxed{z\bar{w} \in i\mathbb{R}}$.

Si z et w sont non nuls, $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(\bar{z}w) = \vec{a} \cdot \vec{b}$: la condition signifie $\vec{a} \perp \vec{b}$. Les diagonales du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont pour affixes $z + w$ et $z - w$: elles ont **même longueur** si et seulement si ce parallélogramme est un **rectangle**.

Exemple : $z\bar{w} = (2 + 3i)(3 + 2i) = 6 + 4i + 9i + 6i^2 = 13i \in i\mathbb{R}$, et $|z + w| = |5 + i| = \sqrt{26} = |-1 + 5i| = |z - w| \checkmark$.

■ Corrigé de l'exercice 38

On note $z = x + iy$, avec x et y réels.

a) $|z| = \frac{1}{|z|}$ donne $|z|^2 = 1$. Il reste $x^2 + y^2 = 1$ et $(x-1)^2 + y^2 = 1$; par différence, $-2x + 1 = 0$, donc

$$x = \frac{1}{2} \text{ et } y^2 = \frac{3}{4} : S = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\} \text{ (intersection des cercles } C(O, 1) \text{ et } C(A(1), 1)).$$

b) En passant aux modules : $|z| \times |z| = |-4i| = 4$, donc $|z| = 2$. L'équation devient $2z = -4i$, soit $z = -2i$, qui est bien de module 2 : $S = \{-2i\}$.

c) $|z| - 2\bar{z} = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2x) + 2iy$. L'équation équivaut à $y = 3$ et $\sqrt{x^2 + 9} = 2x - 3$, c'est-à-dire

$$2x - 3 \geq 0 \text{ et } x^2 + 9 = (2x - 3)^2 \iff x \geq \frac{3}{2} \text{ et } 3x^2 - 12x = 0 \iff x \geq \frac{3}{2} \text{ et } x \in \{0, 4\} \iff x = 4.$$

$$S = \{4 + 3i\} \text{ (la valeur } x = 0 \text{ est à rejeter ; contrôle : } 5 - 2(4 - 3i) = -3 + 6i \checkmark).$$

d) $|z - 1|^2 = |z + i|^2 \iff (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \iff x + y = 0$; $|z - 1|^2 = |z - 2 - i|^2 \iff -2x + 1 = -4x + 4 - 2y + 1 \iff x + y = 2$.

Ces deux conditions sont incompatibles : $S = \emptyset$. **Interprétation** : une solution serait l'abbé d'un point équidistant de $A(1)$, $B(-i)$ et $C(2 + i)$, centre d'un cercle passant par ces trois points.

Or $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i}{-1-i} = -1 \in \mathbb{R}$: les points A, B, C sont **alignés** (A est le milieu de $[BC]$), et les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ sont parallèles.

■ Corrigé de l'exercice 39

1. Inégalité triangulaire : $|(1+i)z^3 + iz| \leq \sqrt{2}|z|^3 + |z| < \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{8} < \frac{2+4}{8} = \frac{3}{4}$ (car $\sqrt{2} < 2$).

2. a) $|1+z|^2 = 1 + |z|^2 + 2\operatorname{Re} z = 2 + 2\operatorname{Re} z$ et $|1-z|^2 = 2 - 2\operatorname{Re} z$; la somme vaut 4.

b) Posons $u = |1+z| \geq 0$ et $v = |1-z| \geq 0$, avec $u^2 + v^2 = 4$.

$$\bullet (u+v)^2 = 4 + 2uv \geq 4, \text{ donc } u+v \geq 2, \text{ avec égalité } \iff uv = 0 \iff \boxed{z = -1 \text{ ou } z = 1}.$$

$$\bullet (u+v)^2 = 2(u^2 + v^2) - (u-v)^2 = 8 - (u-v)^2 \leq 8, \text{ donc } u+v \leq 2\sqrt{2}, \text{ avec égalité } \iff u = v \iff 2 + 2\operatorname{Re} z = 2 - 2\operatorname{Re} z \iff \operatorname{Re} z = 0, \text{ soit (comme } |z| = 1) \boxed{z = i \text{ ou } z = -i}.$$

3. Posons $v = -3 + 4i$, de module 5. La condition s'écrit $|z+v| = |z| + |v|$: c'est le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, $z\bar{v} \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire (puisque $v \neq 0$) $z = \lambda v$ avec $\lambda = \frac{z\bar{v}}{|v|^2} \geq 0$. L'ensemble cherché est la **demi-droite** $[OC)$, avec $C(-3 + 4i)$ (origine O comprise).

Lecture géométrique : avec $D(3 - 4i)$, la condition s'écrit $DM = DO + OM$, c'est-à-dire $O \in [DM]$.

4. $2z = (z+w) + (z-w)$ et $2w = (z+w) + (w-z)$ donnent $2|z| \leq |z+w| + |z-w|$ (1) et $2|w| \leq |z+w| + |z-w|$ (2). On ajoute et on divise par 2.

Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans (1) et dans (2). Avec $q = (z+w)\overline{(z-w)}$: égalité dans (1) $\iff q \in \mathbb{R}_+$; égalité dans (2) $\iff (z+w)(\overline{w-z}) = -q \in \mathbb{R}_+$. Donc $q \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$, soit $z+w = 0$ ou $z-w = 0$: $\boxed{w = -z \text{ ou } w = z}$. Réciproquement, pour $w = \pm z$, les deux membres valent $2|z|$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $|z-1|^2 = (z-1)(\bar{z}-1) = |z|^2 - (z+\bar{z}) + 1 = \boxed{5 - 2 \operatorname{Re}(z)}$; de même $|z+1|^2 = \boxed{5 + 2 \operatorname{Re}(z)}$. Comme $MA = |z+1|$ et $MB = |z-1|$: $MA^2 + MB^2 = 10$.

2. a) $|z^2 - 1| = |z-1| |z+1| \leq \frac{|z-1|^2 + |z+1|^2}{2} = 5$. Égalité $\iff |z-1| = |z+1| \iff 5 - 2 \operatorname{Re} z = 5 + 2 \operatorname{Re} z \iff \operatorname{Re} z = 0$, soit $\boxed{z = \pm 2i}$ (et $|(2i)^2 - 1| = 5$ ✓).

b) $4 = |z^2| = |(z^2 - 1) + 1| \leq |z^2 - 1| + 1$, donc $|z^2 - 1| \geq 3$. Égalité $\iff z^2 - 1 \in \mathbb{R}_+$ (cas d'égalité) : alors z^2 est un réel de module 4, supérieur à 1, donc $z^2 = 4$ et $\boxed{z = \pm 2}$; réciproquement $|4 - 1| = 3$ ✓.

3. $MA \times MB = |z+1| |z-1| = |z^2 - 1|$, donc, d'après 2, $(MA + MB)^2 = 10 + 2 |z^2 - 1|$ appartient à $[16, 20]$:

$$\boxed{4 \leq MA + MB \leq 2\sqrt{5}}.$$

Le minimum 4 est atteint pour $M(2)$ et $M(-2)$ (par exemple $MA = 3$, $MB = 1$), le maximum $2\sqrt{5}$ pour $M(2i)$ et $M(-2i)$ ($MA = MB = \sqrt{5}$).

4. $z\bar{z} = 4$, donc $\frac{4}{z} = \bar{z}$ et $z + \frac{4}{z} = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ est réel ; comme $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| = 2$, ce réel appartient à $[-4, 4]$.

■ Corrigé de l'exercice 41

1. a) $|z| = 1$, donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$ et $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2 \cos \theta$. Alors $(2 \cos \theta - 1)z = \left(z + \frac{1}{z} - 1\right)z = z^2 + 1 - z$, et $|1 - z + z^2| = |2 \cos \theta - 1| |z| = \boxed{|2 \cos \theta - 1|}$.

b) $|1 + z|^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 2 + 2 \operatorname{Re}(z) = 2 + 2 \cos \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$, d'où $|1 + z| = \boxed{2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|}$.

2. $t \in [0, 1]$ et $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2t^2 - 1$, donc $|2 \cos \theta - 1| = |4t^2 - 3|$ et $S(z) = 2t + |4t^2 - 3| = f(t)$.

3. Sur $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$: $f(t) = -4t^2 + 2t + 3$ et $f'(t) = 2 - 8t$: f croît sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$: $f(t) = 4t^2 + 2t - 3$ est croissante. Avec $f(0) = 3$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ et $f(1) = 3$: sur $[0, 1]$, le minimum de f est $\sqrt{3}$, atteint seulement en $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et son maximum est $\frac{13}{4}$, atteint seulement en $\frac{1}{4}$. Donc $\boxed{\sqrt{3} \leq S(z) \leq \frac{13}{4}}$.

4. Quand θ décrit $]-\pi, \pi]$, t décrit $[0, 1]$, et $\cos \theta = 2t^2 - 1$.

• $S(z) = \sqrt{3} \iff t = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos \theta = \frac{1}{2} \iff \boxed{z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$. Pour ces z , $1 - z + z^2 = (2 \cos \theta - 1)z = 0$: ce sont bien les solutions de $z^2 - z + 1 = 0$ (et $|1 + z| = \sqrt{3}$).

• $S(z) = \frac{13}{4} \iff t = \frac{1}{4} \iff \cos \theta = -\frac{7}{8} \iff \boxed{z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i}$ (alors $|1 + z| = \frac{1}{2}$ et $|1 - z + z^2| = \frac{11}{4}$).

■ Corrigé de l'exercice 42

1. $P(1) + P(-1) = (1 + a + b) + (1 - a + b) = 2 + 2b$ et $P(i) + P(-i) = (-1 + ai + b) + (-1 - ai + b) = -2 + 2b$: la différence vaut $\boxed{4}$.
2. Si les quatre modules étaient < 1 , l'inégalité triangulaire donnerait, d'après 1 :
 $4 \leq |P(1)| + |P(-1)| + |P(i)| + |P(-i)| < 4$: absurde.
3. $\operatorname{Re}(u_k) \leq |u_k| \leq 1$ et $\sum \operatorname{Re}(u_k) = \operatorname{Re}(4) = 4$: si l'un des $\operatorname{Re}(u_k)$ était < 1 , la somme serait < 4 . Donc $\operatorname{Re}(u_k) = 1$; comme $\operatorname{Re}(u_k)^2 + \operatorname{Im}(u_k)^2 = |u_k|^2 \leq 1$, $\operatorname{Im}(u_k) = 0$ et $u_k = 1$.
4. $u_1 = P(1)$, $u_2 = P(-1)$, $u_3 = -P(i)$, $u_4 = -P(-i)$ sont de module ≤ 1 , de somme 4 (question 1). D'après 3, $P(1) = P(-1) = 1$, soit $1 + a + b = 1 - a + b = 1$: $\boxed{a = b = 0}$ (et, réciproquement, $|z^2| = 1$ sur le cercle unité).
5. On applique 2 à $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta) = z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta$: il existe $z \in \{1, -1, i, -i\}$ tel que le point $M(z)$ de (U) vérifie $MA \times MB = |z - \alpha| |z - \beta| = |P(z)| \geq 1$. Si $MA \times MB \leq 1$ pour tout $M \in (U)$, alors $|P(z)| \leq 1$ pour $|z| = 1$ et la question 4 donne $\alpha + \beta = \alpha\beta = 0$, d'où $\alpha^2 = 0$: $\boxed{A = B = O}$ (et réciproquement $MO^2 = 1$).
6. $Q(1) - Q(-1) = 2 + 2b$ et $Q(i) - Q(-i) = (-i - a + bi + c) - (i - a - bi + c) = 2i(b - 1)$, donc $Q(1) - Q(-1) + i(Q(i) - Q(-i)) = 2 + 2b - 2(b - 1) = \boxed{4}$. Comme en 2, l'un des $|Q(\pm 1)|$, $|Q(\pm i)|$ est ≥ 1 ; avec $Q(z) = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$ (α, β, γ affixes de A, B, C), on obtient $M \in (U)$ tel que $MA \times MB \times MC \geq 1$.

30

Corrigés : forme trigonométrique

■ Corrigé de l'exercice 43

1. a) $|-3 + 3i\sqrt{3}| = \sqrt{9 + 27} = 6$ et $-3 + 3i\sqrt{3} = 6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{\left[6, \frac{2\pi}{3}\right]}$.
 b) $|\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{\left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{3}\right]}$.
 c) $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $\sqrt{3} + i = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$, donc $\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right] = \boxed{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\pi}{12}\right]}$.
 d) $-5\left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}\right) = 5\left(-\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) = 5\left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}\right) = \boxed{\left[5, \frac{7\pi}{8}\right]}$ (car $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$).
 e) $-\sin \frac{\pi}{9} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right)$ et $\cos \frac{\pi}{9} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right)$, donc le nombre vaut $\boxed{\left[1, \frac{11\pi}{18}\right]}$.
 f) $1 + i \tan \frac{\pi}{5} = \frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}}$ avec $\cos \frac{\pi}{5} > 0$: $\boxed{\left[\frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}}, \frac{\pi}{5}\right]}$.
2. Posons $t = \frac{\theta}{2}$. Avec $1 + \cos 2t = 2 \cos^2 t$ et $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$: $z = 2 \cos^2 t + 2i \sin t \cos t = 2 \cos t (\cos t + i \sin t)$.
 • Si $\theta \in]0, \pi[$, alors $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos t > 0$: $\boxed{z = \left[2 \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]}$.

- Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$, alors $\cos t < 0$: on écrit $z = (-2 \cos t) \times (-(\cos t + i \sin t))$, et $-(\cos t + i \sin t) = [1, t + \pi]$, d'où $z = \left[-2 \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2} + \pi\right]$.
- Si $\theta = \pi$: $z = 1 - 1 + 0i = 0$, qui n'a pas d'argument.

■ Corrigé de l'exercice 44

1. $|a| = 2$ et $a = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left[2, \frac{2\pi}{3}\right]$; $|b| = 2\sqrt{2}$ et $b = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.
2. $ab = \left[4\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{12}\right]$; $\frac{a}{b} = \left[\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{11\pi}{12}\right]$;
 $b^2 = \left[8, -\frac{\pi}{2}\right]$ et $\bar{a} = \left[2, -\frac{2\pi}{3}\right]$, donc $\frac{b^2}{\bar{a}} = \left[4, -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right] = \left[4, \frac{\pi}{6}\right]$; $-i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$, donc $-ia = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$.
 Même argument, module double : $\frac{b^2}{\bar{a}} = -2ia$ (en effet $-ia = \sqrt{3} + i$ et $\frac{b^2}{\bar{a}} = \frac{-8i}{-1-i\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 2i$).
3. Moivre : $a^6 = [2^6, 4\pi] = 64$ et $b^4 = \left[(2\sqrt{2})^4, -\pi\right] = -64$, donc $a^6 b^4 = -4096$.
 $\frac{a}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$ et $2026 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4052\pi}{3} = 675 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, donc $\left(\frac{a}{2}\right)^{2026} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$.
4. $a^n = \left[2^n, \frac{2n\pi}{3}\right]$ est réel $\iff \frac{2n\pi}{3} \equiv 0 [\pi] \iff \frac{2n}{3} \in \mathbb{Z}$. Avec $n = 3q + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$: $\frac{2n}{3} = 2q + \frac{2r}{3}$ est entier $\iff r = 0$. Donc $a^n \in \mathbb{R} \iff n$ multiple de 3, et alors $\frac{2n\pi}{3} = 2q\pi$: $a^n = 2^n$ (un réel positif ; par exemple $a^3 = 8$).
 $b^n = \left[(2\sqrt{2})^n, -\frac{n\pi}{4}\right]$ est imaginaire pur $\iff -\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\iff n = -2 - 4k$:
 $n = 4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$ (par exemple $b^2 = -8i$).

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $Z = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}$, avec $(z-1)(\bar{z}+1) = |z|^2 + z - \bar{z} - 1 = (x^2 + y^2 - 1) + 2iy$ et $|z+1|^2 = (x+1)^2 + y^2 > 0$: d'où les formules.
2. $Z = [r, \varphi]$ avec $r > 0$; par Moivre, $Z^3 = [r^3, 3\varphi]$ est réel $\iff 3\varphi \equiv 0 [\pi] \iff \varphi \equiv 0 \left[\frac{\pi}{3}\right]$. À 2π près : $\varphi \in \{0, \pi\}$ ($\text{Im } Z = 0$) ; $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$, soit $Z = \pm r\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ($\text{Im } Z = \sqrt{3} \text{Re } Z$) ; $\varphi \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ ($\text{Im } Z = -\sqrt{3} \text{Re } Z$). Réciproquement, si $\text{Im } Z = \pm\sqrt{3}X$ avec $X = \text{Re } Z$, alors $Z = 2X\left[1, \pm\frac{\pi}{3}\right]$ et $Z^3 = 8X^3[1, \pm\pi] = -8X^3 \in \mathbb{R}$.
 Contrôle (exercice 35) : $\text{Im}(Z^3) = \text{Im } Z(3 \text{Re}^2 Z - \text{Im}^2 Z)$.
3. Le point A ($Z = 0$) appartient à (E). Pour $z \neq -1$, d'après 1 et 2 :
 - $\text{Im } Z = 0 \iff y = 0$: c'est la droite (AB) ;
 - $\text{Im } Z = \sqrt{3} \text{Re } Z \iff 2y = \sqrt{3}(x^2 + y^2 - 1) \iff x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$: cercle (Γ_1) de centre $\Omega_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;
 - de même, $\text{Im } Z = -\sqrt{3} \text{Re } Z$ définit le cercle (Γ_2) de centre $\Omega_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ces cercles passent par A et B ($1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$) : $(E) = ((AB) \cup (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)) \setminus \{B\}$.

4. $AB = 2$ et $AC = BC = |i\sqrt{3} \mp 1| = 2$: ABC est équilatéral. Puis $\frac{i\sqrt{3} - 1}{i\sqrt{3} + 1} = \frac{2, \frac{2\pi}{3}}{2, \frac{\pi}{3}} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$, donc

$$Z^3 = [1, \pi] = -1 \in \mathbb{R} : C \in (E) \text{ (et } C \in (\Gamma_1) : \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}).$$

Pour $M \notin \{A, B\}$, $\arg Z \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$: (E) est formé de A et des points d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ ou π ; $(\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$ correspond aux angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (arcs capables).

■ Corrigé de l'exercice 46

- Par Moivre, $w^n = [1, 2\pi] = 1$; $w \neq 1$ car $0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi$; enfin $w + w^2 + \dots + w^n = w \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0$.
- $T - wT = \sum_{k=1}^n k w^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) w^k = (w + w^2 + \dots + w^n) - n w^{n+1} = -n w$, car $w^{n+1} = w$. Comme $1 - w \neq 0$: $T = \frac{-nw}{1-w} = \frac{n w}{w-1}$.
- Avec $\alpha = \frac{\pi}{n}$: $w-1 = \cos 2\alpha - 1 + i \sin 2\alpha = -2 \sin^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha = 2i \sin \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Comme $w = [1, 2\alpha]$ et $\frac{1}{i} = -i$:

$$T = \frac{n [1, 2\alpha]}{2i \sin \alpha [1, \alpha]} = \frac{-i n (\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2 \sin \alpha} = \frac{n (\sin \alpha - i \cos \alpha)}{2 \sin \alpha} = \frac{n}{2} - i \frac{n}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

- Par Moivre, $T = \sum k \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sum k \sin \frac{2k\pi}{n}$ (sommes réelles) ; on identifie :

$$\sum_{k=1}^n k \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k \sin \frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

Pour $n = 4$ ($w = i$) : $T = i - 2 - 3i + 4 = 2 - 2i$, et l'on trouve bien $\frac{4}{2} = 2$ et $-\frac{4}{2} \cdot \frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = -2$ ✓.

- $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $g_n = \frac{2T}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \left(1 - i \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}\right)$. Quand $n \rightarrow +\infty$: $\operatorname{Re}(g_n) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

et, avec $u = \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$:

$$\operatorname{Im}(g_n) = -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\cos u}{\pi} \cdot \frac{u}{\sin u} \rightarrow -\frac{1}{\pi} \quad (\text{le point } G_n \text{ « tend » vers le point d'affixe } -\frac{i}{\pi}).$$

■ Corrigé de l'exercice 47

- $\left|1 + \frac{i}{k}\right| = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ et la partie réelle est > 0 , donc (méthode du cours) $1 + \frac{i}{k} = \left[\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}, \arctan \frac{1}{k}\right]$.
On multiplie les modules et on ajoute les arguments : $P_n = [r_n, \theta_n]$ avec $r_n = \prod \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$, soit $r_n^2 = \prod \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.
- $r_{n+1} = r_n \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} > r_n$. $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)(k^2 - 1) = k^2 - \frac{1}{k^2} \leq k^2$, donc, pour $n \geq 2$:

$$r_n^2 = 2 \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq 2 \prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} \times \prod_{k=2}^n \frac{k}{k+1} = 2 \times n \times \frac{2}{n+1} = \frac{4n}{n+1} < 4$$

(égalité pour $n = 1$). Croissante et majorée par 2, (r_n) converge vers L , et $\sqrt{2} = r_1 < r_2 \leq L \leq 2$. (Numériquement, $L \approx 1,917$.)

3. $h(x) = \arctan x - \frac{x}{2}$ vérifie $h'(x) = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)} \geq 0$ sur $[0, 1]$ et $h(0) = 0$, donc $h \geq 0$. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$; par récurrence, $H_{2^{m+1}} \geq H_{2^m} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{m+1}{2}$. La suite (H_n) , croissante et non majorée, tend vers $+\infty$; or $\theta_n \geq \frac{1}{2}H_n$: $\theta_n \rightarrow +\infty$.

4. $\theta_{n+1} - \theta_n = \arctan \frac{1}{n+1} \in]0, \frac{\pi}{4}]$. Soit N le plus grand entier tel que $\theta_N < 2p\pi - \frac{\pi}{4}$ (il existe : $\theta_1 = \frac{\pi}{4} < 2p\pi - \frac{\pi}{4}$ et $\theta_n \rightarrow +\infty$) : $n = N + 1$ convient, car $2p\pi - \frac{\pi}{4} \leq \theta_{N+1} < 2p\pi$. De même pour m .

Alors $\cos \theta_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \theta_m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $r_k \geq \sqrt{2}$, donc $\operatorname{Re}(P_n) = r_n \cos \theta_n \geq 1$ et $\operatorname{Re}(P_m) \leq -1$. Les intervalles obtenus pour $p = 1, 2, \dots$ sont disjoints : il y a une infinité de tels n et de tels m . Si $P_n \rightarrow \ell$, alors $\operatorname{Re}(P_n) \rightarrow \operatorname{Re}(\ell)$, qui serait à la fois ≥ 1 et ≤ -1 : absurde. Les points $M_n(P_n)$ tournent indéfiniment autour de O dans la couronne $\sqrt{2} \leq OM \leq 2$.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $T_2 = 2x^2 - 1$; $T_3 = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$; $T_4 = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$; $T_5 = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

2. a) $|w| = 1$, donc $\frac{1}{w} = \overline{w}$ et $w + \frac{1}{w} = w + \overline{w} = 2 \operatorname{Re} w = 2 \cos \theta$. En multipliant par w^n : $w^{n+1} + w^{n-1} = 2 \cos \theta w^n$. Les parties réelles (Moivre) donnent $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta$.

b) Soit $P(n)$: « $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ et $\cos((n+1)\theta) = T_{n+1}(\cos \theta)$ ». $P(0)$ est vraie ($\cos 0 = 1 = T_0$ et $\cos \theta = T_1(\cos \theta)$). Si $P(n)$ est vraie, alors, d'après a),

$$\cos((n+2)\theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) = T_{n+2}(\cos \theta),$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Ainsi $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ pour tout n . Pour $n = 3$ et $n = 4$, on retrouve les formules du cours : T_3 et T_4 (question 1).

3. Soit $Q(n)$: « T_n et T_{n+1} sont de degrés n et $n+1$, de coefficients dominants 2^{n-1} et 2^n ». $Q(1)$ est vraie ($T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$). Si $Q(n)$ est vraie, $2xT_{n+1}$ est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} , et T_n est de degré $n < n+2$: $T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n$ est de degré $n+2$, de coefficient dominant 2^{n+1} . D'où $Q(n+1)$.

4. a) Posons $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$: $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$, et $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc $x_1 > x_2 > \dots > x_n$: les x_k sont distincts. Et $T_n(x_k) = \cos(n\theta_k) = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2} = 0$.

b) T_n est de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} (question 3), et s'annule en les n réels distincts $x_1, \dots, x_n$: d'après le résultat admis, $T_n(x) = 2^{n-1}(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

c) D'une part $T_4(0) = 1$ (question 1) ; d'autre part $T_4(0) = 8(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) = 8x_1x_2x_3x_4$. Donc

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} = \frac{1}{8}.$$

Contrôle : $\cos \frac{5\pi}{8} = -\cos \frac{3\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{7\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8}$, donc le produit vaut $(\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8})^2 = (\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4})^2 = \frac{1}{8}$ ✓.

31 Corrigés : géométrie et complexes

■ Corrigé de l'exercice 49

1. $b - a = -3 - 6i$ et $c - a = 2 - 4i$, donc

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{(2 - 4i)(-3 + 6i)}{(-3)^2 + 6^2} = \frac{18 + 24i}{45} = \frac{6 + 8i}{15} \notin \mathbb{R} :$$

A, B, C ne sont **pas alignés**.

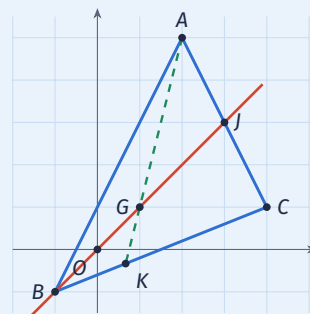
2. $g = \frac{a + 2b + c}{1 + 2 + 1} = \frac{4 + 4i}{4} = \boxed{1 + i}$, $j = \frac{a + c}{2} = \boxed{3 + 3i}$ et $\frac{b + j}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = g$: G est le milieu de $[BJ]$ (associativité : G est le barycentre de $\{(J, 2), (B, 2)\}$).

3. $k = \frac{2b + c}{3} = \frac{2 - i}{3}$, $k - a = \frac{-4 - 16i}{3} = -\frac{4}{3}(1 + 4i)$ et $g - a = -(1 + 4i)$, donc

$$\frac{g - a}{k - a} = \frac{3}{4} \in \mathbb{R} : A, G, K \text{ alignés et } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AK}.$$

4. O est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. En séparant parties réelle et imaginaire : $2\alpha - \beta + 4\gamma = 0$ et $5\alpha - \beta + \gamma = 0$, d'où $\gamma = \alpha$ et $\beta = 6\alpha$. Avec $\alpha = 1$: $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 6, 1)$ (somme $8 \neq 0$; vérification : $a + 6b + c = 0$ ✓).

Par associativité, O est le barycentre de $\{(J, 2), (B, 6)\}$, donc $O \in (BJ)$: les points O, B, G, J sont sur la droite d'équation $y = x$.



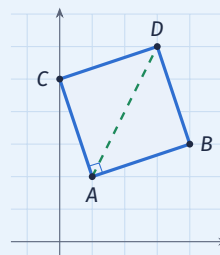
■ Corrigé de l'exercice 50

1. $\frac{c - a}{b - a} = \frac{-1 + 3i}{3 + i} = \frac{(-1 + 3i)(3 - i)}{10} = \frac{10i}{10} = \boxed{i}$. Donc $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$: ABC est **rectangle isocèle en A**.

2. $ABDC$ parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff d = b + c - a = \boxed{3 + 6i}$. Ce parallélogramme a un angle droit en A et deux côtés consécutifs égaux ($AB = AC$) : c'est un **carré**.

3. $\frac{d - a}{b - a} = \frac{2 + 4i}{3 + i} = \frac{(2 + 4i)(3 - i)}{10} = \boxed{1 + i}$, soit $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Donc $\frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

4. $\frac{d - a}{c - b} = \frac{2 + 4i}{-4 + 2i} = \frac{(2 + 4i)(-4 - 2i)}{20} = \frac{-20i}{20} = \boxed{-i}$: imaginaire pur de module 1, donc $(AD) \perp (BC)$ et $AD = BC$. De plus $\frac{a + d}{2} = \frac{b + c}{2} = 2 + 4i$: les diagonales du carré ont même milieu, même longueur et sont perpendiculaires.



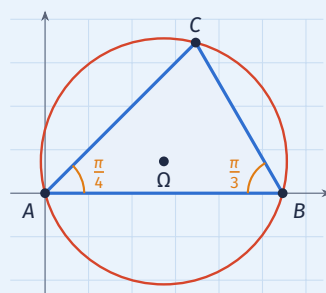
■ Corrigé de l'exercice 51

1. Comme $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} > 0$:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{3}(1+i)}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \boxed{\frac{\pi}{4}} [2\pi].$$



2. $\frac{a-b}{c-b} = \frac{-(1+\sqrt{3})}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{4}$, soit

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

donc $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv \boxed{\frac{\pi}{3}} [2\pi].$

3. a) Comme $(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv (\vec{AC}, \vec{BC})$, la relation de Chasles donne

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv (\vec{AB}, \vec{BA}) \equiv \pi [2\pi], \quad \text{d'où} \quad (\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{5\pi}{12}} [2\pi].$$

- b) $\frac{b-c}{a-c} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}(1+i)} = \frac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{-2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}}$, de module $\frac{CB}{CA} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ et d'argument $\frac{5\pi}{12}$. Donc

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

4. $\omega - b = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\omega - c = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$: les parties réelle et imaginaire de ω , $\omega - b$ et $\omega - c$ valent, au signe et à l'ordre près, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Leurs modules au carré sont donc tous égaux à $\frac{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$: $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \sqrt{2}$, donc Ω est le centre du cercle circonscrit, de rayon $\sqrt{2}$. Enfin, d'après 3.b) :

$$\frac{\omega}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin \frac{5\pi}{12} + i \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \quad \boxed{\omega = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right]}.$$

■ Corrigé de l'exercice 52

1. a) $\frac{d-a}{b-a} = \frac{-3-i}{-1+3i} = \frac{(-3-i)(-1-3i)}{10} = \frac{10i}{10} = i$: $AD = AB$
 et $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}$: ABD est **rectangle isocèle en A**.

b) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-4}{-1+3i} = \frac{4+12i}{10} = \frac{2+6i}{5} \notin \mathbb{R}$: A, B, C ne sont pas alignés.
 $\frac{d-b}{d-c} = \frac{-2-4i}{1-i} = \frac{(-2-4i)(1+i)}{2} = 1-3i$, et

$$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{d-b}{d-c} = \frac{(2+6i)(1-3i)}{5} = \frac{20}{5} = 4 \in \mathbb{R}.$$

Les points (distincts) A, B, C, D sont donc **cocycliques**.

2. Le triangle ABD est rectangle en A : son cercle circonscrit, qui est (Γ) , a pour diamètre $[BD]$.
 Donc $\omega = \frac{b+d}{2} = 1+i$ et $r = \frac{|d-b|}{2} = \frac{|-2-4i|}{2} = \sqrt{5}$ (contrôle : $|c-\omega| = |-2-i| = \sqrt{5}$ ✓).

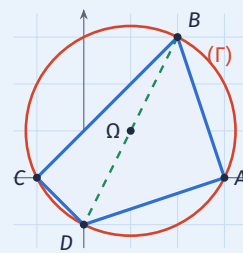
3. Ω est le milieu de $[BD]$, donc $\frac{d-\omega}{r} = -v$. Ainsi $z-b = r(u-v)$ et $z-d = r(u+v)$, d'où $\frac{z-b}{z-d} = \frac{u-v}{u+v}$ (avec $u+v \neq 0$ car $M \neq D$). Comme $|u| = |v| = 1$, on a $\bar{u} = \frac{1}{u}$, $\bar{v} = \frac{1}{v}$ et

$$\overline{\left(\frac{u-v}{u+v}\right)} = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}} = \frac{v-u}{v+u} = -\frac{u-v}{u+v} : \text{ ce nombre est imaginaire pur.}$$

Il est non nul ($M \neq B$) : $(MB) \perp (MD)$. C'est l'angle inscrit dans un demi-cercle.

4. $\frac{d-c}{b-c} = \frac{1-i}{3+3i} = \frac{(1-i)^2}{6} = -\frac{i}{3}$: le triangle BCD est rectangle en C , avec $CB = 3\sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{2}$.
 Comme A et C sont de part et d'autre de la diagonale $[BD]$:

$$A(ABCD) = A(ABD) + A(CBD) = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}{2} + \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 5 + 3 = 8.$$



■ Corrigé de l'exercice 53

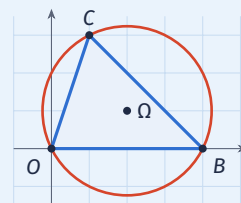
1. $\overline{\bar{b}c} = b\bar{c}$, donc $\bar{b}c - b\bar{c} = \bar{b}c - \overline{\bar{b}c} = 2i \operatorname{Im}(\bar{b}c)$. Or $\frac{c}{b} = \frac{\bar{b}c}{|b|^2}$:
 O, B, C alignés $\iff \frac{c}{b} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(\bar{b}c) = 0$. Ici ils ne le sont pas : $\bar{b}c - b\bar{c} \neq 0$.

2. $\Omega O = \Omega B \iff |\omega - b|^2 = |\omega|^2 \iff |\omega|^2 - \bar{b}\omega - b\bar{\omega} + |b|^2 = |\omega|^2 \iff \bar{b}\omega + b\bar{\omega} = |b|^2$.

3. Ω est équidistant de O, B, C : $\bar{b}\omega + b\bar{\omega} = |b|^2$ (1) et $\bar{c}\omega + c\bar{\omega} = |c|^2$ (2). En calculant $c \times (1) - b \times (2)$, $\bar{\omega}$ s'élimine :

$$(\bar{b}c - b\bar{c})\omega = |b|^2c - |c|^2b = b\bar{b}c - c\bar{c}b = bc(\bar{b} - \bar{c}),$$

et on divise par $\bar{b}c - b\bar{c} \neq 0$.



4. a) $\overline{bc} - b\overline{c} = 4(1+3i) - 4(1-3i) = 24i$ et $bc(\overline{b} - \overline{c}) = 4(1+3i)(3+3i) = -24+48i$, donc $\omega = \frac{-24+48i}{24i} =$

$\boxed{2+i}$ et $R = |\omega| = \boxed{\sqrt{5}}$ (contrôle : $|\omega - 4| = |\omega - c| = \sqrt{5}$ ✓).

b) On se ramène au cas précédent en prenant A_1 comme origine : $b_1 - a_1 = 4$ et $c_1 - a_1 = 1+3i$. Le centre a donc pour affixe $a_1 + (2+i) = \boxed{3+2i}$, et le rayon vaut $\sqrt{5}$.

5. $R = |\omega| = \frac{|b| |c| |\overline{b} - \overline{c}|}{|\overline{bc} - b\overline{c}|} = \frac{OB \times OC \times BC}{2 |\operatorname{Im}(\overline{bc})|} = \boxed{\frac{OB \times OC \times BC}{4S}}$ (exemple 4.a : $\frac{4 \times \sqrt{10} \times \sqrt{18}}{4 \times 6} = \sqrt{5}$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $|u| = \frac{AC}{AB}$ et $\arg u \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) [2\pi]$. Si ABC est équilatéral, $AC = AB$ et l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ vaut $\frac{\pi}{3}$: $|u| = 1$ et $\arg u \equiv \pm \frac{\pi}{3}$. Réciproquement, si $|u| = 1$ et $\arg u \equiv \pm \frac{\pi}{3}$, le triangle est isocèle en A d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$; ses angles à la base valent $\frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$: il est équilatéral. Or $\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. $u^2 - u + 1 = (u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, donc $u^2 - u + 1 = 0 \iff (u - \frac{1}{2})^2 = (-i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \iff u - \frac{1}{2} = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \iff u = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Avec 1 : ABC équilatéral $\iff u^2 - u + 1 = 0$.

3. On multiplie par $(b-a)^2 \neq 0$: $u^2 - u + 1 = 0 \iff (c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0$. En développant :

$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = c^2 - 2ac + a^2 - cb + ca + ab - a^2 + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

4. a) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$, donc $a^2 + b^2 + c^2 = ab+bc+ca \iff (a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$. Si $G = O$, c'est-à-dire $a+b+c = 0$: ABC équilatéral $\iff ab+bc+ca = 0$. Exemple : $a+b+c = 0$ et $ab+bc+ca = 2(-1+i\sqrt{3}) + 4 + 2(-1-i\sqrt{3}) = 0$ ✓.

b) Comme $z \notin \mathbb{R}$, les points P, M, M' sont distincts. Avec $z = x + iy$: $z^2 + \overline{z}^2 = 2(x^2 - y^2)$, $z\overline{z} = x^2 + y^2$ et $z + \overline{z} = 2x$, donc

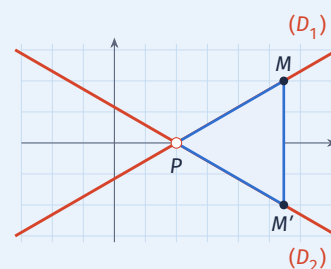
$$1 + z^2 + \overline{z}^2 - z - z\overline{z} - \overline{z} = x^2 - 2x + 1 - 3y^2 = (x-1)^2 - 3y^2.$$

D'après 3 : PMM' équilatéral $\iff x-1 = \sqrt{3}y$ ou $x-1 = -\sqrt{3}y$. L'ensemble cherché est la réunion des deux droites

$$(D_1) : x - \sqrt{3}y = 1 \quad \text{et} \quad (D_2) : x + \sqrt{3}y = 1,$$

privée du point P (seul point réel de ces droites). Elles passent par P et font des angles de $\pm \frac{\pi}{6}$ avec l'axe réel.

Exemple : $M(1 + \sqrt{3} + i)$ donne $MM' = PM = PM' = 2$.



32

Corrigés : ensembles de points

■ Corrigé de l'exercice 55

a) $|2z - 4 + 2i| = 2|z - (2 - i)|$: la condition s'écrit $|z - (2 - i)| = 3$. C'est le **cercle** (C_1) de centre $\Omega_1(2 - i)$ et de rayon 3.

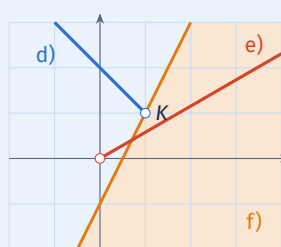
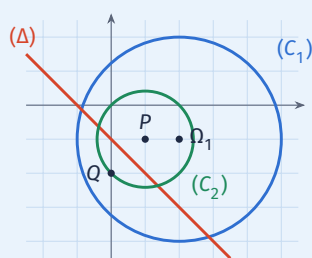
b) $|\bar{z} - 1 - i| = |\overline{z - 1 + i}| = |z - (1 - i)|$ et $|z + 2i| = |z - (-2i)|$: c'est la **médiatrice** (Δ) de $[PQ]$, avec $P(1 - i)$ et $Q(-2i)$. En coordonnées : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + (y + 2)^2 \iff x + y + 1 = 0$.

c) $\frac{2i}{1 - i} = \frac{2i(1 + i)}{2} = -1 + i$, donc $(1 - i)z + 2i = (1 - i)(z - (1 - i))$ et, comme $|1 - i| = \sqrt{2}$, la condition s'écrit $|z - (1 - i)| = \sqrt{2}$: **cercle** (C_2) de centre $P(1 - i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

d) **Demi-droite ouverte** d'origine $K(1 + i)$, dirigée par $\vec{w}(-1 + i)$, d'argument $\frac{3\pi}{4}$: points $1 + i + \lambda(-1 + i)$, $\lambda > 0$ (partie de la droite $y = -x + 2$ où $x < 1$).

e) $z \neq 0$ et $\arg(i\bar{z}) \equiv \frac{\pi}{2} - \arg z$: la condition s'écrit $\arg z \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$. C'est la **demi-droite ouverte** d'origine O dirigée par $\sqrt{3} + i$.

f) M est plus proche de $R(3)$ que de $S(-1 + 2i)$: $(x - 3)^2 + y^2 \leq (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \iff -8x + 4y + 4 \leq 0 \iff y \leq 2x - 1$. C'est le **demi-plan fermé** limité par la médiatrice de $[RS]$ et contenant R .



■ Corrigé de l'exercice 56

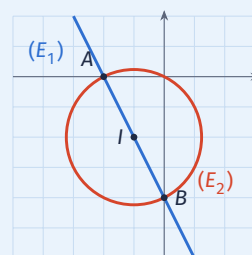
1. $Z = ((x + 1) + iy)(x - i(y + 2))$, d'où $\boxed{\operatorname{Re}(Z) = x^2 + y^2 + x + 2y}$ et $\boxed{\operatorname{Im}(Z) = -(2x + y + 2)}$.

2. $Z \in \mathbb{R} \iff 2x + y + 2 = 0$: (E_1) est une **droite**. $Z \in i\mathbb{R} \iff x^2 + x + y^2 + 2y = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4}$: (E_2) est le **cercle** de centre $I\left(-\frac{1}{2} - i\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $\overline{z + 2i} = \bar{z} - 2i$, d'où $Z = (z + 1)\overline{(z + 2i)}$. Pour $z \neq -2i$, la relation $\overline{w} = \frac{|w|^2}{w}$ (avec $w = z + 2i$) donne

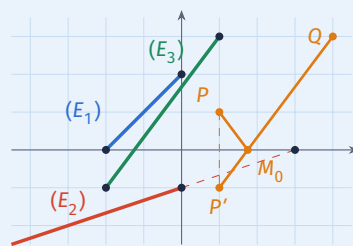
$$Z = |z + 2i|^2 \times \frac{z - a}{z - b}, \quad a = -1, b = -2i.$$

Pour $M \neq B$: $Z \in \mathbb{R} \iff \frac{z - a}{z - b} \in \mathbb{R} \iff M \in (AB)$; et $Z \in i\mathbb{R} \iff \frac{z - a}{z - b} \in i\mathbb{R} \iff M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$. Comme B (qui donne $Z = 0$) appartient aux deux ensembles : $(E_1) = (AB)$ et (E_2) est le cercle de diamètre $[AB]$. On retrouve 2 : (AB) a pour équation $2x + y + 2 = 0$, le milieu de $[AB]$ est I et $\frac{AB}{2} = \frac{|1 - 2i|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



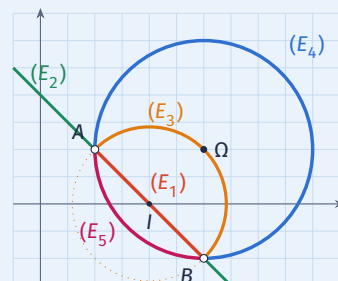
■ Corrigé de l'exercice 57

- Posons $u = z - a$ et $v = b - z$: $u + v = b - a$, et $MA + MB = AB \iff |u| + |v| = |u + v|$. Si $u = 0$, $M = A \in [AB]$. Sinon $b - z = \lambda(z - a)$ avec $\lambda \geq 0$, soit $z = \frac{\lambda a + b}{\lambda + 1}$: M est le barycentre de $\{(A, \lambda), (B, 1)\}$, à coefficients positifs, donc $M \in [AB]$. Réciproquement, si $z = a + t(b - a)$ avec $t \in [0, 1]$: $MA + MB = tAB + (1 - t)AB = AB$.
- Posons $u = b - a \neq 0$ et $v = z - b$: $u + v = z - a$ et $MA = MB + AB \iff |u + v| = |u| + |v| \iff v = \lambda u$ avec $\lambda \geq 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB}$. C'est la **demi-droite fermée d'origine B** dirigée par $\overrightarrow{AB}$: le prolongement de $[AB]$ au-delà de B.
- (E_1) : avec $A(2i)$ et $B(-2)$, $AB = |-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$: (E_1) est le **segment** $[AB]$ (question 1).
 (E_2) : avec $A(3)$ et $B(-i)$, $AB = |-3 - i| = \sqrt{10}$ et la condition s'écrit $MA = MB + AB$: (E_2) est la **demi-droite** des points $-i + \lambda(-3 - i)$, $\lambda \geq 0$ (partie de la droite $x - 3y - 3 = 0$ où $x \leq 0$).
 (E_3) : avec $A(1 + 3i)$ et $B(-2 - i)$, $AB = |-3 - 4i| = 5$. L'inégalité triangulaire donne toujours $MA + MB \geq AB = 5$: la condition équivaut à $MA + MB = AB$, et (E_3) est le **segment** $[AB]$.
- Pour $M(x)$ sur l'axe réel : $MP = |x - (1 + i)| = |\overline{x - (1 + i)}| = |x - (1 - i)| = MP'$, donc $MP + MQ = MP' + MQ \geq P'Q = |3 + 4i| = 5$, avec égalité si et seulement si $M \in [P'Q]$ (question 1). Le point $1 - i + t(3 + 4i)$ est réel pour $t = \frac{1}{4}$: c'est $M_0\left(\frac{7}{4}\right)$. Le minimum vaut $\boxed{5}$, atteint en $\boxed{M_0\left(\frac{7}{4}\right)}$ seulement.



■ Corrigé de l'exercice 58

- $Z = \frac{(3 - i) - z}{(1 + i) - z} = \frac{b - z}{a - z}$, quotient des affixes de $\overrightarrow{MB}$ et de $\overrightarrow{MA}$: $\arg Z \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$.
- On multiplie par le conjugué $(x - 1) - i(y - 1)$ du dénominateur. Le numérateur $[(x - 3) + i(y + 1)][(x - 1) - i(y - 1)]$ a pour partie réelle $(x - 3)(x - 1) + (y + 1)(y - 1) = x^2 + y^2 - 4x + 2$ et pour partie imaginaire $(y + 1)(x - 1) - (x - 3)(y - 1) = 2(x + y - 2)$.
- $Z \in \mathbb{R} \iff x + y = 2$: c'est la droite (AB) (privée de A et B). Et $\operatorname{Re}(Z) < 0 \iff (x - 2)^2 + y^2 < 2$: intérieur du cercle de diamètre $[AB]$, de centre $I(2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
Donc $\boxed{(E_1) =]AB[}$ et $\boxed{(E_2) = (AB) \setminus [AB]}$: $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi$ quand M est entre A et B, $\equiv 0$ quand M est sur la droite, hors du segment.
- $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{Re}(Z) = 0$ et $\operatorname{Im}(Z) > 0 \iff (x - 2)^2 + y^2 = 2$ et $x + y > 2$: (E_3) est le **demi-cercle** de diamètre $[AB]$ situé dans le demi-plan $x + y > 2$, privé de A et B.
 $\arg Z \equiv \frac{\pi}{4} \iff Z = \rho(1 + i)$ avec $\rho > 0 \iff \operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Im}(Z) > 0$. L'égalité s'écrit $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 2x + 2y - 4$, soit $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$: (E_4) est l'**arc** du cercle (Γ) de centre $\Omega(3 + i)$ et de rayon 2 situé dans le demi-plan $x + y > 2$ (le grand arc), A et B exclus.
 $\arg Z \equiv -\frac{3\pi}{4} \iff Z = \rho(-1 - i)$ avec $\rho > 0 \iff \operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Im}(Z) < 0$: (E_5) est l'autre arc de (Γ) (le petit arc, dans le demi-plan $x + y < 2$), A et B exclus.



5. $(E_4) \cup (E_5) \cup \{A, B\} = (\Gamma)$: de chaque point de (Γ) distinct de A et B , on voit $[AB]$ sous un angle orienté $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$ (égaux modulo π). Enfin $Z(\Omega) = \frac{2i}{2} = i$, d'où $\Omega \in (E_3)$: c'est l'angle au centre, double de l'angle inscrit : $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 59

1. a) $z' = \frac{1}{z} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$: $\vec{OM'} = \frac{1}{|z|^2} \vec{OM}$ avec $\frac{1}{|z|^2} > 0$, donc $M' \in [OM)$, et $OM' = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{OM}$.
 b) $M' = M \iff z = \frac{z}{|z|^2} \iff |z| = 1$: c'est le **cercle (U) de centre O et de rayon 1**. Le point associé à M' a pour affixe $\frac{1}{z'} = \frac{1}{1/z} = z$: c'est M .

2. a) (D) est la médiatrice de $[OA]$: $M \in (D) \iff MO = MA \iff |z| = |z - 1|$ (en coordonnées : $(x - 1)^2 = x^2 \iff x = \frac{1}{2}$). Et

$$|z' - 1| = \left| \frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}} \right| = \frac{|1 - \bar{z}|}{|z|} = \frac{|z - 1|}{|z|}.$$

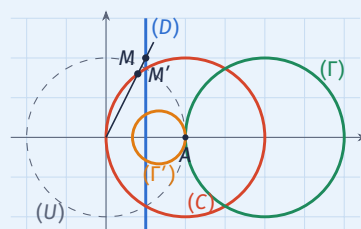
- b) $M \in (D) \iff \frac{|z - 1|}{|z|} = 1 \iff |z' - 1| = 1 \iff M' \in (C)$.

Comme $M' \neq O$, M' décrit une partie de $(C) \setminus \{O\}$. Réciproquement, si $N \in (C)$ et $N \neq O$, le point M associé à N vérifie $M' = N$ (question 1.b) et $M \in (D)$ par l'équivalence : M' décrit **tout** (C) privé de O . Exemple (figure) : $M\left(\frac{1}{2} + i\right)$ donne $z' = \frac{1}{\frac{1}{2} - i} = \frac{2+4i}{5}$ et $|z' - 1| = \left| \frac{-3+4i}{5} \right| = 1$.

3. Comme $z = \frac{1}{z'}$: $|z - 2| = 1 \iff \left| \frac{1 - 2z'}{z'} \right| = 1 \iff |1 - 2z'| = |z'| \iff |2z' - 1| = |z'|$. Avec $z' = x' + iy'$, cette condition s'écrit $4\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + 4y'^2 = x'^2 + y'^2$, soit

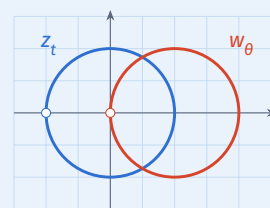
$$3x'^2 - 4x' + 3y'^2 + 1 = 0 \iff \left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{9}.$$

Ainsi $M \in (\Gamma) \iff M' \in (\Gamma')$, cercle de centre $\Omega'\left(\frac{2}{3}\right)$ et de rayon $\frac{1}{3}$; comme $O \notin (\Gamma')$, le même raisonnement qu'en 2.b) montre que M' décrit tout (Γ') . Contrôle : $M(1)$ et $M(3)$ donnent $M'(1)$ et $M'\left(\frac{1}{3}\right)$, extrémités d'un diamètre de (Γ') ✓.



■ Corrigé de l'exercice 60

1. a) $|1 + it| = |1 - it| = \sqrt{1 + t^2} \neq 0$, donc $|z_t| = 1$. Si $z_t = -1$:
 $1 + it = -1 + it$, soit $2 = 0$: absurde. $z_1 = \frac{(1+i)^2}{2} = \boxed{i}$ et $z_{\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.



b) $|z| = 1$ donne $\bar{z} = \frac{1}{z}$, donc $\bar{t} = \frac{\frac{1}{z} - 1}{-i(\frac{1}{z} + 1)} = \frac{1 - z}{-i(1 + z)} = t : t \in \mathbb{R}$.

De plus $it = \frac{z-1}{z+1}$, d'où $1 + it = \frac{2z}{z+1}$, $1 - it = \frac{2}{z+1}$ et $z_t = z$.

- c) D'après a) et b), l'ensemble cherché est le **cercle (U) de centre O et de rayon 1, privé du point d'affixe -1**.

2. a) $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ et $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, donc $w_\theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ avec $2 \cos \frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$w_\theta = \left[2 \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2} \right], \quad (w_\theta)^n = \left[2^n \cos^n \frac{\theta}{2}, \frac{n\theta}{2} \right] \text{ (Moivre),} \quad (w_{\pi/3})^6 = \left[\sqrt{3}^6, \pi \right] = \boxed{-27}.$$

- b) $w_\theta - 1 = \cos \theta + i \sin \theta$: le point décrit le **cercle de centre A(1) et de rayon 1**, dont tous les points s'obtiennent pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, **privé de O** (obtenu seulement pour $\theta = \pi$).

33

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Pour un complexe m de module 1, $\bar{m} = \frac{1}{m}$. Donc $\bar{c} - \bar{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac}$, et de même pour les autres différences :

$$\bar{q} = \frac{(a-c)/(ac)}{(a-b)/(ab)} \times \frac{(b-d)/(bd)}{(c-d)/(cd)} = \frac{(a-c)b}{(a-b)c} \times \frac{(b-d)c}{(c-d)b} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(b-a)(d-c)} = q.$$

Par translation et homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ (qui ne changent pas q), on en déduit que q est réel pour quatre points quelconques d'un même cercle.

2. $\lambda = \frac{c-a}{b-a}$ est un réel non nul. Donc $q \in \mathbb{R} \iff \frac{d-b}{d-c} \in \mathbb{R} \iff B, C, D$ alignés $\iff D \in (BC) = (AB)$.
 Conclusion : si A, B, C ne sont pas alignés, $q \in \mathbb{R} \iff$ cocycliques (cours) ; s'ils sont alignés, $q \in \mathbb{R} \iff$ les quatre points sont alignés. Les deux situations s'excluent (une droite coupe un cercle en au plus deux points), d'où l'équivalence.

3. $z \notin \mathbb{R}$ et $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \notin \mathbb{R}$: M et N sont distincts de A et de B ; et $M = N \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1$, exclu. Ensuite

$$q = \frac{z-1}{-2} \times \frac{\frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{1-z}} = \frac{z-1}{-2} \times \frac{1+z}{1-z^2} = \frac{z-1}{-2} \times \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R},$$

et A, B, M ne sont pas alignés (M n'est pas sur l'axe réel) : les quatre points sont **cocycliques**.
 Le centre est sur la médiatrice de $[AB]$, l'axe des imaginaires : $\omega = i\tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}$; avec $z = x + iy$, on obtient

$$\Omega A = \Omega M \iff 1 + \tau^2 = x^2 + (y - \tau)^2 \iff 2y\tau = x^2 + y^2 - 1 \iff \tau = \frac{|z|^2 - 1}{2 \operatorname{Im}(z)}.$$

Pour $z = 2i$: $\omega = \frac{3}{4}i$ et $R = \left|1 - \frac{3}{4}i\right| = \frac{5}{4}$; contrôle : $\left|2i - \frac{3}{4}i\right| = \left|-\frac{i}{2} - \frac{3}{4}i\right| = \frac{5}{4}$ ✓. Si $|z| = 1$: $\omega = 0$ et $\frac{1}{z} = \bar{z}$, le cercle est (U) .

4. $z \notin \mathbb{R}$: $M \neq O$, $M \neq A$, et O , A , M ne sont pas alignés ($\frac{z-0}{1-0} = z \notin \mathbb{R}$) ; $iz \neq 0$, $iz \neq 1$ ($z \neq -i$), $iz \neq z$ ($z \neq 0$) : les points sont distincts. Puis $q = \frac{z}{1} \times \frac{iz-1}{iz-z} = \frac{iz-1}{i-1} = \frac{(iz-1)(-1-i)}{2} = \frac{(x+y+1)+i(y-x+1)}{2}$. D'après le cours, les points sont cocycliques $\iff q \in \mathbb{R} \iff$
 $\boxed{x-y=1}$: M décrit la droite $y = x - 1$ privée de A et du point d'affixe $-i$.

Autre méthode : $\frac{iz}{z} = i$, donc $(OM) \perp (ON)$ et le cercle circonscrit à OMN est le cercle de diamètre $[MN]$, de centre $\Omega\left(\frac{(1+i)z}{2}\right)$; A est sur ce cercle $\iff \Omega A = \Omega O \iff \Omega$ est sur la médiatrice $x = \frac{1}{2}$ de $[OA]$ $\iff \operatorname{Re} \frac{(1+i)z}{2} = \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. On utilise $|m+n|^2 = |m|^2 + |n|^2 + 2 \operatorname{Re}(m\bar{n})$. En sommant :

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2(p^2 + q^2 + r^2) + 2 \operatorname{Re}(\bar{a}b + b\bar{c} + c\bar{a}) \quad \text{et} \quad s^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{a}b + b\bar{c} + c\bar{a}),$$

d'où l'égalité.

2. En développant, chacun des produits pq, pr, ps, qr, qs, rs apparaît deux fois, et chacun de u, v, w est multiplié par $-(p+q+r+s)$; le membre de droite vaut donc

$$2(pq + pr + ps + qr + qs + rs) - (u + v + w)T + (u^2 + v^2 + w^2).$$

D'après 1, $u^2 + v^2 + w^2 + 2(pq + \dots + rs) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2(pq + \dots + rs) = T^2$: on obtient $T^2 - (u+v+w)T$.

3. $p + q - w = |a| + |b| - |a + b| \geq 0$ (inégalité triangulaire). Et $a + b = (a + b + c) + (-c)$, donc $|a + b| \leq |a + b + c| + |c|$, soit $r + s - w \geq 0$. Les quatre autres facteurs se traitent de même (permutation de a, b, c). Donc $T(T - u - v - w) \geq 0$. Si $T = 0$, alors $a = b = c = 0$ et l'inégalité est une égalité ; sinon $T > 0$ et $T \geq u + v + w$: c'est l'inégalité de Hlawka.
4. Si $a + b + c = 0$: $u = |-a| = p, v = q, w = r$ et $s = 0$: les deux membres valent $p + q + r$. Si a, b, c sont des réels positifs, le membre de gauche vaut $2(a+b+c)$, celui de droite $(a+b+c) + (a+b+c)$.
5. Avec $a = 1, b = i, c = -z$: $|a+b| = \sqrt{2}, |b+c| = |z-i| = MB, |c+a| = |z-1| = MA, |c| = MO$ et $|a+b+c| = |z-(1+i)| = MC$. Hlawka donne $\sqrt{2} + MA + MB \leq 1 + 1 + MO + MC$, d'où le résultat. Pour $M = C$: $a + b + c = 0$, il y a égalité : $MA + MB = 2 = \sqrt{2} + 0 + 2 - \sqrt{2}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. a) Avec $z = x + iy$: $|z-i|^2 - |z+i|^2 = (x^2 + (y-1)^2) - (x^2 + (y+1)^2) = -4y$. Donc $|g(z)| < 1 \iff |z-i| < |z+i| \iff y > 0$: $M(z)$ est plus proche de I que de J , c'est-à-dire du même côté que I de la médiatrice de $[IJ]$, l'axe des réels.
- b) $g(z) = 1$ donnerait $z-i = z+i$: impossible. Pour $w \neq 1$: $w = g(z) \iff w(z+i) = z-i \iff z(1-w) = i(1+w) \iff z = i \frac{1+w}{1-w}$ (et ce z n'est pas $-i$, sinon $-1+w = 1+w$). Si $w \in D$, ce z vérifie $|g(z)| = |w| < 1$, donc $z \in H$ par a). Tout $w \in D$ a donc un unique antécédent dans H : avec a), g est une bijection de H sur D .
2. a) $|1 - \bar{a}z|^2 = (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) = 1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2$ et $|z-a|^2 = |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2$. La différence vaut $1 + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2)$.

b) Si $|z| \leq 1$: $|\bar{a}z| \leq |a| < 1$, donc $\bar{a}z \neq 1$. Comme $1 - |a|^2 > 0$, la différence de a est > 0 si $|z| < 1$ (d'où $|z - a| < |1 - \bar{a}z|$, soit $|f(z)| < 1$) et nulle si $|z| = 1$ (d'où $|f(z)| = 1$).

c) Soit $w \in D$; $1 + \bar{a}w \neq 0$ car $|\bar{a}w| < 1$, et $f(z) = w \iff z - a = w - \bar{a}wz \iff z = \frac{w + a}{1 + \bar{a}w}$.

Ce nombre s'écrit $\frac{w - (-a)}{1 - (-a)w}$ avec $-a \in D$: il est dans D d'après b). Chaque $w \in D$ a un unique antécédent dans D .

d) Avec $a = \frac{1}{2}$: $|2z - 1| \leq |2 - z| \iff \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 \leq \left|1 - \frac{z}{2}\right|^2 \iff 0 \leq \frac{3}{4}(1 - |z|^2) \iff |z| \leq 1$.
L'ensemble des solutions est le **disque fermé de centre O et de rayon 1**.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. D'après le cours, $\operatorname{Re}(\bar{u}v)$ est le produit scalaire des vecteurs unitaires d'affixes u et v :

$$\operatorname{Re}(\bar{u}v) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ca} = -\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BA \times BC} = -\cos \beta.$$

De même, $\operatorname{Re}(\bar{v}w) = -\frac{\vec{CB} \cdot \vec{CA}}{ab} = -\cos \gamma$ et $\operatorname{Re}(\bar{w}u) = -\frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{bc} = -\cos \alpha$.

2. On développe $|m + n + p|^2 = (m + n + p)(\bar{m} + \bar{n} + \bar{p})$ avec $m = \lambda u$, $n = \mu v$, $p = v w$; comme $|u| = |v| = |w| = 1$ et λ, μ, v sont réels :

$$|\lambda u + \mu v + v w|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + v^2 + 2\lambda\mu \operatorname{Re}(\bar{u}v) + 2\mu v \operatorname{Re}(\bar{v}w) + 2v\lambda \operatorname{Re}(\bar{w}u),$$

d'où la formule avec 1. Un carré de module est positif : c'est (I).

3. $cu + av + bw$ est l'affixe de $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$ (Chasles). Si u et v étaient colinéaires, (AB) et (BC) seraient parallèles, donc A, B, C alignés. Il y a égalité dans (I) $\iff \lambda u + \mu v + v w = 0$: c'est vrai si $(\lambda, \mu, v) = k(c, a, b)$. Réciproquement, on retranche $\frac{v}{b}(cu + av + bw) = 0$: $\left(\lambda - \frac{vc}{b}\right)u + \left(\mu - \frac{va}{b}\right)v = 0$; comme u et v ne sont pas colinéaires, ces coefficients réels sont nuls, et $(\lambda, \mu, v) = \frac{v}{b}(c, a, b)$.

4. Avec $\lambda = \mu = v = 1$: $3 \geq 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$, soit $\boxed{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}}$, avec égalité $\iff a = b = c$: triangle **équilatéral**.

On veut $\lambda\mu = \mu v = \sqrt{2}v\lambda$: $\lambda = v = 1$ et $\mu = \sqrt{2}$ conviennent, et (I) donne $4 \geq 2(\sqrt{2}\cos \beta + \sqrt{2}\cos \gamma + \cos \alpha)$, d'où $\boxed{\cos \alpha + \sqrt{2}(\cos \beta + \cos \gamma) \leq 2}$. Égalité $\iff (c, a, b)$ proportionnel à $(1, \sqrt{2}, 1) \iff b = c$ et $a^2 = 2c^2 = b^2 + c^2$: triangle **rectangle isocèle en A** (contrôle : $0 + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 65

1. $c = i$: $z_1 = i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = (-1 + i)^2 + i = -2i + i = -i$, $z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i = z_2$: la suite est périodique à partir du rang 2 ($z_{2p} = -1 + i$, $z_{2p+1} = -i$), donc $|z_n| \leq \sqrt{2}$ et $i \in M$. $c = -2$: $z_1 = -2$, puis $z_2 = z_3 = z_4 = 2$, et $z_n = 2$ pour tout $n \geq 2$: $-2 \in M$.

Si $|c| \leq \frac{1}{4}$: $|z_0| = 0 \leq \frac{1}{2}$, et si $|z_n| \leq \frac{1}{2}$, alors $|z_{n+1}| \leq |z_n|^2 + |c| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (récurrence).

2. a) Pour $n = k$, $|z_n| \geq |z_k|$ est clair. Si $|z_n| \geq |z_k|$ (donc $|z_n| \geq |c|$ et $|z_n| > 2$), l'inégalité triangulaire donne

$$|z_{n+1}| \geq |z_n^2| - |c| \geq |z_n|^2 - |z_n| = |z_n|(|z_n| - 1) \geq \rho |z_n| \geq |z_n| \geq |z_k| \quad (\text{car } \rho > 1).$$

Ainsi $|z_n| \geq \rho^{n-k} |z_k|$ pour $n \geq k$, et $\rho^{n-k} \rightarrow +\infty : \lim |z_n| = +\infty$.

b) Si $|c| > 2$, $k = 1$ convient ($|z_1| = |c|$) : $c \notin M$. Donc $M \subset \{c : |c| \leq 2\}$. Si $c \in M$ et si l'on avait $|z_k| > 2$ pour un entier k , on aurait $|z_k| > 2 \geq |c|$ et a) contredirait la majoration : $|z_n| \leq 2$ pour tout n .

3. a) $z_{n+1} - z_n = z_n^2 - z_n + c = \left(z_n - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} \geq c - \frac{1}{4} > 0$, d'où $z_n \geq n\left(c - \frac{1}{4}\right) \rightarrow +\infty : c \notin M$.

b) $1 - 4c \geq 0$ et β est racine de $X^2 - X + c : \beta^2 + c = \beta$. Si $c \geq 0 : -\beta < 0 \leq c$. Si $-2 \leq c < 0 : \beta \geq -c \iff \sqrt{1-4c} \geq -2c-1$, vrai si $-2c-1 < 0$, et sinon (nombres positifs) $\iff 1-4c \geq 4c^2+4c+1 \iff 4c(c+2) \leq 0$: vrai. Enfin $z_0 = 0 \in [-\beta, \beta]$ et, si $|z_n| \leq \beta$, alors $0 \leq z_n^2 \leq \beta^2$, d'où $-\beta \leq c \leq z_{n+1} \leq \beta^2 + c = \beta$.

c) Pour $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$, $|z_n| \leq \beta : c \in M$; pour $c > \frac{1}{4}$, a) ; pour $c < -2$, $|c| > 2$ et 2.b). Donc

$$M \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right].$$

■ Corrigé de l'exercice 66

1. a) $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$. En conjuguant $a+b+c = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, soit $\frac{bc+ca+ab}{abc} = 1 : ab+bc+ca = abc$.

b) $(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc = 1 - 1 + abc - abc = 0$. Un facteur est nul, par exemple $a = 1$; alors $b+c = 0$. Exemple : $(a, b, c) = (1, i, -i)$.

2. Soit $r = |z| > 0$. D'après l'inégalité triangulaire, $\left|r - \frac{1}{r}\right| = \left||z| - \left|-\frac{1}{z}\right|\right| \leq \left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$. Donc (en multipliant par $r > 0$) $r^2 - r - 1 \leq 0$ et $r^2 + r - 1 \geq 0$, soit $r \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$. Comme $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1 : z = i\varphi$ donne $z + \frac{1}{z} = i\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right) = i$, et $z = \frac{i}{\varphi}$ donne $-i$: les deux bornes sont atteintes.

3. a) Avec $z = x + iy : |z|^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$.

b) $\sum_k |\operatorname{Re}(z_k)| = P + N$ et $\sum_k |\operatorname{Im}(z_k)| = P' + N'$; d'après a), $L \leq \sum_k (|\operatorname{Re}(z_k)| + |\operatorname{Im}(z_k)|) = P + N + P' + N'$.

L'un des quatre nombres est donc $\geq \frac{L}{4}$. Si c'est P , on prend $J = \{k : \operatorname{Re}(z_k) > 0\} : \left|\sum_{k \in J} z_k\right| \geq \operatorname{Re}\left(\sum_{k \in J} z_k\right) = P \geq \frac{L}{4}$. Si c'est N , $J = \{k : \operatorname{Re}(z_k) < 0\}$ et $\left|\sum_{k \in J} z_k\right| \geq -\operatorname{Re}\left(\sum_{k \in J} z_k\right) = N$; de même avec les parties imaginaires.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Forme algébrique et conjugué	31 à 36	/ 6	
Thème B · Module et inégalités	37 à 42	/ 6	
Thème C · Forme trigonométrique et Moivre	43 à 48	/ 6	
Thème D · Géométrie et complexes	49 à 54	/ 6	
Thème E · Ensembles de points	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Fonctions logarithmiques

Maths Olympiad