

Chapitre 6

Nombres complexes (2)

Du niveau de base au niveau concours

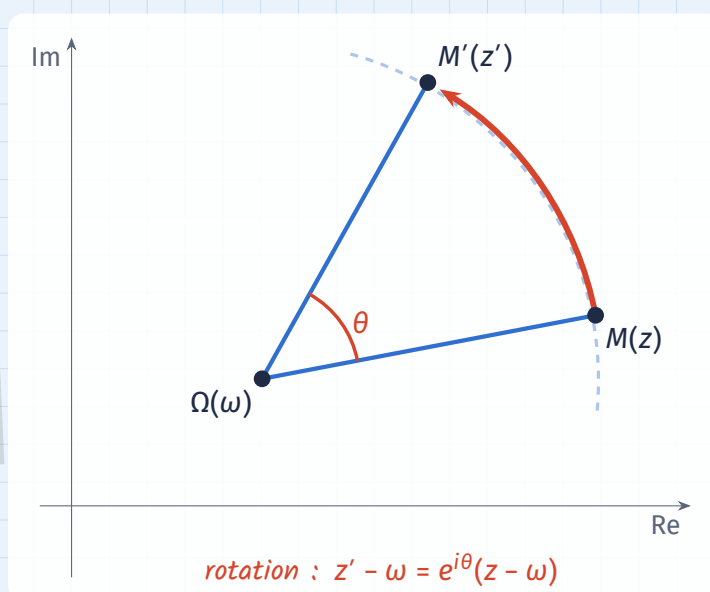
À connaître par cœur

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z^n = 1 \iff z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Défi de concours

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1	La notation exponentielle	6
1.1	Le nombre $e^{i\theta}$	6
1.2	La forme exponentielle	7
1.3	Passer d'une forme à l'autre	7
2	Formules de Moivre et d'Euler	8
2.1	La formule de Moivre	8
2.2	Les formules d'Euler	8
2.3	Linéariser	8
2.4	Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$	9
3	Angle moitié et sommes	10
3.1	La factorisation par l'angle moitié	10
3.2	Les sommes $\sum e^{ik\theta}$, $\sum \cos k\theta$, $\sum \sin k\theta$	11
4	Racines carrées, second degré	12
4.1	Racines carrées d'un nombre complexe	12
4.2	L'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes	13
5	Racines n-ièmes	14
5.1	Les racines n -ièmes de l'unité	14
5.2	Racines n -ièmes d'un complexe non nul	15
6	Se ramener au second degré	15
6.1	Factoriser un polynôme	15
6.2	Équations bicarrées et équations symétriques	16
6.3	Changement d'inconnue et racines n -ièmes	16
7	Translation et homothétie	17
8	Rotation et composées	18
8.1	La rotation	18
8.2	Rotation et homothétie de même centre	19
8.3	Composée de deux rotations	19
9	Géométrie avec les complexes	19
9.1	Triangles équilatéraux, carrés	19
9.2	Points cocycliques	20
9.3	Un problème complet, style examen national	20

10 Pour aller plus loin	21
10.1 Les polynômes de Tchebychev	21
10.2 Le produit des $1 - \omega^k$	22
11 Les pièges classiques	22
12 Les astuces des concours	23
13 L'essentiel du chapitre en une page	24
14 Niveau 1 · Bases	25
15 Niveau 2 · Bac	26
16 Niveau 3 · Approfondissement	28
17 Niveau 4 · Concours	29
18 Forme exponentielle et Euler	31
19 Racines n-ièmes	33
20 Équations dans $\mathbb{C}$	34
21 Transformations du plan	37
22 Géométrie et complexes	39
23 Défis de concours	41
24 Corrigés du niveau 1	44
25 Corrigés du niveau 2	47
26 Corrigés du niveau 3	50
27 Corrigés du niveau 4	53
28 Corrigés : forme exponentielle	55
29 Corrigés : racines n-ièmes	59
30 Corrigés : équations complexes	63
31 Corrigés : transformations du plan	66
32 Corrigés : géométrie et complexes	70

Comment utiliser ce livret**Les 4 niveaux d'exercices****Niveau 1 · Bases ★**

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Forme exponentielle et Euler, Racines n -ièmes, Équations dans $\mathbb{C}$, Transformations du plan, Géométrie et complexes, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|--|
| ☐ passer d'une forme à l'autre $(a + ib, r e^{i\theta})$; | ☐ trouver les racines carrées d'un complexe ; |
| ☐ calculer avec $e^{i\theta}$ (produits, puissances) ; | ☐ résoudre $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$; |
| ☐ utiliser les formules de Moivre et d'Euler ; | ☐ résoudre une équation de degré 3 ou 4 ; |
| ☐ linéariser $\cos^p \theta \sin^q \theta$; | ☐ résoudre $z^n = a$ et placer les solutions ; |
| ☐ exprimer $\cos n\theta, \sin n\theta$ avec $\cos \theta, \sin \theta$; | ☐ utiliser j et $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0$; |
| ☐ factoriser par l'angle moitié ; | ☐ reconnaître une transformation $z' = az + b$; |
| ☐ calculer $\sum \cos k\theta$ et $\sum \sin k\theta$; | ☐ résoudre un problème de géométrie. |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 La notation exponentielle

Prérequis (chapitre 4) : forme algébrique, conjugué, module, argument, forme trigonométrique, angles orientés. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.1 Le nombre $e^{i\theta}$

Définition : notation exponentielle

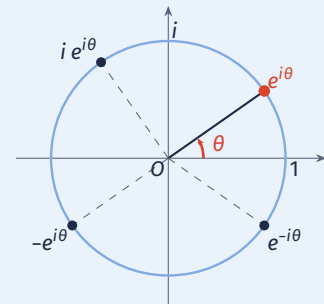
Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$: c'est le complexe de **module** 1 et d'**argument** θ .

L'ensemble des complexes de module 1 est $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$; ses points images forment le cercle trigonométrique.

Propriété fondamentale et conséquences

Pour tous réels θ, θ' :

1. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
2. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
3. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$; en particulier $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$;
4. $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ et $i e^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$.



Démonstration. 1. Avec les formules d'addition : $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$. 2. D'après 1, $e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$; et $\cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$. 3. Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires le sont : $\cos \theta = \cos \theta'$ et $\sin \theta = \sin \theta'$, c'est-à-dire $\theta \equiv \theta' [2\pi]$. 4. $-1 = e^{i\pi}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis on applique 1. $\square$

Remarque. La règle 1 transforme une **somme d'angles** en **produit**, comme $a^{x+y} = a^x a^y$: c'est ce qui justifie la notation. Ici, $e^{i\theta}$ n'est qu'une **notation** (la fonction exponentielle réelle viendra au chapitre suivant). À connaître : $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.2 La forme exponentielle

Définition et théorème

Tout complexe $z \neq 0$ s'écrit $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta \equiv \arg z [2\pi]$: c'est une **forme exponentielle** de z .

- **Unicité** ($r, r' > 0$) : $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff (r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi])$.
- **Calculs** ($z = r e^{i\theta}$, $z' = r' e^{i\theta'}$, $n \in \mathbb{Z}$) : $zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$ $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ $z^n = r^n e^{in\theta}$
 $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ $-z = r e^{i(\theta+\pi)}$.

Démonstration. $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ (chapitre 4). Si $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$, en passant aux modules $r = r'$ (car $|e^{i\theta}| = 1$), puis $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, donc $\theta \equiv \theta' [2\pi]$. Les règles de calcul découlent de la propriété fondamentale (et de la formule de Moivre, section 2, pour z^n). $\square$

1.3 Passer d'une forme à l'autre

Méthode : écrire un complexe sous forme exponentielle

- **Depuis $a + ib$** : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.
- **Produits, quotients, puissances** : on écrit chaque facteur sous forme exponentielle ; on multiplie les modules et on additionne les arguments.
- **Avec un paramètre** : on fait apparaître un réel **strictement positif** devant $e^{i(\dots)}$: $-2 e^{i\alpha} = 2 e^{i(\alpha+\pi)}$, $\sin \theta + i \cos \theta = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$; une somme de deux exponentielles se traite par l'angle moitié (section 3).

Exemple : puissances et quotient

Soit $a = -3 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i$. $|a| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$, $\cos \theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$:
 $a = 2\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$; de même $b = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- $a^3 = 24\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{2}} = 24\sqrt{3} i$ et $b^5 = 4\sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, donc $\frac{a^3}{b^5} = \frac{24\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{i(\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{4})} = 3\sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}i$.
- $a^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{5n\pi}{6}}$ est un **réel strictement positif** $\iff \frac{5n\pi}{6} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff 12 \text{ divise } 5n$
 $\iff 12 \text{ divise } n$ (car $n = 25n - 24n$) ; il est **imaginaire pur** $\iff \frac{5n\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff 5n \equiv 3 [6] \iff n \equiv 3 [6]$ (car $5 \equiv -1 [6]$). Le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $a^n > 0$ est $n = 12$.

Exemple : avec un paramètre : $z = 1 - \cos 2\theta + i \sin 2\theta$, $\theta \in]0, 2\pi[, \theta \neq \pi$

$z = 2 \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta (\sin \theta + i \cos \theta) = 2 \sin \theta e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$. Le réel $2 \sin \theta$ n'est pas toujours positif :

- si $\theta \in]0, \pi[$: $|z| = 2 \sin \theta$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$ (pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $z = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$ ✓) ;
- si $\theta \in]\pi, 2\pi[$: $z = -2 \sin \theta e^{i(\frac{3\pi}{2}-\theta)}$, donc $|z| = -2 \sin \theta$ et $\arg z \equiv \frac{3\pi}{2} - \theta [2\pi]$.

2

Formules de Moivre et d'Euler

2.1 La formule de Moivre

Théorème de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, c'est-à-dire $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Démonstration. C'est la formule de Moivre du chapitre 4, écrite en notation exponentielle ; directement : récurrence avec $e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $(e^{i\theta})^{-m} = \frac{1}{e^{im\theta}} = e^{-im\theta}$. C'est la règle $(a^x)^n = a^{nx}$. $\square$

2.2 Les formules d'Euler

Théorème (formules d'Euler)

Pour tout réel θ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos n\theta \quad e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i \sin n\theta.$$

En particulier, si $z = e^{i\theta}$: $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ et $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$.

Démonstration. On additionne puis on soustrait $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$. Les formules avec n s'obtiennent en remplaçant θ par $n\theta$, et $\frac{1}{z^n} = e^{-in\theta}$ par Moivre. $\square$

2.3 Linéariser

Méthode : linéariser $\cos^p \theta \sin^q \theta$ (l'écrire avec des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$, sans puissance)

1. Remplacer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ par les formules d'Euler ;
2. développer avec la formule du binôme (triangle de Pascal), en utilisant $e^{ik\theta} e^{-ik'\theta} = e^{i(k-k')\theta}$;
3. regrouper $e^{ik\theta}$ avec $e^{-ik\theta}$: on obtient $2 \cos k\theta$ ou $2i \sin k\theta$ (Euler « à l'envers »).

Exemple : $\cos^5 \theta$ et $\sin^3 \theta \cos^2 \theta$

• $\cos^5 \theta = \frac{1}{32} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5 = \frac{1}{32} [(e^{5i\theta} + e^{-5i\theta}) + 5(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} + e^{-i\theta})]$, donc

$$\cos^5 \theta = \frac{1}{16} (\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta).$$

• Avec $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{-i\theta}$ ($uv = 1$) : $(u - v)^3 (u + v)^2 = (u - v)(u^2 - v^2)^2 = (u - v)(u^4 - 2 + v^4) = (u^5 - v^5) - (u^3 - v^3) - 2(u - v)$. Comme $(2i)^3 \times 2^2 = -32i$:

$$\sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{2i \sin 5\theta - 2i \sin 3\theta - 4i \sin \theta}{-32i} = \frac{1}{16} (2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta).$$

2.4 Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$

Méthode : développer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ (opération inverse de la linéarisation)

On note $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. Par Moivre et la formule du binôme, $\cos n\theta + i \sin n\theta = (c + is)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^{n-k} i^k s^k$. On sépare les termes d'indice k pair ($i^{2p} = (-1)^p$, partie réelle) et impair ($i^{2p+1} = (-1)^p i$, partie imaginaire) :

$$\cos n\theta = \sum_{0 \leq 2p \leq n} (-1)^p \binom{n}{2p} c^{n-2p} s^{2p} \quad \sin n\theta = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} (-1)^p \binom{n}{2p+1} c^{n-2p-1} s^{2p+1}$$

puis on remplace s^2 par $1 - c^2$ (ou c^2 par $1 - s^2$).

Exemple : $n = 5$, puis $\cos \frac{\pi}{10}$

$(c + is)^5 = c^5 + 5ic^4s - 10c^3s^2 - 10ic^2s^3 + 5cs^4 + is^5$. Donc, avec $s^2 = 1 - c^2$:

$$\cos 5\theta = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4 = \boxed{16c^5 - 20c^3 + 5c} \quad \text{et} \quad \sin 5\theta = \boxed{s(16c^4 - 12c^2 + 1)}$$

(pour le sinus : $5c^4s - 10c^2s^3 + s^5 = s[5c^4 - 10c^2(1 - c^2) + (1 - c^2)^2]$).

Application. Pour $\theta = \frac{\pi}{10}$: $\cos 5\theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $c \neq 0$, donc $16c^4 - 20c^2 + 5 = 0$, d'où $c^2 = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 320}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Or $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$, donc $c > \cos \frac{\pi}{6}$ et $c^2 > \frac{3}{4}$; comme $\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2}$, on garde le signe + :

$$\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

3

Angle moitié et sommes

3.1 La factorisation par l'angle moitié

Théorème

Pour tous réels a et b :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

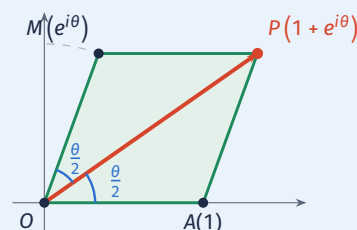
En particulier : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration. On met en facteur l'exponentielle de l'angle « moyen » :

$$e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right),$$

et la parenthèse vaut $2 \cos \frac{a-b}{2}$ ou $2i \sin \frac{a-b}{2}$ (Euler). $\square$

Interprétation : $O, A(1), P(1 + e^{i\theta}), M(e^{i\theta})$ forment un **losange** (côtés de longueur 1) ; sa diagonale $[OP]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$: elle fait l'angle $\frac{\theta}{2}$ avec $\vec{u}$ et mesure $2 \cos \frac{\theta}{2}$ (pour $0 < \theta < \pi$).



Conséquence : les parties réelle et imaginaire donnent les formules de transformation $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$...

Méthode : module et argument de $e^{ia} + e^{ib}$

Après factorisation, $2 \cos \frac{a-b}{2}$ est un réel dont il faut étudier le **signe** :

- s'il est > 0 : module $2 \cos \frac{a-b}{2}$ et argument $\frac{a+b}{2}$; s'il est < 0 : module $-2 \cos \frac{a-b}{2}$ et argument $\frac{a+b}{2} + \pi$;
- pour une différence : $2i \sin \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}} = 2 \sin \frac{a-b}{2} e^{i(\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{2})}$, puis même discussion selon le signe du sinus.

Exemple

- $e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2 \cos \frac{5\pi}{12} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $2 \cos \frac{5\pi}{12} > 0$: module $2 \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$.
- $e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$: le cosinus est négatif, l'argument n'est **pas** $\frac{\pi}{6}$. (Contrôle : $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ✓.)
- Pour $\theta \in]0, \pi[$: $e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{3\theta}{2}}$ (module $2 \cos \frac{\theta}{2} > 0$, argument $\frac{3\theta}{2}$) ; et pour $\theta \in]0, 2\pi[$: $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$ (module $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$, argument $\frac{\theta+\pi}{2}$).

3.2 Les sommes $\sum e^{ik\theta}$, $\sum \cos k\theta$, $\sum \sin k\theta$

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i \frac{n\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

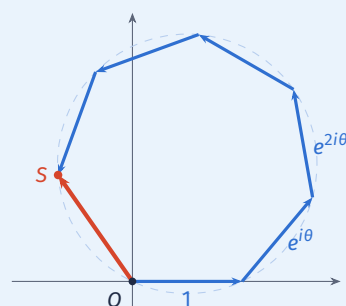
(Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ces sommes valent $n+1$, $n+1$ et 0.)

Démonstration. $q = e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$; par Moivre $e^{ik\theta} = q^k$, et la somme géométrique, factorisée en haut et en bas par l'angle moitié, donne

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2} e^{i \frac{(n+1)\theta}{2}}}{2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}}}.$$

On simplifie, puis on prend les parties réelle et imaginaire, car $\sum \cos k\theta = \operatorname{Re} \sum e^{ik\theta}$ et $\sum \sin k\theta = \operatorname{Im} \sum e^{ik\theta}$. $\square$

Figure ($\theta = 50^\circ$, $n = 5$) : on met bout à bout les vecteurs unitaires $e^{ik\theta}$, chacun tourné de θ par rapport au précédent; leurs extrémités sont sur un cercle de rayon $\frac{1}{2 \sin(\theta/2)}$, et la somme est le vecteur $\vec{OS}$, de module $\left| \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta/2)} \right|$ et d'argument $\frac{5\theta}{2}$.



Exemple : une somme de cosinus d'angles impairs

Soit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $n \geq 1$. Avec $q = e^{2i\theta} \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)\theta} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = e^{i\theta} \frac{e^{2in\theta} - 1}{e^{2i\theta} - 1} = e^{i\theta} \frac{2i \sin(n\theta) e^{in\theta}}{2i \sin \theta e^{i\theta}} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} e^{in\theta},$$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\theta) = \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \sin((2k-1)\theta) = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}.$$

Avec $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$: $\sin 2n\theta = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, donc $\sum_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Pour $n = 4$, comme

$$\cos \frac{3\pi}{9} = \frac{1}{2} : \quad \boxed{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0}.$$

Exemple : une somme avec des coefficients binomiaux

Par la formule du binôme puis l'angle moitié : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{i \frac{n\theta}{2}}$, donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos k\theta = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin k\theta = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ (par exemple $1 - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 16$).

4

Racines carrées, second degré

4.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition et théorème

On appelle **racine carrée** du complexe Z tout complexe δ tel que $\delta^2 = Z$. Tout complexe $Z \neq 0$ admet exactement **deux** racines carrées, **opposées** ; si $Z = \rho e^{i\alpha}$ ($\rho > 0$), ce sont

$$\delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad -\delta = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{2} + \pi)}.$$

Démonstration. $\delta^2 = (\sqrt{\rho})^2 e^{i\alpha} = Z$ (Moivre) : δ convient. Ensuite $z^2 = Z \iff z^2 - \delta^2 = 0 \iff (z - \delta)(z + \delta) = 0 \iff z = \delta$ ou $z = -\delta$, et $\delta \neq -\delta$ car $\delta \neq 0$. $\square$

Méthode : racines carrées sous forme algébrique : $\delta = x + iy$, x, y réels

Si $Z = a + ib$, on écrit $\delta^2 = Z$ (parties réelle et imaginaire) et on ajoute l'égalité des modules $|\delta|^2 = |Z|$:

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2xy = b.$$

Les deux premières donnent x^2 et y^2 ; la troisième donne le **signe** de xy (celui de b), donc les bons couples (x, y) .

Exemple : deux méthodes, et la valeur de $\tan \frac{\pi}{8}$

- $Z = -5 + 12i$, $|Z| = 13$: $x^2 = \frac{13-5}{2} = 4$, $y^2 = \frac{13+5}{2} = 9$, $xy > 0$: les racines carrées sont $2 + 3i$ et $-2 - 3i$.
- $Z = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. **Forme exponentielle** : ses racines carrées sont $\pm \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$. **Forme algébrique** : $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$, $2xy = 1 > 0$, d'où $x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et les racines $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.

La racine de partie réelle positive est $\sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$ (car $\cos \frac{\pi}{8} > 0$). En identifiant, $\sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ et $\sqrt[4]{2} \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$; le quotient donne, avec $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$:

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}.$$

4.2 L'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes

Théorème

Soit a, b, c des complexes avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une racine carrée de Δ . L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad (\text{une seule, } -\frac{b}{2a}, \text{ si } \Delta = 0),$$

et pour tout z : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Démonstration. Forme canonique : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = a(z - z_1)(z - z_2)$, puis produit nul. Enfin $a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2$. $\square$

Si $b = 2b'$, on utilise $\Delta' = b'^2 - ac$ et une racine carrée δ' de Δ' : $z = \frac{-b' \pm \delta'}{a}$.

Exemple : coefficients complexes

$$z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 9i = 0 : \Delta = (5 + 3i)^2 - 4(2 + 9i) = 16 + 30i - 8 - 36i = 8 - 6i.$$

$$\delta = x + iy : x^2 - y^2 = 8, x^2 + y^2 = |\Delta| = 10, \text{ donc } x^2 = 9, y^2 = 1, \text{ et } xy < 0 : \delta = 3 - i, \text{ d'où}$$

$$z_1 = \frac{5 + 3i - (3 - i)}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 + 3i + 3 - i}{2} = 4 + i.$$

$$\text{Contrôle : } z_1 + z_2 = 5 + 3i \text{ et } z_1 z_2 = 4 + i + 8i - 2 = 2 + 9i \checkmark.$$

Exemple : avec un paramètre, style examen : $z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Delta' = 1 - (1 + e^{2i\theta}) = -e^{2i\theta} = (i e^{i\theta})^2$. Solutions : $z_1 = 1 + i e^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ et $z_2 = 1 - i e^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$.
Par l'angle moitié :

$$z_1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Comme $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, les deux cosinus sont > 0 : ce sont des formes exponentielles. Contrôle : $z_1 z_2 = 2 \left[\cos \theta + \cos \frac{\pi}{2}\right] e^{i\theta} = 2 \cos \theta e^{i\theta} = 1 + e^{2i\theta} \checkmark$ (angle moitié).

Attention, piège !

- Le symbole $\sqrt{}$ est réservé aux réels positifs : on n'écrit **jamais** $\sqrt{8 - 6i}$ ni $\sqrt{-4}$; on dit que $\delta = 3 - i$ est *une* racine carrée de Δ .
- Si les coefficients ne sont pas tous réels, les solutions ne sont **pas conjuguées** en général (ci-dessus : $1 + 2i$ et $4 + i$).

5

Racines n -ièmes■ 5.1 Les racines n -ièmes de l'unité**Théorème**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$, les **racines n -ièmes de l'unité** :

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad \text{Avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} : \omega_k = \omega^k.$$

Démonstration. 0 n'est pas solution ; on écrit $z = r e^{i\theta}$ ($r > 0$). Par unicité de la forme exponentielle, $z^n = r^n e^{in\theta} = 1 e^{i0} \iff (r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0 [2\pi]) \iff (r = 1 \text{ et } \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z})$. Enfin $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}} \iff \frac{2(k-k')\pi}{n} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff n \text{ divise } k - k'$: les valeurs $k = 0, \dots, n-1$ donnent n solutions distinctes, et tout autre k redonne l'une d'elles. $\square$

Propriétés ($n \geq 2$)

1. **Somme** : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$; **produit** : $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}$.

2. **Conjugués** : $\overline{\omega_k} = \frac{1}{\omega_k} = \omega_{n-k} \quad (1 \leq k \leq n-1)$.

3. **Polygone régulier** : les points $M_k(\omega_k)$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, dont un sommet est $M_0(1)$.

Démonstration. 1. $\omega \neq 1$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$; $\prod \omega^k = \omega^{0+1+\dots+(n-1)} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}$.

2. $|\omega_k| = 1$ et $\omega_k \omega_{n-k} = \omega^n = 1$. 3. La rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ (section 8) envoie M_k sur M_{k+1} (et M_{n-1} sur M_0) : tous les côtés et tous les angles sont égaux. $\square$

Cas usuels : $n = 2 : \pm 1$; $n = 4 : 1, i, -1, -i$ (carré) ; $n = 3 : 1, j, j^2$, avec

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}, \quad j^3 = 1, \quad \boxed{1 + j + j^2 = 0} \quad (\text{triangle équilatéral}).$$

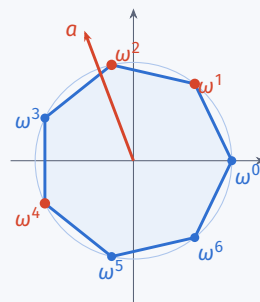
Exemple : $n = 7$: l'heptagone régulier et une somme de Gauss

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $a = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $b = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. D'après la propriété 1, $a + b = \omega + \omega^2 + \dots + \omega^6 = -1$, et, avec $\omega^7 = 1$:

$$ab = 3\omega^7 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10} = 3 + (\omega + \dots + \omega^6) = 2.$$

Donc a et b sont les solutions de $z^2 + z + 2 = 0$: $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$, $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Or $\text{Im } a = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7} + (\sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}) > 0$ (sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). Ainsi

$$\boxed{\omega + \omega^2 + \omega^4 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$



5.2 Racines n -ièmes d'un complexe non nul

Théorème

Soit $a = \rho e^{i\alpha}$ un complexe non nul ($\rho > 0$) et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Si z_0 est l'une d'elles, les autres sont les $z_0 \omega_k$. Leurs points images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, de centre O , inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

Démonstration. $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\alpha}{n}}$ vérifie $z_0^n = \rho e^{i\alpha} = a$ (Moivre). Comme $z_0 \neq 0$: $z^n = a \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} = \omega_k$ ($0 \leq k \leq n-1$) $\iff z = z_0 \omega_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}}$. Multiplier par z_0 revient à appliquer une rotation de centre O suivie d'une homothétie de centre O (section 8) : le polygone régulier des ω_k devient un polygone régulier de rayon $|z_0| = \sqrt[n]{\rho}$. $\square$

Méthode : résoudre $z^n = a$

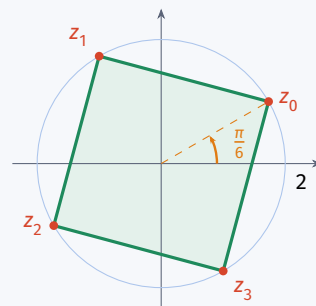
1. Écrire $a = \rho e^{i\alpha}$ et chercher $z = r e^{i\theta}$: $r^n = \rho$ et $n\theta \equiv \alpha [2\pi]$, soit $r = \sqrt[n]{\rho}$ et $\theta \equiv \frac{\alpha}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right]$ (modulo $\frac{2\pi}{n}$!);
2. lister $k = 0, \dots, n-1$. **Variante** : trouver une solution évidente z_0 , puis multiplier par les ω_k .

Exemple

- $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3} = 16 e^{i \frac{2\pi}{3}} \iff z = 2 e^{i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
: $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = iz_0 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -z_0 = -\sqrt{3} - i$,
 $z_3 = -z_1 = 1 - i\sqrt{3}$.

Ce sont les sommets d'un **carré** de centre O inscrit dans le cercle de rayon 2 (ci-contre).

- $z^3 = 8i$: $z_0 = -2i$ est solution, car $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$. Les solutions sont donc $-2i$, $-2ij = \sqrt{3} + i$ et $-2ij^2 = -\sqrt{3} + i$ (triangle équilatéral de centre O).



6

Se ramener au second degré

6.1 Factoriser un polynôme

Théorème

Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, de degré $n \geq 1$, et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $P(z_0) = 0$, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(z) = (z - z_0) Q(z)$ pour tout z . Si les a_k sont **réels**, $\overline{z_0}$ est aussi racine de P .

Démonstration. $P(z) = P(z) - P(z_0) = \sum_{k=1}^n a_k (z^k - z_0^k)$ et $z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \dots + z_0^{k-1})$: on factorise $(z - z_0)$. Si les a_k sont réels, $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0$. $\square$

Méthode : résoudre $P(z) = 0$ avec $\deg P = 3$

1. Trouver une racine : évidente ($\pm 1, \pm i, \dots$), ou **réelle** $z = x$, ou **imaginaire pure** $z = iy$ ($y \in \mathbb{R}$) : on annule séparément la partie réelle et la partie imaginaire de $P(iy)$, et on cherche une solution **commune** ;
2. écrire $P(z) = (z - z_0)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$ et identifier les coefficients ; 3. résoudre l'équation du second degré.

Exemple : racine imaginaire pure, style examen

$P(z) = z^3 - (4 + 2i)z^2 + (13 + 8i)z - 26i$. Pour y réel :

$$P(iy) = -iy^3 + (4 + 2i)y^2 + (13 + 8i)iy - 26i = (4y^2 - 8y) + i(-y^3 + 2y^2 + 13y - 26).$$

$4y^2 - 8y = 0 \iff y \in \{0, 2\}$; la partie imaginaire vaut $-26 \neq 0$ pour $y = 0$ et $-8 + 8 + 26 - 26 = 0$ pour $y = 2$. L'unique racine imaginaire pure est $z_0 = 2i$.

$P(z) = (z - 2i)(z^2 + \beta z + \gamma) = z^3 + (\beta - 2i)z^2 + (\gamma - 2i\beta)z - 2i\gamma$: $\beta - 2i = -4 - 2i$, $-2i\gamma = -26i$, donc $\beta = -4$, $\gamma = 13$ (et $\gamma - 2i\beta = 13 + 8i$ ✓).

$$z^2 - 4z + 13 = 0 : \Delta' = 4 - 13 = -9 = (3i)^2, \quad z = 2 \pm 3i. \quad S = \{2i; 2 - 3i; 2 + 3i\}.$$

6.2 Équations bicarrées et équations symétriques**Exemple : bicarrée : $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$**

Avec $Z = z^2$: $Z^2 - 2Z + 4 = 0$, $\Delta' = -3 = (i\sqrt{3})^2$, $Z = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Puis (racines carrées, section 4) :

$$z^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \iff z = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad z^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \iff z = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exemple : symétrique : $z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$, on pose $Z = z + \frac{1}{z}$

0 n'est pas solution ; on divise par z^2 : $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$. Comme $z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2$: $Z^2 - 3Z + 2 = 0$, $Z = 1$ ou $Z = 2$.

$z + \frac{1}{z} = 1 \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$; $z + \frac{1}{z} = 2 \iff (z - 1)^2 = 0 \iff z = 1$.
 $S = \left\{1; e^{i\frac{\pi}{3}}; e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$, et $z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = (z - 1)^2(z^2 - z + 1)$.

6.3 Changement d'inconnue et racines n -ièmes**Exemple : l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$, $n \geq 2$**

$z = i$ n'est pas solution ($(2i)^n \neq 0$). Pour $z \neq i$, l'équation équivaut à $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$, soit $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Pour $k = 0$: $z + i = z - i$ est impossible. Pour $1 \leq k \leq n-1$, $\omega_k \neq 1$ et, avec

$\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ et l'angle moitié :

$$z + i = \omega_k(z - i) \iff z = \frac{i(1 + e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{i \times 2 \cos \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}}{2i \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}}.$$

L'équation (de degré $n - 1$: les termes z^n se simplifient) a $n - 1$ solutions **réelles** distinctes : $\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, $1 \leq k \leq n - 1$. Pour $n = 3$: $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7 Translation et homothétie

Une transformation F du plan associe à tout point $M(z)$ un point $M'(z')$; son **écriture complexe** est la relation $z' = f(z)$. Un point Ω est **fixe** si $F(\Omega) = \Omega$.

Théorème (écritures complexes)

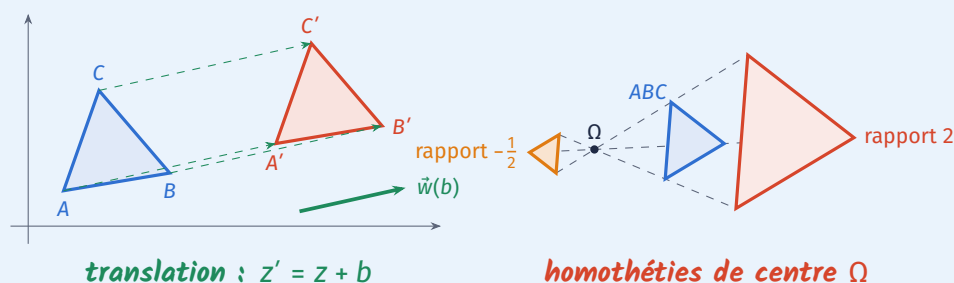
- La **translation** t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b : $M' = t(M) \iff \vec{MM'} = \vec{w} \iff \boxed{z' = z + b}$.
- L'**homothétie** h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $M' = h(M) \iff \vec{\Omega M'} = k \vec{\Omega M} \iff \boxed{z' - \omega = k(z - \omega)}$.

Démonstration. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes le sont : $\vec{MM'}$ a pour affixe $z' - z$, et $k \vec{\Omega M}$ a pour affixe $k(z - \omega)$. $\square$

Images de figures

Si M, N ont pour images M', N' : par t , $z_{N'} - z_{M'} = z_N - z_M$; par h , $z_{N'} - z_{M'} = k(z_N - z_M)$ (on soustrait les écritures). Donc :

- une translation conserve les vecteurs ; une homothétie de rapport k multiplie les vecteurs par k et les **distances** par $|k|$;
- l'image d'une droite est une droite parallèle ; l'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' (image de A) et de rayon R (translation) ou $|k|R$ (homothétie) ; l'alignement, le milieu, le parallélisme et les angles orientés sont conservés.



Méthode : reconnaître $z' = az + b$ avec a réel non nul

- Si $a = 1$: c'est la **translation** de vecteur d'affixe b (sans point fixe si $b \neq 0$).
- Si $a \neq 1$: il y a un unique point fixe $\Omega(\omega)$, $\omega = a\omega + b \iff \omega = \frac{b}{1-a}$. En soustrayant

$\omega = a\omega + b \Rightarrow z' = az + b : z' - \omega = a(z - \omega)$; c'est l'**homothétie** de centre Ω et de rapport a .

Exemple : reconnaître, puis image d'un cercle

- $F : z' = -3z + 8 - 4i : a = -3, \omega = \frac{8-4i}{1+3} = 2-i$: homothétie de centre $\Omega(2-i)$ et de rapport -3 (contrôle : $-3(2-i) + 8 - 4i = 2-i$ ✓). De même, $z' = \frac{1}{3}z - 2 + 4i$ est l'homothétie de centre $\omega = \frac{-2+4i}{2/3} = -3 + 6i$ et de rapport $\frac{1}{3}$.
- Image par F du cercle $\Gamma : |z - 1 - i| = 2$. **Méthode géométrique** : le centre $1+i$ a pour image $-3(1+i) + 8 - 4i = 5 - 7i$ et le rayon est multiplié par $|-3| = 3$. **Méthode par le calcul** : $z = \frac{8-4i-z'}{3}$, donc $M \in \Gamma \iff \left| \frac{8-4i-z'}{3} - 1 - i \right| = 2 \iff |5 - 7i - z'| = 6$. Dans les deux cas : $F(\Gamma)$ est le cercle de centre $5 - 7i$ et de rayon 6.

8

Rotation et composées

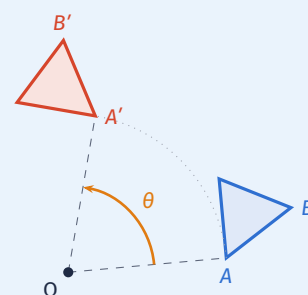
8.1 La rotation

Théorème

Soit $\Omega(\omega)$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La **rotation** r de centre Ω et d'angle θ laisse Ω fixe et associe à tout $M \neq \Omega$ le point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$. Son écriture complexe est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Démonstration. Pour $M \neq \Omega : \Omega M' = \Omega M$ et $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta \iff \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1$ et $\arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta \iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ (unicité de la forme exponentielle). Pour $M = \Omega$, la formule donne bien $z' = \omega$. $\square$



- **Cas particuliers** : $\theta = \pi$: symétrie centrale $z' = -z + 2\omega$ (c'est aussi l'homothétie de rapport -1) ; $\theta = \frac{\pi}{2}$: $z' - \omega = i(z - \omega)$.
- **Conservation** : $z_{N'} - z_{M'} = e^{i\theta}(z_N - z_M)$, donc $M'N' = MN$ et $(\vec{M'N'}, \vec{M'N'}) \equiv \theta$: une rotation conserve les distances ; l'image d'un cercle de centre A est le cercle de même rayon centré en $r(A)$.
- **Reconnaître** : si $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$, on écrit $a = e^{i\theta}$; l'unique point fixe est $\omega = \frac{b}{1-a}$ et $z' - \omega = a(z - \omega)$: c'est la **rotation** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ .

Méthode : trouver l'écriture $z' = az + b$ connaissant deux points et leurs images

Si $F(A) = A'$ et $F(B) = B'$ avec $A \neq B$: en soustrayant $z_{A'} = a z_A + b$ et $z_{B'} = a z_B + b$, on obtient $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, puis $b = z_{A'} - a z_A$.

Exemple : $A(1+i) \mapsto A'(3+i)$ et $B(3+2i) \mapsto B'(2+3i)$: $a = \frac{-1+2i}{2+i} = \frac{(-1+2i)(2-i)}{5} = i$, $b = 3+i - i(1+i) = 4$. $z' = iz + 4$: rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\omega = \frac{4}{1-i} = 2+2i$.

8.2 Rotation et homothétie de même centre

Théorème

Soit $\Omega(\omega)$, $k > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Les composées $h \circ r$ et $r \circ h$ de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k et de la rotation r de centre Ω et d'angle θ sont égales, d'écriture

$$z' - \omega = k e^{i\theta}(z - \omega) \quad : \quad \Omega M' = k \Omega M \quad \text{et} \quad (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \quad (M \neq \Omega).$$

Réciproquement, si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, la transformation $z' = az + b$ est $h \circ r$ avec $\omega = \frac{b}{1-a}$, $k = |a|$ et $\theta \equiv \arg a$.

Démonstration. $r : z_1 - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, puis $h : z' - \omega = k(z_1 - \omega) = k e^{i\theta}(z - \omega)$; dans l'autre ordre, on obtient $e^{i\theta}k(z - \omega)$, le même résultat. Pour la réciproque, $a \neq 1$, donc $\omega = \frac{b}{1-a}$ est l'unique point fixe et $z' - \omega = a(z - \omega)$ avec $a = |a| e^{i \arg a}$. $\square$

Remarque. Bilan pour $z' = az + b$ ($a \neq 0$): $a = 1$: translation ; $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: homothétie de rapport a ; $|a| = 1$, $a \neq 1$: rotation d'angle $\arg a$; sinon : $h \circ r$ de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$. Si $a \neq 1$, le centre est l'unique point fixe, d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

8.3 Composée de deux rotations

Théorème

Soit r_1 et r_2 des rotations d'angles θ_1 et θ_2 . Alors $r_2 \circ r_1$ est une **rotation d'angle** $\theta_1 + \theta_2$ si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 [2\pi]$, et une **translation** si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 [2\pi]$.

Démonstration. $r_1 : z_1 = e^{i\theta_1}z + b_1$ et $r_2 : z' = e^{i\theta_2}z_1 + b_2$, donc $r_2 \circ r_1 : z' = e^{i(\theta_1+\theta_2)}z + e^{i\theta_2}b_1 + b_2$, de la forme $z' = az + b$ avec $|a| = 1$; et $a = 1 \iff \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 [2\pi]$. $\square$

Exemple

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ($z_1 = iz$), et $A(2)$. Si r_2 a pour centre A et pour angle $\frac{\pi}{2}$: $r_2 \circ r_1 : z' = i(iz - 2) + 2 = -z + 2 - 2i$, symétrie de centre $1 - i$ (rotation d'angle π). Si r_3 a pour centre A et pour angle $-\frac{\pi}{2}$: $r_3 \circ r_1 : z' = -i(iz - 2) + 2 = z + 2 + 2i$, translation de vecteur d'affixe $2 + 2i$.

9 Géométrie avec les complexes

9.1 Triangles équilatéraux, carrés

Théorème (triangle équilatéral)

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points distincts. On dit que ABC est équilatéral **direct** si $AB = AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

$$ABC \text{ équilatéral direct} \iff c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \iff \boxed{a + bj + cj^2 = 0}$$

et, en échangeant B et C : ABC équilatéral **indirect** $\iff a + bj^2 + cj = 0$.

Démonstration. La première équivalence traduit $C = r(B)$, où r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Avec $1 + j + j^2 = 0$: $a + bj + cj^2 = a + bj + cj^2 - a(1 + j + j^2) = j[(b - a) + j(c - a)]$, qui est nul $\Leftrightarrow c - a = -\frac{1}{j}(b - a)$. Or $-\frac{1}{j} = -j^2 = e^{i\pi} e^{-\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Le cas indirect s'obtient en échangeant B et C . $\square$

Exemple

Avec $A(1+i)$ et $B(3+i)$, le point C tel que ABC soit équilatéral direct a pour affixe $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) = 1 + i + 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + (1 + \sqrt{3})i$; pour un triangle indirect, $c' = a + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - a) = 2 + (1 - \sqrt{3})i$.

Triangle rectangle isocèle, carré

- ABC est rectangle isocèle en A , direct $\Leftrightarrow c - a = i(b - a)$ (C image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$).
- $ABCD$ est un carré direct $\Leftrightarrow d - a = i(b - a)$ et $a + c = b + d$ (parallélogramme avec un angle droit et deux côtés consécutifs égaux). Son centre Ω est le milieu de $[AC]$, et la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie A sur B , B sur C , C sur D , D sur A .

9.2 Points cocycliques

Méthode : montrer que des points sont sur un même cercle

- Trouver un point $\Omega(\omega)$ équidistant de tous les points : $|z_A - \omega| = |z_B - \omega| = \dots = R$ (centre d'un carré, d'un polygone régulier, milieu d'un diamètre...). Les images d'un point par des rotations de **même centre** Ω sont sur un cercle de centre Ω ; les solutions de $z^n = a$ sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$.
- Pour quatre points quelconques : critère du chapitre 4 (argument d'un quotient de rapports).

9.3 Un problème complet, style examen national

Énoncé

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$.
2. On considère les points $A(1 + i)$, $B(3 + 2i)$ et la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a) Déterminer l'écriture complexe de R , puis l'affixe c du point $C = R(B)$.
 - b) Soit D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Calculer son affixe d et montrer que $ABDC$ est un carré.
3. Montrer que A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre Ω et le rayon.
4. Soit F la transformation d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + 1 - i$. Déterminer la nature de F et ses éléments caractéristiques, puis vérifier que $F(B) = D$.

Exemple : corrigé rédigé

1. $\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+5i) = 7+24i-4-20i = 3+4i$. On cherche $\delta = x + iy$ avec $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = |\Delta| = 5$ et $2xy = 4$: $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, $xy > 0$, d'où $\delta = 2 + i$. Les solutions sont

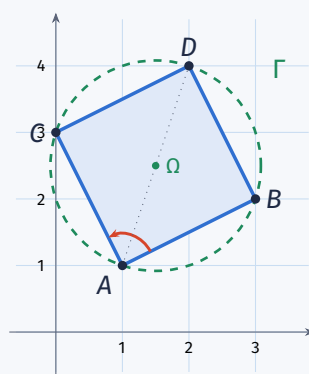
$$z_1 = \frac{4+3i-(2+i)}{2} = 1+i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4+3i+2+i}{2} = 3+2i.$$

2. a) $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a) \iff z' = iz - i(1+i) + 1+i \iff \boxed{z' = iz + 2}$. Donc $c = i(3+2i) + 2 = 3i$.

b) $ABDC$ parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{CD} \iff d = b + c - a = 2 + 4i$. Comme $C = R(B)$: $AC = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$; un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs égaux est un **carré**.

3. Le centre du carré est le milieu Ω de la diagonale $[AD]$: $\omega = \frac{a+d}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$, et c'est aussi le milieu de $[BC]$ ($\frac{b+c}{2} = \omega$). Les diagonales d'un carré ont la même longueur, donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = |1+i-\omega| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Γ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. $a = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas réel et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$. Le point fixe est $\omega_F = \frac{1-i}{1-(1+i)} = \frac{1-i}{-i} = 1+i$: c'est A. Donc F est la composée de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$. Enfin $(1+i)(3+2i) + 1-i = 1+5i+1-i = 2+4i = d : F(B) = D$, ce qui traduit $AD = \sqrt{2}AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (la diagonale du carré).

**10****Pour aller plus loin****10.1 Les polynômes de Tchebychev****Théorème**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ pour tout réel θ . On a $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1} \quad (n \geq 1); \quad T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X, \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1, \quad T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

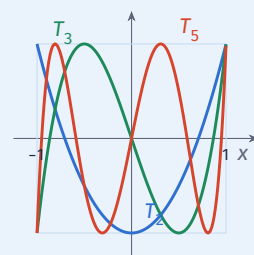
Pour $n \geq 1$, T_n est de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} , et ses n racines sont les réels $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Démonstration. Existence : d'après la section 2, $\cos n\theta = \sum_p (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} \theta (1 - \cos^2 \theta)^p$, qui est un polynôme en $\cos \theta$.

Récurrence : $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = \operatorname{Re}[e^{in\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})] = 2 \cos \theta \cos n\theta$ (Euler) ; d'où le degré et le coefficient dominant.

Unicité : deux polynômes égaux sur $[-1, 1]$ sont égaux. **Racines :** pour $\theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos \theta) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$: n racines distinctes ($\cos$ est injective sur $[0, \pi]$), donc toutes. $\square$

Application : $T_4 = 8 \prod_{k=0}^3 (X - x_k)$, donc $T_4(0) = 1 = 8x_0x_1x_2x_3$: $\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} = \frac{1}{8}$.



10.2 Le produit des $1 - \omega^k$

Théorème

Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

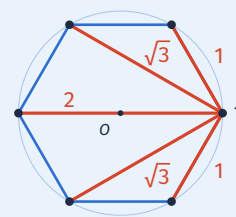
$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$$

et $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$

Démonstration. En appliquant n fois la factorisation de la section 6 aux n racines distinctes $\omega^0, \dots, \omega^{n-1}$ de $z^n - 1$ (polynôme de degré n et de coefficient dominant 1) : $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k)$. Comme $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$, on a, pour $z \neq 1$, $1 + z + \dots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k)$. Deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux : l'égalité vaut aussi pour $z = 1$, ce qui donne $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k)$.

Puis, par l'angle moitié, $|1 - \omega^k| = \left| -2i \sin \frac{k\pi}{n} e^{i \frac{k\pi}{n}} \right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$ (positif pour $1 \leq k \leq n-1$) ; en passant aux modules, $2^{n-1} \prod \sin \frac{k\pi}{n} = n$. $\square$

Interprétation : dans un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1, le produit des longueurs des $n-1$ segments joignant un sommet aux autres vaut n . Pour l'hexagone : $1 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 6$.



11

Les pièges classiques

× Faux	✓ Vrai
« $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Rightarrow \theta = \theta'$ »	seulement $\theta \equiv \theta' [2\pi]$: $e^0 = e^{2i\pi} = 1$
« $2 \sin \theta e^{i\theta}$ a pour module $2 \sin \theta$ et pour argument θ »	seulement si $\sin \theta > 0$; si $\sin \theta < 0$: $-2 \sin \theta e^{i(\theta+\pi)}$
« $e^{ia} + e^{ib} = e^{i(a+b)}$ »	c'est le produit : $e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)}$; la somme vaut $2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i \frac{a+b}{2}}$
« $ 1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ »	$ 1 + e^{i\theta} = 2 \left \cos \frac{\theta}{2} \right $: pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$, $1 + e^{i\theta} = e^{-i \frac{\pi}{3}}$ a pour module 1
« $\sqrt{-5 + 12i} = 2 + 3i$ »	pas de $\sqrt{}$ pour un complexe : $-5 + 12i$ a deux racines carrées, $\pm(2 + 3i)$
« les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont conjuguées »	seulement si a, b, c sont réels : $z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 9i = 0$ a pour solutions $1 + 2i$ et $4 + i$
« $n\theta \equiv \alpha [2\pi] \Rightarrow \theta \equiv \frac{\alpha}{n} [2\pi]$ »	$\theta \equiv \frac{\alpha}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right]$: c'est ce qui donne les n racines n -ièmes
« $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0$ pour toute racine n -ième ω »	faux pour $\omega = 1$ (la somme vaut n) ; vrai si $\omega^n = 1$ et $\omega \neq 1$

« la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ s'écrit $z' = e^{i\theta}z + \omega$ »	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, soit $z' = e^{i\theta}z + \omega(1 - e^{i\theta})$
« $z' = 3iz - 2$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ »	$ 3i = 3 \neq 1$: c'est $h \cdot r$, de centre $\frac{-2}{1-3i} = -\frac{1+3i}{5}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 3
« ABC équilatéral $\iff a + bj + cj^2 = 0$ »	seulement s'il est direct ; sinon $a + bj^2 + cj = 0$

12

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : filtrer avec les racines de l'unité

Si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$: $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si n divise p , et 0 sinon (somme géométrique de raison ω^p , et $\omega^p = 1 \iff n$ divise p). Exemple avec $n = 3$:

$$(1+1)^m + (1+j)^m + (1+j^2)^m = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} (1+j^p + j^{2p}) = 3 \sum_{3k \leq m} \binom{m}{3k}.$$

Comme $1+j = -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+j^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$: $\sum_{3k \leq m} \binom{m}{3k} = \frac{2^m + 2 \cos \frac{m\pi}{3}}{3}$ (pour $m = 6$: $1 + 20 + 1 = 22 = \frac{64+2}{3}$ ✓).

★ Astuce de concours : trois complexes de module 1 et de somme nulle

Si $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a + b + c = 0$, alors ABC est équilatéral. Preuve : $u = \frac{b}{a}$ et $v = \frac{c}{a}$ vérifient $|u| = |v| = 1$ et $u + v = -1$; en conjuguant, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -1$, d'où $uv = \frac{u+v}{-1} = 1$. Donc u et v sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$: $\{u, v\} = \{j, j^2\}$, et $\{a, b, c\} = \{a, aj, aj^2\}$.

★ Astuce de concours : un carré sur un côté = une rotation de $\pm \frac{\pi}{2}$

Sur les côtés d'un triangle direct ABC, on construit à l'extérieur les carrés ABDE et ACFG ; avec A pour origine : $e = -ib$ et $g = ic$. Alors $e - c = -ib - c = i(ic - b) = i(g - b)$: **CE = BG et (CE) $\perp$ (BG)**, sans aucun calcul d'angle.

★ Astuce de concours : l'équation $z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1 = 0$

On reconnaît $Z^2 - 2Z \cos \alpha + 1 = (Z - e^{i\alpha})(Z - e^{-i\alpha})$ avec $Z = z^n$; donc $z^n = e^{i\alpha}$ ou $z^n = e^{-i\alpha}$, et les solutions sont les $e^{j \frac{\pm \alpha + 2k\pi}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$ ($2n$ points distincts du cercle trigonométrique si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$).

13

L'essentiel du chapitre en une page

Notation exponentielle

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta : |e^{i\theta}| = 1, \arg e^{i\theta} \equiv \theta [2\pi].$$

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} ; \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}.$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi] ; e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$z = r e^{i\theta} \ (r = |z| > 0) : z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')},$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}, \bar{z} = r e^{-i\theta}, -z = r e^{i(\theta+\pi)}.$$

Moivre et Euler

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \ (n \in \mathbb{Z}), \text{ soit}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$z = e^{i\theta} : z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta, \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta.$$

Linéariser : Euler, binôme, regrouper $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$;

$$\cos^5 \theta = \frac{1}{16} (\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta).$$

Développer : $\cos n\theta = \operatorname{Re}(c + is)^n$,

$$\sin n\theta = \operatorname{Im}(c + is)^n ;$$

$$\cos 5\theta = 16c^5 - 20c^3 + 5c ; \cos n\theta = T_n(\cos \theta).$$

Angle moitié

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}, \quad e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Attention au signe de $\cos \frac{a-b}{2}$ avant de lire le module et l'argument.

Sommes ($\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$)

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

puis $\sum \cos k\theta$ et $\sum \sin k\theta$: parties réelle et imaginaire.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{i\frac{n\theta}{2}}.$$

Racines carrées de $Z = \rho e^{i\alpha} \neq 0$: $\pm \sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

$$\delta = x + iy : x^2 - y^2 = \operatorname{Re} Z, \quad x^2 + y^2 = |Z|, \quad 2xy = \operatorname{Im} Z.$$

Second degré ($a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad \delta^2 = \Delta : z = \frac{-b \pm \delta}{2a} ;$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Degré 3 : racine évidente, réelle ou iy , puis

$$P(z) = (z - z_0)Q(z).$$

$$\text{Bicarrée : } Z = z^2 ; \text{ symétrique : } Z = z + \frac{1}{z},$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2.$$

Racines n -ièmes

$$z^n = 1 \iff z = \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1 \text{ (polygone régulier)}.$$

$$\text{Pour } n \geq 2 : \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1},$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n.$$

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^3 = 1, \quad j^2 = \bar{j}, \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

$$z^n = \rho e^{i\alpha} \iff z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$(\neq z_0 \omega_k).$$

$$\theta \equiv \frac{\alpha}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right] \text{ (et non } [2\pi]).$$

Transformations

$$\text{translation de vecteur } \vec{w}(b) \quad z' = z + b$$

$$\text{homothétie } (\Omega, k) \quad z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$\text{rotation } (\Omega, \theta) \quad z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$h \cdot r \text{ de même centre } \Omega \quad z' - \omega = k e^{i\theta}(z - \omega)$$

Reconnaître $z' = az + b$: $a = 1$: translation ;

sinon, centre $\omega = \frac{b}{1-a}$ (point fixe) et

$z' - \omega = a(z - \omega)$: homothétie de rapport a si $a \in \mathbb{R}$, rotation d'angle $\arg a$ si $|a| = 1$, sinon $h \cdot r$ (rapport $|a|$, angle $\arg a$).

Deux rotations : rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$, ou

translation si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 [2\pi]$.

$$F(A) = A', F(B) = B' : a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}, \quad b = z_{A'} - a z_A.$$

Géométrie

$$\text{ABC équilatéral direct} \iff c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \\ \iff a + bj + cj^2 = 0.$$

ABC rectangle isocèle direct en A

$$\iff c - a = i(b - a).$$

$$\text{ABCD carré direct} \iff d - a = i(b - a) \text{ et}$$

$$a + c = b + d.$$

Cocyclicité : un centre Ω équidistant, ou des rotations de même centre.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

14 Niveau 1 • Bases

Repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; $a, b, c, \dots$ sont les affixes des points $A, B, C, \dots$; $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 1 La forme exponentielle ★

corrigé p. 44

1. Écrire sous forme exponentielle : $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$, $z_2 = -5i$, $z_3 = \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}$, $z_4 = -4e^{-i\frac{\pi}{5}}$, $z_5 = i \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{8}}$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Même question pour $u = -\sin \theta + i \cos \theta$, $v = (\cos \theta + i \sin \theta)(\sin \theta + i \cos \theta)$ et, si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $w = 2 \cos \theta e^{i\theta}$.
3. Calculer z_1^6 et z_4^5 , puis déterminer les entiers naturels n tels que z_3^n soit imaginaire pur.

Exercice 2 Euler et Moivre ★

corrigé p. 44

1. À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\sin^4 x$ ($x \in \mathbb{R}$). En déduire la valeur de $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8}$.
2. Montrer que $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer $(1+i)^{12} + (1-i)^{12}$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta \neq -1$. Vérifier que $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta}(1 + e^{-i\theta})$, puis montrer que $\left(\frac{1+\cos \theta + i \sin \theta}{1+\cos \theta - i \sin \theta}\right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Exercice 3 L'angle moitié ★

corrigé p. 45

Rappel : $e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$ et $e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

1. Écrire sous forme exponentielle : $u = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $v = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $w = 1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$.
2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Écrire $1 - e^{i\theta}$ sous forme exponentielle. Pour $\theta \neq \pi$, montrer que $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{i}{\tan \frac{\theta}{2}}$.
3. Calculer $(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})^6$ et $(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{5\pi}{12}})^8$.

Exercice 4 Racines carrées et second degré ★

corrigé p. 45

1. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $8 - 6i$, puis celles de $-15 + 8i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0$ b) $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$.
3. Déterminer le complexe m tel que $1 + i$ soit solution de $z^2 + mz + 3 - i = 0$, puis, sans calculer de discriminant, l'autre solution.

Exercice 5 Racines n -ièmes ★

corrigé p. 45

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -27$ (formes exponentielle et algébrique). Justifier que les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier, et donner son périmètre.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$, puis l'équation $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - i)^4 = -4$.

Exercice 6 Se ramener au second degré ★

corrigé p. 46

1. Soit $P(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (5+6i)z - 15i$. a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure z_0 . b) Écrire $P(z) = (z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$ (α, β réels), puis résoudre $P(z) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ (poser $Z = z^2$) ; donner les solutions sous forme algébrique.
3. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \frac{z+1}{z-1} + 1 = 0$.

Exercice 7 Reconnaître et écrire une transformation ★

corrigé p. 46

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe :
a) $z' = z + 2 - 3i$ b) $z' = -2z + 3 - 6i$ c) $z' = iz + 1 + i$ d) $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \sqrt{3} - i$ e) $z' = (1-i)z + 2i$.
2. Écrire la rotation de centre $\Omega(1-i)$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et l'homothétie de centre $A(2+i)$ de rapport $-\frac{1}{2}$.
3. Déterminer l'image du cercle de centre $C(1+i)$ et de rayon 2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis l'image de la droite d'équation $y = x$ par la transformation c).

Exercice 8 Triangles et quadrilatères ★

corrigé p. 46

1. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC : a) $a = 2 - i, b = 5 + i, c = 2i$; b) $a = -1 + i, b = 1 + i, c = (1 + \sqrt{3})i$; c) $a = 1, b = 2 + i, c = -1 + 2i$.
2. Montrer que les points $E(1+2i), F(3-2i)$ et $G(-2+8i)$ sont alignés.
3. Soient $A(1), B(3+2i), C(1+4i)$ et $D(-1+2i)$. Montrer que $ABCD$ est un carré, puis que ces quatre points sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

15

Niveau 2 · Bac**Exercice 9** Sommes trigonométriques ★★

corrigé p. 47

On rappelle (cours) que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$: $\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{nx}{2}}$.

1. En déduire que $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \frac{\cos \frac{5x}{2} \sin 2x}{\sin \frac{x}{2}}$ ($x \notin 2\pi\mathbb{Z}$), puis résoudre dans $]0, \pi]$ l'équation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ pour tout entier $n \geq 2$. Calculer cette somme de deux façons pour $n = 6$; en déduire $\tan \frac{\pi}{12}$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 10 Racines n -ièmes : somme, produit, factorisation ★★

corrigé p. 47

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -1$. Vérifier que $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$ et préciser les solutions de chaque facteur.
2. Soient $n \geq 2$ et $a = \rho e^{i\alpha}$ ($\rho > 0$). Montrer que la somme des n racines n -ièmes de a est nulle et que leur produit vaut $(-1)^{n-1}a$.
3. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Montrer que $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4) = 1$, puis que $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Exercice 11 Équations dans $\mathbb{C}$ ★★

corrigé p. 47

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+4i)z - 1+5i = 0$.
2. Soit $(E) : z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$. Vérifier que 0 n'est pas solution, puis montrer qu'en posant $u = z + \frac{1}{z}$: $(E) \iff u^2 + 2u - 3 = 0$. Résoudre (E) .

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ (on posera $z = x + iy$, x et y réels).

Exercice 12 Composer des transformations ★★

corrigé p. 48

Soient $A(1)$, $B(-i)$; r_1 est la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_2 et r_3 celles de centre B d'angles $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

1. Écrire r_1, r_2, r_3 . Déterminer la nature de $r_2 \circ r_1$, de $r_1 \circ r_2$ et de $r_3 \circ r_1$. A-t-on $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$?
2. Soit $f : z' = az + b$ telle que $f(E) = E'$ et $f(F) = F'$, avec $E(2+i)$, $E'(1+3i)$, $F(i)$, $F'(1-i)$. Déterminer a et b , puis la nature et les éléments caractéristiques de f .
3. Déterminer l'image par f du cercle de centre A et de rayon 1, puis montrer que $f \circ r_3$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 13 Triangles équilatéraux et j ★★

corrigé p. 48

On rappelle que $1 + j + j^2 = 0$ et que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

1. Montrer que $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$; en déduire que trois points distincts A, B, C forment un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - i)^3 = 8$, puis montrer de deux façons que les images de ses solutions forment un triangle équilatéral.
3. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles équilatéraux directs, et I, J, K les milieux (supposés distincts) de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$. Montrer que IJK est équilatéral direct.

Exercice 14 Problème 1 (type examen national) ★★

corrigé p. 48

1. a) Vérifier que le discriminant de $(E) : z^2 - (3+i)z + 4 = 0$ est $(1+3i)^2$, puis résoudre (E) ; on note a la solution de plus grand module et b l'autre. b) Écrire a, b et $\frac{a}{b}$ sous forme exponentielle ; en déduire la nature du triangle OAB .
2. Soit R la rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. a) Écrire R et vérifier que $R(B) = A$. b) Soient $C = R(A)$ et $D = R(C)$: calculer c et d , et vérifier que $R(D) = B$. c) En déduire la nature du quadrilatère $BACD$, et que A, B, C, D sont sur un cercle (Γ) à préciser.
3. Soit F la transformation d'écriture $z' = (1+i)z + 1$. a) Montrer que F est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre Ω ; préciser l'angle et le rapport. b) Déterminer l'image de (Γ) par F , et vérifier que F transforme le milieu I de $[AB]$ en A .

Exercice 15 Problème 2 (type examen national) ★★

corrigé p. 49

Soit $m \in \mathbb{C}$. On considère l'équation $(E_m) : z^2 - (1+i)(m+1)z + i(m^2+1) = 0$.

1. a) Vérifier que le discriminant de (E_m) est $[(1-i)(m-1)]^2$. b) Montrer que les solutions de (E_m) sont $z_1 = m + i$ et $z_2 = 1 + im$.
2. On suppose $m \neq 1$; soient $\Omega(1+i)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $P((1+i)m)$. a) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$; en déduire la nature du triangle $\Omega M_1 M_2$. b) Montrer que $\Omega M_1 P M_2$ est un carré.
3. On suppose $m \notin \{1, -i\}$ et l'on pose $m = x + iy$ (x, y réels). a) Montrer que O, M_1, M_2 sont alignés si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$; interpréter. b) Si $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle et retrouver le résultat de a).

Exercice 16 Problème 3 : racines cubiques ★★

corrigé p. 49

1. Écrire $4\sqrt{2}(1+i)$ sous forme exponentielle, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.
2. Soient A, B, C les points d'affixes $a = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $b = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$ et $c = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$. a) Écrire a sous forme algébrique, vérifier que $c = ae^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. b) Montrer que $b = ja$ et $c = j^2a$; en déduire que ABC est équilatéral de centre O , et calculer son côté et son aire.

3. a) Montrer que C est l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et écrire r . b) Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC . Montrer que $d = b + c$, puis que $OBDC$ est un losange.

16

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Le centre de la composée de deux rotations ★★★

corrigé p. 50

Soient $A(a) \neq B(b)$, α, β des réels tels que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, r_A (resp. r_B) la rotation de centre A et d'angle α (resp. de centre B et d'angle β), et $f = r_B \circ r_A$.

1. Montrer que f est une rotation d'angle $\alpha + \beta$, de centre $\Omega(\omega)$ tel que $(1 - e^{i(\alpha+\beta)})(\omega - a) = (1 - e^{i\beta})(b - a)$.
2. En déduire que $\omega - a = \frac{\sin(\beta/2)}{\sin((\alpha+\beta)/2)} e^{-i\frac{\alpha}{2}}(b - a)$, et établir de même que $\omega - b = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin((\alpha+\beta)/2)} e^{i\frac{\beta}{2}}(a - b)$.
3. Cas $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}$: montrer que $AB\Omega$ est équilatéral ; le vérifier pour $a = 0, b = 2$.

Exercice 18 Produits sur un polygone régulier ★★★

corrigé p. 50

Soient $n \geq 1$, $N = 2n + 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. On rappelle (cours) que $z^N - 1 = \prod_{k=0}^{N-1} (z - \omega^k)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et que $\prod_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^k) = N$.

1. En évaluant en $z = -1$, montrer que $\prod_{k=1}^{2n} (1 + \omega^k) = 1$.
2. Montrer que $|1 + \omega^k| = 2 \left| \cos \frac{k\pi}{N} \right|$ et $|1 - \omega^k| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{N} \right|$. En regroupant k et $N - k$, en déduire que $\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$ et $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.
3. En déduire $\prod_{k=1}^n \tan \frac{k\pi}{2n+1}$; vérifier pour $n = 1$. Pour $n = 2$, montrer que $\cos \frac{\pi}{5}$ est solution de $8c^3 - 4c - 1 = 0$, puis que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 19 Sommes sur les racines de l'unité ★★★

corrigé p. 51

Soient $n \geq 2$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On rappelle que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si n divise l'entier p , et 0 sinon.

1. À l'aide de la formule du binôme, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = 2n$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$ (comparer les termes d'indices k et $n - k$).
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k} (\omega^k - z)$, en déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} |z - \omega^k| \geq n$ et interpréter (cas $z = 0$).

Exercice 20 Racines de module 1 ★★★

corrigé p. 51

1. Soit $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Montrer que $|z + 1| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$, puis que : $|z + 1| = 1 \iff z \in \{j, j^2\}$.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'équation $z^n + z + 1 = 0$ a une solution de module 1 si et seulement si n est de la forme $3p + 2$ ($p \in \mathbb{N}$), et préciser alors ces solutions.
3. Montrer que l'équation $z^n - z - 1 = 0$ n'a aucune solution de module 1.

Exercice 21 Triangles équilatéraux sur les côtés ★★★

corrigé p. 51

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux BCA' , CAB' et ABC' : $a' - b = e^{-i\frac{\pi}{3}}(c - b)$, $b' - c = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a - c)$, $c' - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

1. Soit ρ la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Montrer que $\rho(A) = B'$ et $\rho(A') = B$. En déduire que $AA' = BB'$ et une mesure de l'angle $(\vec{AA'}, \vec{B'B})$.
2. En déduire que $AA' = BB' = CC'$.
3. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 22 Linéariser $\cos^{2p}$ et sommer ★★★

corrigé p. 52

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. À l'aide des formules d'Euler et du binôme, montrer que $2^{2p} \cos^{2p} x = \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)x)$ ($x \in \mathbb{R}$).
2. Soit $m > p$ un entier. Montrer que $\sum_{l=0}^{m-1} \cos \frac{2ql\pi}{m} = 0$ pour tout entier q tel que $1 \leq q \leq p$, puis que $\sum_{l=0}^{m-1} \cos^{2p} \frac{l\pi}{m} = \frac{m}{4^p} \binom{2p}{p}$.
3. Calculer $\sum_{l=0}^{m-1} \cos^2 \frac{l\pi}{m}$ ($m \geq 2$) et $\sum_{l=0}^5 \cos^6 \frac{l\pi}{6}$. La formule vaut-elle pour $p = m = 2$?

Exercice 23 Une suite récurrente d'ordre 2 ★★★

corrigé p. 52

Soient $\theta \in]0, \pi[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2 \cos \theta u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide des formules d'Euler, montrer que $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta$, puis que $u_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-1-2k)\theta}$ pour $n \geq 1$, et en déduire que $|u_n| \leq n$.
3. Calculer les premiers termes pour $\theta = \frac{\pi}{3}$. Si $\theta = \frac{p\pi}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), montrer que $u_{n+2q} = u_n$ pour tout n .
4. Montrer que $|u_n| < n$ pour $n \geq 2$ (isoler les deux premiers termes de la somme de 2.).

17

Niveau 4 · Concours**Exercice 24 La méthode de Newton dans $\mathbb{C}$ ★★★★★**

corrigé p. 53

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right)$ (tant que $z_n \neq 0$).

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}$ et $|z+1|^2 - |z-1|^2 = 4 \operatorname{Re} z$. En déduire que, si $\operatorname{Re} z_0 > 0$, la suite est définie et $\operatorname{Re} z_n > 0$ pour tout n .
2. On suppose $\operatorname{Re} z_0 > 0$ et l'on pose $w_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$. Montrer que $|w_n| < 1$, que $z_{n+1} - 1 = \frac{(z_n - 1)^2}{2z_n}$ et $z_{n+1} + 1 = \frac{(z_n + 1)^2}{2z_n}$, puis que $w_{n+1} = w_n^2$.
3. En déduire que $w_n = w_0^{2^n}$, puis, en exprimant z_n à l'aide de w_n , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 1$. Que se passe-t-il si $\operatorname{Re} z_0 < 0$?
4. Soient $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $z_0 = \frac{i}{\tan \alpha}$. Montrer que $z_n = i \frac{\cos(2^n \alpha)}{\sin(2^n \alpha)}$ tant que la suite est définie. Étudier les cas $\alpha = \frac{\pi}{7}$ et $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 25 Le théorème de Van Aubel ★★★★★

corrigé p. 53

Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe direct et P, Q, R, S les centres des carrés construits extérieurement sur $[AB], [BC], [CD], [DA]$: $a - p = i(b - p)$, $b - q = i(c - q)$, $c - r = i(d - r)$, $d - s = i(a - s)$.

1. Montrer que $p = \frac{a-ib}{1-i} = \frac{a+b}{2} + \frac{i}{2}(a-b)$, et écrire de même q, r, s .
2. Soit I le milieu de $[AC]$. Montrer que $q - \frac{a+c}{2} = i \left(p - \frac{a+c}{2} \right)$ et que $s - \frac{a+c}{2} = i \left(r - \frac{a+c}{2} \right)$. Interpréter.
3. En déduire que $s - q = i(r - p)$, puis que $PR = QS$ et $(PR) \perp (QS)$.
4. On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme. Montrer que $PQRS$ est un carré.

Exercice 26 Les parties finies de $\mathbb{C}^*$ stables par produit ★★★★★

corrigé p. 53

Soit G une partie finie de $\mathbb{C}^*$, à n éléments, stable par produit ; $\mathbb{U}_m$: racines m -ièmes de 1.

1. Soit $g \in G$. Montrer que $g^p = g^q$ pour des entiers $1 \leq p < q$, puis que $|g| = 1$ et $1 \in G$.
2. Montrer que $z \mapsto gz$ est une bijection de G sur G , puis, avec $\prod_{z \in G} gz$, que $g^n = 1$ et $G = \mathbb{U}_n$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{e^{ik\theta}, k \in \mathbb{N}\}$ est fini si et seulement si $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel.
4. Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$ contenant un $z_0 \neq 0$. Montrer que $\{a \in \mathbb{U} : aF \subset F\}$ est un $\mathbb{U}_N$ (rotations de centre O conservant F). Cas $F = \mathbb{U}_4 \cup 2\mathbb{U}_6$.

Exercice 27 Un produit de sinus ★★★★★

corrigé p. 54

Soient $n \geq 2$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Dédurre de $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k)$ que $z^n - \omega^n = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega \omega^k)$ ($\omega \in \mathbb{C}^*$), puis que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z^2 - 2z \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) + 1 \right)$.
2. En prenant $z = 1$, montrer que $|\sin nx| = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left| \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) \right|$ pour tout réel x .
3. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ (diviser par $\sin x$ et faire tendre x vers 0^+).

Exercice 28 Le théorème de Tchebychev ★★★★★

corrigé p. 54

Soient $N \geq 1$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ et $R(z) = r_0 + r_1 z + \dots + r_d z^d$ un polynôme à coefficients complexes, avec $d \leq N$.

1. Montrer que $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(\omega^k)$ vaut r_0 si $d < N$, et $r_0 + r_N$ si $d = N$.
2. Soit $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ ($n \geq 1$). En appliquant 1. à $z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ et $N = n + 1$, montrer que $|P(z)| \geq 1$ pour un z de module 1.
3. Soient $Q(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$ ($c_k \in \mathbb{R}$) et $R(z) = 2^n z^n Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)$. Montrer que R est un polynôme de degré $2n$, avec $r_0 = r_{2n} = 1$, puis qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $|Q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Cas d'égalité : $Q = \frac{T_n}{2^{n-1}}$, où $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$.

Exercice 29 Décomposer un polygone en polygones réguliers ★★★★★

corrigé p. 55

Soient $n \geq 3$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A_0, \dots, A_{n-1}$ des points d'affixes $a_0, \dots, a_{n-1}$. On pose $c_p = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{-pk}$ pour $0 \leq p \leq n-1$.

1. Pour $0 \leq k, l \leq n-1$, calculer $\sum_{p=0}^{n-1} \omega^{p(k-l)}$ selon que $k = l$ ou non. En déduire que $a_k = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \omega^{pk}$ pour tout k .
2. Interpréter c_0 ; pour p fixé, montrer que les points d'affixes $c_p \omega^{pk}$ ($0 \leq k \leq n-1$) se déduisent les uns des autres par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2p\pi}{n}$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = n \sum_{p=0}^{n-1} |c_p|^2$.
4. Cas $n = 3$: montrer que $a_k = c_0 + c_1 j^k + c_2 j^{2k}$, puis que $A_0 A_1 A_2$ (sommets distincts) est équilatéral direct si et seulement si $c_2 = 0$.
5. Cas $n = 4$: montrer que $A_0 A_1 A_2 A_3$ est un parallélogramme si et seulement si $c_2 = 0$, et un carré direct si et seulement si $c_2 = c_3 = 0$ et $c_1 \neq 0$.

Exercice 30 Quatre complexes de module 1 de somme nulle ★★★★★

corrigé p. 55

1. Soient a, b, c de module 1. Montrer que $\overline{a+b+c} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$, puis que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$.
2. Soient a, b, c, d de module 1 tels que $a+b+c+d = 0$. Montrer que $(a+b)(a+c)(a+d) = a(bc+bd+cd) + bcd = 0$. En déduire que ces nombres sont deux à deux opposés, que leurs images sont les sommets d'un rectangle (s'ils sont distincts), et que $a^p + b^p + c^p + d^p = 0$ pour tout entier p impair.
3. Ce résultat vaut-il pour six complexes de module 1 de somme nulle ? (Penser à $1, j, j^2, i, ij, ij^2$.)

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

18 Forme exponentielle et Euler

Avec $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, Moivre s'écrit $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; Euler ($\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$) sert à linéariser, et l'angle moitié à factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$. Dans l'exercice 32, on pourra utiliser : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Exercice 31 D'une écriture à l'autre ★

corrigé p. 56

1. Écrire sous forme exponentielle (on précisera le module et un argument) :

a) $\frac{(1-i)^7}{(\sqrt{3}+i)^4}$ b) $-\sin \alpha - i \cos \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ c) $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\sin \alpha + i \cos \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

d) $-3 e^{i\frac{\pi}{7}} \overline{e^{i\frac{3\pi}{14}}}$ e) $1 + \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (\alpha \in]\pi, 2\pi[)$

2. Écrire sous forme algébrique : $A = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{12}$ et $B = \frac{e^{i\frac{\pi}{5}} e^{i\frac{2\pi}{15}}}{\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)^4}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Montrer que $\left(\frac{1+\cos \theta + i \sin \theta}{1+\cos \theta - i \sin \theta} \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Exercice 32 Linéariser, puis remonter avec Moivre ★

corrigé p. 56

- Linéariser (formules d'Euler), pour x réel : a) $\sin^5 x$ b) $\cos x \sin^4 x$ c) $\sin x \sin 2x \sin 3x$.
- En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin^5 x$.
- Soit x un réel ; on note $c = \cos x$ et $s = \sin x$. En calculant $(c + is)^4 = ((c + is)^2)^2$ de deux façons, exprimer $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de c et s , puis montrer que $\cos 4x = 8c^4 - 8c^2 + 1$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{16}$ et de $\sin \frac{\pi}{16}$.

Exercice 33 Angles en progression arithmétique ★★

corrigé p. 57

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a un réel et x un réel qui n'est pas un multiple de 2π .

- Montrer que $\sum_{k=0}^n e^{i(a+kx)} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\left(a+\frac{nx}{2}\right)}$. En déduire $\sum_{k=0}^n \cos(a+kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(a+kx)$.
- Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$, en utilisant 1. avec $a = 2x$.

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$; on suppose ici $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. En appliquant 1. au réel $x + \pi$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cos kx = \frac{\cos \frac{(2m+1)x}{2} \cos mx}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \text{puis en déduire que} \quad \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 34 Cubes et triplement de l'angle ★★

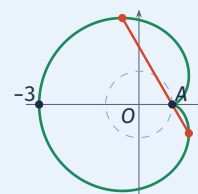
corrigé p. 58

- À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ (x réel).
- En déduire que, pour tout réel x : $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4} \sin 4x$.
- Montrer de même que, pour tout réel x : $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{8}$.
- Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{1}{8}$.

Exercice 35 La cardioïde ★★★

corrigé p. 58

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le point $M(\theta)$ d'affixe $z(\theta) = 2e^{i\theta} - e^{2i\theta}$ décrit une **cardioïde** (ci-contre). On note A le point d'affixe 1.



- Montrer que $z(\theta) - 1 = -(e^{i\theta} - 1)^2$, puis que $z(\theta) - 1 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\theta}$.
- Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, en déduire $AM(\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et une mesure de $(\vec{u}, \vec{AM}(\theta))$. Comparer $z(-\theta)$ et $z(\theta)$.
- Montrer que $A \in [M(\theta)M(\theta + \pi)]$ et $M(\theta)M(\theta + \pi) = 4$: les cordes passant par A (en rouge) ont toutes la même longueur.
- Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $C(e^{i\theta})$ et $H(h)$ le milieu de $[AM(\theta)]$. Montrer que $\frac{h-c}{c}$ est imaginaire pur et $\frac{z(\theta)-1}{c}$ réel ; en déduire que la tangente en C au cercle trigonométrique est la médiatrice de $[AM(\theta)]$.

Exercice 36 Le noyau de Fejér ★★★

corrigé p. 59

Soit x un réel qui n'est pas un multiple de 2π . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $D_k(x) = \sum_{j=-k}^k e^{ijx}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

- Montrer que $D_k(x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos jx$, puis, en factorisant par l'angle moitié, que $D_k(x) = \frac{\sin \frac{(2k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.
- À l'aide d'une formule d'Euler, montrer que $2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \cos kx - \cos(k+1)x$. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.
- En déduire que $F_n(x) = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n \sin^2 \frac{x}{2}}$, puis que $F_n(x) = 1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos jx$ ($n \geq 2$).
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et **tout** réel x : $\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos jx \geq -\frac{n}{2}$. Application : pour quels réels x a-t-on $3 \cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x = -2$?

19 Racines n -ièmes

Si $a = r e^{i\alpha}$ ($r > 0$), l'équation $z^n = a$ a exactement n solutions, $\sqrt[n]{r} e^{i \frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ ($0 \leq k \leq n-1$), sommets d'un polygone régulier de centre O si $n \geq 3$. Les racines n -ièmes de l'unité sont les ω^k , avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$; pour $n \geq 2$, leur somme est nulle.

Exercice 37 Calculer des racines n -ièmes ★

corrigé p. 59

- Déterminer les racines sixièmes de -64 , sous forme exponentielle puis algébrique. Montrer que leurs images sont les sommets d'un hexagone régulier, dont on calculera le côté et l'aire.
- a) Calculer $(3 + 2i)^3$. En déduire, à l'aide de $j = e^{i \frac{2\pi}{3}}$, les trois racines cubiques de $-9 + 46i$ sous forme algébrique.
b) En déduire, sans nouveau calcul, les racines cubiques de $-9 - 46i$, puis celles de $9 - 46i$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $(z - 1 + i)^6 = -64$; b) $z^3 = \bar{z}$.

Exercice 38 Calculer avec j ★

corrigé p. 60

On pose $j = e^{i \frac{2\pi}{3}}$.

- Montrer que $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $\bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}$. Écrire j et j^2 sous forme algébrique.
- Calculer j^{2026} , $(1 + j)^{2026}$ et $1 + j + j^2 + \dots + j^{2026}$.
- Montrer que $(1 - j)(1 - j^2) = 3$ et que $(1 - j)^2 = -3j$. En déduire $|1 - j|$, la forme exponentielle de $1 - j$, puis $(1 - j)^6$.
- Soit a, b, c trois réels. Montrer que $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$, puis que $|a + bj + cj^2|^2 = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$. En déduire que $a + bj + cj^2 = 0 \iff a = b = c$.

Exercice 39 Sommes sur un polygone régulier ★★

corrigé p. 61

Soit $n \geq 3$ un entier, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, A_k le point d'affixe ω^k .

- Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si p est un multiple de n , et 0 sinon.
- Soit θ un réel. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$, puis montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \vec{MA}_k = n \vec{MO}$ pour tout point M : O est l'isobarycentre des sommets.
- Soit M le point d'affixe $z = r e^{i\varphi}$ ($r \geq 0$, φ réel). Montrer que $MA_k^2 = r^2 + 1 - 2r \cos\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)$, puis que $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = n(OM^2 + 1)$.
- On admet que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$ pour tout réel θ . Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^4 = n(OM^2 + 1)^2 + 2n OM^2$. Que vaut cette somme lorsque M est sur le cercle circonscrit au polygone ? Vérifier le résultat pour $n = 4$ et $M = A_0$.

Exercice 40 Une équation homographique ★★

corrigé p. 61

Soit $n \geq 2$ un entier, a un réel et (E) l'équation $(1 + iz)^n = e^{2ia} (1 - iz)^n$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- Vérifier que $-i$ n'est pas solution de (E) , puis que z est solution de (E) si et seulement si $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ vérifie $w^n = e^{2ia}$.

2. Soit φ un réel. Montrer que l'équation $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\varphi}$ n'a pas de solution si $e^{i\varphi} = -1$, et qu'elle a pour unique solution $z = \tan \frac{\varphi}{2}$ sinon.
3. On suppose que $\frac{a+k\pi}{n} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ pour tout entier k . Montrer que (E) a exactement n solutions, toutes réelles : $z_k = \tan \frac{a+k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
4. Application : résoudre $(1+iz)^3 = i(1-iz)^3$ (solutions sous forme algébrique ; on pourra utiliser $\tan \frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\sin u}$).
5. Résoudre $(1+iz)^4 = (1-iz)^4$. Combien obtient-on de solutions ? Expliquer, en développant les deux membres.

Exercice 41 Somme des inverses sur un polygone régulier ★★★

corrigé p. 62

Soit $n \geq 2$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $A_k(\omega^k)$ ($0 \leq k \leq n-1$), $M(z)$ avec $z^n \neq 1$ (pas un sommet) et $S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z-\omega^k}$.

1. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Montrer que $(z - \omega^k) \sum_{m=0}^{n-1} z^{n-1-m} \omega^{km} = z^n - 1$.
2. En déduire que $S(z) = \frac{nz^{n-1}}{z^n - 1}$; le vérifier pour $n = 3$ ($\omega = j$) et $z = 2$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^n \neq 1$, et $c_k = \cos \frac{2k\pi}{n}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x - c_k}{x^2 - 2c_k x + 1} = \frac{nx^{n-1}}{x^n - 1}$; contrôler pour $n = 4$, $x = 2$.
4. Montrer que $\overline{S(z)}$ est l'afixe de $\vec{V}(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{A_k M^2} A_k \vec{M}$; en déduire que $\vec{V}(M) = \vec{0} \iff M = O$.

Exercice 42 Produit des distances aux sommets ★★★

corrigé p. 62

Soit $n \geq 2$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, A_k le point d'afixe ω^k ($0 \leq k \leq n-1$) et M un point d'afixe z . On rappelle (cours, « Pour aller plus loin ») que $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $MA_0 \times MA_1 \times \dots \times MA_{n-1} = |z^n - 1|$.
2. On suppose M sur le cercle C de centre O et de rayon 1, avec $z = e^{i\theta}$. Montrer que ce produit vaut $2 \left| \sin \frac{n\theta}{2} \right|$. Quelle est sa plus grande valeur ? En quels points de C est-elle atteinte ?
3. On suppose $OM = R > 1$. Montrer que $R^n - 1 \leq MA_0 \times \dots \times MA_{n-1} \leq R^n + 1$, et préciser les points M pour lesquels chaque égalité a lieu.
4. Application : $n = 6$ et M d'afixe 2. Calculer les six distances MA_k et vérifier le résultat de la question 1.

20

Équations dans $\mathbb{C}$

Pour $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$, coefficients complexes) : $\Delta = b^2 - 4ac$, δ une racine carrée de Δ , solutions $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, de somme $-\frac{b}{a}$ et de produit $\frac{c}{a}$. Au-delà du degré 2 : une racine particulière pour factoriser, ou une inconnue auxiliaire ($Z = z^n$, $Z = z \pm \frac{1}{z}$, ...).

Exercice 43 Racines carrées et trinômes complexes ★

corrigé p. 63

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes :

a) $3 - 4i$ b) $-21 + 20i$ c) $-7 - 24i$ d) $4i$ (contrôler avec la forme exponentielle)

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 - (3 - i)z + 8 + i = 0$ b) $(1 + i)z^2 - (4 + 2i)z + 4 = 0$ c) $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$

3. Déterminer deux nombres complexes dont la somme vaut $1 + 4i$ et le produit $-5 + 5i$.

Exercice 44 Une racine réelle, puis factoriser ★

corrigé p. 63

On pose $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + 3iz + 1 - i$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Soit x un réel. Écrire $P(x)$ sous forme algébrique, puis montrer que P admet une unique racine réelle, que l'on déterminera.
2. Déterminer les complexes β et γ tels que $P(z) = (z - 1)(z^2 + \beta z + \gamma)$ pour tout z , puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. On note A, B, C les images des solutions, avec A sur l'axe des réels et B sur l'axe des imaginaires. Montrer que $OACB$ est un carré.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (2 - 2i)z^2 - 3iz + 1 + i = 0$ (comparer avec P).

Exercice 45 Un paramètre complexe et quatre points cocycliques ★★

corrigé p. 64

Soit m un nombre complexe et (E_m) l'équation $z^2 - [(2 + i)m + 1]z + (1 + i)(m^2 + m) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. a) Montrer que le discriminant de (E_m) est $\Delta = (1 - im)^2$.
 b) En déduire que ses solutions sont $z_1 = m + 1$ et $z_2 = (1 + i)m$. Pour quel m sont-elles confondues ?
 c) Déterminer m pour que z_1 et z_2 soient conjugués ; écrire alors l'équation (E_m) .
2. On note M, A, B les points d'affixes m, z_1, z_2 , et l'on pose $m = x + iy$ (x, y réels).
 a) On suppose $m \neq 0$. Calculer $\frac{z_2}{z_2 - m}$ et en déduire la nature du triangle OMB .
 b) On suppose $m \notin \{0, -1, -i\}$. Vérifier que O, M, A, B sont distincts et non alignés. On admet (chapitre 4) qu'ils sont alors cocycliques si et seulement si $q = \frac{z_1}{z_1 - m} \times \frac{z_2 - m}{z_2}$ est réel : montrer que $q = \frac{(1+i)(m+1)}{2}$, puis que O, M, A, B sont cocycliques si et seulement si $x + y + 1 = 0$.
 c) Pour $m = 1 - 2i$, déterminer le centre et le rayon du cercle passant par O, M, A et B .
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que le triangle OAB soit rectangle en O .

Exercice 46 Inconnues auxiliaires ★★

corrigé p. 64

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - (1+i)z^3 + i = 0$ (solutions sous forme exponentielle).
- On considère l'équation (E) : $2z^4 - (3+2i)z^3 + (3i-4)z^2 + (3+2i)z + 2 = 0$.
 - Vérifier que 0 n'est pas solution de (E), puis montrer que, pour $z \neq 0$, (E) $\iff 2Z^2 - (3+2i)Z + 3i = 0$, où $Z = z - \frac{1}{z}$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2Z^2 - (3+2i)Z + 3i = 0$.
 - En déduire les solutions de (E), sous forme algébrique.
- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z(z+1)(z+2)(z+3) = Z(Z+2)$, où $Z = z^2 + 3z$.
 - En déduire les solutions de l'équation (E') : $z(z+1)(z+2)(z+3) + 10 = 0$ (sous forme algébrique).
 - Montrer que leurs images sont les sommets d'un rectangle, dont on précisera le centre.

Exercice 47 L'équation $(z+1)^n = z^n + 1$ ★★★

corrigé p. 65

Pour tout entier $n \geq 2$, on note (E_n) l'équation $(z+1)^n = z^n + 1$ ($z \in \mathbb{C}$), et l'on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

- Montrer que 0 est solution de (E_n) , et -1 si et seulement si n est impair. Résoudre (E_2) et (E_3) .
- Résoudre (E_4) et vérifier que ses solutions non nulles sont de module 1.
- Vérifier que $1+j = -j^2$, puis montrer que j est solution de (E_n) si et seulement si n est impair et non multiple de 3.
 - Montrer que $(z+1)^5 - z^5 - 1 = 5z(z+1)(z^2+z+1)$ pour tout z , puis résoudre (E_5) .
 - Vérifier que $(z+1)^7 - z^7 - 1 = 7z(z+1)(z^2+z+1)^2$ pour tout z , puis résoudre (E_7) .
- Montrer que $(E_6) \iff z(6z^4 + 15z^3 + 20z^2 + 15z + 6) = 0$.
 - Pour $z \neq 0$, on pose $Z = z + \frac{1}{z}$. Montrer que $6z^4 + 15z^3 + 20z^2 + 15z + 6 = 0 \iff 6Z^2 + 15Z + 8 = 0$.
 - Montrer que les solutions de $6Z^2 + 15Z + 8 = 0$ sont réelles et dans $] -2, 2[$. En déduire que (E_6) a cinq solutions : 0 et quatre complexes de module 1 (qu'on ne calculera pas).

Exercice 48 Le triangle de O et de deux racines ★★★

corrigé p. 65

Soit p et q deux complexes, avec $q \neq 0$. On note z_1 et z_2 les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $z^2 + pz + q = 0$, M_1 et M_2 leurs images, et l'on pose $u = \frac{z_1}{z_2}$.

- Justifier que z_1 et z_2 sont non nuls, puis montrer que $u + \frac{1}{u} = \frac{p^2}{q} - 2$.
- Montrer que, pour tout complexe $u \neq 0$: $u + \frac{1}{u} \in \mathbb{R} \iff (u \in \mathbb{R} \text{ ou } |u| = 1)$. En déduire que $\frac{p^2}{q}$ est réel si et seulement si les points O, M_1, M_2 sont alignés ou $OM_1 = OM_2$. Pourquoi est-ce toujours le cas lorsque p et q sont réels ?
- On suppose $M_1 \neq M_2$. Montrer que le triangle OM_1M_2 est :
 - rectangle isocèle en O si et seulement si $p^2 = 2q$;
 - équilatéral si et seulement si $p^2 = 3q$.
- Applications.

- a) Déterminer q pour que O et les images des solutions de $z^2 - (3 + i\sqrt{3})z + q = 0$ forment un triangle équilatéral ; résoudre alors l'équation.
- b) Déterminer $m \neq 0$ pour que O et les images des solutions de $z^2 + 2mz + m = 0$ forment un triangle rectangle isocèle en O ; résoudre alors l'équation.

21

Transformations du plan

L'écriture $z' = az + b$ ($a \neq 0$) est celle d'une translation si $a = 1$; sinon $z' - \omega = a(z - \omega)$, où $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ est l'unique point fixe : homothétie si $a \in \mathbb{R}$, rotation si $|a| = 1$, composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre sinon.

Exercice 49 Images de droites et de cercles ★

corrigé p. 66

Soit $\Omega(1 - i)$, la translation t de vecteur $\vec{w}(2 + i)$, l'homothétie h de centre Ω et de rapport -2 , et la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Montrer que h et r ont pour écritures complexes respectives $z' = -2z + 3 - 3i$ et $z' = iz - 2i$.
- Soit $(D) : x - 2y - 3 = 0$. Vérifier que $\Omega \in (D)$, puis donner une équation de $t(D)$, $h(D)$ et $r(D)$.
- Préciser le centre K et le rayon de $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, puis déterminer $t(C)$, $h(C)$, $r(C)$.
- Soit (Δ) une droite. Montrer que $h(\Delta) = \Delta \iff \Omega \in (\Delta)$, que $t(\Delta) = \Delta \iff \vec{w}$ dirige (Δ) , et que $r(\Delta) \neq \Delta$.

Exercice 50 De la géométrie à l'écriture complexe ★

corrigé p. 67

On considère les points $A(1 + 2i)$ et $B(3)$.

- Chacune des transformations $f_a, \dots, f_f$ associe à $M(z)$ le point $M'(z')$; donner son écriture complexe et la reconnaître :
 - $\vec{MM'} = \vec{AB}$; b) $\vec{AM} = \vec{M'B}$; c) $\vec{MM'} = 3\vec{MA}$; d) $M' = B$ si $M = B$, sinon BMM' est équilatéral direct ;
 - $M' = O$ si $M = O$, sinon $MM' = MO$ et $(\vec{MO}, \vec{MM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; f) M' est le milieu de $[MN]$, où N est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Reconnaître $f_b \circ f_a$ et $f_d \circ f_a \circ f_d$. Montrer que, pour $M \neq A$, le triangle $AM'M$ (où $M' = f_f(M)$) est rectangle isocèle en M' .

Exercice 51 Racine carrée d'une transformation ★★

corrigé p. 67

Soit f la transformation d'écriture $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Montrer que $f \circ f$ a pour écriture $z' = a^2z + (a + 1)b$.
- Déterminer toutes les transformations f de cette forme telles que $f \circ f$ soit :
 - l'identité ;
 - la translation de vecteur $\vec{u}(4 - 2i)$;
 - l'homothétie de centre $\Omega(1 + i)$ et de rapport 9 ;
 - l'homothétie de centre O et de rapport -4 ;
 - la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;
 - la transformation d'écriture $z' = (3 + 4i)z - 2 - 4i$.
- Si $a^2 \neq 1$, montrer que f et $f \circ f$ ont le même unique point fixe. Était-ce prévisible ?

Exercice 52 Les centres d'homothétie de deux cercles ★★

corrigé p. 68

Soit C_1 le cercle de centre $O_1(1 + i)$ et de rayon 2, et C_2 celui de centre $O_2(7 + 4i)$ et de rayon 4.

1. Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k . Montrer que $h(C_1) = C_2 \iff h(O_1) = O_2$ et $|k| = 2$.
2. En déduire qu'exactly deux homothéties h_1 (rapport 2) et h_2 (rapport -2) transforment C_1 en C_2 ; déterminer leurs centres Ω_1, Ω_2 , et vérifier qu'ils sont sur (O_1O_2) .
3. Soit (Δ) une tangente à C_1 (un seul point commun) passant par Ω_2 . Montrer que $h_2(\Delta) = \Delta$, puis que (Δ) est tangente à C_2 . Et si (Δ) passe par Ω_1 ?
4. Soit $T(x + iy) \in C_1$ tel que $(\Omega_2T) \perp (O_1T)$: montrer que $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$. En déduire les tangentes communes passant par Ω_2 et leurs points de contact avec C_2 .

Exercice 53 Le point de Fermat d'un triangle ★★★

corrigé p. 69

On considère $A(2)$, $B = O$ et $C(2i)$; on cherche le minimum de $S(M) = MA + MB + MC$. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; pour tout point $M(z)$, on pose $M' = r(M)$, et l'on note $C' = r(C)$.

1. Calculer l'affixe c' de C' . Montrer que $MM' = MB$ et $M'C' = MC$ pour tout point M .
2. En déduire que $S(M) = AM + MM' + M'C' \geq AC'$ pour tout point M , puis calculer AC' (on pourra développer $(1 + \sqrt{3})^2$).
3. Soit F le point d'affixe $f = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(1 + i)$ et $F' = r(F)$.
 - a) Montrer que $f' = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
 - b) Montrer que $f - a = \lambda(c' - a)$ et $f' - a = \mu(c' - a)$, avec $0 < \lambda < \mu < 1$. En déduire le minimum de S et un point où il est atteint.
4. Vérifier que $\frac{b-f}{a-f} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et $\frac{c-f}{b-f} = (\sqrt{3}+1) e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Sous quel angle F voit-il chacun des côtés ?

Exercice 54 Retrouver un triangle effacé ★★★

corrigé p. 69

Un triangle direct ABC a été effacé ; il ne reste que les centres P, Q, R des carrés construits à l'extérieur du triangle sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note ρ_P, ρ_Q, ρ_R les rotations d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P, Q, R ; on admet que $\rho_R(A) = B$, $\rho_P(B) = C$ et $\rho_Q(C) = A$.

1. Écrire ρ_R, ρ_P et ρ_Q , puis montrer que $g = \rho_Q \circ \rho_P \circ \rho_R$ a pour écriture $z' = iz - (1+i)r + (1-i)p + (1+i)q$.
2. Reconnaître g . Justifier que A est son unique point fixe, puis que $a = p + i(q - r)$.
3. En déduire b et c en fonction de p, q, r . Interpréter géométriquement l'égalité $a - p = i(q - r)$.
4. Application : retrouver A, B, C sachant que $P(4+3i)$, $Q(-1+2i)$ et $R(2-2i)$. Vérifier que $r = \frac{a+b}{2} - i \frac{b-a}{2}$.
5. Avec des triangles équilatéraux extérieurs au lieu des carrés (rotations d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, mêmes relations admises), montrer que $g = \text{Id}$. Peut-on encore retrouver ABC ?

22 Géométrie et complexes

Outils : ABC équilatéral direct $\iff c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \iff a + bj + cj^2 = 0$; $ABCD$ carré direct $\iff a + c = b + d$ et $d - a = i(b - a)$; si $|z| = 1$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Exercice 55 Un triangle équilatéral inscrit dans un carré ★

corrigé p. 70

Soit le carré $ABCD$ avec $A(0)$, $B(4)$, $C(4 + 4i)$, $D(4i)$. On cherche $E(4 + it) \in [BC]$ et $F(s + 4i) \in [CD]$ ($t, s \in [0, 4]$) tels que le triangle AEF soit équilatéral.

1. Justifier que AEF est équilatéral si et seulement si $f = e^{i\frac{\pi}{3}}e$. En déduire que $t = s = 8 - 4\sqrt{3}$.
2. Montrer que le triangle CEF est rectangle isocèle en C , puis que la droite (AC) est la médiatrice de $[EF]$.
3. Calculer EF de deux façons (avec CE , puis avec AE). En déduire que $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.
4. Calculer l'aire du triangle AEF et son rapport à l'aire du carré.

Exercice 56 Compléter un carré ou un triangle ★

corrigé p. 71

1. $A(1 + 2i)$ et $B(4 + 3i)$ sont deux sommets consécutifs d'un carré $ABCD$: déterminer c et d (deux cas).
2. $A(1 + 2i)$ et $C(5 + 4i)$ sont deux sommets opposés d'un carré direct $ABCD$: déterminer son centre Ω , b et d .
3. Un triangle équilatéral ABC a pour centre $G(2 + i)$ et pour sommet $A(4 + i)$. Déterminer b et c , puis la longueur des côtés.
4. $B(-1)$ et $C(3 + 2i)$ sont les extrémités de l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle isocèle en A . Déterminer les affixes possibles de A .
5. $A(0)$ est un sommet d'un triangle équilatéral ABC , et $I(3 + i\sqrt{3})$ est le milieu de $[BC]$. Déterminer b et c .

Exercice 57 Polygones dont on connaît les milieux ★★

corrigé p. 71

Pour tout point X d'affixe x , on note s_X la symétrie de centre X : $z' = 2x - z$.

1. D'un triangle ABC effacé, il reste les milieux $I(2 + i)$, $J(1 + 3i)$, $K(-i)$ de $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.
a) Justifier que $s_K \circ s_J \circ s_I(A) = A$, et que $s_K \circ s_J \circ s_I$ s'écrit $z' = 2(z_I - z_J + z_K) - z$. b) En déduire a , b et c .
2. Soit I, J, K, L quatre points. Montrer que $s_L \circ s_K \circ s_J \circ s_I$ est une translation. En déduire qu'il existe un quadrilatère $ABCD$ dont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ sont I, J, K, L si et seulement si $IJKL$ est un parallélogramme, et qu'il en existe alors une infinité.
Application : $I(1)$, $J(3 + 2i)$, $K(2 + 5i)$, et $L(5i)$ ou $L(3i)$; dans le second cas, donner la solution telle que $A = O$.
3. Retrouver le pentagone $ABCDE$ dont les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EA]$ ont pour milieux $I(2)$, $J(5 + 2i)$, $K(4 + 5i)$, $L(5i)$ et $M(-1 + 2i)$. Que dire d'un polygone à n côtés dont on connaît les milieux des côtés ?

Exercice 58 Polygones réguliers emboîtés ★★

corrigé p. 72

Soit $n \geq 3$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et les points $A_k(\omega^k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (donc $A_{k+n} = A_k$) : $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier de centre O . Pour $t \in]0, 1[$, on note B_k le point de $[A_kA_{k+1}]$ tel que $A_k\vec{B}_k = tA_k\vec{A}_{k+1}$.

1. Montrer que $b_k = \lambda \omega^k$, avec $\lambda = 1 - t + t\omega$. En déduire que $B_0B_1 \dots B_{n-1}$ est l'image de $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ par une composée de rotation et d'homothétie de centre O que l'on précisera.
2. Montrer que $|\lambda|^2 = 1 - 2t(1-t)\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$. Pour quelle valeur de t l'aire du polygone $B_0 \dots B_{n-1}$ est-elle minimale ? Montrer qu'alors $|\lambda| = \cos \frac{\pi}{n}$.
3. Cas $n = 3$. Pour $t = \frac{1}{3}$, écrire λ sous forme exponentielle et montrer que $(B_0B_1) \perp (A_1A_2)$. Pour quelles valeurs de t l'aire du triangle $B_0B_1B_2$ est-elle le tiers de celle de $A_0A_1A_2$?
4. Cas $n = 4$. Pour quels t l'aire du carré $B_0B_1B_2B_3$ vaut-elle les $\frac{5}{8}$ de celle de $A_0A_1A_2A_3$?

Exercice 59 Trois triangles équilatéraux de sommet commun ★★★

corrigé p. 72

Soit A, B, C, D, E, F six points du plan tels que les triangles OAB , OCD et OEF soient équilatéraux directs. On pose $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $b = ua$, $d = uc$ et $f = ue$, puis que $u = -j^2$.
2. Soit P, Q, R les milieux respectifs de $[BC]$, $[DE]$ et $[FA]$. Montrer que $p + qj + rj^2 = 0$. En déduire que, si P, Q, R ne sont pas confondus, le triangle PQR est équilatéral direct.
3. Montrer que le centre de gravité de PQR est l'image du centre de gravité de ACE par la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre O que l'on précisera.
4. Application (olympiade) : un hexagone convexe direct $ABCDEF$ est inscrit dans un cercle de centre O , et $AB = CD = EF$ est égal au rayon. Montrer que les milieux de $[BC]$, $[DE]$, $[FA]$ forment un triangle équilatéral.

Exercice 60 Le théorème des trois pièces ★★★

corrigé p. 73

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points distincts du cercle de centre O et de rayon ρ , avec $a + b$, $b + c$, $c + a$ non nuls, et $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ les cercles de rayon ρ et de centres A, B, C : trois « pièces » identiques dont les bords passent par O .

1. Montrer que $P(a + b)$ est sur Γ_A et sur Γ_B , que $OAPB$ est un losange, puis que P est le second point commun de Γ_A et Γ_B . On définit de même $Q(b + c)$ (pour Γ_B, Γ_C) et $R(c + a)$.
2. Montrer que P, Q, R sont sur un cercle Γ de rayon ρ , de centre K à préciser (théorème de Johnson).
3. Montrer que $[AQ]$, $[BR]$, $[CP]$ et $[OK]$ ont le même milieu Ω . En déduire que PQR est l'image de ABC par une symétrie centrale, et que $QR = AB$, $RP = BC$, $PQ = CA$.
4. Application : $\rho = 5$, $a = 5$, $b = 3 + 4i$, $c = -3 + 4i$. Calculer p, q, r, k , et vérifier que $KP = KQ = KR = 5$.
5. Que devient Γ si ABC est équilatéral ? Quelle est alors la nature de l'hexagone $APBQCR$?

23

Défis de concours

Six problèmes de concours, où chaque question prépare la suivante : la rédaction doit être rigoureuse.

Exercice 61 Les applications qui conservent les distances ★★★★★

corrigé p. 73

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $|f(z) - f(w)| = |z - w|$ pour tous complexes z et w . On pose $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$.

1. Montrer que $|a| = 1$, puis que $g : z \mapsto \frac{f(z)-b}{a}$ conserve aussi les distances, avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|g(z)| = |z|$ et $|g(z) - 1| = |z - 1|$, puis que $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} z$. En déduire que $g(z) = z$ ou $g(z) = \bar{z}$.
3. Ainsi $g(i) = \pm i$. Montrer que $g(z) = z$ pour tout z si $g(i) = i$ (utiliser $|g(z) - i| = |z - i|$), et $g(z) = \bar{z}$ pour tout z si $g(i) = -i$.
4. En déduire que f s'écrit $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$, et vérifier la réciproque. Reconnaître les applications de la première forme.
5. Déterminer les applications f qui conservent les distances et vérifient $f(0) = 1+i$ et $f(2) = 1+3i$. Pour celle qui n'est pas une rotation, montrer qu'elle n'a aucun point fixe et que $f \circ f$ est une translation.

Exercice 62 Paver un rectangle avec des barres ★★★★★

corrigé p. 74

Soit $n \geq 2$, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et un rectangle de $a \times b$ cases (x, y) , $0 \leq x \leq a-1$, $0 \leq y \leq b-1$; la case (x, y) reçoit le poids ω^{x+y} . Une barre $1 \times n$ couvre n cases consécutives d'une ligne ou d'une colonne.

1. Montrer que la somme des poids d'une barre est nulle, et que la somme S des poids du rectangle vérifie $(1 - \omega)^2 S = (1 - \omega^a)(1 - \omega^b)$.
2. En déduire que l'on peut paver le rectangle (sans chevauchement) par des barres $1 \times n$ si et seulement si n divise a ou b . Et un rectangle 6×10 par des barres 1×4 ?
3. On retire une case (x_0, y_0) d'un échiquier 8×8 ; on veut paver le reste par 21 barres 1×3 ($\omega = j$).
 - a) Montrer que la somme des poids j^{x+y} des 64 cases vaut j ; en déduire que $x_0 + y_0 \equiv 1 [3]$.
 - b) Avec les poids j^{x-y} , montrer que $x_0 \equiv y_0 [3]$, puis que x_0 et y_0 sont dans $\{2, 5\}$.
 - c) Paver l'échiquier privé de la case $(2, 2)$ (figure), puis conclure.

Exercice 63 Polygones équiangles ★★★★★

corrigé p. 74

Un polygone convexe direct $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) est équiangle si ses angles sont égaux. On note $\ell_k = A_k A_{k+1}$ ($A_{n+1} = A_1$) et $v = e^{\frac{2i\pi}{n}}$; on admet qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A_k \vec{A}_{k+1}$ ait pour affixe $\ell_k e^{i\theta} v^{k-1}$ pour tout k .

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \ell_k v^{k-1} = 0$.
2. **Hexagones** ($n = 6$, $v = u = e^{i\frac{\pi}{3}}$).
 - a) Vérifier que $u^3 = -1$ et $u^2 = u - 1$. En déduire que $(\ell_1 - \ell_4 - \ell_3 + \ell_6) + (\ell_2 - \ell_5 + \ell_3 - \ell_6)u = 0$, puis que $\ell_1 - \ell_4 = \ell_3 - \ell_6 = \ell_5 - \ell_2$.

- b) Existe-t-il un hexagone équiangle dont les côtés consécutifs $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ valent 1, 2, 3, 4 ?
- c) On admet la réciproque de a). Donner un hexagone équiangle de côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6 (dans un certain ordre).
3. **Octogones** ($n = 8$). Montrer qu'un octogone équiangle dont les côtés ont des longueurs rationnelles a ses côtés opposés égaux : $\ell_1 = \ell_5, \ell_2 = \ell_6, \ell_3 = \ell_7$ et $\ell_4 = \ell_8$ (on rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel).

Exercice 64 Polygones réguliers à sommets entiers ★★★★★

corrigé p. 75

Un point est *entier* si son affixe est $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. On rappelle que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ sont irrationnels et que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Soit $n \geq 3$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$; les sommets d'un polygone régulier direct $A_0 \dots A_{n-1}$ ont pour affixes $a_k = s + w \omega^k$ ($s \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}^*, a_{k+n} = a_k$).

- a) Montrer que $a_{k+2} - a_{k+1} = \omega(a_{k+1} - a_k)$ pour tout k .

b) Montrer que, si A_0, A_1, A_2 sont entiers, alors $\cos \frac{2\pi}{n}$ et $\sin \frac{2\pi}{n}$ sont rationnels. En déduire qu'aucun triangle équilatéral, aucun hexagone régulier, aucun octogone régulier n'a ses sommets entiers. Et les carrés ?
- On suppose que $n = 5$ ou $n \geq 7$, et qu'un polygone régulier $A_0 \dots A_{n-1}$ a ses sommets entiers. On définit les points B_k par $A_k \vec{B}_k = A_{k+1} \vec{A}_{k+2}$.

a) Montrer que les B_k sont entiers et que $b_k = s + w(1 - \omega + \omega^2)\omega^k$.

b) Montrer que $1 - \omega + \omega^2 = (2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1)\omega$, puis que $0 < |2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1| < 1$.

c) En déduire que $B_0 \dots B_{n-1}$ est un polygone régulier à sommets entiers dont le côté ℓ' vérifie $0 < \ell' < \ell = A_0 A_1$, et que ℓ^2, ℓ'^2 sont des entiers.

d) En répétant la construction, aboutir à une contradiction. Quels sont les polygones réguliers à sommets entiers ?

Exercice 65 Des points d'un cercle à distances entières ★★★★★

corrigé p. 75

On pose $u = \frac{3+4i}{5}$ et, pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note x_m, y_m les réels tels que $(3 + 4i)^m = x_m + iy_m$.

- Montrer que $|u| = 1$, que $x_{m+1} = 3x_m - 4y_m$ et $y_{m+1} = 4x_m + 3y_m$, puis, par récurrence, que x_m et y_m sont des entiers tels que $x_m - 3$ et $y_m - 4$ soient des multiples de 5. En déduire que $y_m \neq 0$.
- Montrer que u^m n'est pas réel pour $m \geq 1$, puis que, pour tous entiers $0 \leq k < j$: $|u^{2j} - u^{2k}| = \frac{2|y_{j-k}|}{5^{j-k}}$.
- Soit $N \geq 2$ et $M_k(5^{N-1}u^{2k})$, $0 \leq k \leq N-1$. Montrer que ces points sont distincts, sur un cercle de centre O , et à distances mutuelles entières.
- Expliciter le rayon et les distances pour $N = 3$ et pour $N = 4$.
- Montrer que le cercle unité contient une infinité de points deux à deux à distance rationnelle.

Exercice 66 Le problème de Bâle ★★☆☆

corrigé p. 76

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ (suite convergente, chapitre 3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = 2n+1$; on note $\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

1. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^N$ (binôme et Moivre), montrer que

$$\sin N\theta = \sin^N \theta P_n(\cotan^2 \theta), \quad \text{où} \quad P_n(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{N}{2p+1} X^{n-p}.$$

2. Montrer que les réels $x_k = \cotan^2 \frac{k\pi}{N}$ ($1 \leq k \leq n$) sont n racines distinctes de P_n . En déduire que

$$P_n = N \prod_{k=1}^n (X - x_k), \text{ puis que } \sum_{k=1}^n x_k = \frac{n(2n-1)}{3} \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{N}} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

3. On admet que $\sin x < x < \tan x$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que $\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$ sur cet intervalle, puis que $\frac{\pi^2}{N^2} \cdot \frac{n(2n-1)}{3} < S_n < \frac{\pi^2}{N^2} \cdot \frac{2n(n+1)}{3}$.

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler, 1735), puis la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

24 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

- $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. $z_2 = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$. $-2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, donc $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$
 $\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}\right)$. Le module de z_4 est 4 (et non -4) : $z_4 = 4e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{5}} = 4e^{i\frac{4\pi}{5}}$. $z_5 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3e^{i\frac{3\pi}{8}}$.
- $u = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. $\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$, donc $v = e^{i\theta}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Pour $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos\theta < 0$: on écrit $w = (-2\cos\theta)(-e^{i\theta}) = (-2\cos\theta)e^{i(\theta+\pi)}$, avec $-2\cos\theta > 0$ (module) et $\theta + \pi$ (argument).
- $z_1^6 = (2\sqrt{2})^6 e^{-2i\pi} = 512$; $z_4^5 = 4^5 e^{4i\pi} = 1024$. $z_3^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{11n\pi}{12}}$ est imaginaire pur $\iff \frac{11n\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \frac{11n-6}{12} \in \mathbb{Z}$. Or $11n-6 = 12n - (n+6)$: la condition équivaut à « 12 divise $n+6$ », soit $n = 12p+6$, $p \in \mathbb{N}$ ($n = 6, 18, 30, \dots$).

■ Corrigé de l'exercice 2

- Par Euler, avec $(2i)^4 = 16$:

$$\sin^4 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{16} = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}.$$

En $\frac{\pi}{8}$: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\sin^4 \frac{\pi}{8} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}$; en $\frac{3\pi}{8}$: $\sin^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3+2\sqrt{2}}{8}$. La somme vaut $\frac{3}{4}$.

- $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, donc (Moivre puis Euler) $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot 2\cos \frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$. Pour $n = 12$: $2^7 \cos 3\pi = -128$.
- $e^{i\theta}(1+e^{-i\theta}) = e^{i\theta} + 1$ ✓. Le numérateur vaut $1+e^{i\theta}$ et le dénominateur $1+e^{-i\theta}$, non nul car $e^{-i\theta} \neq -1$ ($\cos\theta \neq -1$). Le quotient vaut donc $e^{i\theta}$, et par Moivre sa puissance n -ième est $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

■ Corrigé de l'exercice 3

- $u = e^{i0} + e^{i\frac{2\pi}{5}} = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) e^{i\frac{\pi}{5}} = \boxed{2 \cos \frac{\pi}{5} e^{i\frac{\pi}{5}}}$ ($\cos \frac{\pi}{5} > 0$). $v = 2i \sin \frac{\pi}{12} e^{i\frac{5\pi}{12}} = \boxed{2 \sin \frac{\pi}{12} e^{i\frac{11\pi}{12}}}$ ($i = e^{i\frac{\pi}{2}}$).
 $w = 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2 \cos \frac{7\pi}{12} e^{i\frac{7\pi}{12}}$: piège, $\cos \frac{7\pi}{12} < 0$. Comme $-\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{12}$ et $-e^{i\frac{7\pi}{12}} = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$:
 $w = 2 \cos \frac{5\pi}{12} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.
- $1 - e^{i\theta} = 2i \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} = \boxed{2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})}}$, avec $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$. Alors

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}}{-2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{i \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{i}{\tan \frac{\theta}{2}} \quad (\theta \neq \pi, \text{ donc } \cos \frac{\theta}{2} \neq 0).$$
- $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \cos \frac{\pi}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$, d'où $(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = 27 e^{i\pi} = \boxed{-27}$. $e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2 \cos \frac{\pi}{6} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où la puissance 8 : $81 e^{2i\pi} = \boxed{81}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- $\delta = x + iy$ (x, y réels) vérifie $\delta^2 = 8 - 6i$ si et seulement si $x^2 - y^2 = 8$, $2xy = -6$; de plus $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |8 - 6i| = 10$. D'où $x^2 = 9$, $y^2 = 1$, $xy < 0$: $\delta = \pm(3 - i)$. De même pour $-15 + 8i$: $x^2 - y^2 = -15$, $x^2 + y^2 = 17$, $xy = 4 > 0$, d'où $\pm(1 + 4i)$.
- a) $\Delta = (1 + i)^2 - 4(-2 + 2i) = 2i + 8 - 8i = 8 - 6i = (3 - i)^2$: $z = \frac{(1+i)\pm(3-i)}{2}$, $S = \{2; -1 + i\}$.
 b) $\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(5 + i) = 5 + 12i - 20 - 4i = -15 + 8i = (1 + 4i)^2$: $z = \frac{(3+2i)\pm(1+4i)}{2}$, $S = \{2 + 3i; 1 - i\}$.
- $(1 + i)^2 + m(1 + i) + 3 - i = 0 \iff m(1 + i) = -3 - i \iff m = \frac{(-3-i)(1-i)}{2} = \boxed{-2 + i}$. Le produit des solutions vaut $3 - i$, donc l'autre est $\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{2} = \boxed{1 - 2i}$ (contrôle : $(1 + i) + (1 - 2i) = 2 - i = -m$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 5

- $-27 = 27 e^{i\pi}$. Avec $z = r e^{i\varphi}$: $r^6 = 27$ et $6\varphi \equiv \pi [2\pi]$, donc $r = \sqrt{3}$ et $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$: $z_k = \sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}$, $0 \leq k \leq 5$, soit $\pm\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\pm i\sqrt{3}$, $\pm\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.
 On passe de z_k à $z_{k+1} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_k$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$: les images forment un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. Le triangle OZ_0Z_1 est équilatéral, donc le côté vaut $\sqrt{3}$ et le périmètre $\boxed{6\sqrt{3}}$.
- $z^3 = 1 \iff z \in \{1, j, j^2\}$, avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = \bar{j}$. Avec $Z = z^3$: $Z^2 + 7Z - 8 = (Z - 1)(Z + 8) = 0$. Puis $z^3 = -8 \iff \left(-\frac{z}{2}\right)^3 = 1 \iff z \in \{-2, -2j, -2j^2\}$. $S = \{1, j, j^2, -2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$.
- Avec $w = z - i$: $w^4 = -4 = 4e^{i\pi} \iff w = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})} \in \{1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i\}$, d'où $S = \{1 + 2i, -1 + 2i, -1, 1\}$.

■ Corrigé de l'exercice 6

- a) Pour y réel : $P(iy) = -iy^3 + (2 + 3i)y^2 + (5 + 6i)iy - 15i = (2y^2 - 6y) + i(-y^3 + 3y^2 + 5y - 15)$.
 $P(iy) = 0$ impose $2y(y - 3) = 0$; $y = 0$ donne une partie imaginaire $-15 \neq 0$, et $y = 3$ donne $-27 + 27 + 15 - 15 = 0$. L'unique solution imaginaire pure est $\boxed{z_0 = 3i}$.

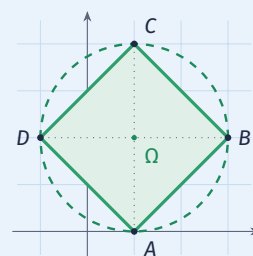
b) $(z - 3i)(z^2 + az + \beta) = z^3 + (\alpha - 3i)z^2 + (\beta - 3i\alpha)z - 3i\beta$; par identification $\alpha = -2$, $\beta = 5$ (et $\beta - 3i\alpha = 5 + 6i$ ✓). $z^2 - 2z + 5 = 0$: $\Delta' = -4 = (2i)^2$, $z = 1 \pm 2i$. $\boxed{S = \{3i, 1 + 2i, 1 - 2i\}}$.
- $z^2 + 4z + 16 = 0$: $\Delta' = -12 = (2i\sqrt{3})^2$, $z = -2 \pm 2i\sqrt{3} = 4e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$. Puis $z^2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \iff z = \pm 2e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm(1 + i\sqrt{3})$, et $z^2 = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}} \iff z = \pm(1 - i\sqrt{3})$. $\boxed{S = \{\pm(1 + i\sqrt{3}), \pm(1 - i\sqrt{3})\}}$.
- Avec $u = \frac{z+1}{z-1}$: $u^2 + u + 1 = 0 \iff u \in \{j, j^2\}$; et $u = \frac{z+1}{z-1} \iff z = \frac{u+1}{u-1}$ ($u \neq 1$). Pour $u = e^{i\varphi}$, l'angle moitié donne $\frac{u+1}{u-1} = \frac{2\cos\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}}{2i\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}} = -\frac{i}{\tan\frac{\varphi}{2}}$. Avec $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$: $\boxed{S = \left\{-\frac{i\sqrt{3}}{3}, \frac{i\sqrt{3}}{3}\right\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 7

- Pour $z' = az + b$ avec $a \neq 1$, le centre est l'unique point fixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (cours). a) Translation de vecteur d'affixe $2 - 3i$. b) $a = -2$ réel : homothétie de rapport -2 et de centre $\omega = \frac{3-6i}{3} = 1 - 2i$. c) $a = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$: rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\omega = \frac{1+i}{1-i} = i$. d) $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$: rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$; $1 - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc $\omega = (\sqrt{3} - i)e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + i$. e) $a = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, non réel et de module $\neq 1$: composée de la rotation de centre $\Omega(2)$ ($\omega = \frac{2i}{i} = 2$) et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de même centre et de rapport $\sqrt{2}$.
- $z' - (1 - i) = e^{\frac{2i\pi}{3}}(z - 1 + i)$, soit $\boxed{z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3-\sqrt{3}}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{2}i}$ (car $(1 - i)\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = (1 - i)\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$).
 Homothétie : $z' - (2 + i) = -\frac{1}{2}(z - 2 - i)$, soit $\boxed{z' = -\frac{1}{2}z + 3 + \frac{3}{2}i}$.
- La rotation $z' = iz$ conserve les distances : l'image est le cercle de rayon 2 et de centre d'affixe $i(1 + i) = \boxed{-1 + i}$. Les points de la droite sont les $M(t + it)$, $t \in \mathbb{R}$; leurs images ont pour affixe $i(t + it) + 1 + i = (1 - t) + i(1 + t)$, donc $x' + y' = 2$: l'image est la droite d'équation $\boxed{y = -x + 2}$ (tout point de cette droite est atteint).

■ Corrigé de l'exercice 8

- a) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+3i}{3+2i} = i$ (car $i(3 + 2i) = -2 + 3i$) : $AC = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$: **rectangle isocèle en A**. b) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$: **équilatéral**. c) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+2i}{1+i} = 2i$: **rectangle en A**, avec $AC = 2AB$.
- $\frac{g-e}{f-e} = \frac{-3+6i}{2-4i} = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$: E, F, G sont alignés.
- $b - a = 2 + 2i = c - d$: $\vec{AB} = \vec{DC}$, $ABCD$ est un parallélogramme.
 $\frac{d-a}{b-a} = \frac{-2+2i}{2+2i} = i$: $AD = AB$ et l'angle en A est droit ; c'est un **carré**.
 Son centre Ω est le milieu commun des diagonales : $\omega = \frac{a+c}{2} = 1 + 2i$; les diagonales ont même longueur, donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = |1 - \omega| = 2$: cercle de centre $\boxed{\Omega(1 + 2i)}$ et de rayon $\boxed{2}$.



25

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

- $\sum_{k=1}^4 e^{ikx} = e^{ix} \sum_{k=0}^3 e^{ikx} = e^{ix} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{3x}{2}} = \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{5x}{2}}$; la partie réelle donne la formule. Pour $x \in]0, \pi]$, $\sin \frac{x}{2} > 0$: l'équation équivaut à $\cos \frac{5x}{2} = 0$ ou $\sin 2x = 0$. Or $\cos \frac{5x}{2} = 0 \iff x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$, ce qui donne $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$; et $\sin 2x = 0 \iff x = \frac{k\pi}{2}$, ce qui donne $\frac{\pi}{2}, \pi$. $S = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \pi \right\}$.
- Partie imaginaire avec $x = \frac{\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (le terme $k = 0$ est nul) : $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$, car $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) = \cos \frac{\pi}{2n}$. Pour $n = 6$, directement : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2 + \sqrt{3}$. Donc $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.
- $u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi/(2n)}{\sin(\pi/(2n))}$. Comme $\frac{\pi}{2n} \rightarrow 0$, $\frac{t}{\sin t} \rightarrow 1$ et $\cos t \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$: $\lim u_n = \frac{2}{\pi}$.

■ Corrigé de l'exercice 10

- $-1 = e^{i\pi} : z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, soit $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$ (quatre solutions). $(z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = z^4 + 1$ ✓. Le facteur $z^2 - \sqrt{2}z + 1$ a pour solutions $e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ (somme $2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, produit 1), et $z^2 + \sqrt{2}z + 1$ a pour solutions $e^{\pm i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$.
- Les racines sont $z_k = z_0 \omega^k$ ($0 \leq k \leq n-1$), avec $z_0 = \sqrt[n]{p} e^{i\frac{\alpha}{n}}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$. Somme : $z_0(1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}) = z_0 \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$. Produit : $z_0^n \omega^{0+1+\dots+(n-1)} = a \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = a e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1} a$.
- $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4) = (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3)(1 + \omega^4) = 1 + \omega + \dots + \omega^6 + \omega^7 = 0 + 1 = 1$, car $\omega^7 = 1$ et $1 + \omega + \dots + \omega^6 = \frac{\omega^7 - 1}{\omega - 1} = 0$. Par l'angle moitié, $1 + \omega^k = 2 \cos \frac{k\pi}{7} e^{i\frac{k\pi}{7}}$; le produit vaut donc $8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} e^{i\pi} = 1$, d'où $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

■ Corrigé de l'exercice 11

- $\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-1 + 5i) = -7 + 24i + 4 - 20i = -3 + 4i$. Avec $\delta = x + iy : x^2 - y^2 = -3, x^2 + y^2 = 5, xy = 2 > 0$, donc $\delta = 1 + 2i$. $z = \frac{(3+4i) \pm (1+2i)}{2} : S = \{2 + 3i; 1 + i\}$.
- 0 n'est pas solution (le terme constant vaut 1). En divisant par z^2 : $(E) \iff \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$; comme $u^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$: $(E) \iff u^2 + 2u - 3 = 0 \iff u = 1$ ou $u = -3$.
 $z + \frac{1}{z} = 1 \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$; $z + \frac{1}{z} = -3 \iff z^2 + 3z + 1 = 0 \iff z = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
 $S = \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.
- $z^2 - 2\bar{z} + 1 = (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy + 2y)$. L'équation équivaut à $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ et $2y(x + 1) = 0$. Si $y = 0 : (x - 1)^2 = 0, x = 1$. Si $x = -1 : 4 - y^2 = 0, y = \pm 2$. $S = \{1, -1 + 2i, -1 - 2i\}$.

■ Corrigé de l'exercice 12

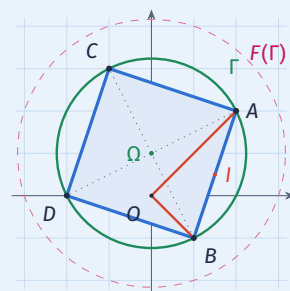
1. $r_1 : z' - 1 = i(z - 1)$, soit $z' = iz + 1 - i$; $r_2 : z' + i = i(z + i)$, soit $z' = iz - 1 - i$; $r_3 : z' + i = -i(z + i)$, soit $z' = -iz + 1 - i$.
 $r_2 \circ r_1(z) = i(iz + 1 - i) - 1 - i = \boxed{-z}$: symétrie de centre O . $r_1 \circ r_2(z) = i(iz - 1 - i) + 1 - i = \boxed{-z + 2 - 2i}$: symétrie de centre $1 - i$. $r_3 \circ r_1(z) = -i(iz + 1 - i) + 1 - i = \boxed{z - 2i}$: translation de vecteur d'affixe $-2i$ (angles $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$). Les centres O et $1 - i$ diffèrent : $r_2 \circ r_1 \neq r_1 \circ r_2$, la composition n'est pas commutative.
2. Par soustraction : $a = \frac{(1-i)-(1+3i)}{i-(2+i)} = \frac{-4i}{-2-i} = \boxed{2i}$, puis $b = (1 + 3i) - 2i(2 + i) = \boxed{3 - i}$. Comme $a = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ n'est pas réel et $|a| \neq 1$, f est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de l'homothétie de même centre et de rapport 2, avec $\omega = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{5} = \boxed{1 + i}$.
3. f multiplie les distances par 2 : l'image est le cercle de centre $f(A)$, d'affixe $2i + 3 - i = 3 + i$, et de rayon 2. $f \circ r_3(z) = 2i(-iz + 1 - i) + 3 - i = \boxed{2z + 5 + i}$: homothétie de rapport 2 et de centre $\frac{5+i}{1-2} = -5 - i$.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. En développant, avec $j^3 = 1, j^4 = j$ et $j + j^2 = -1$:
 $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 + ab(j + j^2) + ac(j + j^2) + bc(j^2 + j^4) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$.
 ABC est équilatéral $\iff$ il est direct ou indirect $\iff a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0 \iff$ le produit est nul $\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
2. L'équation équivaut à $\left(\frac{z-i}{2}\right)^3 = 1$, soit $z - i \in \{2, 2j, 2j^2\}$: $a = 2 + i, b = i + 2j = -1 + i(1 + \sqrt{3}), c = i + 2j^2 = -1 + i(1 - \sqrt{3})$.
1^{re} façon. Avec $u = i$: $a = u + 2, b = u + 2j, c = u + 2j^2$, donc $a + b + c = 3u$ et $ab + bc + ca = 3u^2 + 4u(1 + j + j^2) + 4(j + j^2 + j^3) = 3u^2$; ainsi $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 3u^2 = ab+bc+ca$: critère de 1.
2^e façon. $b - i = j(a - i), c - i = j(b - i)$ et $a - i = j(c - i)$: la rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ envoie A sur B, B sur C et C sur A , donc $AB = BC = CA (= 2\sqrt{3})$.
3. Les affixes de I, J, K sont $\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}$, et $\frac{a+a'}{2} + \frac{b+b'}{2}j + \frac{c+c'}{2}j^2 = \frac{1}{2}[(a + bj + cj^2) + (a' + b'j + c'j^2)] = 0$: IJK est équilatéral direct.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. a) $\Delta = (3 + i)^2 - 16 = -8 + 6i$ et $(1 + 3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$ ✓.
 $z = \frac{(3+i) \pm (1+3i)}{2}$: $2 + 2i$ et $1 - i$. Comme $|2 + 2i| = 2\sqrt{2} > \sqrt{2} = |1 - i|$: $\boxed{a = 2 + 2i, b = 1 - i}$.
b) $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, b = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \frac{a}{b} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. Donc $OA = 2OB$ et $(\vec{OB}, \vec{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}$: OAB est rectangle en O .
2. a) $z' - i = i(z - i)$, soit $\boxed{z' = iz + 1 + i}$; $R(B) : i(1 - i) + 1 + i = 2 + 2i = a$ ✓.
b) $c = i(2 + 2i) + 1 + i = \boxed{-1 + 3i}, d = i(-1 + 3i) + 1 + i = \boxed{-2}$, et $R(D) : -2i + 1 + i = 1 - i = b$ ✓.



- c) $R \circ R$ est la symétrie de centre Ω (angle π) ; elle envoie B sur C et A sur D , donc Ω est le milieu de $[BC]$ et de $[AD]$: $BACD$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont même longueur ($\Omega A = \Omega B$, la rotation conservant les distances) et sont perpendiculaires ($(\vec{\Omega B}, \vec{\Omega A}) \equiv \frac{\pi}{2}$) : $BACD$ est un **carré** de centre Ω . Enfin $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = |b - i| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$: (Γ) est le cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
3. a) Le coefficient $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas réel et son module n'est pas 1 ; l'unique point fixe est $\frac{1}{1-(1+i)} = \frac{1}{-i} = i$, c'est Ω . Donc $z' - i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$: F est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$.
- b) $F(\Gamma)$ est le cercle de centre $F(\Omega) = \Omega$ et de rayon $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$. Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\frac{3+i}{2}$, et $(1+i)\frac{3+i}{2} + 1 = \frac{2+4i}{2} + 1 = 2 + 2i = a$ ✓ (le triangle ΩIA est rectangle isocèle en I).

■ **Corrigé de l'exercice 15**

1. a) $\Delta = (1+i)^2(m+1)^2 - 4i(m^2+1) = 2i(m^2+2m+1) - 4im^2 - 4i = -2i(m-1)^2$, et $(1-i)^2 = -2i$: $\Delta = [(1-i)(m-1)]^2$.
- b) $z = \frac{(1+i)(m+1) \pm (1-i)(m-1)}{2}$. Avec le signe $+$: $\frac{2m+2i}{2} = m+i$; avec le signe $-$: $\frac{2+2im}{2} = 1+im$. (Si $m=1$, racine double $1+i$.)
2. a) $R : z' - (1+i) = i(z-1-i)$, soit $z' = iz + 2$; $R(M_1) : i(m+i) + 2 = 1+im = z_2$ ✓. Comme $z_1 - (1+i) = m-1 \neq 0$, $M_1 \neq \Omega$: $\Omega M_1 = \Omega M_2$ et $(\vec{\Omega M_1}, \vec{\Omega M_2}) \equiv \frac{\pi}{2}$, le triangle $\Omega M_1 M_2$ est **rectangle isocèle en Ω** .
- b) $z_1 + z_2 = (1+i)(m+1) = p + (1+i)$: les segments $[M_1 M_2]$ et $[\Omega P]$ ont le même milieu, donc $\Omega M_1 P M_2$ est un parallélogramme ; ayant un angle droit en Ω et deux côtés consécutifs égaux, c'est un **carré**.
3. a) $m \neq -i$, donc $z_1 \neq 0$, et O, M_1, M_2 sont alignés $\iff \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R} \iff z_2 \overline{z_1} \in \mathbb{R}$. Or $z_2 = (1-y) + ix$ et $\overline{z_1} = x - i(1+y)$, d'où $\text{Im}(z_2 \overline{z_1}) = x^2 - (1-y)(1+y) = x^2 + y^2 - 1$. Donc : alignés $\iff x^2 + y^2 = 1$, c'est-à-dire $M(m)$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1, privé des points d'affixes 1 et $-i$.
- b) $z_1 = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$ et $z_2 = 1 + e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$ et $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$: les deux cosinus sont > 0 , ce sont des formes exponentielles. z_1 et z_2 ont le même argument $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$: O, M_1, M_2 sont alignés (sur une même demi-droite), conformément à a) car $|m| = 1$.

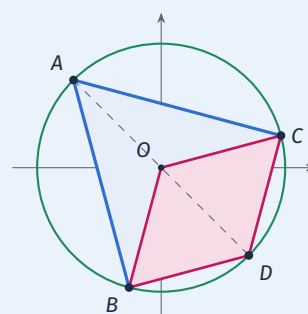
■ **Corrigé de l'exercice 16**

1. $4\sqrt{2}(1+i) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$. Avec $z = r e^{i\varphi}$: $r^3 = 8$, $3\varphi \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$, donc $r = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$: $S = \left\{ 2e^{i\frac{\pi}{12}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\}$.
2. a) $a = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, et $a e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = c$ ✓. Donc

$$c = (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

et, en identifiant avec $2 \cos \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12}$:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$



- b) $ja = 2e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{17\pi}{12}} = b$ et $j^2a = 2e^{i\frac{25\pi}{12}} = c$. La rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ envoie A sur B , B sur C et C sur A : $AB = BC = CA$, et ABC est équilatéral de centre O (d'ailleurs $a + b + c = a(1 + j + j^2) = 0$). Côté : $AB = |a| |j - 1| = 2\sqrt{3}$; aire : $\frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$.
3. a) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{a(j^2-1)}{a(j-1)} = j+1 = -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$: $C = r(B)$. Comme $1 - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$: $r : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + ae^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$, avec $2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\sin\frac{\pi}{12} + 2i\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.
- b) Le cercle circonscrit a pour centre O , donc $d = -a$. Or $b+c = a(j+j^2) = -a$: $d = b+c$, soit $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC}$; $OBDC$ est un parallélogramme avec $OB = OC = 2$: c'est un **losange** (et $BD = DC = 2$).

26

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

1. $r_A : z_1 = a + e^{i\alpha}(z-a)$ et $r_B : z' = b + e^{i\beta}(z_1-b)$, donc $f : z' = e^{i(\alpha+\beta)}z + \text{constante}$, avec $|e^{i(\alpha+\beta)}| = 1$ et $e^{i(\alpha+\beta)} \neq 1$: f est une rotation d'angle $\alpha+\beta$, dont le centre est l'unique point fixe Ω . $f(\omega) = \omega$ s'écrit $\omega - b = e^{i\beta}(a-b) + e^{i(\alpha+\beta)}(\omega-a)$; en ajoutant $b-a$:

$$\omega - a = (1 - e^{i\beta})(b-a) + e^{i(\alpha+\beta)}(\omega-a), \quad \text{d'où} \quad (1 - e^{i(\alpha+\beta)})(\omega-a) = (1 - e^{i\beta})(b-a).$$

2. Par l'angle moitié, $1 - e^{it} = -2i \sin \frac{t}{2} e^{i\frac{t}{2}}$, et $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$:

$$\omega - a = \frac{\sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\beta}{2}}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} (b-a) = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} (b-a).$$

De même, en partant de $\omega - b = e^{i\beta}(a-b) + e^{i(\alpha+\beta)}((\omega-b) + (b-a))$: $(1 - e^{i(\alpha+\beta)})(\omega-b) = e^{i\beta}(1 - e^{i\alpha})(a-b)$, d'où $\omega - b = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} e^{i\frac{\beta}{2}}(a-b)$. Ainsi $(\vec{AB}, \vec{A\Omega}) \equiv -\frac{\alpha}{2}$ et $(\vec{BA}, \vec{B\Omega}) \equiv \frac{\beta}{2} [\pi]$: on construit Ω avec les demi-angles.

3. $\sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$, donc $\omega - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$: $A\Omega = AB$ et $(\vec{AB}, \vec{A\Omega}) \equiv -\frac{\pi}{3}$, $AB\Omega$ est **équilatéral** (indirect). Exemple : $r_A : z_1 = jz$ et $r_B : z' = 2 + j(z_1 - 2) = j^2z + 2 - 2j$; le point fixe vérifie $\omega(1-j^2) = 2(1-j)$, soit $\omega = \frac{2}{1+j} = \frac{2}{-j^2} = -2j = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 18

1. En $z = -1$: $(-1)^N - 1 = -2$ (N impair), et $\prod_{k=0}^{N-1} (-1 - \omega^k) = (-1)^N \prod_{k=0}^{N-1} (1 + \omega^k) = -2 \prod_{k=1}^{2n} (1 + \omega^k)$ (le facteur $k=0$ vaut 2). D'où $\prod_{k=1}^{2n} (1 + \omega^k) = 1$.
2. Par l'angle moitié, $1 + \omega^k = 2 \cos \frac{k\pi}{N} e^{i\frac{k\pi}{N}}$ et $1 - \omega^k = -2i \sin \frac{k\pi}{N} e^{i\frac{k\pi}{N}}$, d'où les modules. Pour $1 \leq k \leq n$, $\frac{k\pi}{N} \in]0, \frac{\pi}{2}[$: cosinus et sinus sont > 0 ; et $|\cos \frac{(N-k)\pi}{N}| = |\cos(\pi - \frac{k\pi}{N})| = \cos \frac{k\pi}{N}$, de même pour le sinus. En passant aux modules dans 1. et en regroupant k et $N-k$:

$$1 = \prod_{k=1}^{2n} 2 \left| \cos \frac{k\pi}{N} \right| = \left(2^n \prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{N} \right)^2 \quad \text{et} \quad N = \prod_{k=1}^{2n} 2 \left| \sin \frac{k\pi}{N} \right| = \left(2^n \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{N} \right)^2.$$

Les produits étant positifs : $\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$ et $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

3. Par quotient : $\prod_{k=1}^n \tan \frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$; pour $n = 1$: $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ✓. Pour $n = 2$: $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$; avec $c = \cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5} = 2c^2 - 1$: $c(2c^2 - 1) = \frac{1}{4}$, soit $8c^3 - 4c - 1 = 0$, ou encore $(2c + 1)(4c^2 - 2c - 1) = 0$. Comme $c > 0$: $4c^2 - 2c - 1 = 0$ et $c = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (racine positive). On obtient aussi $\tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$.

■ Corrigé de l'exercice 19

- $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \omega^{kp} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$. Pour $0 \leq p \leq n$, n divise p si et seulement si $p \in \{0, n\}$: la somme vaut $n \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{n} \right] = \boxed{2n}$.
- $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \neq 0$, donc $\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{i(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2})}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.
Pour $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ ($1 \leq k \leq n-1$), la partie imaginaire vaut $\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$; celle d'indice $n-k$ en est l'opposée ($\cos(\pi-t) = -\cos t$, $\sin(\pi-t) = \sin t$), et elle est nulle si $2k = n$. Les parties imaginaires s'annulent deux à deux : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k} = \frac{n-1}{2}$.
- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k} (\omega^k - z) = n - z \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{-1})^k = \boxed{n}$, car $\omega^{-1} \neq 1$ et $(\omega^{-1})^n = 1$. Par l'inégalité triangulaire, avec $|\omega^{-k}| = 1$: $n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - z|$.
Interprétation : la somme des distances d'un point M aux sommets A_k (ω^k) du polygone régulier inscrit dans le cercle unité vaut au moins n ; pour $z = 0$, elle vaut n : le minimum est atteint au centre O .

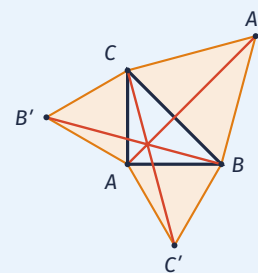
■ Corrigé de l'exercice 20

- $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$, donc $|z+1| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$. Alors $|z+1| = 1 \iff \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{2} \iff \frac{\theta}{2} \equiv \pm \frac{\pi}{3} [\pi] \iff \theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi] \iff z \in \{j, j^2\}$.
- Si $|z| = 1$ et $z^n + z + 1 = 0$, alors $|z+1| = |-z^n| = 1$, donc $z \in \{j, j^2\}$ par 1. Or $j^n + j + 1 = j^n - j^2$; avec $n = 3p + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$, on a $j^n = j^r$, et $j^r = j^2 \iff r = 2$. En conjuguant (coefficients réels), j^2 est solution si et seulement si j l'est. Conclusion : il existe des solutions de module 1 si et seulement si $\boxed{n = 3p + 2}$, et ce sont alors j et j^2 .
- Si $|z| = 1$ et $z^n = z + 1$, alors $|z+1| = 1$, donc $z \in \{j, j^2\}$, et $z^n = 1 + z = -z^2$. Pour $z = j$: $j^n \in \{1, j, j^2\}$ (arguments $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$), alors que $-j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$: impossible. De même pour $j^2 = \bar{j}$. Aucune solution de module 1.

■ Corrigé de l'exercice 21

- $\rho(z) = c + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - c)$, donc $\rho(A) = B'$ par définition de B' . Ensuite $a' - c = (a' - b) + (b - c) = (e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1)(c - b) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c)$, car $1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; d'où $\rho(A') = c + e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) = b$. La rotation ρ transforme $[AA']$ en $[B'B]$: $\boxed{AA' = BB'}$ et $b - b' = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a' - a)$, soit $(\vec{AA'}, \vec{B'B}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

2. Les relations sont invariantes par la permutation circulaire $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$: avec la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, on obtient de même $BB' = CC'$. Donc $AA' = BB' = CC'$.
3. $a' + b' + c' = (a + b + c) + e^{-i\frac{\pi}{3}}[(c - b) + (a - c) + (b - a)] = a + b + c$: les centres de gravité, d'affixes $\frac{a+b+c}{3}$ et $\frac{a'+b'+c'}{3}$, sont confondus.



$$a = 0, b = 2, c = 2i : \\ AA' = BB' = CC' = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

■ Corrigé de l'exercice 22

1. $2^{2p} \cos^{2p} x = (e^{ix} + e^{-ix})^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{i(2p-k)x} e^{-ikx} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)x}$. Le terme $k = p$ vaut $\binom{2p}{p}$; pour $0 \leq k \leq p-1$, on regroupe les termes k et $2p-k$, de même coefficient ($\binom{2p}{2p-k} = \binom{2p}{k}$) : $\binom{2p}{k} (e^{2i(p-k)x} + e^{-2i(p-k)x}) = 2\binom{2p}{k} \cos(2(p-k)x)$.
2. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ et $1 \leq q \leq p < m$: $\omega^q \neq 1$ (car $0 < \frac{2q\pi}{m} < 2\pi$) et $(\omega^q)^m = 1$, donc $\sum_{l=0}^{m-1} \cos \frac{2ql\pi}{m} = \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{m-1} (\omega^q)^l = 0$. En appliquant 1. à $x = \frac{l\pi}{m}$ et en sommant sur l (avec $q = p - k \in \{1, \dots, p\}$) :

$$2^{2p} \sum_{l=0}^{m-1} \cos^{2p} \frac{l\pi}{m} = m \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \sum_{l=0}^{m-1} \cos \frac{2(p-k)l\pi}{m} = m \binom{2p}{p}.$$

3. $p = 1$: $\sum_{l=0}^{m-1} \cos^2 \frac{l\pi}{m} = \frac{2m}{4} = \boxed{\frac{m}{2}}$ ($m \geq 2$). $p = 3, m = 6$: $\frac{6 \times 20}{64} = \boxed{\frac{15}{8}}$ (contrôle : $1 + \frac{27}{64} + \frac{1}{64} + 0 + \frac{1}{64} + \frac{27}{64} = \frac{15}{8}$ ✓). Pour $p = m = 2$: $\cos^4 0 + \cos^4 \frac{\pi}{2} = 1 \neq \frac{2 \times 6}{16} = \frac{3}{4}$; l'hypothèse $m > p$ est indispensable (pour $q = m, \omega^q = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 23

1. $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = \operatorname{Im} [e^{i(n+1)\theta} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})] = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta$. Comme $\sin \theta \neq 0$, la suite $v_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ vérifie $v_0 = 0, v_1 = 1$ et la même relation que (u_n) ; par récurrence (sur la propriété « $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$ »), $u_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ pour tout n .
2. $q = e^{-2i\theta} \neq 1$ car $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Avec $1 - e^{-2it} = 2i \sin t e^{-it}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-1-2k)\theta} = e^{i(n-1)\theta} \frac{1 - e^{-2in\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} = e^{i(n-1)\theta} \frac{2i \sin n\theta e^{-in\theta}}{2i \sin \theta e^{-i\theta}} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Par l'inégalité triangulaire, $|u_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

3. $\theta = \frac{\pi}{3}$: $2 \cos \theta = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$: $0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots$; la suite est périodique de période 6. Si $\theta = \frac{p\pi}{q}$: $u_{n+2q} = \frac{\sin(n\theta + 2p\pi)}{\sin \theta} = u_n$.
4. Pour $n \geq 2$, les termes $k = 0$ et $k = 1$ de 2. ont pour somme $e^{i(n-1)\theta} + e^{i(n-3)\theta} = 2 \cos \theta e^{i(n-2)\theta}$, de module $2|\cos \theta| < 2$; les $n-2$ autres sont de module 1. Donc $|u_n| \leq 2|\cos \theta| + n - 2 < n$.

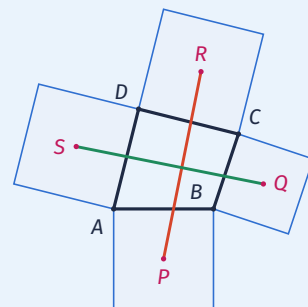
27 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, donc $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}$; et $|z+1|^2 - |z-1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) - (z-1)(\bar{z}-1) = 2(z+\bar{z}) = 4 \operatorname{Re} z$. Par récurrence : si $\operatorname{Re} z_n > 0$, alors $z_n \neq 0$ et $\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} z_n \left(1 + \frac{1}{|z_n|^2}\right) > 0$.
- $\operatorname{Re} z_n > 0$ donne $|z_n - 1| < |z_n + 1|$ (et $z_n + 1 \neq 0$), donc $|w_n| < 1$. Ensuite $z_{n+1} + 1 = \frac{z_n^2 + 2z_n + 1}{2z_n} = \frac{(z_n + 1)^2}{2z_n}$, d'où, par quotient, $w_{n+1} = w_n^2$.
- Par récurrence, $w_n = w_0^{2^n}$, donc $|w_n| = |w_0|^{2^n} \leq |w_0|^n \rightarrow 0$ (car $2^n \geq n$ et $0 \leq |w_0| < 1$). De $w_n(z_n + 1) = z_n - 1$, on tire $z_n = \frac{1+w_n}{1-w_n} \rightarrow 1$. Si $\operatorname{Re} z_0 < 0$, la suite $(-z_n)$ vérifie la même relation avec $\operatorname{Re}(-z_0) > 0$: $-z_n \rightarrow 1$, soit $z_n \rightarrow -1$.
- Si $z_n = i \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$ avec $\cos \beta \neq 0$ (sinon $z_n = 0$ et la suite s'arrête), alors $\frac{1}{z_n} = -i \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ et $z_{n+1} = \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta}{\sin \beta \cos \beta} = i \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$ ($\sin 2\beta \neq 0$) : par récurrence, $z_n = i \frac{\cos(2^n \alpha)}{\sin(2^n \alpha)}$.
 $\alpha = \frac{\pi}{7}$: les angles $2^n \frac{\pi}{7}$ valent $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7} \equiv \frac{\pi}{7} [\pi]$: la suite est périodique de période 3. $\alpha = \frac{\pi}{8}$: $z_0 = i(1 + \sqrt{2})$, $z_1 = i \frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = i$, $z_2 = 0$: z_3 n'est pas défini.

■ Corrigé de l'exercice 25

- $a - p = i(b - p) \iff p(i - 1) = ib - a \iff p = \frac{a - ib}{1 - i} = \frac{(a - ib)(1 + i)}{2} = \frac{a + b}{2} + \frac{i}{2}(a - b)$. De même :
 $q = \frac{b + c}{2} + \frac{i}{2}(b - c), \quad r = \frac{c + d}{2} + \frac{i}{2}(c - d), \quad s = \frac{d + a}{2} + \frac{i}{2}(d - a)$.
- Avec $k = \frac{a + c}{2}$: $p - k = \frac{b - c}{2} + \frac{i}{2}(a - b)$ et $q - k = \frac{b - a}{2} + \frac{i}{2}(b - c)$; or $i(p - k) = \frac{i}{2}(b - c) - \frac{1}{2}(a - b) = q - k$ ✓. Le même calcul avec (c, d, a) à la place de (a, b, c) ([CA] a aussi pour milieu I) donne $s - k = i(r - k)$. Interprétation : la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie P sur Q et R sur S.
- $s - q = (s - k) - (q - k) = i(r - k) - i(p - k) = i(r - p)$: $QS = PR$ et $(\vec{PR}, \vec{QS}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (si $P \neq R$) : les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires.
- Si ABCD est un parallélogramme, [AC] et [BD] ont le même milieu I. Le calcul de 2. s'applique à chacun des triplets consécutifs (A, B, C), (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B) (milieu I à chaque fois) : $q - k = i(p - k)$, $r - k = i(q - k)$, $s - k = i(r - k)$, $p - k = i(s - k)$. La rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$: PQRS est un **carre** de centre I (théorème de Thébault).



■ Corrigé de l'exercice 26

- $g, g^2, \dots, g^{n+1}$ sont dans G (récurrence), qui n'a que n éléments : $g^p = g^q$ avec $1 \leq p < q$. Comme $g \neq 0$, $g^{q-p} = 1$, d'où $|g|^{q-p} = 1$, $|g| = 1$, et $1 = g^{q-p} \in G$.
- $z \mapsto gz$ envoie G dans G et est injective ($g \neq 0$) ; G étant fini, elle est bijective. Donc $\prod_{z \in G} gz = \prod_{z \in G} z$, soit $g^n \prod_{z \in G} z = \prod_{z \in G} z$ avec $\prod_{z \in G} z \neq 0$: $g^n = 1$. Ainsi $G \subset \mathbb{U}_n$, et ces ensembles ont n éléments : $G = \mathbb{U}_n$.

3. Si $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) : $(e^{ik\theta})^{2q} = e^{2ikp\pi} = 1$, l'ensemble est inclus dans $\mathbb{U}_{2q}$, donc fini. S'il est fini, il est stable par produit ($e^{ik\theta} e^{ik'\theta} = e^{i(k+k')\theta}$) : c'est un $\mathbb{U}_N$, donc $e^{iN\theta} = 1$, $N\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.
4. L'ensemble G_F de ces a contient 1 ; il est fini ($az_0 \in F$, donc $a \in \frac{1}{z_0}F$) et stable par produit ($abF \subset aF \subset F$) : $G_F = \mathbb{U}_N$ (question 2), et la rotation $z \mapsto e^{i\theta}z$ conserve $F \iff e^{i\theta} \in \mathbb{U}_N \iff \theta \in \frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$. Exemple : si $a \in G_F$, $a = a \times 1 \in F$ est de module 1, donc $a \in \mathbb{U}_4$; $2a \in F$ est de module 2, donc $a \in \mathbb{U}_6$. Ainsi $a^2 = \frac{a^6}{a^4} = 1$: $G_F \subset \{1, -1\}$, et $-F = F$: $N = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. En remplaçant z par $\frac{z}{w}$: $\frac{z^n}{w^n} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z}{w} - \omega^k \right)$, puis on multiplie par w^n . Avec $\varphi_k = \theta + \frac{2k\pi}{n}$: $z^2 - 2z \cos \varphi_k + 1 = (z - e^{i\varphi_k})(z - e^{-i\varphi_k})$, où $e^{i\varphi_k} = e^{i\theta} \omega^k$ et $e^{-i\varphi_k} = e^{-i\theta} \omega^{-k}$. Quand k décrit $\{0, \dots, n-1\}$, $\omega^{-k} = \omega^{n-k}$ décrit aussi toutes les racines n -ièmes de l'unité, donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z^2 - 2z \cos \varphi_k + 1) = (z^n - e^{in\theta})(z^n - e^{-in\theta}) = z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1.$$

2. En $z = 1$, avec $2 - 2 \cos t = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$: $4 \sin^2 \frac{n\theta}{2} = \prod_{k=0}^{n-1} 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n} \right)$. Avec $\theta = 2x$: $\sin^2 nx = 4^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(x + \frac{k\pi}{n} \right)$, d'où le résultat en prenant les racines carrées.
3. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{n}[$, $\sin x > 0$ et $\frac{|\sin nx|}{\sin x} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left| \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) \right|$. Quand $x \rightarrow 0^+$: $\frac{\sin nx}{\sin x} = n \cdot \frac{\sin nx}{nx}$. $\frac{x}{\sin x} \rightarrow n$, et le membre de droite tend vers $2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ (continuité ; ces sinus sont > 0).

D'où $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, résultat du cours retrouvé.

■ Corrigé de l'exercice 28

1. $\sum_{k=0}^{N-1} R(\omega^k) = \sum_{p=0}^d r_p \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^p)^k$. Pour $0 \leq p \leq d \leq N$, la somme géométrique vaut N si $\omega^p = 1$, c'est-à-dire $p \in \{0, N\}$, et 0 sinon. D'où la moyenne : r_0 si $d < N$, $r_0 + r_N$ si $d = N$.
2. $R(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + a_{n-1}z + \dots + a_0z^n$ est un polynôme de degré $\leq n < N$ avec $r_0 = 1$. Donc $1 = \left| \frac{1}{N} \sum R(\omega^k) \right| \leq \frac{1}{N} \sum |R(\omega^k)| \leq \max_k |R(\omega^k)|$: il existe k tel que $|R(\omega^k)| \geq 1$. Or $|R(\omega^k)| = |P(\omega^{-k})|$, et $z = \omega^{-k}$ est de module 1.
3. Avec $Q(x) = \sum_{p=0}^n c_p x^p$ ($c_n = 1$) : $2^n z^n \left(\frac{z+z^{-1}}{2} \right)^p = 2^{n-p} z^{n-p} (z^2 + 1)^p$, polynôme dont les termes ont des degrés compris entre $n-p$ et $n+p$. Pour $p = n$, c'est $(z^2 + 1)^n = z^{2n} + \dots + 1$; pour $p < n$, les degrés sont dans $[1, 2n-1]$. Donc R est un polynôme de degré $2n$ avec $r_0 = r_{2n} = 1$.

Par 1. ($N = d = 2n$, $\omega = e^{i\frac{\pi}{n}}$) : $\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} R(\omega^k) = 2$, donc $|R(e^{i\theta})| \geq 2$ pour un $\theta = \frac{k\pi}{n}$; or $|R(e^{i\theta})| = 2^n |Q(\cos \theta)|$, donc $x = \cos \theta \in [-1, 1]$ vérifie $|Q(x)| \geq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Cas d'égalité : T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} (cours), donc $Q = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est unitaire, et pour $x = \cos \theta \in [-1, 1]$: $|Q(x)| = \frac{|\cos n\theta|}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, avec égalité en $x = 1$: la borne est optimale.

■ Corrigé de l'exercice 29

1. Si $k = l$, la somme vaut n . Sinon $\omega^{k-l} \neq 1$ ($0 < |k - l| < n$) et $(\omega^{k-l})^n = 1$: la somme géométrique est nulle. Alors

$$\sum_{p=0}^{n-1} c_p \omega^{pk} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} a_l \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{p(k-l)} = \frac{1}{n} a_k n = a_k.$$

2. $c_0 = \frac{1}{n} \sum a_k$ est l'abbaye de l'isobarycentre G . Pour p fixé, $c_p \omega^{p(k+1)} = e^{\frac{2ip\pi}{n}} c_p \omega^{pk}$: ces points forment un polygone régulier (éventuellement étoilé) de centre O . D'après 1., tout polygone est une « somme » de polygones réguliers.
3. $\sum_k |a_k|^2 = \sum_k a_k \overline{a_k} = \sum_{p,q} c_p \overline{c_q} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(p-q)k} = n \sum_p |c_p|^2$, d'après 1. (avec $\overline{\omega^{qk}} = \omega^{-qk}$).
4. $\omega = j$ et 1. donne $a_k = c_0 + c_1 j^k + c_2 j^{2k}$. Si $c_2 = 0$ (et donc $c_1 \neq 0$, les sommets étant distincts) : $a_{k+1} - c_0 = j(a_k - c_0)$, la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ envoie $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_0$: le triangle est équilatéral direct. Réciproquement, s'il est équilatéral direct, $a_0 + a_1 j + a_2 j^2 = 0$ (cours), or $c_2 = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 j^{-2} + a_2 j^{-4}) = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 j + a_2 j^2) = 0$.
5. $\omega = i$: $c_2 = \frac{1}{4}(a_0 - a_1 + a_2 - a_3)$, nul si et seulement si $a_0 + a_2 = a_1 + a_3$, c'est-à-dire si $A_0 A_1 A_2 A_3$ est un parallélogramme. Si $c_2 = c_3 = 0$ et $c_1 \neq 0$: $a_k = c_0 + c_1 i^k$, la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_0$: carré direct de centre G . Réciproquement, pour un carré direct de centre $\Omega(g)$, $a_k = g + i^k(a_0 - g)$, et le calcul des c_p donne $c_0 = g$, $c_1 = a_0 - g \neq 0$, $c_2 = c_3 = 0$ (d'après 1.).

■ Corrigé de l'exercice 30

1. Pour $|x| = 1$, $\overline{x} = \frac{1}{x}$: $\overline{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ca+ab}{abc}$. En passant aux modules ($|abc| = 1$) : $|a+b+c| = \left| \overline{a+b+c} \right| = |ab+bc+ca|$.
2. En développant et avec $b+c+d = -a$: $(a+b)(a+c)(a+d) = a^3 + a^2(b+c+d) + a(bc+bd+cd) + bcd = a(bc+bd+cd) + bcd$. Puis

$$a(bc+bd+cd) + bcd = bcd \left[a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) + 1 \right] = bcd \left[a \overline{(b+c+d)} + 1 \right] = bcd (1 - a\overline{a}) = 0,$$

car $\overline{b+c+d} = -\overline{a}$ et $a\overline{a} = |a|^2 = 1$. Donc $a = -b$, $a = -c$ ou $a = -d$; si par exemple $a = -b$, alors $c+d = 0$. Les quatre nombres sont $a, -a, c, -c$: les segments joignant les points opposés sont deux diamètres du cercle unité (même milieu O , même longueur 2), donc les quatre points forment un **rectangle**. Pour p impair : $a^p + (-a)^p + c^p + (-c)^p = 0$.

3. Non : $1 + j + j^2 = 0$ et $i(1 + j + j^2) = 0$, donc ces six nombres de module 1 ont une somme nulle ; pourtant $-1 = e^{i\pi}$ n'est pas parmi eux (arguments $0, \pm \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$) : 1 n'a pas d'opposé.

■ Corrigé de l'exercice 31

1. a) $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1 - i)^7 = (\sqrt{2})^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $(\sqrt{3} + i)^4 = 16 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Ainsi le quotient vaut $\frac{8\sqrt{2}}{16} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

b) $-\sin \alpha - i \cos \alpha = -\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = e^{i\pi} e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = e^{i(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} = \boxed{e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}}$ (module 1, argument $-\alpha - \frac{\pi}{2}$).

c) Le numérateur vaut $e^{i\alpha}$ et, comme en b), $\sin \alpha + i \cos \alpha = e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \neq 0$. Donc $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\sin \alpha + i \cos \alpha} = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha)} = \boxed{e^{i(2\alpha - \frac{\pi}{2})}}$ (module 1, argument $2\alpha - \frac{\pi}{2}$).

d) $\overline{e^{i\frac{3\pi}{14}}} = e^{-i\frac{3\pi}{14}}$, donc le nombre vaut $-3e^{i(\frac{2\pi}{14} - \frac{3\pi}{14})} = -3e^{-i\frac{\pi}{14}} = 3e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{14}} = \boxed{3e^{i\frac{13\pi}{14}}}$ (un module est positif : on absorbe le signe dans $e^{i\pi} = -1$).

e) $1 + \cos \alpha - i \sin \alpha = 1 + e^{-i\alpha} = e^{-i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}}$. Or $\frac{\alpha}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, donc $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ et le nombre vaut $(-2 \cos \frac{\alpha}{2}) e^{i\pi} e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \boxed{(-2 \cos \frac{\alpha}{2}) e^{i(\pi - \frac{\alpha}{2})}}$, de module $-2 \cos \frac{\alpha}{2} > 0$ et d'argument $\pi - \frac{\alpha}{2}$.

2. $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$, donc $A = (\sqrt{2})^{12} e^{i7\pi} = 64 e^{i\pi} = \boxed{-64}$.

$B = \frac{e^{i(\frac{3\pi}{15} + \frac{2\pi}{15})}}{e^{-i\frac{4\pi}{12}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

3. Par l'angle moitié : $1 + \cos \theta + i \sin \theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et, de même, $1 + \cos \theta - i \sin \theta = 1 + e^{-i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}}$. Comme $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$ et le quotient vaut $e^{i\theta}$. Par Moivre, sa puissance n -ième vaut $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 32

On note $a = e^{ix}$ et $b = e^{-ix}$, de sorte que $ab = 1$, $a^k + b^k = 2 \cos kx$ et $a^k - b^k = 2i \sin kx$.

1. a) $(2i)^5 = 32i$ et, avec la formule rappelée (où l'on remplace b par $-b$) :

$$\sin^5 x = \frac{(a - b)^5}{32i} = \frac{(a^5 - b^5) - 5(a^3 - b^3) + 10(a - b)}{32i} = \boxed{\frac{\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x}{16}}.$$

b) $\cos x \sin^4 x = \frac{(a + b)(a - b)^4}{2(2i)^4} = \frac{(a + b)(a - b)^4}{32}$, avec $(a - b)^4 = (a^4 + b^4) - 4(a^2 + b^2) + 6$, puis $(a + b)(a^4 + b^4) = (a^5 + b^5) + (a^3 + b^3)$ et $(a + b)(a^2 + b^2) = (a^3 + b^3) + (a + b)$. Donc

$$(a + b)(a - b)^4 = (a^5 + b^5) - 3(a^3 + b^3) + 2(a + b) \quad \text{et} \quad \cos x \sin^4 x = \boxed{\frac{\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x}{16}}.$$

c) $(a - b)(a^2 - b^2) = a^3 + b^3 - a - b$, puis $(a^3 + b^3 - a - b)(a^3 - b^3) = (a^6 - b^6) - (a^4 - b^4) - (a^2 - b^2)$. Comme $(2i)^3 = -8i$:

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{2i(\sin 6x - \sin 4x - \sin 2x)}{-8i} = \boxed{\frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x}{4}}.$$

2. Une primitive de $\sin kx$ est $-\frac{1}{k} \cos kx$, donc une primitive de $x \mapsto \sin^5 x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{1}{16} \left(-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5 \cos 3x}{3} - 10 \cos x \right) = \boxed{-\frac{\cos 5x}{80} + \frac{5 \cos 3x}{48} - \frac{5 \cos x}{8}}$.
3. D'une part, Moivre : $(c + is)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$. D'autre part, $(c + is)^2 = c^2 - s^2 + 2ics$, donc $(c + is)^4 = (c^2 - s^2)^2 - 4c^2 s^2 + 4ics(c^2 - s^2)$. En identifiant : $\boxed{\cos 4x = (c^2 - s^2)^2 - 4c^2 s^2}$ et $\boxed{\sin 4x = 4cs(c^2 - s^2)}$. Avec $s^2 = 1 - c^2$: $\cos 4x = (2c^2 - 1)^2 - 4c^2(1 - c^2) = \boxed{8c^4 - 8c^2 + 1}$.
4. Pour $x = \frac{\pi}{16}$: $\cos 4x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $X = c^2$ vérifie $8X^2 - 8X + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$: $\Delta' = 16 - 8 + 4\sqrt{2} = 4(2 + \sqrt{2})$, $X = \frac{2 \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}$. Comme $0 < \frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{4}$, on a $c^2 > \frac{1}{2}$, ce qui exclut le signe $-$; avec $c > 0$ et $s > 0$:

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}} \quad \text{et} \quad \sin^2 \frac{\pi}{16} = 1 - c^2 = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}, \quad \boxed{\sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $q = e^{ix} \neq 1$ car $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Somme géométrique, puis angle moitié en haut et en bas :

$$\sum_{k=0}^n e^{i(a+kx)} = e^{ia} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = e^{ia} \frac{2i \sin \frac{(n+1)x}{2} e^{i \frac{(n+1)x}{2}}}{2i \sin \frac{x}{2} e^{i \frac{x}{2}}} = \boxed{\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{i(a + \frac{nx}{2})}}.$$

Le facteur $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ est réel ; parties réelle et imaginaire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \cos(a + kx) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos(a + \frac{nx}{2})}{\sin \frac{x}{2}}} \quad \boxed{\sum_{k=0}^n \sin(a + kx) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin(a + \frac{nx}{2})}{\sin \frac{x}{2}}}.$$

2. $x = 0$ n'est pas solution (le membre de gauche vaut 3). Pour $x \in]0, 2\pi[$, la question 1 ($a = 2x$, $n = 2$) donne $\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \frac{\sin \frac{3x}{2} \cos 3x}{\sin \frac{x}{2}}$, nul si et seulement si $\sin \frac{3x}{2} = 0$, soit $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$, ou $\cos 3x = 0$, soit $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $0 \leq k \leq 5$. $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ (contrôle : $x = \frac{2\pi}{3}$ donne $-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0$ ✓).
3. $\cos(k(x + \pi)) = \cos kx \cos k\pi - \sin kx \sin k\pi = (-1)^k \cos kx$. Avec $y = x + \pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $a = 0$ et $2m$ à la place de n : $\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cos kx = \sum_{k=0}^{2m} \cos ky = \frac{\sin \frac{(2m+1)y}{2} \cos my}{\sin \frac{y}{2}}$. Or $\sin \frac{y}{2} = \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{x}{2}$, $\cos my = \cos(mx + m\pi) = (-1)^m \cos mx$ et $\sin \frac{(2m+1)y}{2} = \sin \left(\frac{(2m+1)x}{2} + m\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^m \cos \frac{(2m+1)x}{2}$. Comme $(-1)^{2m} = 1$, on obtient la formule annoncée.
- Pour $x = \frac{\pi}{5}$ et $m = 2$: $\cos \frac{5x}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, donc $1 - \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0$. Avec $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$: $1 - 2 \cos \frac{\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} = 0$, soit $\boxed{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. Avec $a = e^{ix}$, $b = e^{-ix}$ ($ab = 1$) : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a+b)$ et $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3(a-b)$. Donc $\cos^3 x = \frac{(a+b)^3}{2^3} = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$ et $\sin^3 x = \frac{(a-b)^3}{(2i)^3} = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$ (car $(a-b)^3 = 2i \sin 3x - 6i \sin x$ et $(2i)^3 = -8i$).
2. D'après 1., $4(\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x) = (\cos 3x + 3 \cos x) \sin 3x + (3 \sin x - \sin 3x) \cos 3x$. Les termes en $\sin 3x \cos 3x$ se compensent : il reste $3(\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x) = 3 \sin 4x$, d'où $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4} \sin 4x$.
3. De même, $4(\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x + 3(\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x)$, c'est-à-dire $\cos 6x + 3 \cos 2x$. Or, d'après 1. appliqué à $2x$, on a $\cos 6x + 3 \cos 2x = 4 \cos^3 2x$. Donc $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$.
4. L'équation équivaut à $\sin 4x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, soit $4x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $4x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. L'équation équivaut à $\cos^3 2x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, soit $\cos 2x = \frac{1}{2}$ (la fonction $u \mapsto u^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective). Ainsi $2x \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$, $x \equiv \pm \frac{\pi}{6} [\pi]$; dans $[0, \pi]$: $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. $z(\theta) - 1 = -(e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + 1) = -(e^{i\theta} - 1)^2$. Par l'angle moitié, $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$, donc $(e^{i\theta} - 1)^2 = (2i)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\theta}$ et $z(\theta) - 1 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\theta}$.
2. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $4 \sin^2 \frac{\theta}{2} > 0$: c'est une forme exponentielle de $z(\theta) - 1$. Donc $AM(\theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2(1 - \cos \theta)$ et $(\vec{u}, AM(\theta)) \equiv \theta [2\pi]$. Enfin $z(-\theta) = 2e^{-i\theta} - e^{-2i\theta} = \overline{z(\theta)}$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe des réels.
3. D'après 1., $AM(\theta)$ et $AM(\theta + \pi)$ ont pour affixes $4 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\theta}$ et $4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) e^{i(\theta+\pi)} = -4 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i\theta}$: ce sont des multiples réels, l'un ≥ 0 et l'autre ≤ 0 , du vecteur d'affixe $e^{i\theta}$. Donc $A \in [M(\theta)M(\theta+\pi)]$ et $M(\theta)M(\theta+\pi) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 4$.
4. $h = \frac{1+z(\theta)}{2}$, donc $h - c = \frac{1+2e^{i\theta}-e^{2i\theta}}{2} - e^{i\theta} = \frac{1-e^{2i\theta}}{2}$, et $\frac{h-c}{c} = \frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2} = -i \sin \theta$: imaginaire pur. D'après 1., $\frac{z(\theta)-1}{c} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, réel non nul.

La tangente T en C est la perpendiculaire en C à (OC) : c'est l'ensemble des points $P(p)$ tels que $\frac{p-c}{c-\theta}$ soit imaginaire pur ; donc $H \in T$. De plus $(AM(\theta)) \parallel (OC)$, donc $(AM(\theta)) \perp T$. La droite T , perpendiculaire à $[AM(\theta)]$ en son milieu, en est la **médiatrice** : $M(\theta)$ est le symétrique de A par rapport à T .

■ Corrigé de l'exercice 36

1. En regroupant j et $-j$: $D_k(x) = 1 + \sum_{j=1}^k (e^{ijx} + e^{-ijx}) = 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos jx$. Par ailleurs, $e^{ix} \neq 1$ et

$$D_k(x) = e^{-ikx} \sum_{m=0}^{2k} e^{imx} = e^{-ikx} \frac{1 - e^{i(2k+1)x}}{1 - e^{ix}} = e^{-ikx} \frac{-2i \sin \frac{(2k+1)x}{2} e^{i \frac{(2k+1)x}{2}}}{-2i \sin \frac{x}{2} e^{i \frac{x}{2}}} = \frac{\sin \frac{(2k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

car l'exposant total vaut $-kx + \frac{(2k+1)x}{2} - \frac{x}{2} = 0$.

2. Euler : $2 \sin p \sin q = \frac{2(e^{ip} - e^{-ip})(e^{iq} - e^{-iq})}{(2i)^2} = -\frac{2 \cos(p+q) - 2 \cos(p-q)}{2} = \cos(p-q) - \cos(p+q)$. Avec $p = \frac{(2k+1)x}{2}$, $q = \frac{x}{2}$: $p - q = kx$ et $p + q = (k+1)x$, d'où l'égalité. En sommant (télescopage) : $2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos kx - \cos(k+1)x) = 1 - \cos nx = 2 \sin^2 \frac{nx}{2}$ et, comme $\sin \frac{x}{2} \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

3. Par 1. puis 2. : $F_n(x) = \frac{1}{n \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n \sin^2 \frac{x}{2}}$. D'autre part, avec la première forme de D_k , le terme $\cos jx$ ($1 \leq j \leq n-1$) apparaît dans D_k pour $k = j, \dots, n-1$, soit $n-j$ fois :

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = n + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos jx, \text{ donc } F_n(x) = 1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos jx.$$

4. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $F_n(x) \geq 0$ (question 3), c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos jx \geq -\frac{n}{2}$. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la somme vaut $\frac{n(n-1)}{2} > -\frac{n}{2}$. L'égalité a lieu si et seulement si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\sin \frac{nx}{2} = 0$.

Pour $n = 4$: $3 \cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x \geq -2$, avec égalité si et seulement si $\sin 2x = 0$ et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, k non multiple de 4, c'est-à-dire $x \equiv \frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2} [2\pi]$. (Contrôle : $x = \pi$ donne $-3 + 2 - 1 = -2$ ✓.)

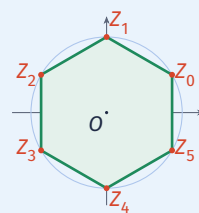
29 Corrigés : racines n -ièmes

■ Corrigé de l'exercice 37

1. $-64 = 64 e^{i\pi}$; avec $z = r e^{i\theta}$: $r^6 = 64$ et $6\theta \equiv \pi [2\pi]$, soit $r = 2$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right]$. Les racines sixièmes sont les $z_k = 2 e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}$, $0 \leq k \leq 5$: $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$, $\sqrt{3} - i$.

Comme $z_{k+1} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_k$ (et $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_5$), la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie chaque sommet sur le suivant : l'hexagone $Z_0 Z_1 \dots Z_5$ (Z_k d'affixe z_k) est **régulier**, de centre O , inscrit dans le cercle de rayon

2. Son côté vaut $|z_1 - z_0| = 2 |e^{i\frac{\pi}{3}} - 1| = 2 \times 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2$; il est formé de six triangles équilatéraux de côté 2, d'où l'aire $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 6\sqrt{3}$.



2. a) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$, donc $(3 + 2i)^3 = (5 + 12i)(3 + 2i) = 15 + 10i + 36i - 24 = \boxed{-9 + 46i}$.
Si $z_0^3 = a$, alors $(z_0 j)^3 = (z_0 j^2)^3 = z_0^3 = a$ (car $j^3 = 1$), et $z_0, z_0 j, z_0 j^2$ sont distincts : ce sont les trois racines cubiques de a . Avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, les racines cubiques de $-9 + 46i$ sont $\boxed{3 + 2i}$,
 $(3 + 2i)j = \boxed{-\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} + i\frac{3\sqrt{3} - 2}{2}}$ et $(3 + 2i)j^2 = \boxed{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2} - i\frac{3\sqrt{3} + 2}{2}}$.
- b) $z^3 = -9 - 46i \iff \bar{z}^3 = -9 + 46i$: les racines cubiques de $-9 - 46i$ sont les **conjuguées** des précédentes : $3 - 2i, -\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3} - 2}{2}, \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + i\frac{3\sqrt{3} + 2}{2}$.
 $z^3 = 9 - 46i \iff (-z)^3 = -9 + 46i$: ce sont les **opposées** des racines du a) : $-3 - 2i, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3} - 2}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} + i\frac{3\sqrt{3} + 2}{2}$.
3. a) On pose $Z = z - 1 + i$: $Z^6 = -64$, donc Z est l'une des racines du 1, et $z = Z + 1 - i$ (hexagone du 1 translaté par le vecteur d'affixe $1 - i$) : $S = \{1 + \sqrt{3}; 1 + i; 1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3} - 2i; 1 - 3i; 1 + \sqrt{3} - 2i\}$.
- b) Si $z^3 = \bar{z}$, alors $|z|^3 = |z|$, donc $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. $z = 0$ convient. Si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et l'équation devient $z^3 = \frac{1}{z}$, soit $z^4 = 1$: $z \in \{1, i, -1, -i\}$; réciproquement, ces nombres sont de module 1 et vérifient $z^3 = \frac{z^4}{z} = \frac{1}{z} = \bar{z}$. $\boxed{S = \{0; 1; i; -1; -i\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 38

1. $j^3 = e^{2i\pi} = 1$; comme $j \neq 1$, $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$. Ensuite $\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2$ et $j \times j^2 = 1$, donc
 $j^2 = \frac{1}{j}$. $\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
2. $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $j^{2026} = (j^3)^{675} j = \boxed{j}$. Comme $1 + j = -j^2$: $(1 + j)^{2026} = j^{4052} = j^{3 \times 1350 + 2} = \boxed{j^2}$.
La somme compte $2027 = 3 \times 675 + 2$ termes ; chaque bloc $j^{3m} + j^{3m+1} + j^{3m+2} = j^{3m}(1 + j + j^2)$ est nul, il reste $j^{2025} + j^{2026} = 1 + j = \boxed{-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
3. $(1 - j)(1 - j^2) = 1 - (j + j^2) + j^3 = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$ et $(1 - j)^2 = 1 - 2j + j^2 = (1 + j + j^2) - 3j = \boxed{-3j}$.
Comme $1 - j^2 = \overline{1 - j}$, la première égalité donne $|1 - j|^2 = 3$, $\boxed{|1 - j| = \sqrt{3}}$. Puis $1 - j = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$, et $(1 - j)^6 = (-3j)^3 = -27j^3 = \boxed{-27}$ (contrôle : $(\sqrt{3})^6 e^{-i\pi} = -27$ ✓).
4. On développe, avec $j^3 = 1, j^4 = j$ et $j + j^2 = -1$: le produit vaut $a^2 + b^2 + c^2 + (ab + ac + bc)(j + j^2) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$. Pour a, b, c réels, $a + bj^2 + cj = \overline{a + bj + cj^2}$ (car $\bar{j} = j^2$ et $\overline{j^2} = j$), donc le produit vaut $|a + bj + cj^2|^2$, et (en développant le membre de droite) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$. Ainsi $a + bj + cj^2 = 0 \iff (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \iff a = b = c$ (somme de carrés de réels).

■ Corrigé de l'exercice 39

- $\omega^p = e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1 \iff n$ divise p . Si n divise p , chaque terme vaut 1 et la somme vaut $\boxed{n}$. Sinon, c'est une somme géométrique de raison $\omega^p \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1-(\omega^p)^n}{1-\omega^p} = \boxed{0}$.
- D'après 1 ($n \geq 3$ ne divise pas 1) : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$; parties réelle et imaginaire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$
 Si M a pour affixe z , $\sum_k \vec{MA}_k$ a pour affixe $\sum_k (\omega^k - z) = -nz$, celle de $n\vec{MO}$ ✓.
- $MA_k^2 = r^2 + 1 - 2r \cos\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)$: en effet, $MA_k^2 = (z - \omega^k)(\bar{z} - \bar{\omega}^k) = |z|^2 + 1 - 2 \operatorname{Re}(z \bar{\omega}^k)$ et $z \bar{\omega}^k = r e^{i(\varphi - \frac{2k\pi}{n})}$.
 Modulo 2π , les réels $\varphi - \frac{2k\pi}{n}$ ($0 \leq k \leq n-1$) sont les $\varphi + \frac{2k'\pi}{n}$ ($k' = 0$ pour $k = 0$, $k' = n - k$ sinon) : leur somme de cosinus est nulle (question 2). D'où $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = n(r^2 + 1) = \boxed{n(OM^2 + 1)}$.
- En notant $c_k = \cos\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)$: $MA_k^4 = (r^2 + 1)^2 - 4r(r^2 + 1)c_k + 4r^2 c_k^2$. Avec $\sum c_k = 0$ et $\sum c_k^2 = \frac{n}{2}$ (même réindexation) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^4 = n(r^2 + 1)^2 + 4r^2 \times \frac{n}{2} = \boxed{n(OM^2 + 1)^2 + 2n OM^2}.$$

Si M est sur le cercle circonscrit ($OM = 1$) : la somme vaut $4n + 2n = \boxed{6n}$, quelle que soit la position de M sur le cercle.

Pour $n = 4$ et $M = A_0(1)$: $MA_0 = 0$, $MA_1 = |1 - i| = \sqrt{2}$, $MA_2 = 2$, $MA_3 = \sqrt{2}$; $0 + 4 + 16 + 4 = 24 = 6 \times 4$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 40

- Pour $z = -i$: $1 + iz = 2$ et $1 - iz = 0$, donc $2^n = 0$: impossible, $-i$ n'est pas solution. Pour $z \neq -i$, $1 - iz \neq 0$ et, en divisant par $(1 - iz)^n$: $(E) \iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = e^{2ia} \iff w^n = e^{2ia}$.
- Pour $z \neq -i$: $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\varphi} \iff 1 + iz = e^{i\varphi}(1 - iz) \iff iz(1 + e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} - 1$.
 Si $e^{i\varphi} = -1$, cela s'écrit $0 = -2$: **pas de solution**. Sinon $\cos \frac{\varphi}{2} \neq 0$ et, par l'angle moitié, $z = \frac{e^{i\varphi} - 1}{i(1 + e^{i\varphi})} = \frac{2i \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}}{2i \cos \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}} = \boxed{\tan \frac{\varphi}{2}}$, réel donc différent de $-i$: c'est l'unique solution.
- Les solutions de $w^n = e^{2ia}$ sont les n complexes distincts $w_k = e^{i\varphi_k}$, avec $\varphi_k = \frac{2a+2k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$. Or $e^{i\varphi_k} = -1 \iff \varphi_k \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \iff \frac{a+k\pi}{n} \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, ce qui est exclu. D'après 1 et 2, chaque w_k fournit exactement une solution, $z_k = \tan \frac{\varphi_k}{2} = \tan \frac{a+k\pi}{n}$, et des w_k distincts donnent des z_k distincts (z détermine w). Donc (E) a exactement n solutions, **réelles** :

$$: \boxed{z_k = \tan \frac{a+k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1}.$$
- $n = 3$ et $e^{2ia} = i$ pour $a = \frac{\pi}{4}$. L'hypothèse est vérifiée : $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ équivaudrait à $4k = 5 + 12m$, impossible (parité). Les solutions sont $\tan \frac{\pi}{12}$, $\tan \frac{5\pi}{12}$, $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$, avec $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 - \sqrt{3}$

et $\tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. $S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}; -1\}$. Contrôle : $(1-i)^3 = -2 - 2i$ et $i(1+i)^3 = i(-2+2i) = -2 - 2i$ ✓.

5. Ici $a = 0$, $n = 4$, et l'hypothèse tombe en défaut pour $k = 2$ ($\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$). Parmi les solutions $1, i, -1, -i$ de $w^4 = 1$, $w = -1$ ne donne rien, et $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ donnent $z = 0, 1, -1$: $S = \{0; 1; -1\}$, **trois** solutions seulement. En effet, $(1+X)^4 - (1-X)^4 = 8X + 8X^3$, d'où, pour $X = iz$: $(1+iz)^4 - (1-iz)^4 = 8iz(1-z^2)$; les termes en z^4 se simplifient, l'équation est de degré 3.

■ Corrigé de l'exercice 41

1. On applique $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ avec $a = z$ et $b = \omega^k$: le produit vaut $z^n - (\omega^k)^n = z^n - (\omega^n)^k = \boxed{z^n - 1}$.
2. Comme $z^n \neq 1$, on a $z \neq \omega^k$ et, d'après 1, $\frac{1}{z-\omega^k} = \frac{1}{z^n-1} \sum_{m=0}^{n-1} z^{n-1-m} \omega^{km}$. On somme sur k et on échange les sommes ; comme $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$ vaut n si $m = 0$ et 0 si $1 \leq m \leq n-1$ (somme géométrique de raison $\omega^m \neq 1$), seul le terme $m = 0$ subsiste :

$$S(z) = \frac{1}{z^n - 1} \sum_{m=0}^{n-1} z^{n-1-m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} \right) = \frac{z^{n-1} \times n}{z^n - 1} = \boxed{\frac{n z^{n-1}}{z^n - 1}}.$$

Pour $n = 3$, $z = 2$: $(2-j)(2-j^2) = 4 - 2(j+j^2) + j^3 = 7$ et $(2-j^2) + (2-j) = 5$, donc $\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2-j} + \frac{1}{2-j^2} = 1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7} = \frac{3 \times 2^2}{2^3-1}$ ✓.

3. Pour $z = x$ réel : $\frac{1}{x-\omega^k} = \frac{\overline{x-\omega^k}}{|x-\omega^k|^2}$, avec $|x-\omega^k|^2 = (x-c_k)^2 + \sin^2 \frac{2k\pi}{n} = x^2 - 2c_k x + 1$: sa partie réelle est $\frac{x-c_k}{x^2-2c_k x+1}$. Comme $S(x) = \frac{n x^{n-1}}{x^n-1}$ est réel, il est égal à la somme de ces parties réelles, d'où l'égalité.

Pour $n = 4$, $x = 2$ (cosinus 1, 0, -1, 0) : $\frac{1}{1} + \frac{2}{5} + \frac{3}{9} + \frac{2}{5} = \frac{32}{15} = \frac{4 \times 2^3}{2^4-1}$ ✓.

4. $A_k \vec{M}$ a pour affixe $z - \omega^k$, et $\frac{1}{z-\omega^k} = \frac{z-\omega^k}{|z-\omega^k|^2}$ est l'affixe de $\frac{1}{A_k M^2} A_k \vec{M}$; en sommant, $\vec{V}(M)$ a pour affixe $\sum_k \frac{1}{z-\omega^k} = \boxed{S(z)}$. Ainsi $\vec{V}(M) = \vec{0} \iff S(z) = 0 \iff z^{n-1} = 0 \iff z = 0$: $\boxed{\vec{V}(M) = \vec{0} \iff M = O}$ (O n'est pas un sommet). (En physique, $\vec{V}$ est proportionnel au champ électrique créé en M par n fils chargés identiques, perpendiculaires au plan en $A_0, \dots, A_{n-1}$: le centre est la seule position d'équilibre.)

■ Corrigé de l'exercice 42

1. Le module d'un produit est le produit des modules : $|z^n - 1| = \prod_{k=0}^{n-1} |z - \omega^k| = \boxed{MA_0 \times \dots \times MA_{n-1}}$.

2. $|e^{in\theta} - 1| = \left| e^{i\frac{n\theta}{2}} \left(e^{i\frac{n\theta}{2}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}} \right) \right| = \left| 2i \sin \frac{n\theta}{2} \right| = \boxed{2 \left| \sin \frac{n\theta}{2} \right|}$.

La plus grande valeur est $\boxed{2}$, atteinte si et seulement si $\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right| = 1$, soit $\frac{n\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, $\theta \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right]$: ce sont les n points d'affixes $e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$, milieux des arcs $A_k A_{k+1}$ de C .

3. Avec $z = R e^{i\theta}$: $|z^n - 1|^2 = (R^n e^{in\theta} - 1)(R^n e^{-in\theta} - 1) = R^{2n} - 2R^n \cos n\theta + 1$. Comme $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$: $(R^n - 1)^2 \leq |z^n - 1|^2 \leq (R^n + 1)^2$, donc $\boxed{R^n - 1 \leq MA_0 \times \dots \times MA_{n-1} \leq R^n + 1}$ (tout est positif car $R > 1$). Égalité à gauche $\iff \cos n\theta = 1 \iff \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n} \right]$: M est sur une demi-droite $[OA_k]$.

Égalité à droite $\iff \cos n\theta = -1 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right] : M$ est sur une demi-droite $[ON_k)$, où $N_k \left(e^{i \frac{(2k+1)\pi}{n}} \right)$.

4. $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}} : MA_0 = 1, MA_1 = \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}, MA_2 = \left| \frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{7}, MA_3 = 3, MA_4 = MA_2 = \sqrt{7}, MA_5 = MA_1 = \sqrt{3}$ (symétrie par rapport à l'axe réel). Produit : $1 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} = 63 = |2^6 - 1|$
 ✓ (cas d'égalité à gauche du 3 : $M \in [OA_0)$).

30

Corrigés : équations complexes

■ Corrigé de l'exercice 43

- Avec $\delta = x + iy$: $x^2 - y^2$ et $2xy$ sont les parties réelle et imaginaire du nombre, $x^2 + y^2$ son module.
 - $x^2 - y^2 = 3, x^2 + y^2 = 5, 2xy = -4 < 0 : x^2 = 4, y^2 = 1, x$ et y de signes contraires : $\boxed{\pm(2 - i)}$.
 - $|-21 + 20i| = \sqrt{441 + 400} = 29 : x^2 = 4, y^2 = 25, xy > 0 : \boxed{\pm(2 + 5i)}$.
 - $|-7 - 24i| = 25 : x^2 = 9, y^2 = 16, xy < 0 : \boxed{\pm(3 - 4i)}$.
 - $x^2 - y^2 = 0, x^2 + y^2 = 4, xy > 0 : x^2 = y^2 = 2 : \boxed{\pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}$. Contrôle : $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ a pour racines carrées $\pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ ✓.
- $\Delta = (3 - i)^2 - 4(8 + i) = 8 - 6i - 32 - 4i = -24 - 10i ; x^2 - y^2 = -24, x^2 + y^2 = 26, xy < 0 : \delta = 1 - 5i$.
 Donc $z = \frac{3 - i \pm (1 - 5i)}{2} : \boxed{S = \{2 - 3i ; 1 + 2i\}}$ (contrôle : $(2 - 3i)(1 + 2i) = 8 + i$ ✓).
 - $\Delta = (4 + 2i)^2 - 16(1 + i) = 12 + 16i - 16 - 16i = -4 = (2i)^2$. Donc $z = \frac{4 + 2i \pm 2i}{2(1 + i)} : \frac{4 + 4i}{2 + 2i} = 2$ et $\frac{4}{2 + 2i} = 1 - i$
 : $\boxed{S = \{2 ; 1 - i\}}$.
 - $\Delta' = (2 + i)^2 - 6 = -3 + 4i ; x^2 - y^2 = -3, x^2 + y^2 = 5, xy > 0 : \delta' = 1 + 2i$. Donc $z = 2 + i \pm (1 + 2i) : \boxed{S = \{3 + 3i ; 1 - i\}}$ (contrôle : $(3 + 3i)(1 - i) = 6$ ✓).
- Deux complexes u et v de somme s et de produit p sont les solutions de $z^2 - sz + p = 0$ (car $(z - u)(z - v) = z^2 - sz + p$). Ici : $z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0, \Delta = (1 + 4i)^2 + 20 - 20i = 5 - 12i = (3 - 2i)^2, z = \frac{1 + 4i \pm (3 - 2i)}{2}$. Les deux nombres sont $\boxed{2 + i \text{ et } -1 + 3i}$.

■ Corrigé de l'exercice 44

- Pour x réel : $P(x) = (x^3 - 2x^2 + 1) + i(-2x^2 + 3x - 1)$. Donc $P(x) = 0$ si et seulement si $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ et $2x^2 - 3x + 1 = 0$. La seconde équation donne $x = 1$ ou $x = \frac{1}{2}$; $x = 1$ annule aussi la première ($1 - 2 + 1 = 0$), mais pas $x = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}$). L'unique racine réelle de P est $\boxed{1}$.
- $(z - 1)(z^2 + \beta z + \gamma) = z^3 + (\beta - 1)z^2 + (\gamma - \beta)z - \gamma$. Par identification : $\beta - 1 = -2 - 2i$ et $-\gamma = 1 - i$, soit $\boxed{\beta = -1 - 2i, \gamma = -1 + i}$ (contrôle : $\gamma - \beta = 3i$ ✓).
 $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0 : \Delta = (1 + 2i)^2 + 4 - 4i = 1, z = \frac{1 + 2i \pm 1}{2} : \boxed{S = \{1 ; 1 + i ; i\}}$.
- $A(1), B(i), C(1 + i)$. On a $c - a = i = i(a - 0) : AC = OA$ et $(OA) \perp (AC)$; de plus $a + b = 1 + i = 0 + c : [OC]$ et $[AB]$ ont le même milieu, $OACB$ est un parallélogramme. Avec un angle droit et deux côtés consécutifs égaux, c'est un **carré**.

4. Les coefficients de $Q(z) = z^3 - (2 - 2i)z^2 - 3iz + 1 + i$ sont les conjugués de ceux de P , donc $Q(z) = \overline{P(\bar{z})}$. Ainsi $Q(z) = 0 \iff P(\bar{z}) = 0 \iff \bar{z} \in \{1; 1+i; i\}$: $S = \{1; 1-i; -i\}$ (contrôle : $Q(-i) = i + (2 - 2i) - 3 + 1 + i = 0$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 45

1. a) Avec $(2+i)^2 = 3+4i$: $\Delta = (3+4i)m^2 + (4+2i)m + 1 - (4+4i)(m^2+m) = -m^2 - 2im + 1 = 1 - 2im + i^2m^2 = (1-im)^2$.
- b) Avec $\delta = 1-im$: $z = \frac{(2+i)m+1+(1-im)}{2}$, soit $\frac{2m+2}{2}$ et $\frac{(2+2i)m}{2}$: $z_1 = m+1$, $z_2 = (1+i)m$. Elles sont confondues $\iff \Delta = 0 \iff im = 1 \iff m = -i$ (solution double $1-i$).
- c) $z_2 = \bar{z}_1 \iff (1+i)m = \bar{m}+1 \iff (x-y) + i(x+y) = (x+1) - iy \iff (y = -1 \text{ et } x = 2)$, d'où $m = 2-i$; alors $z_1 = 3-i$ et $z_2 = 3+i$ (somme 6, produit 10) : $z^2 - 6z + 10 = 0$.
2. a) $z_2 - m = im \neq 0$ et $\frac{z_2}{z_2-m} = \frac{(1+i)m}{im} = \frac{1+i}{i} = 1-i$. Comme $\frac{z_2-m}{0-m} = -i$, on a $MB = MO$ et $(\vec{MO}, \vec{MB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$: OMB est **rectangle isocèle en M**.
- b) $m \neq 0$: $M \neq O$, $B \neq O$, $B \neq M$; $m \neq -1$: $A \neq O$; $m \neq -i$: $A \neq B$; et $z_1 - m = 1 \neq 0$. Si O, M, A sont alignés, la droite (MA) , parallèle à l'axe des réels, est cet axe : $y = 0$, et alors $z_2 = (1+i)x \notin \mathbb{R}$; les quatre points ne sont donc pas alignés.
 $q = (m+1) \times \frac{im}{(1+i)m} = (m+1) \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1}{2}(1+i)(m+1)$, et $(1+i)[(x+1)+iy] = (x+1-y) + i(x+1+y)$, donc $q \in \mathbb{R} \iff x+y+1=0$.
- c) $1-2i$ vérifie $x+y+1=0$; $A(2-2i)$, $B(3-i)$. Le centre Ω est sur la médiatrice $x = \frac{3}{2}$ de $[MA]$, donc $\omega = \frac{3}{2} + i\beta$, et $|\omega|^2 = |\omega - z_1|^2 \iff \frac{9}{4} + \beta^2 = \frac{1}{4} + (\beta+2)^2 \iff \beta = -\frac{1}{2}$. Centre $\Omega\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (contrôle : $|3-i-\omega| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ✓).
3. Il faut $m \notin \{0, -1\}$ ($A \neq O$, $B \neq O$). Alors OAB est rectangle en $O \iff \bar{z}_1 z_2 \in i\mathbb{R}$; or $\bar{z}_1 z_2 = (1+i)m(\bar{m}+1) = (1+i)[(x^2+y^2+x)+iy]$ a pour partie réelle x^2+y^2+x-y . C'est le **cercle de centre** $K\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$ **et de rayon** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **privé de O et de P(-1)** (exemple : $m = -1+i$, $z_1 = i$, $z_2 = -2$ ✓).

■ Corrigé de l'exercice 46

1. Avec $Z = z^3$: $Z^2 - (1+i)Z + i = (Z-1)(Z-i) = 0$ (somme $1+i$, produit i). Donc $z^3 = 1$ ou $z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (les racines cubiques de i sont les $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$, et $e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$) : $S = \left\{1; e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}}; e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}$.
2. a) Pour $z = 0$, le membre de gauche vaut $2 \neq 0$. Pour $z \neq 0$, on divise par z^2 : $(E) \iff 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - (3+2i)\left(z - \frac{1}{z}\right) + 3i - 4 = 0$. Or $Z^2 = z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}$, donc $z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 + 2$, et $(E) \iff 2Z^2 + 4 - (3+2i)Z + 3i - 4 = 0 \iff 2Z^2 - (3+2i)Z + 3i = 0$.
- b) $\Delta = (3+2i)^2 - 24i = 5 - 12i = (3-2i)^2$, $Z = \frac{3+2i \pm (3-2i)}{4}$: $Z = \frac{3}{2}$ ou $Z = i$.
- c) $z - \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \iff 2z^2 - 3z - 2 = 0 \iff z \in \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}$; $z - \frac{1}{z} = i \iff z^2 - iz - 1 = 0$, $\Delta = -1 + 4 = 3$, $z = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$. $S = \left\{2; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right\}$ (somme : $\frac{3}{2} + i = \frac{3+2i}{2}$ ✓).

3. a) $z(z+3) = z^2 + 3z = Z$ et $(z+1)(z+2) = z^2 + 3z + 2 = Z + 2$: $z(z+1)(z+2)(z+3) = \boxed{Z(Z+2)}$.
- b) $(E') \iff Z^2 + 2Z + 10 = 0$; $\Delta' = -9 = (3i)^2$, $Z = -1 \pm 3i$. $z^2 + 3z + 1 - 3i = 0$: $\Delta = 5 + 12i = (3+2i)^2$, $z = \frac{-3 \pm (3+2i)}{2}$, soit i ou $-3-i$; $z^2 + 3z + 1 + 3i = 0$: $\Delta = (3-2i)^2$, soit $-i$ ou $-3+i$.
 $S = \{i ; -i ; -3+i ; -3-i\}$ (contrôle : $i(1+i)(2+i)(3+i) = i(1+i) \times 5(1+i) = -10$ ✓).
- c) Avec $A(i)$, $B(-i)$, $C(-3-i)$, $D(-3+i)$: $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} = -\frac{3}{2}$ et $|c-a| = |d-b| = \sqrt{13}$: $ABCD$ est un parallélogramme à diagonales de même longueur, un **rectangle de centre** $\Omega\left(-\frac{3}{2}\right)$.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $(0+1)^n = 1 = 0^n + 1$: 0 est solution ; $(-1+1)^n = 0$ et $(-1)^n + 1 = 0 \iff n$ impair. $(E_2) \iff 2z = 0$, d'où $S = \{0\}$; $(E_3) \iff 3z(z+1) = 0$, d'où $S = \{0 ; -1\}$.
2. $(E_4) \iff 4z^3 + 6z^2 + 4z = 0 \iff 2z(2z^2 + 3z + 2) = 0$; $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$: $S = \left\{0 ; \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}\right\}$, de module $\sqrt{\frac{9+7}{16}} = 1$ ✓.
3. a) $1 + j + j^2 = 0$, donc $1 + j = -j^2$ et $(1+j)^n = (-1)^n w^2$, avec $w = j^n \in \{1, j, j^2\}$. Si n est impair, j est solution si et seulement si $-w^2 = w + 1$, c'est-à-dire $1 + w + w^2 = 0$; or $1 + w + w^2$ vaut 3 si $w = 1$ (c'est-à-dire si 3 divise n), et 0 si $w = j$ ou $w = j^2$ (car $j^4 = j$). Si n est pair, il faudrait $w^2 - w - 1 = 0$, dont les solutions $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ne sont pas de module 1 : impossible. Donc j est solution de $(E_n) \iff$ n impair et non multiple de 3.
- b) Binôme : $(z+1)^5 - z^5 - 1 = 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z = 5z(z^3 + 2z^2 + 2z + 1)$, et $(z+1)(z^2 + z + 1) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1$ ✓. Comme $z^2 + z + 1 = 0 \iff z \in \{j, j^2\}$: $S = \{0 ; -1 ; j ; j^2\}$.
- c) $(z^2 + z)(z^2 + z + 1)^2 = (z^2 + z)(z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1) = z^6 + 3z^5 + 5z^4 + 5z^3 + 3z^2 + z$; fois 7, ce sont les $\binom{7}{k} z^k$ ($1 \leq k \leq 6$) ✓. $S = \{0 ; -1 ; j ; j^2\}$.
4. a) $(z+1)^6 - z^6 - 1 = 6z^5 + 15z^4 + 20z^3 + 15z^2 + 6z = z(6z^4 + 15z^3 + 20z^2 + 15z + 6)$.
- b) Pour $z \neq 0$, on divise par z^2 : $6\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 15\left(z + \frac{1}{z}\right) + 20 = 0$, et $z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2$: on obtient $\boxed{6Z^2 + 15Z + 8 = 0}$.
- c) $\Delta = 33 > 0$ et $5 < \sqrt{33} < 6$: $Z_1 = \frac{-15+\sqrt{33}}{12} \in \left]-\frac{5}{6}, -\frac{3}{4}\right[$ et $Z_2 = \frac{-15-\sqrt{33}}{12} \in \left]-\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}\right[$ sont réels, dans $]-2, 2[$. Puis $z + \frac{1}{z} = Z_k \iff z^2 - Z_k z + 1 = 0$, de discriminant $Z_k^2 - 4 < 0$: deux solutions conjuguées non réelles, de produit $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. Les quatre solutions obtenues (distinctes, car $Z_1 \neq Z_2$) sont **de module 1**, comme pour $n = 4, 5, 7$.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $z_1 z_2 = q \neq 0$, donc $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Avec $z_1 + z_2 = -p$: $u + \frac{1}{u} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{p^2 - 2q}{q} = \boxed{\frac{p^2}{q} - 2}$.
2. $u + \frac{1}{u}$ est réel $\iff u + \frac{1}{u} = \bar{u} + \frac{1}{\bar{u}} \iff (u - \bar{u}) + \frac{\bar{u} - u}{u\bar{u}} = 0 \iff (u - \bar{u})\left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) = 0 \iff (u = \bar{u} \text{ ou } |u| = 1)$.
- D'après 1, $\frac{p^2}{q} \in \mathbb{R} \iff u + \frac{1}{u} \in \mathbb{R} \iff (u \in \mathbb{R} \text{ ou } |u| = 1)$. Or $u \in \mathbb{R} \iff z_1 = u z_2$ avec u réel $\iff O, M_1, M_2$ alignés ; et $|u| = 1 \iff |z_1| = |z_2| \iff OM_1 = OM_2$.

Si p et q sont réels, $\frac{p^2}{q}$ est réel : c'est cohérent, car les solutions sont soit réelles (M_1, M_2 sur l'axe des réels, alignés avec O), soit conjuguées ($OM_1 = OM_2$).

3. a) OM_1M_2 rectangle isocèle en $O \iff z_1 = \pm i z_2 \iff u^2 = -1 \iff u + \frac{1}{u} = 0$ (car $u \neq 0$)
 $\iff \frac{p^2}{q} = 2 \iff \boxed{p^2 = 2q}$.

b) OM_1M_2 équilatéral $\iff OM_1 = OM_2$ et $(\vec{OM}_2, \vec{OM}_1) \equiv \pm \frac{\pi}{3} \iff u = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$. Or $e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de $u^2 - u + 1 = 0$; donc OM_1M_2 équilatéral $\iff u + \frac{1}{u} = 1 \iff \frac{p^2}{q} = 3 \iff \boxed{p^2 = 3q}$.

Si $p^2 = 2q$ ou $p^2 = 3q$, alors $\Delta = p^2 - 4q = -2q$ ou $-q$ est non nul : l'hypothèse $M_1 \neq M_2$ est automatiquement vérifiée.

4. a) $p = -(3 + i\sqrt{3})$, $p^2 = 6 + 6i\sqrt{3}$, donc $q = \frac{p^2}{3} = \boxed{2 + 2i\sqrt{3}}$. Alors $\Delta = p^2 - 4q = -q = -2 - 2i\sqrt{3}$;
 $x^2 - y^2 = -2$, $x^2 + y^2 = 4$, $xy < 0$: $\delta = 1 - i\sqrt{3}$. $z = \frac{3+i\sqrt{3} \pm (1-i\sqrt{3})}{2}$: $\boxed{S = \{2; 1 + i\sqrt{3}\}}$. Contrôle :
 $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, le triangle de sommets $O, 2, 1 + i\sqrt{3}$ est bien équilatéral ✓.

b) $p = 2m$, $q = m$: $4m^2 = 2m$ avec $m \neq 0$, donc $\boxed{m = \frac{1}{2}}$. L'équation $z^2 + z + \frac{1}{2} = 0$ a pour discriminant $-1 = i^2$: $\boxed{S = \left\{ \frac{-1+i}{2}; \frac{-1-i}{2} \right\}}$, et $\frac{-1+i}{2} = -i \times \frac{-1-i}{2}$: le triangle est bien rectangle isocèle en O ✓.

31

Corrigés : transformations du plan

■ Corrigé de l'exercice 49

1. $h : z' - \omega = -2(z - \omega) \iff z' = -2z + 3\omega = \boxed{-2z + 3 - 3i}$.

$r : z' - \omega = i(z - \omega) \iff z' = iz + (1 - i)\omega = iz + (1 - i)^2 = \boxed{iz - 2i}$.

2. $1 - 2 \times (-1) - 3 = 0$: $\Omega \in (D)$. Le vecteur $\vec{V}(2, 1)$, d'affixe $2 + i$, dirige (D) : c'est $\vec{w}$.

• $t(D)$ est la parallèle à (D) passant par $t(\Omega) \in (D)$:
 $t(D) = (D)$;

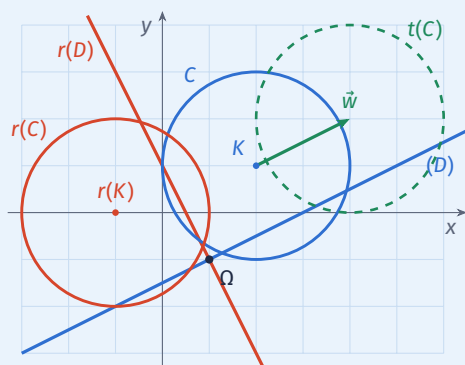
• $h(D)$ est la parallèle à (D) passant par $h(\Omega) = \Omega$:
 $h(D) = (D)$;

• pour $r(D)$: si $M(x + iy) \in (D)$, alors $z' = i(x + iy) - 2i = -y + i(x - 2)$, soit $x' = -y$ et $y' = x - 2$, donc $x = y' + 2$ et $y = -x'$; ainsi $M \in (D) \iff (y' + 2) + 2x' - 3 = 0$: $\boxed{r(D) : 2x + y - 1 = 0}$ (la perpendiculaire à (D) en Ω).

3. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$: centre $K(2 + i)$, rayon 2. Les images sont des cercles centrés en l'image de K : $t(C)$ a pour centre $4 + 2i$ et pour rayon 2 ; $h(C)$ a pour centre $h(K) = -1 - 5i$ et pour rayon $2 \times |-2| = 4$; $r(C)$ a pour centre $r(K) = -1$ et pour rayon 2.

4. h : si $\Omega \in (\Delta)$ et $M \in (\Delta)$, $\vec{\Omega M'} = -2\vec{\Omega M}$, donc $M' \in (\Delta)$: la droite $h(\Delta)$ est contenue dans (Δ) , elle lui est égale. Si $\Omega \notin (\Delta)$, soit $M \in (\Delta)$: $M' \neq M$ (le seul point fixe est Ω) et Ω, M, M' sont alignés ; si l'on avait $M' \in (\Delta)$, alors $(\Delta) = (MM')$ contiendrait Ω : absurde. Donc $h(\Delta) \neq (\Delta)$.

t : si $\vec{w}$ dirige (Δ) , $M \in (\Delta) \Rightarrow M + \vec{w} \in (\Delta)$, donc $t(\Delta) = (\Delta)$; réciproquement, si $t(\Delta) = (\Delta)$ et $M \in (\Delta)$,



alors $M' \in (\Delta)$ et $\vec{MM'} = \vec{w}$ dirige (Δ) .

r : pour $M \neq N$ sur (Δ) , $z_{N'} - z_{M'} = i(z_N - z_M)$: $r(\Delta)$ est perpendiculaire à (Δ) , donc distincte de (Δ) .

■ Corrigé de l'exercice 50

- $z' - z = b - a = 2 - 2i$: $z' = z + 2 - 2i$, translation de vecteur $\vec{AB}(2 - 2i)$.
 - $z - a = b - z' \iff z' = -z + 4 + 2i$: symétrie centrale de centre le milieu $I(2 + i)$ de $[AB]$ (point fixe $\frac{4+2i}{2}$).
 - $z' - z = 3(a - z) \iff z' = -2z + 3 + 6i$: homothétie de rapport -2 et de centre $\frac{3+6i}{1+2} = 1 + 2i$, c'est-à-dire A .
 - Pour $M \neq B$: $BM' = BM$ et $(\vec{BM}, \vec{BM'}) \equiv \frac{\pi}{3}$, soit $z' - 3 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 3)$, encore vraie si $M = B$: rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.
 - Pour $M \neq O$: $z' - z = e^{i\frac{\pi}{2}}(0 - z)$, soit $z' = (1 - i)z$, encore vraie si $M = O$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$: composée de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$.
 - $n = a + i(z - a)$ et $z' = \frac{z+n}{2}$, d'où $z' - a = \frac{1+i}{2}(z - a)$, soit $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{3+i}{2}$. Comme $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$: composée de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $f_b \circ f_a(z) = 4 + 2i - (z + 2 - 2i) = -z + 2 + 4i$: symétrie de centre $1 + 2i$, c'est-à-dire $\boxed{A}$.
 $f_d \circ f_d \circ f_d : z' - 3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3(z - 3) = -(z - 3)$: symétrie de centre $\boxed{B}$ (rotation d'angle π).
 Enfin, avec $M' = f_f(M)$: $z - z' = (z - a) - (z' - a) = \frac{1-i}{2}(z - a)$ et $a - z' = -\frac{1+i}{2}(z - a)$. Pour $M \neq A$: $\frac{z - z'}{a - z'} = -\frac{1-i}{1+i} = -(-i) = i$. Donc $M'M = M'A$ et $(\vec{M'A}, \vec{M'M}) \equiv \frac{\pi}{2}$: $AM'M$ est rectangle isocèle en M' .

■ Corrigé de l'exercice 51

- $f(f(z)) = a(az + b) + b = a^2z + (a + 1)b$.
- On identifie avec l'écriture $z' = az + \beta$ de la transformation cherchée : $a^2 = a$ et $(a + 1)b = \beta$.
 - $a^2 = 1$ et $(a + 1)b = 0$: $a = 1$ et $b = 0$ (l'identité), ou $a = -1$ et b quelconque : $z' = -z + b$. Les solutions sont Id et **toutes les symétries centrales**.
 - $a^2 = 1$ et $(a + 1)b = 4 - 2i$: $a = -1$ est impossible, donc $a = 1$, $b = 2 - i$: la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.
 - Ici $z' = 9z - 8 - 8i$. $a = 3$, $b = \frac{-8-8i}{4} = -2 - 2i$; ou $a = -3$, $b = \frac{-8-8i}{-2} = 4 + 4i$. Points fixes : $\frac{-2-2i}{1-3} = 1 + i$ et $\frac{4+4i}{4} = 1 + i$: les homothéties de centre Ω et de rapports 3 et -3 .
 - $a^2 = -4 = (2i)^2$, donc $a = \pm 2i$, et $(a + 1)b = 0$ avec $a + 1 \neq 0$, donc $b = 0$: $z' = 2iz$ ou $z' = -2iz$, composées de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (resp. $-\frac{\pi}{2}$) et de l'homothétie de centre O et de rapport 2 .
 - $a^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$, donc $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $a = -e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, et $b = 0$: les rotations de centre O et d'angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

f) $a^2 = 3 + 4i$. Avec $a = x + iy$: $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = |3 + 4i| = 5$, $xy > 0$, donc $a = \pm(2 + i)$. Puis $b = \frac{-2-4i}{a+1}$:

$$a = 2 + i, b = \frac{(-2-4i)(3-i)}{10} = -1 - i \quad ; \quad a = -2 - i, b = \frac{(2+4i)(1-i)}{2} = 3 + i.$$

Les deux ont pour point fixe 1 ($\frac{-1-i}{-1-i} = \frac{3+i}{3+i} = 1$) : $z' - 1 = \pm(2+i)(z-1)$, composées de la rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\theta_0 = \arg(2+i)$ (resp. $\theta_0 + \pi$) et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{5}$.

3. Si $a^2 \neq 1$, alors $a \neq 1$: le point fixe de f est $\omega = \frac{b}{1-a}$, et celui de $f \circ f$ est $\frac{(a+1)b}{1-a^2} = \frac{b}{1-a} = \omega$. C'était prévisible : $f(\Omega) = \Omega$ entraîne $f \circ f(\Omega) = \Omega$, et $f \circ f$ n'a qu'un point fixe. On le constate en c), e) et f).

■ Corrigé de l'exercice 52

1. h multiplie les distances par $|k|$: $h(C_1)$ est le cercle de centre $h(O_1)$ et de rayon $2|k|$. Deux cercles sont égaux si et seulement s'ils ont même centre et même rayon : $h(C_1) = C_2 \iff h(O_1) = O_2$ et $2|k| = 4$.

2. $k = \pm 2$, et $h(O_1) = O_2 \iff o_2 - \omega = k(o_1 - \omega) \iff \omega = \frac{o_2 - k o_1}{1 - k}$: un seul centre pour chaque k .

$$k = 2 : \omega_1 = \frac{7+4i-2-2i}{-1} = \boxed{-5-2i} \quad ; \quad k = -2 : \omega_2 = \frac{7+4i+2+2i}{3} = \boxed{3+2i}.$$

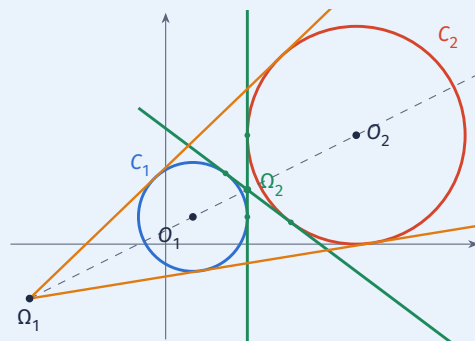
Avec $o_2 - o_1 = 6 + 3i$: $\omega_1 - o_1 = -(6 + 3i)$ et $\omega_2 - o_1 = \frac{1}{3}(6 + 3i)$ sont des multiples réels de $o_2 - o_1$: $\Omega_1, \Omega_2 \in (O_1 O_2)$.

3. (Δ) passe par le centre Ω_2 de h_2 , donc $h_2(\Delta) = (\Delta)$ (exercice 49). Si $(\Delta) \cap C_1 = \{T\}$, comme h_2 est une bijection, $(\Delta) \cap C_2 = h_2(\Delta) \cap h_2(C_1) = h_2((\Delta) \cap C_1) = \{h_2(T)\}$: (Δ) est tangente à C_2 . De même avec h_1 : une tangente à C_1 passant par Ω_1 est une tangente commune.

4. $T \in C_1$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Le triangle $O_1 T \Omega_2$ est rectangle en T , donc $\Omega_2 T^2 = O_1 \Omega_2^2 - O_1 T^2 = |2+i|^2 - 4 = 1$. En soustrayant les deux équations : $4x + 2y = 14$, soit $y = 7 - 2x$, puis

$$(x-1)^2 + (6-2x)^2 = 4 \iff 5x^2 - 26x + 33 = 0,$$

d'où $x = 3$ ou $x = \frac{11}{5}$: $T_1(3+i)$ et $T_2(\frac{11}{5} + \frac{13}{5}i)$. Réciproquement, ces points vérifient $\Omega_2 T^2 + O_1 T^2 = O_1 \Omega_2^2$: $(\Omega_2 T)$ est perpendiculaire au rayon $[O_1 T]$, donc tangente à C_1 .



Les tangentes communes passant par Ω_2 sont $(\Omega_2 T_1)$: $\boxed{x = 3}$, et $(\Omega_2 T_2)$, dirigée par $t_2 - \omega_2 = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, donc de vecteur normal $(3, 4)$: $\boxed{3x + 4y = 17}$. Avec $h_2 : z' = -2z + 3\omega_2 = -2z + 9 + 6i$, les points de contact avec C_2 sont $h_2(T_1) = \boxed{3+4i}$ et $h_2(T_2) = \boxed{\frac{23}{5} + \frac{4}{5}i}$. Contrôle : la distance de $O_2(7,4)$ à $x = 3$ et à $3x + 4y = 17$ vaut $4 \left(\frac{|21+16-17|}{5} = 4 \right)$ ✓. (En orange sur la figure, les deux autres tangentes communes, qui passent par Ω_1 .)

■ Corrigé de l'exercice 53

$$1. r : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z, \text{ donc } c' = 2i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{-\sqrt{3} + i}. \quad z' - z = (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)z = e^{\frac{2i\pi}{3}}z, \text{ donc } MM' = |z| = MB; \quad c' - z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - z), \text{ donc } M'C' = MC.$$

2. Par l'inégalité triangulaire (deux fois) :

$$S(M) = AM + MM' + M'C' \geq AM' + M'C' \geq AC'.$$

$$AC' = |-2 - \sqrt{3} + i| = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2(1 + \sqrt{3})^2} = \boxed{\sqrt{2} + \sqrt{6}}.$$

$$3. a) f' = e^{i\frac{\pi}{3}}f = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2}, \text{ et } (3-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 6 - 4\sqrt{3}, \quad (3-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} : f' = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \quad \checkmark.$$

b) $c' - a = -2 - \sqrt{3} + i$. Avec $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} : \lambda(-2 - \sqrt{3}) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{Re}(f' - a)$ et $\lambda = \operatorname{Im}(f' - a)$, donc $f' - a = \lambda(c' - a)$. Avec $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3} : \mu(-2 - \sqrt{3}) = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, donc $f' - a = \mu(c' - a)$. Et $0 < \lambda < \mu < 1$ (car $\lambda < \mu \iff 3 < 2\sqrt{3}$). Les points A, F, F', C' sont alignés dans cet ordre :

$$S(F) = AF + FF' + F'C' = (\lambda + (\mu - \lambda) + (1 - \mu))AC' = AC'.$$

Le minimum de S est $\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$, atteint en F (c'est le point de Fermat du triangle).

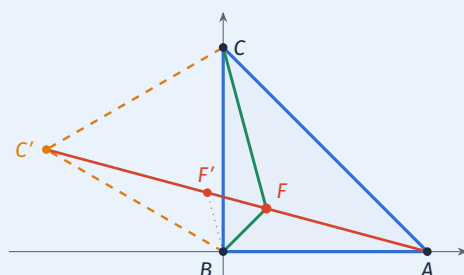
$$4. \text{ Comme } 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}} \text{ et } \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{12}, \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{12} :$$

$$a - f = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad b - f = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} e^{-\frac{3i\pi}{4}}, \quad c - f = i \frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{\frac{7i\pi}{12}}.$$

$$\text{D'où } \frac{b-f}{a-f} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{i(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } \frac{c-f}{b-f} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} e^{i(\frac{7\pi}{12} + \frac{3\pi}{4})} = (\sqrt{3}+1) e^{\frac{4i\pi}{3}} = (\sqrt{3}+1) e^{-\frac{2i\pi}{3}} \quad \checkmark. \text{ Donc}$$

$$(\vec{FA}, \vec{FB}) \equiv (\vec{FB}, \vec{FC}) \equiv -\frac{2\pi}{3}, \quad \text{puis (Chasles)} \quad (\vec{FC}, \vec{FA}) \equiv 0 + \frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

F voit chacun des trois côtés sous un angle de 120° .



■ Corrigé de l'exercice 54

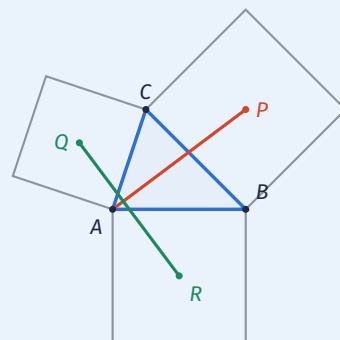
1. La rotation de centre $X(x)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ s'écrit $z' = -i(z - x) + x = -iz + (1+i)x$. Donc

$$\rho_P \circ \rho_R(z) = -i(-iz + (1+i)r) + (1+i)p = -z + (1-i)r + (1+i)p,$$

puis, avec $-i(1-i) = -1-i$ et $-i(1+i) = 1-i$:

$$g(z) = iz - (1+i)r + (1-i)p + (1+i)q.$$

2. $|i| = 1$ et $i \neq 1$: g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$; elle a un unique point fixe, son centre. Or $g(A) = \rho_Q(\rho_P(B)) = \rho_Q(C) = A$: le centre est A . Donc $(1-i)a = (1-i)p + (1+i)q - r$, et comme $\frac{1+i}{1-i} = i$: $\boxed{a = p + i(q - r)}$.



3. Les hypothèses sont inchangées par la permutation circulaire $(A, B, C, P, Q, R) \rightarrow (B, C, A, Q, R, P)$, d'où

$$b = q + i(r - p) \quad \text{et} \quad c = r + i(p - q).$$

$a - p = i(q - r)$ signifie $PA = RQ$ et $(\vec{RQ}, \vec{PA}) \equiv \frac{\pi}{2}$: le segment qui joint un sommet au centre du carré opposé est égal et perpendiculaire au segment qui joint les deux autres centres.

4. $a = 4 + 3i + i(-3 + 4i) = \boxed{0}$, $b = -1 + 2i + i(-2 - 5i) = \boxed{4}$, $c = 2 - 2i + i(5 + i) = \boxed{1 + 3i}$. Contrôle : $\frac{a+b}{2} - i \frac{b-a}{2} = 2 - 2i = r$ ✓, et $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+3i}{4}$ a une partie imaginaire positive : ABC est bien direct.
5. La rotation de centre X et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ s'écrit $z' = j^2 z + (1 - j^2)x$, donc $g(z) = (j^2)^3 z + \beta = z + \beta$: g est une translation. Comme $g(A) = A$, $\beta = 0$ et $g = \text{Id}$. Mais alors, pour **tout** point A_0 , les points $B_0 = \rho_R(A_0)$ et $C_0 = \rho_P(B_0)$ vérifient aussi $\rho_Q(C_0) = g(A_0) = A_0$: les trois relations ne déterminent plus le triangle (il y a une infinité de solutions). Ce phénomène est lié au théorème de Napoléon.

32

Corrigés : géométrie et complexes

■ Corrigé de l'exercice 55

1. $AF = AE$ et $(\vec{AE}, \vec{AF}) \equiv \pm \frac{\pi}{3}$. Or $\arg e \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et $\arg f \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, donc l'angle vaut $\frac{\pi}{3}$: AEF est équilatéral $\iff f = e^{i\frac{\pi}{3}} e$. Or

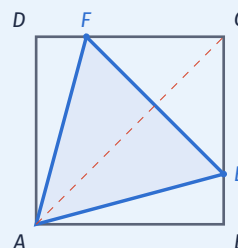
$$e^{i\frac{\pi}{3}}(4 + it) = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\left(2\sqrt{3} + \frac{t}{2}\right) = s + 4i$$

donne $t = 8 - 4\sqrt{3}$ et $s = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t = 8 - 4\sqrt{3}$: $t = s = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1,07 \in [0, 4]$.

2. $e - c = -i(4 - t)$ et $f - c = -(4 - t)$, donc $\frac{f-c}{e-c} = \frac{1}{i} = -i$: $CE = CF$ et $(\vec{CE}, \vec{CF}) \equiv -\frac{\pi}{2}$; CEF est rectangle isocèle en C. Comme $AE = AF$ et $CE = CF$, les points A et C sont sur la médiatrice de [EF] : c'est la droite (AC).

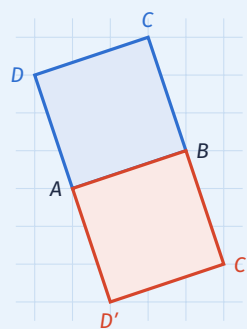
3. $EF = \sqrt{2} CE = \sqrt{2}(4\sqrt{3} - 4) = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. $AE = \sqrt{16 + t^2} = \sqrt{128 - 64\sqrt{3}} = 4\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$. Comme $EF = AE$: $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ (contrôle : $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{12}$ ✓).

4. $A(AEF) = \frac{\sqrt{3}}{4} AE^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16(8 - 4\sqrt{3}) = \boxed{32\sqrt{3} - 48} \approx 7,43$; rapport à l'aire du carré : $\frac{32\sqrt{3}-48}{16} = \boxed{2\sqrt{3} - 3} \approx 0,46$. Contrôle par différence : $16 - 2 \times \frac{1}{2} \times 4t - \frac{1}{2}(4 - t)^2 = 8 - \frac{t^2}{2} = 8 - (56 - 32\sqrt{3})$ ✓.



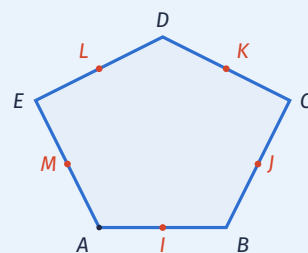
■ Corrigé de l'exercice 56

1. Carré direct : $d - a = i(b - a) = i(3 + i)$, donc $d = \boxed{5i}$ et $c = b + d - a = \boxed{3 + 6i}$. Carré indirect : $d' = a - i(b - a) = \boxed{2 - i}$ et $c' = b + d' - a = \boxed{5}$.
2. Ω est le milieu de $[AC]$: $\omega = 3 + 3i$. La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie A sur B : $b = \omega + i(a - \omega) = 3 + 3i + i(-2 - i) = \boxed{4 + i}$, puis $d = 2\omega - b = \boxed{2 + 5i}$ (contrôle : $d - a = 1 + 3i = i(b - a)$ ✓).
3. La rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ permute les sommets : $\{b, c\} = \{g + j(a - g), g + j^2(a - g)\} = \{2 + i + 2j, 2 + i + 2j^2\}$, soit $\boxed{1 + (1 \pm \sqrt{3})i}$. Côté : $|b - c| = 2\sqrt{3} (= \sqrt{3} GA)$.
4. A est l'image de C par une rotation de centre le milieu $\omega = 1 + i$ de $[BC]$ et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$: $a = \omega \pm i(c - \omega) = 1 + i \pm i(2 + i)$, soit $a = \boxed{3i}$ ou $a = \boxed{2 - i}$.
5. La médiane (AI) est aussi une hauteur, et $IB = \frac{BC}{2}$, $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$: $(IB) \perp (AI)$ et $IB = \frac{AI}{\sqrt{3}}$. Donc $b - z_I = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}(z_I - a) = \pm (-1 + i\sqrt{3})$, d'où $\{b, c\} = \boxed{\{2 + 2i\sqrt{3}, 4\}}$ (contrôle : $|b| = |c| = |b - c| = 4$ ✓).



■ Corrigé de l'exercice 57

1. a) I est le milieu de $[AB]$, donc $s_I(A) = B$; de même $s_J(B) = C$ et $s_K(C) = A$: $s_K \circ s_J \circ s_I(A) = A$. Puis $s_J \circ s_I(z) = 2z_I - (2z_I - z) = z + 2(z_I - z_I)$ et $s_K \circ s_J \circ s_I(z) = 2(z_I - z_I + z_K) - z$.
b) Cette symétrie centrale a un seul point fixe, d'affixe $z_I - z_J + z_K$: $a = \boxed{1 - 3i}$, $b = 2z_I - a = \boxed{3 + 5i}$, $c = 2z_J - b = \boxed{-1 + i}$ (contrôle : $\frac{c+a}{2} = -i$ ✓).
2. $s_L \circ s_K \circ s_J \circ s_I(z) = z + 2(z_I - z_K + z_J - z_I)$: translation de vecteur $\vec{v}$. Si $ABCD$ existe, A est fixe, donc $\vec{v} = \vec{0}$, soit $z_I + z_K = z_J + z_L$: $IJKL$ est un parallélogramme. Réciproquement, si $\vec{v} = \vec{0}$, pour **tout** point A , les points $B = s_I(A)$, $C = s_J(B)$, $D = s_K(C)$ vérifient $s_L(D) = A$: une infinité de solutions.

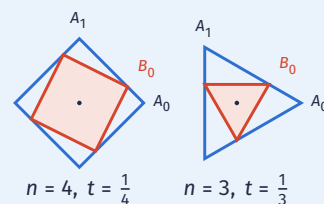


Application : $z_I + z_K = 3 + 5i$. Avec $L(5i)$: $z_J + z_L = 3 + 7i$, aucun quadrilatère. Avec $L(3i)$: $z_J + z_L = 3 + 5i$, une infinité ; pour $A = O$: $\boxed{B(2), C(4 + 4i), D(6i)}$.

3. $s_M \circ s_L \circ s_K \circ s_J \circ s_I(z) = 2(z_I - z_J + z_K - z_L + z_M) - z$: symétrie de centre d'affixe $2 - (5 + 2i) + (4 + 5i) - 5i + (-1 + 2i) = 0$, donc $a = 0$, puis $\boxed{B(4), C(6 + 4i), D(2 + 6i), E(-2 + 4i)}$. En général, la composée de n symétries centrales est $z \mapsto (-1)^n z + \beta$: si n est impair, c'est une symétrie centrale et le polygone est **unique** ; si n est pair, c'est une translation : aucun polygone, ou une infinité (si $z_1 - z_2 + \dots - z_n = 0$).

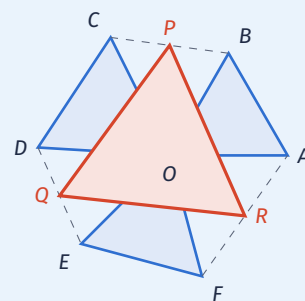
■ Corrigé de l'exercice 58

1. $b_k = \omega^k + t(\omega^{k+1} - \omega^k) = \omega^k(1 - t + t\omega) = \lambda \omega^k$. Comme $\text{Im } \lambda = t \sin \frac{2\pi}{n} > 0$, $\lambda \neq 0$: B_k est l'image de A_k par $z \mapsto \lambda z$, composée de la rotation de centre O et d'angle $\arg \lambda$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $|\lambda|$. L'image d'un polygone régulier de centre O est un polygone régulier de centre O .
2. Avec $\alpha = \frac{2\pi}{n}$: $|\lambda|^2 = (1 - t + t \cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha = (1 - t)^2 + 2t(1 - t) \cos \alpha + t^2$, et $(1 - t)^2 + t^2 = 1 - 2t(1 - t)$, d'où la formule. Les aires sont multipliées par $|\lambda|^2$; or $t(1 - t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ est maximal pour $\boxed{t = \frac{1}{2}}$, et alors $|\lambda|^2 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{n}$, d'où $|\lambda| = \cos \frac{\pi}{n}$ (positif car $n \geq 3$).
3. $\lambda = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}j = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}j = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{j\frac{\pi}{6}}$. $b_1 - b_0 = \lambda(\omega - 1)$ et $a_2 - a_1 = \omega(\omega - 1)$, donc $\frac{b_1 - b_0}{a_2 - a_1} = \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{j(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{3}j$: imaginaire pur, donc $(B_0B_1) \perp (A_1A_2)$. Ici $|\lambda|^2 = 1 - 3t(1 - t)$, et $1 - 3t + 3t^2 = \frac{1}{3} \iff 9t^2 - 9t + 2 = 0 \iff \boxed{t \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}}$.
4. $|\lambda|^2 = 1 - 2t(1 - t) = \frac{5}{8} \iff 16t^2 - 16t + 3 = 0 \iff \boxed{t \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}}$.



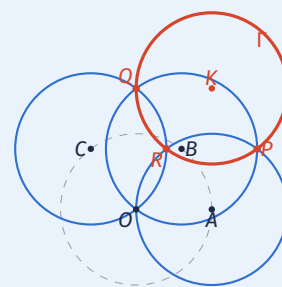
■ Corrigé de l'exercice 59

1. OAB équilatéral direct $\iff b - 0 = e^{j\frac{\pi}{3}}(a - 0) : b = ua$; de même $d = uc$, $f = ue$. $-j^2 = e^{i\pi} e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{j\frac{\pi}{3}} = u$.
2. $2(p + qj + rj^2) = (ua + c) + (uc + e)j + (ue + a)j^2 = a(u + j^2) + c(1 + uj) + e(j + uj^2)$. Avec $u = -j^2$ et $j^3 = 1 : u + j^2 = 0$, $1 + uj = 1 - j^3 = 0$, $j + uj^2 = j - j^4 = 0$. Donc $\boxed{p + qj + rj^2 = 0}$.
Si deux points sont confondus, par exemple $p = q$, alors $p(1 + j) + rj^2 = 0$, soit $-pj^2 + rj^2 = 0$ et $r = p$: les trois le sont. Donc, s'ils ne sont pas confondus, P, Q, R sont distincts et PQR est équilatéral direct (cours).
3. $p + q + r = \frac{1}{2}(ua + c + uc + e + ue + a) = \frac{1+u}{2}(a + c + e)$, donc $z_G = \frac{1+u}{2} \cdot \frac{a+c+e}{3} = \frac{1+u}{2} z_{G'}$, où G' est le centre de gravité de ACE . Or $1 + u = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}}$: G est l'image de G' par la composée de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $OA = OB = AB$ (rayon) : OAB est équilatéral, et direct car l'hexagone est parcouru dans le sens direct ; de même pour OCD et OEF . Les côtés $[BC]$ et $[DE]$ d'un hexagone convexe, non consécutifs, sont disjoints, donc leurs milieux sont distincts : d'après 2, le triangle formé par les trois milieux est équilatéral.



■ Corrigé de l'exercice 60

1. $|p - a| = |b| = \rho$ et $|p - b| = |a| = \rho : P \in \Gamma_A \cap \Gamma_B$. Les quatre côtés de $OAPB$ mesurent ρ : c'est un losange ($\vec{AP} = \vec{OB}$). Les cercles Γ_A et Γ_B , de centres distincts, sont distincts : ils ont au plus deux points communs, O et P ($P \neq O$ car $a + b \neq 0$). Le même calcul vaut pour Q et R .
2. Avec $k = a + b + c$: $|k - p| = |c| = \rho$, $|k - q| = |a| = \rho$, $|k - r| = |b| = \rho$. Donc P, Q, R sont sur le cercle Γ de centre $K(a + b + c)$ et de rayon ρ .
3. $\frac{a+q}{2} = \frac{b+r}{2} = \frac{c+p}{2} = \frac{0+k}{2} = \frac{a+b+c}{2}$: c'est l'affixe ω du milieu commun Ω . La symétrie de centre Ω , $z' = 2\omega - z = a + b + c - z$, envoie A, B, C sur Q, R, P ; elle conserve les distances : $QR = AB$, $RP = BC$, $PQ = CA$.
4. $p = 8 + 4i$, $q = 8i$, $r = 2 + 4i$, $k = 5 + 8i$ (figure) ; $k - p = -3 + 4i$, $k - q = 5$, $k - r = 3 + 4i$ sont de module 5 ✓.
5. Si ABC est équilatéral, la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (ou $-\frac{2\pi}{3}$) permute ses sommets : $\{b, c\} = \{ja, j^2a\}$, et $a + b + c = a(1 + j + j^2) = 0$. Alors $K = O$: Γ est le cercle circonscrit à ABC , et $p = -c$, $q = -a$, $r = -b$. Si $b = ja$ et $c = j^2a$, les points A, P, B, Q, C, R ont pour affixes $a e^{\frac{ik\pi}{3}}$, $k = 0, \dots, 5$ (dans l'autre cas, $k = 0, 5, 4, 3, 2, 1$) : $APBQCR$ est un **hexagone régulier**.



33

Corrigés : défis de concours

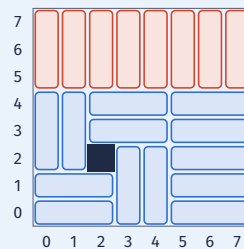
■ Corrigé de l'exercice 61

1. $|a| = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$, donc $a \neq 0$; $|g(z) - g(w)| = \frac{|f(z) - f(w)|}{|a|} = |z - w|$, $g(0) = 0$ et $g(1) = \frac{a}{a} = 1$.
2. $|g(z)| = |g(z) - g(0)| = |z|$ et $|g(z) - 1| = |g(z) - g(1)| = |z - 1|$. Pour tout complexe Z , $|Z - 1|^2 = |Z|^2 - 2 \operatorname{Re} Z + 1$: en comparant, $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} z$. Puis $(\operatorname{Im} g(z))^2 = |g(z)|^2 - (\operatorname{Re} g(z))^2 = (\operatorname{Im} z)^2$, donc $\operatorname{Im} g(z) = \pm \operatorname{Im} z$: $g(z) \in \{z, \bar{z}\}$.
3. Comme $|Z - i|^2 = |Z|^2 - 2 \operatorname{Im} Z + 1$ et $|Z + i|^2 = |Z|^2 + 2 \operatorname{Im} Z + 1$:
 - si $g(i) = i$: $|g(z) - i| = |g(z) - g(i)| = |z - i|$ donne $\operatorname{Im} g(z) = \operatorname{Im} z$; avec la question 2, $g(z) = z$;
 - si $g(i) = -i$: $|g(z) + i| = |z - i|$ donne $\operatorname{Im} g(z) = -\operatorname{Im} z$, donc $g(z) = \bar{z}$.
 Attention : on a montré que le même cas vaut pour tous les z (pas de « mélange »).
4. $f(z) = ag(z) + b$, donc $f(z) = az + b$ pour tout z , ou $f(z) = a\bar{z} + b$ pour tout z , avec $|a| = 1$. Réciproquement $|a(z - w)| = |a(\bar{z} - \bar{w})| = |z - w|$. Les applications $z \mapsto az + b$ ($|a| = 1$) sont les translations ($a = 1$) et les rotations ($a \neq 1$).
5. Dans les deux cas $f(2) - f(0) = 2a$ (car $\bar{2} = 2$), donc $a = i$ et $b = 1 + i$:
 - $f_1(z) = iz + 1 + i$: rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\frac{1+i}{1-i} = i$;
 - $f_2(z) = i\bar{z} + 1 + i$. Avec $z = x + iy$: $f_2(z) = (y + 1) + i(x + 1)$, et $f_2(z) = z \iff x = y + 1$ et $y = x + 1$, ce qui donne $0 = 2$: **aucun point fixe**. Puis $f_2(f_2(z)) = i(-iz + 1 - i) + 1 + i = \boxed{z + 2 + 2i}$

: translation de vecteur d'affixe $2 + 2i$.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. Une barre horizontale couvre les cases $(x + k, y)$, $0 \leq k \leq n - 1$, de somme $\omega^{x+y}(1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}) = 0$ (somme des racines n -ièmes de l'unité) ; de même pour une barre verticale. Comme $\omega \neq 1$, la somme sur le rectangle vaut $S = \left(\sum_{x=0}^{a-1} \omega^x\right) \left(\sum_{y=0}^{b-1} \omega^y\right) = \frac{1-\omega^a}{1-\omega} \cdot \frac{1-\omega^b}{1-\omega}$.



2. Si n divise a , on découpe chaque ligne en $\frac{a}{n}$ barres (de même avec les colonnes si n divise b). Réciproquement, si le pavage existe, la somme S de tous les poids est celle des poids des barres, nulle : $(1 - \omega^a)(1 - \omega^b) = (1 - \omega)^2 S = 0$; or $\omega^a = e^{\frac{2i\pi a}{n}} = 1 \iff \frac{a}{n} \in \mathbb{Z}$: n divise a ou b . Ni 6 ni 10 n'est multiple de 4 : **impossible** (bien que $60 = 15 \times 4$).

3. a) $\sum_{x=0}^7 j^x = \frac{1-j^8}{1-j} = \frac{1-j^2}{1-j} = 1 + j = -j^2$, donc la somme vaut $(-j^2)^2 = j^4 = \boxed{j}$. Si le pavage existe, les 63 cases restantes ont une somme nulle : $j^{x_0+y_0} = j$, donc 3 divise $x_0 + y_0 - 1$.

b) Une barre a encore une somme nulle : $j^{x-y}(1 + j + j^2)$ ou $j^{x-y}(1 + j^{-1} + j^{-2}) = j^{x-y}(1 + j^2 + j)$. Sur l'échiquier : $\left(\sum_{x=0}^7 j^x\right) \left(\sum_{y=0}^7 j^{-y}\right) = (1 + j)(1 + j^2) = 1$, donc $j^{x_0-y_0} = 1$: $x_0 \equiv y_0 \pmod{3}$. Alors $2x_0 \equiv 1 \pmod{3}$, d'où $x_0 \equiv 4x_0 \equiv 2 \pmod{3}$: $x_0 \in \{2, 5\}$, et de même $y_0 \in \{2, 5\}$.

c) Figure : le carré 5×5 du coin, privé de son centre $(2, 2)$, est couvert par quatre rectangles 3×2 « en moulinet » (deux barres chacun), la bande $x \geq 5$, $y \leq 4$ par 5 barres horizontales et la bande $y \geq 5$ par 8 barres verticales : 21 barres. Les symétries $x \mapsto 7 - x$ et $y \mapsto 7 - y$ échangent 2 et 5 : le pavage est possible **si et seulement si** la case retirée est $(2, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$ ou $(5, 5)$.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. Le polygone est fermé : $\sum_{k=1}^n A_k \vec{A}_{k+1} = A_1 \vec{A}_{n+1} = \vec{0}$, soit $e^{i\theta} \sum \ell_k v^{k-1} = 0$, d'où le résultat.
2. a) $u^3 = e^{i\pi} = -1$; $u + \bar{u} = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$ et $u\bar{u} = 1$, donc u est racine de $X^2 - X + 1$: $u^2 = u - 1$. Avec $u^4 = -u$ et $u^5 = -u^2$:

$$0 = \sum_{k=1}^6 \ell_k u^{k-1} = (\ell_1 - \ell_4) + (\ell_2 - \ell_5)u + (\ell_3 - \ell_6)(u - 1) = (\ell_1 - \ell_4 - \ell_3 + \ell_6) + (\ell_2 - \ell_5 + \ell_3 - \ell_6)u.$$

Si $x + yu = 0$ avec x, y réels, la partie imaginaire donne $y \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, donc $y = 0$, puis $x = 0$. Ainsi $\ell_1 - \ell_4 = \ell_3 - \ell_6$ et $\ell_2 - \ell_5 = \ell_3 - \ell_6$.

b) Avec $\ell_1 = 1, \ell_2 = 2, \ell_3 = 3, \ell_4 = 4$: $\ell_5 = \ell_2 + (\ell_1 - \ell_4) = -1 < 0$: **impossible**.

c) Il suffit de former trois couples $(\ell_1, \ell_4), (\ell_3, \ell_6), (\ell_5, \ell_2)$ de même différence : $(1, 4), (3, 6), (2, 5)$ (différence -3). Les côtés $\boxed{1, 5, 3, 4, 2, 6}$ (dans cet ordre) conviennent. (En prolongeant un côté sur deux, on obtient un triangle équilatéral de côté $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 = \ell_5 + \ell_6 + \ell_1$: c'est la même condition.)

3. Avec $v = e^{i\frac{\pi}{4}}, v^4 = -1$, et en posant $d_k = \ell_k - \ell_{k+4} \in \mathbb{Q}$: $d_1 + d_2 v + d_3 v^2 + d_4 v^3 = 0$, avec $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $v^2 = i, v^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$. Parties réelle et imaginaire :

$$d_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(d_2 - d_4) = 0 \quad \text{et} \quad d_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(d_2 + d_4) = 0.$$

Si $d_2 \neq d_4$, alors $\sqrt{2} = \frac{-2d_1}{d_2 - d_4} \in \mathbb{Q}$: absurde. Donc $d_2 = d_4$ et $d_1 = 0$; de même $d_2 + d_4 = 0$ et $d_3 = 0$.
Finalement $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$: les côtés opposés sont égaux.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. a) $a_{k+2} - a_{k+1} = w \omega^{k+1} (w - 1) = w \cdot w \omega^k (w - 1) = w (a_{k+1} - a_k)$.
 b) $a_1 - a_0$ et $a_2 - a_1$ sont non nuls, de la forme $x + iy$ avec x, y entiers ; or $\frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{x'^2+y'^2}$ a des parties réelle et imaginaire rationnelles. Donc $\omega = \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_0}$ a ses coordonnées $\cos \frac{2\pi}{n}$, $\sin \frac{2\pi}{n}$ rationnelles. Or $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont irrationnels : pas de triangle équilatéral ($n = 3$), d'hexagone ($n = 6$) ni d'octogone ($n = 8$) régulier à sommets entiers. Le carré de sommets $0, 1, 1+i, i$ montre qu'il existe des carrés ($\omega = i$).
2. a) $b_k = a_k + a_{k+2} - a_{k+1}$ est entier ; et $b_k = s + w \omega^k (1 + \omega^2 - \omega)$.
 b) $1 - \omega + \omega^2 = \omega (\bar{\omega} + \omega - 1) = (2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1) \omega$ (car $\omega^{-1} = \bar{\omega}$). Si $n \geq 7$: $0 < \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{3}$, donc $\frac{1}{2} < \cos \frac{2\pi}{n} < 1$ et $0 < 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1 < 1$. Si $n = 5$: $2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \in]-1, 0[$ (car $1 < \sqrt{5} < 3$).
 c) Avec $\mu = 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1$ et $w' = \mu \omega w \neq 0$: $b_k = s + w' \omega^k$; c'est un polygone régulier, à sommets entiers, de côté $\ell' = |w'| |\omega - 1| = |\mu| \ell$, donc $0 < \ell' < \ell$. Enfin $\ell^2 = |a_1 - a_0|^2 = x^2 + y^2$ et ℓ'^2 sont des entiers naturels non nuls.
 d) En itérant, on obtient des polygones réguliers à sommets entiers de côtés $\ell_m = |\mu|^m \ell$: la suite (ℓ_m^2) serait une suite strictement décroissante d'entiers naturels non nuls, ce qui est impossible (ou : $\ell_m^2 \geq 1$ alors que $\ell_m^2 = |\mu|^{2m} \ell^2 \rightarrow 0$). Avec la question 1 : **les seuls polygones réguliers à sommets entiers sont les carrés.**

■ Corrigé de l'exercice 65

1. $|u| = \frac{|3+4i|}{5} = 1$. $(3+4i)^{m+1} = (x_m + iy_m)(3+4i) = (3x_m - 4y_m) + i(4x_m + 3y_m)$. Pour $m = 1$: $x_1 = 3$, $y_1 = 4$. Si $x_m = 3 + 5\alpha$ et $y_m = 4 + 5\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) :

$$x_{m+1} - 3 = 5(3\alpha - 4\beta - 2) \quad \text{et} \quad y_{m+1} - 4 = 5(4\alpha + 3\beta + 4).$$

La récurrence est établie. En particulier $y_m = 4 + 5\beta \neq 0$ (car 5 ne divise pas -4).

2. $u^m = \frac{x_m + iy_m}{5^m}$ a une partie imaginaire non nulle. Avec $\bar{u} = \frac{1}{u}$ et $m = j - k$:

$$|u^{2j} - u^{2k}| = |u^{2k}| |u^{2m} - 1| = |u^m| |u^m - \bar{u}^m| = |2i \operatorname{Im}(u^m)| = \frac{2|y_m|}{5^m}.$$

3. $|z_{M_k}| = 5^{N-1}$: les M_k sont sur le cercle de centre O et de rayon 5^{N-1} . Pour $0 \leq k < j \leq N-1$ et $m = j - k \in \{1, \dots, N-1\}$: $M_k M_j = 5^{N-1} \frac{2|y_m|}{5^m} = 2 \cdot 5^{N-1-m} |y_m|$, entier non nul (donc les points sont distincts).
4. $y_1 = 4, y_2 = 24, y_3 = 44$ (car $(3+4i)^2 = -7 + 24i$ et $(3+4i)^3 = -117 + 44i$).
 $N = 3$: rayon 25, $M_0 M_1 = M_1 M_2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{40}$, $M_0 M_2 = 2 \cdot 24 = \boxed{48}$ (contrôle : $|25 - (-7 + 24i)| = |32 - 24i| = 40$ ✓).
 $N = 4$: rayon 125, $M_0 M_1 = M_1 M_2 = M_2 M_3 = \boxed{200}$, $M_0 M_2 = M_1 M_3 = \boxed{240}$, $M_0 M_3 = \boxed{88}$.

5. Les points $U_k(u^{2k})$, $k \in \mathbb{N}$, sont sur le cercle unité ; ils sont deux à deux distincts, car $u^{2j} = u^{2k}$ avec $j > k$ donnerait $u^{2(j-k)} = 1$ réel, contraire à 2 ; et $U_k U_j = \frac{2|y_{j-k}|}{5^{j-k}}$ est rationnel. (On en déduit aussi que u n'est pas une racine de l'unité.)

■ Corrigé de l'exercice 66

1. Par la formule du binôme, $(\cos \theta + i \sin \theta)^N = \sum_{q=0}^N \binom{N}{q} \cos^{N-q} \theta (i \sin \theta)^q$, et par Moivre sa partie imaginaire est $\sin N\theta$. Seuls les $q = 2p + 1$ impairs donnent une partie imaginaire, avec $i^{2p+1} = (-1)^p i$:

$$\sin N\theta = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{N}{2p+1} \cos^{2(n-p)} \theta \sin^{2p+1} \theta = \sin^N \theta \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{N}{2p+1} \cotan^{2(n-p)} \theta,$$

car $N - (2p + 1) = 2(n - p)$ et $\sin^{2p+1} \theta = \sin^N \theta \sin^{-2(n-p)} \theta$.

2. Pour $1 \leq k \leq n$, $\theta_k = \frac{k\pi}{N} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (car $2k < N$), $\sin N\theta_k = \sin k\pi = 0$ et $\sin \theta_k \neq 0$: $P_n(x_k) = 0$. Comme $\cotan$ est positive et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, les x_k sont distincts. P_n est de degré n , de coefficient dominant $\binom{N}{1} = N$, et a n racines distinctes : en factorisant n fois (cours), $P_n = N \prod_{k=1}^n (X - x_k)$. Le coefficient de X^{n-1} vaut $-\binom{N}{3}$ d'une part, $-N \sum x_k$ d'autre part :

$$\sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{N} \binom{N}{3} = \frac{(N-1)(N-2)}{6} = \frac{2n(2n-1)}{6} = \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \theta_k} = \sum_{k=1}^n (1 + x_k) = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \boxed{\frac{2n(n+1)}{3}}.$$

3. Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$: $0 < \sin x < x < \tan x$, donc $\frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$. Avec $x = \theta_k$, $\frac{1}{\theta_k^2} = \frac{N^2}{\pi^2 k^2}$; en sommant pour $k = 1, \dots, n$: $\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{N^2}{\pi^2} S_n < \frac{2n(n+1)}{3}$, d'où l'encadrement.
4. Les deux bornes valent $\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2n^2-n}{(2n+1)^2}$ et $\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2n^2+2n}{(2n+1)^2}$ et tendent vers $\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$: par encadrement,

$$\boxed{\lim S_n = \frac{\pi^2}{6}}. \text{ Enfin } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} = S_{2n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{1}{4} S_n \longrightarrow \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Forme exponentielle et Euler	31 à 36	/ 6	
Thème B · Racines n -ièmes	37 à 42	/ 6	
Thème C · Équations dans $\mathbb{C}$	43 à 48	/ 6	
Thème D · Transformations du plan	49 à 54	/ 6	
Thème E · Géométrie et complexes	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Fonctions exponentielles

Maths Olympiad