

Problème 1 : Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x - 5$

- 1- Etudier le sens de variation de g . (On ne demande pas de déterminer les limites de g , ni de construire sa courbe représentative) ; 2- a) Calculer $g(0)$ et $g(2)$.
b) Démontrer que l'équation : x réel, $e^x + x - 5 = 0$ admet une solution α et une seule.
c) Justifier l'encadrement $1,30 < \alpha < 1,31$.

Partie B : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty; 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$

- 1- Etudier le sens de variation de f . Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
- 2- Prouver l'égalité : $f(\alpha) = \alpha$.
- 3- a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 3]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $[0; 3]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
c) Démontrer que si $0 \leq x \leq 3$; alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
- 4- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$ d'unité graphique 1 cm, on désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f .
a) Tracer la courbe (C) , hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées $(x; y)$ tels que : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ On notera (S) cette partie.
b) En remarquant pour $x \neq 5$: $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$ justifier que $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} = 4 - 6\alpha$
c) Prouver que l'aire A de la partie (S) est en cm^2 , donnée par : $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (On pourra utiliser une intégration par parties). (Bac 1998)

Problème 2 : On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A : Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f , le nombre de malades durant l'épidémie. Cette fonction f est définie sur $[1; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montre que, pour tout réel t de l'intervalle $[1; 26]$, $f'(t) = 24 \ln(t) - 6t + 24$.
2. Les variations de f sont données dans le tableau suivant :

t	1	4	26
f'(t)			

- a) Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1; 26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.
- b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1; 26]$ et les variations de f sur $[1; 26]$.
3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4; 26]$, $f(t)$ est décroissante ».

- b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Partie B : On admet que la fonction G définie par : $G(t) = 12t^2 \ln(t) - 6t^2$ est une primitive sur $[1; 26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t \ln(t)$.

- 1) Déterminer, sur $[1; 26]$, une primitive F de la fonction f
- 2) On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\frac{1}{26-1}[F(26) - F(1)]$ est 202. Donne une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

Problème 3 : Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce. L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(t) = 25e^{-0,5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

- 1) Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.
- 2) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par : $F(x) = -50e^{-0,5t}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[5; 4]$.
- 3) Calculer la valeur exacte de $\int_2^4 25e^{-0,5t} dt$.
- 4) En déduire la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année.

Partie B : Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année. L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par : $g(t) = 20e^{-0,1t^2} + t - 4,65$

- 1) On désigne par g' la fonction dérivée de g . Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[4; 10]$, on a $g'(t) = -4te^{-0,1t^2} + 1$.
- 2) On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4; 10]$. Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle $[4; 10]$. Donner la valeur arrondie au dixième de α .
- 3) (a) En déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4; 10]$.
(b) Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4; 10]$.
(c) Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insecte ?

Problème 4: Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation. Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/L	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $g(t) = \frac{4t}{t^2+1}$ Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g

1. Par lecture graphique, donner sans justification :
 - a) les variations de la fonction g sur $[0; 10]$;
 - b) la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
 - c) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/L.

2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et sa dérivée est g' .

Montrer que : $g'(t) = \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$

- (b) En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection



3. On admet que G définie sur $[0; 10]$ par $G(t) = 2\ln(t^2 + 1)$ est une primitive de g sur cet intervalle. Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures ? Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millièème.
4. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier. La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg/l. Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

Problème 4 : Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

- 1) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

- 2) Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.
- 3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

Problème 5 : Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note $p_0 = 20 \times 10^{-6}$. Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geq p_0$, le niveau sonore perçu est égale à $f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p)$

- 1) Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals? 0,2 Pascals? 0,02 Pascals? Calculer $f(p_0)$.
- 2) A partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.
- 3) Montrer que pour tout réel $x \geq p_0$: $f(10x) = 20 + f(x)$. On en déduit "le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10".
- 4) Exprimer, pour tout réel $x \geq p_0$, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Problème 6 : Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Pour effectuer un examen médical, on injecte par piqûre intramusculaire une dose de 3 cm^3 d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures). Celle-ci passe alors progressivement dans le sang. La diffusion atteint son maximum au bout d'une heure.

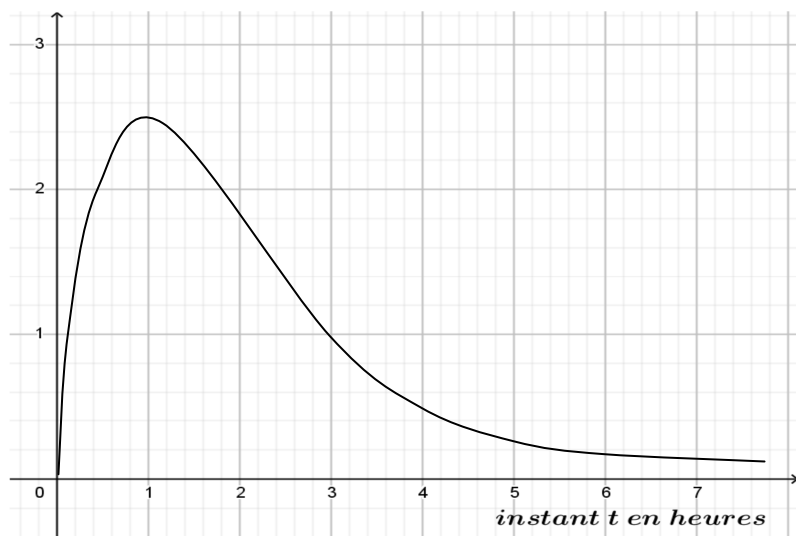
La courbe de l'annexe représente la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t .

- 1) Construire sur la feuille annexe la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, sachant que son coefficient directeur est égal à $(-0,9)$.
- 2) À partir du graphique commenter l'évolution de la quantité de substance médicamenteuse contenue dans le sang.
- 3) Pour pouvoir effectuer l'examen, il faut que la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang soit supérieure ou égale à $0,5 \text{ cm}^3$. Déterminer graphiquement de combien de temps on dispose pour faire cet examen.

Partie B : On a injecté par piqûre intraveineuse 1 cm^3 de médicament à un malade à l'instant $t = 0$. La substance se répartit immédiatement dans le sang et elle est ensuite progressivement éliminée. Expérimentalement, on montre que la quantité $q(t)$ de substance présente dans le sang à l'instant t est donnée par la relation $q(t) = e^{-0,15t}$ où t est exprimée en heures.

1. Quel volume de ce produit reste-t-il au bout de 90 minutes ?
2. Quel volume de ce produit le malade a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure ? d'une heure ?
3. On donne $q'(t) = -0,15e^{-0,15t}$ où q désigne la fonction dérivée de la fonction q

Étudier les variations de la fonction q sur l'intervalle $[0 ; 9]$ puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal en prenant pour unités 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées. Quantité présente dans le sang (en cm^3).



Problème 6 :

- I. L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $\ln A = \ln(9,85) + 0,64 \ln P$. ($\ln$ désignant le logarithme népérien).
- 1) Quelle est l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P = 780\text{g}$?
 - 2) Quel est le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire $A = 30\text{cm}^2$?
- II. Pour déterminer l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si K est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times \ln(K)$.
- 1) Le squelette d'un « homme du Cro-Magnon » contient 5% de carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?
 - 2) Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie : $51,8\% < k < 53,8\%$. Donner un encadrement de l'âge de ce fossile.

Problème 7 : Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1-/ Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

2-/ a-/ Etablir que pour tout réel x $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$, en déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f .

b-/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.

c-/ Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité 2 cm).

3-/ Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2 ; 4]$.

4-/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$

a-/ Déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f .

b-/ Calculer en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 4$.

Donner une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2 . (Bac 2003)

Problème 8 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$

- a) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$;
- b) Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique (D) à préciser ;
- c) Étudier la fonction f ;
- d) Montrer que le point $I(2 ; -1)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f ;
- e) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) ;
- f) Construire (D) et (C_f) dans un repère orthonormé.

Problème 9 : On a montré que le taux de croissance du nombre de bactéries dans une culture donnée, t heures après le début de l'expérience est de $24(t^2 + t - 5)$ bactéries par heure.

On suppose que le nombre de bactéries est de 1000 au début de l'expérience.

1. Vérifier que le nombre de bactéries après t heures est $N(t) = 24t(t^2 + t - 5) + 1000$.
2. Étudier et représenter la fonction $N : t \rightarrow N(t)$.
3. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries atteigne 5000, 10000, 15000 bactéries.

Problème 10: Une équipe de biologistes a effectué plusieurs expériences avec une certaine espèce d'insectes. L'analyse des données a montré que, t semaines après le début des expériences, le nombre d'insectes était de $N(t) = -t^4 + 8t^2 + 9$.

2. Étudier et représenter la fonction $N : t \rightarrow N(t)$.
3. La courbe de N passe par les points $A(0, 9)$ et $B(3, 0)$. Qu'est-ce que cela signifie dans le contexte donné ?
4. Estimer le temps nécessaire pour que le nombre d'insectes atteigne son maximum. Donner une valeur approchée à l'unité de ce maximum.

Problème 11 : On étudie le refroidissement d'un objet. On note $\theta(t)$ la différence à la date t , entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant. T est exprimé en minutes et $\theta(t)$ en degré Celsius. L'étude du phénomène physique conduit à l'équation différentielle $(E) : \theta' = -k\theta$ ($k \in \mathbb{R}_+$) ;

1. Résous l'équation (E) ;
2. Sachant que pour l'objet étudié $k = \ln 3$, vérifie que la solution de (E) telle que $\theta(0) = 90^\circ\text{C}$ est la fonction θ définie par $\theta(t) = 90 e^{-t \ln 3}$;
3. La température du milieu ambiant est 10°C . calcule $\theta(2)$. Déduis en la température de l'objet après deux minutes de refroidissement.

Problème 12 : L'impression sonore est proportionnelle au logarithme de l'intensité sonore. On définit le niveau sonore par $N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ où I est l'intensité sonore et I_0 une intensité de référence.

- 1) Sachant que l'intensité sonore est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la pression acoustique P , démontre que $N = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$ P_0 étant la pression acoustique correspondant à I_0 .
- 2) Lorsque P est exprimée en pascals P_a , N est exprimé en décibels (dB). Sachant que $P_0 = 20 \times 10^{-6} P_a$ (son à 1000Hz). Calcule les niveaux sonores respectifs correspondant aux pressions acoustiques $P_1 = 12 \times 10^{-3} P_a$ (niveau moyen de la voix) et $P_2 = 30 \times 10^{-2} P_a$ (bruit insupportable) ;
- 3) Quelle est la pression acoustique correspondant à un niveau sonore de 80dB ? de 70dB ?

Problème 13 : Dans une culture des microbes qui se développent, la vitesse d'accroissement à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant. Sachant qu'il y'a 10^5 microbes au bout de deux heures et 5×10^5 microbes au bout de 6 heures, combien y'avait-il initialement de microbes dans cette culture ?

Problème 14 : Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

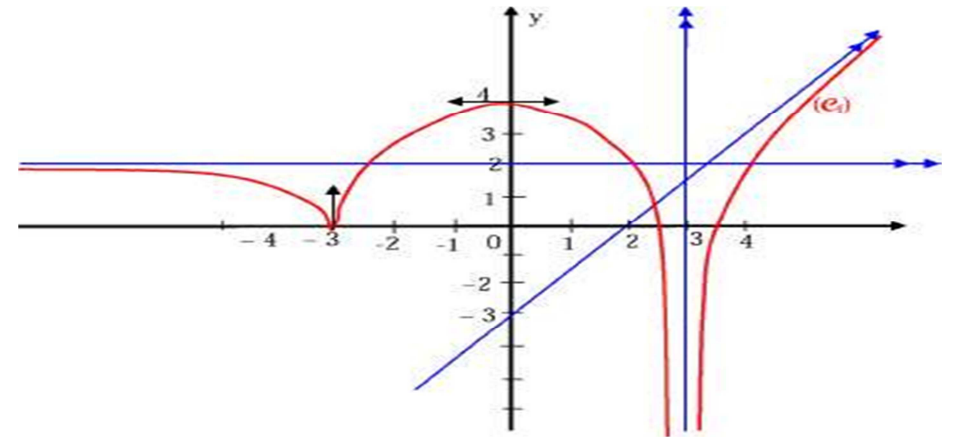
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

- 1°) calculer $f'(x)$. Trouver les coefficients a ; b et c en utilisant les données du tableau.
- 2°) Montrer que la courbe (Cf) admet une droite asymptote oblique (D). Étudier la position de (Cf) par rapport à (D).
- 3°) Donner le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .
- 4°) Tracer la courbe (Cf) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Problème 15 : Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition Df de f .
- 2°) Déterminer les limites de f aux bornes de Df.
- 3°) Dresser le tableau de variation de f .
- 4°) La fonction f est-elle continue ; dérivable en $x = -3$? Justifier votre réponse
- 5°) Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) en $x = 0$.
- 6°) Montrer que la restriction g de f à $[0;3[$ est une bijection de $[0;3[$ sur une partie J de Df que l'on précisera.
- 7°) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (Cf) de f .
- 8°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.



Problème 16 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm)

- 1) On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$
 - a) Etablis les variations de g ; et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1
 - b) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x
- 2) a) Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f ,
b) Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresse le tableau de variation de
- 3) a) Montre qu'il existe quatre réels a ; b ; c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$
b) En déduis que C admet une asymptote oblique Δ et étudie la position de C par rapport à Δ . Vérifie en particulier que C rencontre Δ en un point unique A
- 4) Détermine les abscisses des points B et B' de C admettant une tangente parallèle à Δ .
- 5) Vérifie que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$; en déduis une valeur approchée de $f\left(\frac{3}{2}\right)$
- 6) Construis la courbe

Problème 17 : le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Un routier doit faire un trajet de 150km. Si sa vitesse moyenne est x kilomètres par heure, alors consommation en gas-oil est

$6 + \frac{x^2}{100}$ litres par heure. Le prix du gas-oil est 400FCFA le litre, et le chauffeur est payé 1200FCFA de l'heure.

- 1.a) Exprime, en fonction de x le salaire du chauffeur et le coût de gas-oil.
- b) En déduis que le coût du trajet, exprime en FCFA, est donné par $f(x) = 600x + \frac{540000}{x}$
- 2.a) Etudie les variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$; dresse son tableau de variation ;
- b) Détermine la vitesse moyenne v pour laquelle le coût du trajet est minimal et calcule ce coût ;
- 3) On considère par C la courbe représentative de f . a) détermine les asymptotes à C ;
b) complète la table de valeurs suivantes :

x	10	20	30	40	60	90
f(x)						

Problème 18 : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$ par : $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$

On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Unités graphiques :

$$\|\vec{i}\| = 4 \text{ et } \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$$

- 1) Détermine la limite de f en $-\infty$
- 2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = e^x \left(\frac{3}{2}e^x - 1 \right)$. Montre que $g(x) = 0$ annule pour $x = \ln \frac{2}{3}$. Etudie le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$
- 3) Montre que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$. En déduis que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$
- 4) calcule $f'(x)$. Montre que pour $x \in]-\infty ; 1[$: $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$. En déduis le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de la fonction f .
- 5) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-3 ; 0]$ notée x_0 .
On admet $-2,1 < x_0 < -2$.
- 6) Résous l'équation : $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$. En déduis qu'il existe un point A unique de $(\mathcal{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est égale à $\ln \frac{4}{3}$. ut de
- 7) Trace la droite $(\mathcal{D})$, la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente à $(\mathcal{C})$ en A .
- 8) Calcule $I = \int_{\ln \frac{2}{3}}^0 \left(\frac{3}{2}e^{2x} - e^x \right) dx$

Problème 19 : on se propose de calculer l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' - 8y = -8x^2 - 12x - 18 \text{ telle que } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0$$

- 1) détermine les nombres réels a , b et c tels que la fonction polynôme définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E)
- 2) f étant une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $g = f - P$
 - a) Montre que f est solution de l'équation (E) si et seulement si g est solution de : $y'' + 2y' - 8y = 0$
 - b) Résous $y'' + 2y' - 8y = 0$ et en déduis les solutions de (E) .
 - c) Détermine la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$

Problème 20 : Partie A :

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$

- 1) Justifie que la limite de g en $+\infty$ est -1 puis détermine la limite de g en $-\infty$;
- 2) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 1)e^{1-x}$
- 3) Etudie le sens de variation de g et dresse le tableau de variation de g ;
- 4) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α puis justifie que $0,4 < \alpha < 0,5$
- 5) En déduis que $\forall x \in]-\infty ; \alpha], g(x) \geq 0$ et $\forall x [\alpha ; +\infty[, g(x) \leq 0$

Partie B : on considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On considère (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm)

- 1) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis démontre que f est une primitive de g
- 2) Etudie le sens de variation de f et dresse le tableau de variation ;

- 3) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$
- 4) Etudie la position relative de (C) et (D) ;
- 5) Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) ;
- 6) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 7) Démontre que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{-\alpha+1}$ puis justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x + 2) = e^{x-1} \cdot f(x)$
- 8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une des solutions. Démontre que l'autre solution est $-\beta + 2$;
- 9) Trace (D) , (T) et (C) . (On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$)

Patrie C : Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1°) Calcule $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par partie ;

2°) Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend $+\infty$

Problème 21: Partie A : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ae^{-2x} + be^x$

1°) Détermine les réels a et b pour que la courbe représentative de h passe par le point $A(0 ; 3)$ et admette en ce point une tangente horizontale.

2°) On pose $a = 1$ et $b = 2$. Donne le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x ;

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^{-2x} + 2e^x)$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2cm).

1°) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$;

2°) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(2 + e^{-3x})$

b°) En déduis que la droite (D) d'équation $y = x + \ln 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$;

3°) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2x + \ln(1 + e^{3x})$

b°) En déduis que la droite (D') d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$;

4°) Etudie les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (D) puis de $(\mathcal{C})$ et (D') ;

5°) a) Calcule pour x , $f'(x)$ et vérifie que : $f'(x) = \frac{2(1-e^{-3x})}{2+e^{-3x}}$

b) En déduis le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$

6°) Dresse le tableau de variations de f puis trace (D) ; (D') et $(\mathcal{C})$;

Partie C : Soit la fonction u définie sur $[0 ; +\infty[$ par $u(x) = x - \ln(1 + x)$.

1°) Etudie le sens de variation de u ; calcule $u(0)$ et en conclus que : $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$

2°) Déduis de la question précédente que $\forall x \geq \mathbb{R}, \ln(1 + 2e^{3x}) \leq 2e^{3x}$

3°) Soit α , un nombre réel strictement négatif. Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, (D') et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$. Donne une majoration de $A(\alpha)$ et de $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} A(\alpha)$

Problème 22 : I – soit θ la température d'un corps à l'instant t . la température ambiante est 30°C . A chaque instant t , on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$. On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie : $x'(t) = -k^2 x(t)$ ($k \in \mathbb{R}^*$). A l'instant 0 la température du corps est 70°C et au bout de 5 minutes ; elle n'est plus que 60°C .

1°) Détermine $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.

2°) A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes ?

II/ Une personne achète deux plantes pour décorer (embellir) son appartement :

- Un ficus mesurant 50cm et dont la hauteur augmente de 4% par an ;
- Un cactus mesurant 1,50 m et dont la hauteur augmente de 20% par an.

1°) Au cours de quelle année les deux auront – elles la même hauteur ?

2°) Le plafond de l'appartement étant situé à 2,50 m au-dessus du sol, laquelle des deux plantes atteindra la première le plafond ? Au cours de quelle année ?

Problème 23 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1°) Exprime $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue ;

2°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; (C_f) admet – elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3°) Etudie les variations de f ;

4°) Démontre que les droites d'équations : $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C_f) ;

5°) Trace (C_f) et démontre qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation ;

Problème 24 : Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = x + 2 - \frac{5}{|1-x|}$

1.a) Détermine le domaine de définition de f

b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

c) Calcule les limites aux bornes de ce domaine ;

2.) Détermine la dérivée f' de f ; étudie son signe puis dresse le tableau de variations de f ;

3. a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ et calcule $f(0)$

b) Détermine les équations des asymptotes ;

4.) Dans un repère orthonormé (unité 1cm), construis les asymptotes et la courbe (C_f)

Problème 25 : Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

1°) Etudie le sens de variation de g et puis dresse son tableau de variation.

2°) Montre que g détermine une bijection de $]3 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

3°) calcule $(g^{-1})'(9)$

4°) Détermine l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) au point d'abscisse $x_0 = 2$

5°) Trace (T) et la courbe (C_g) dans le plan muni d'un repère orthonormé puis en déduis les coordonnées du centre de symétrie Ω à la courbe (C_g).

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x(x-1)|$

1°) Exprime $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

2°) Etudie la dérivabilité de f aux abscisses 0 et 1 puis les variations de f .

3°) dans le plan muni d'un repère orthonormé, construis la représentation graphique (Γ) de f et les demi tangentes aux points d'abscisses 0 et 1

Problème 26 : A l'instant $t = 0$, on injecte par piqûre intraveineuse une dose de 1,8 unité. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. On admet que la processus d'élimination peut se présenter mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\lambda Q(t)$ où $Q(t)$ représente la quantité

de substance présente dans le sang à l'instant t , t en heure, et λ es un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1°)a) Démontre que $Q(t) = 1,8 e^{-\lambda t}$

b°) Détermine λ sachant que qu'au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%.

2°) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang aura – t – elle diminué de moitié ?

Problème 27 : Soit f la fonction numérique de variable réel x définie par :

$f(x) = (-2x - 4)^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$

1°) Etudie les variations de g puis précise le signe de $g(x)$

2°) calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2 - x)]$

3°) En déduis que la courbe ($\mathcal{C}$) de f admet une asymptote (D) non parallèle aux axes de coordonnées dont on donnera l'équation cartésienne.

4°) Calcule $f'(x)$ et montre que : $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} g(x)$

5°) En déduis le sens de variation et le tableau de variation de f ;

6°) Détermine les coordonnées du point A, intersection de ($\mathcal{C}$) et (D) puis étudie la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D)

7) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Justifie que $-1,2 < \alpha < -1,1$

8°) Précise l'équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $x = 0$,

9°) Trace (D) ; ($\mathcal{C}$) et (T) dans le même repère ;

11°) Calcule l'aire du domaine du plan limité par : la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (D) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$;

Problème 28 : Partie A :

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 - \ln x$

1°) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$ puis démontre que $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

2°) Etudie le sens de variations de g et dresse le tableau de variation ;

4°) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0 ; +\infty[$. On désigne par α la plus petite des solutions et que $0,4 < \alpha < 0,5$

5°) Calcule $g(1)$ et en déduis que $\forall x \in]0 ; \alpha] \cup [1 ; +\infty[\quad g(x) \geq 0$ et $\forall x \in]\alpha ; 1[\quad g(x) \leq 0$

Partie B : Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J). $OI = 4$ et $OJ = 2$

1°) Détermine la limite de f en 0. Donne une interprétation graphique du résultat ;

2°) Détermine la limite de f en $+\infty$ puis démontre que $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3°) Démontre que $f(\frac{2}{\alpha}) = 2\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$

4°) Etablis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation ;

- 5°) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$;
 6) Etudie la position de (C) par rapport à (D) ; trace (C) et (D). On prendra $\alpha = 0,4$ et $f(\alpha) = 3,1$
 7°) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$. Calcule A

Problème 29 : Soit la fonction numérique f à variable réelle x défini par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

On désigne par (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé

- 1°) Montre que (Cf) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations ;
 2°) Précise la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique ;
 3°) Etudie les variations de f ;
 4°) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
 5°) Trace la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$
 6°) Calcule $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$
 7°) Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f ;

Exercice 01 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

- 1°) $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$; 2°) $f(x) = \frac{5}{e^x - 1}$; 3°) $f(x) = \frac{3x}{e^x + 1}$; 4°) $f(x) = \ln(e^x - 3)$;
 5) $f(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}}$; 6) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^{x+1}}\right)$; 7) $f(x) = x + 4 - \frac{4}{e^{x+1}}$; 8) $f(x) = \sqrt{e^x - 3}$
 9) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 10) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1}$; 11) $f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + 2x - 3}$; 12) $f(x) = \frac{6x - 2}{-2x + 8}$;
 13) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$; 14) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$; 15) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x + 2}$; 16) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x^2 - x + 2}$
 17) $f(x) = \ln\left(\frac{(x-1)}{(2-x)}\right)$; 18) $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$; $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$; $f(x) = x(1 - \ln x)$
 $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$; $f(x) = (x-2)\ln(x-2)$; $f(x) = \frac{\ln x}{3x + 2}$;
 $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$; $f(x) = \frac{x \ln x - e}{x - e}$; $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x - e}$; $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$;

Exercice 02 : calculer les limites suivantes :

- a°) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; b°) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$; c°) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$; d°) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$
 e°) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{25 - x}$; f°) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$; g°) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{|x^2 - 25|}$; h°) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2x^2 - 5x + 3}$
 i°) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{x^2 - 25}$; j°) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$; k°) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}} \frac{-x^2 + 5}{x^4 - 25}$; l°) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{3x - 1}$, n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3}}$; o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$; p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \sqrt{x^2 + 1}$

Exercice 03 :

a) Exemples d'utilisation d'une factorisation

calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

b) Exemples d'utilisation de l'expression conjuguée

calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)]$

c) Exemple d'utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation

calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 + x - 7})$

d) Exemple d'utilisation d'un taux de variation (dérivée)

calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}}\right)$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$

e) Exemples de changement d'écriture (variable)

calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin 3x}{\sin 6x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin(x-a)}{x-a}\right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}\right)$

Exercice 04 : Calcule les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x-1}}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{2x}}{e^{x+2}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} e^x$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-5}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - e}{x - e}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 3 - 4 \ln x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1}$

Exercice 05 :

Dans chacun des cas suivants, calcule la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$; 2) $f(x) = \ln(2x + 3) + \ln(-x^3 + 5)$; 3) $f(x) = (2x - 1)^2$
 4) $f(x) = (-5x + 3)^4$; 5) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$; 6) $f(x) = \frac{e^x}{e^{x+4}}$; 7) $f(x) = \ln(x+2) + \frac{8}{x}$
 8) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; 9) $f(x) = \ln((x^2 - 2x)(3x + 1))$; 10) $f(x) = (x - 2)^2(1 - 2x)$
 11°) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 12°) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$; 13°) $f(x) = \sqrt{-x^3 + 2x + 5}$;
 14) $f(t) = (2t + 3)e^{2t}$; 15) $f(x) = x + 2 + \ln\left(\frac{x^2}{3x+7}\right)$; 16) $f(p) = \frac{p}{p+1} + p \ln(p)$;
 17) $f(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}$; 18) $C(q) = (2q + 1) \ln(q^2 + q)$; 19) $P(t) = 2te^{-0,5t^2+2}$; 20) $f(t) = \frac{2t}{e^t + 3}$
 21) $C(x) = \ln(x^3 + 3x - 8)$; 22) $f(x) = \frac{e^x}{2x+3}$; 22) $g(x) = x \ln x + \frac{1}{x}$; 23) $K(q) = \frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q}}$

Exercice 06 : Pour chacune des fonctions suivantes, la fonction dérivée.

- 1) $f(x) = \sin(3x)$; 2) $f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{5}\right)$; 3) $f(x) = x^3 \sin x$; 4) $f(x) = \tan(-2x + 5)$
 5) $f(x) = \cotan(2x)$; 6) $g(x) = \sin^3 x$; 7) $h(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x$; 8) $h(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$

Exercice 07 : étudie la dérivabilité de f au point x_0 donné dans chaque cas

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & ; x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} ; 2) \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} & \text{si } x \in]1, 3] \end{cases} ; x_0 = 1$$

$$3) f(x) = |x^2 - 1| ; x_0 = 1 ; 4) f(x) = \frac{x - 2}{2 - |x|} ; x_0 = 0 ; 5) f(x) = \sqrt{1 - x} ; x_0 = 1$$

Exercice 08 : 1°) détermine a et b pour que f soit continue et dérivable en x_0 donnée

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} ; x_0 = 1 ; \begin{cases} f(x) = ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases} ; x_0 = -2$$

2°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse x_0 donné ;

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 ;$$

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in]0 ; 1] & f(x) = (1 - e^{-x})\ln x \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 ; \begin{cases} \text{pour } x > 0, & f(x) = x(1 - \ln x)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

Exercice 09: Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$

1°) Etudie la dérivabilité et la continuité de f sur $[0 ; +\infty[$

2°) Montre que f est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera ;

3°) Sur quel ensemble f^{-1} est-elle continue ? Explicite $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$;

4°) Montre que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}[$

Exercice 10 : Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1°) Détermine l'ensemble de définition D_f de f puis étudie la dérivabilité de f sur D_f ;

2°) Montre que f est une bijection de $[0 ; 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera ;

3°) Explicite $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

Exercice 11 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \begin{cases} x^3 + 12x + 1 & \text{si } x \in]-\infty ; 0] \\ \sqrt{1+x^2} - x & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

1°) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2°) Etudie la continuité de f sur D_f puis la dérivabilité de f en 0 ;

3°) calcule la fonction dérivée de f puis dresse le tableau de variation f ;

4°) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty ; 0]$ une solution unique α ,

vérifie que $\alpha \in]\frac{-1}{12} ; 0[$

5°) Soit g la restriction de f sur $]0 ; +\infty[$

a°) Montre que g réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera ;

b°) soit g^{-1} la fonction réciproque de g ; étudie la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J puis explicite $g^{-1}(x)$; pour tout x de J

Exercice 12 : 1°) Soit $f: x \mapsto x + 3 \cos x$,

a) Montre que $x - 3 \leq x + 3 \cos x \leq x + 3$ et en déduis les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$;

b) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montre que g est continue en 0

puis Montre que pour tout $x \in]\frac{2}{3} ; +\infty[$: $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interprète graphiquement le résultat

d) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x)$

2°) Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \sin x$.

Démontrer que pour tout x de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$; on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

3°) On donne $f:]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto f(x) = \sin x$ Montre que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$;

4°) Montre que pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

5°) Montre que pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$, on a : $x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$

6°) Montre que pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$

7°) Montre que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \cotan x - 1 \leq \frac{\pi}{4} - x$

8°) On donne $f(t) = \sqrt{t}$, pour tout $t \in [x ; x+1]$: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

9°) On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$

Montre que, pour tout $x \geq 2$; $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$; En déduis la limite de f en $+\infty$;

Exercice 13: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

1°) Montre que, pour tout réel x , $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

2°) En déduis les limites suivantes: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2 - \cos x)}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(2 - \cos x)}$

Exercice 14 : 1°) Soit la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Montre que, pour $x > 1$, $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \varphi(x) \leq \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$. En déduis la limite de φ en $+\infty$

2°) Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = |x - 1| + \frac{2}{x+1}$

a°) Etudier la continuité de f au point d'abscisse $x = 1$

b°) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x = 1$.

3°) Soient les fonctions f et g définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$$

Vérifier que g est le prolongement de f , par continuité au point $x = 0$.

Exo15 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1 ; f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} ; f(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}} ; f(x) = 10x(5x^2 - 7)^4$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^3} ; f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-2}} ; f(x) = \frac{3}{2-x} ; f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1} ; f(x) = (-4x+1)^5$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; f(x) = \frac{x}{x^2+1} ; f(x) = \frac{\ln x}{x} ; f(x) = e^{-x+3} ; h(x) = \frac{1}{x+1} + x e^{x^2} - 2$$

$$f(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x-1} ; f(x) = e^{2x} ; f(x) = 3x e^{x^2-1} ; f(x) = \frac{e^x}{e^{x+2}} ; g(t) = \frac{e^x}{e^{x+1}}$$

Exercice 16 : 1- On donne une fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$

a- Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$

b- Déterminer une primitive sur $]2 ; +\infty[$ de la fonction f

2- f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : pour tout x distinct de $-1/2$. $f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$

b) En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$.

c) Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ vérifiant $F(0) = 1$

3- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{(e^x+2)^2}$

a) Détermine les réels a ; b et c tels que pour tout $x \neq -2$: $\frac{1}{(x+2)^2} = a + \frac{bx}{x+2} + \frac{cx}{(x+2)^2}$

b) En déduis une autre écriture de $f(x)$ puis la primitive sur $\mathbb{R}$ de f

Exo 17 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

$$1) f(x) = 3 \sin(3x-2) \quad 2) f(x) = 2 \cos x \sin^4 x \quad 3) f(x) = x \cos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad 4) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$5) f(x) = \cos x - 2 \sin x ; \quad 6) f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x ; \quad 7) f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x ;$$

Exo 18 : Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I , qui vérifie les conditions indiquées.

$$f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} ; I =]0 ; +\infty[\text{ et } F(2) = 0 ; f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x ; I = \mathbb{R} \text{ et } F(\pi) = -1$$

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} ; I =]0 ; +\infty[\text{ et } F(1) = 1 \quad f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x ; I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } F(0) = 1$$

Remarque : Pour déterminer les primitives des fonctions du type $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$), on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Si m et n sont de même parité, linéariser $\cos^n x \sin^m x$.
- Si m et n sont de parités différentes, utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et écrire $\cos^n x \sin^m x$ sous la forme $\cos x P(\sin x)$ si n est impair ou $\sin x P(\cos x)$ si m est impair, P désignant un polynôme.

Exo 19 : Soient : $f : x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$; $g : x \mapsto 2 \cos^4 x \sin^5 x$ et $h : x \mapsto \cos 3x \cdot \sin 4x$.

Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h .

Exercice 20 : Calcule les intégrales suivantes

$$\int_0^1 (2x+4) dx ; \int_{-1}^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx ; \int_0^1 \frac{dx}{1+x} ; \int_0^1 (-x^2+4x+1) dx ; \int_0^2 e^{-3x+4} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$\int_{-1}^1 e^{3x+1} dx ; \int_2^3 \left(2x-1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx ; \int_0^1 (2x-5)(x^2-5x+1) dx ; \int_0^{\pi} \cos(3t) dt$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx ; \int_0^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(2x+3)^2}\right) dx ; \int_{-1}^0 (2x-3)e^{x^2-3x+1} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - \sin t\right) dt$$

Exo 21 : 1°) En utilisant la formule de l'intégration par partie, calcule les intégrales suivantes

$$\int_0^1 (x+2)e^{3x+1} dx ; \int_1^2 x\sqrt{2x+1} dx ; \int_e^{2e} x \ln(x^2) dx ; \int_1^e \ln x dx ; \int_{-1}^1 x^2 e^x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos 2x dx ; \int_0^{\pi} (3t^2 - t + 1) \sin t dt ; \int_0^{\pi} e^t \cos t dt ; \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$$

2) On considère les intégrales I et J suivants : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin^2 x dx$

Calcule $I+J$ et $I-J$ puis en déduis I et J ;

Exo 22 : 2°) Donne un encadrement du nombre réel $\int_1^3 \ln(4+t^2) dt$

2) Calcule la valeur moyenne sur $[0 ; \pi]$ de la fonction f sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - \sin x$

Exercice 23 : Soient $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}$; $g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et $h(x) = \sin^2 3x$;

1) Montre que f est continue et paire sur $\left[-\frac{\pi}{9} ; \frac{\pi}{9}\right]$ puis calcule $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} f(x) dx$;

2) Montre que g est continue et impaire sur $[-3 ; 3]$ puis calcule $\int_{-3}^3 g(x) dx$;

3) Montre que h est continue et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$ puis calcule $\int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} f(x) dx$;

Exercice 24 :

1) Linéariser : $A = \cos^2 x + \sin^3 x$; $B = \cos^4 x$

2) En déduire : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} B dx$

3) a) calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

b) En déduire l'intégrale suivante : $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$

Exercice 25 : soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

a) En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que : $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$
(On pourra remarquer que $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$)

b) Calculer I_0 ; En déduire I_2 et I_4

c) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin^2 x dx$;

Calcule $I+J$ puis $I-J$ puis en déduis les valeurs de I et de J

Exercice 26 : On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx ; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx ;$$

1) Calcule $I-J$ et $I+J+K$

2) Exprime $\cos 4x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

3) En déduis la valeur de $I+J-3K$ puis celles de I ; J et K

Exercice 27 :

1) Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

Calcule $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$; Soit $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$; calcule $I_1 + I_2$ et en déduis la valeur de I_2

2) Détermine trois réels a, b et c tels que $u \neq \frac{1}{2} : \frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$; Calcule $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx$

Exercice 28 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\ln x = -2 ; \log x = \frac{1}{4} ; \ln x^2 = 16 ; \log x^2 = 16 ; \ln(2x^2 - 3x + 1) = 0 ;$$

$$\ln(x+3) = \ln(2x+5) ; \ln x + \ln(x-1) = \ln(2x-1) ; \ln(x+1) - \ln(-x+3) = \ln 2$$

$$\log\left(\frac{x-2}{1-x}\right) = \log x ; \log(x^2 + x + 1) = 1 ; \log 2 + \log(2x-3) = \log(-x+7)$$

$$9^x = 2 ; 3^{x+1} = 2^x ; 4^{2x} = 5^x ; 2^{x+1} = 8 ; (x+1)^x = 1 ; \frac{1}{3^{-3x+1}} = 9^x$$

Exercice 29 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\ln(x+3) < -2 ; \ln(x^2 + 3x - 4) \geq 0 ; \log(-2x+4) > 7 ; e^{x-6} > 1 ; -3 \leq \ln(x) ;$$

$$2 \log x < \log e^4 ; \ln(x^2 - x + 1) \leq \ln(2-x) ; \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x ; 4^{3+x} \geq 3^{5x} ; 7^x < 7^{-x+1}$$

Exercice 30 : Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$3(\ln x)^2 + 5 \ln x - 2 = 0 ; (\log x)^2 - 3 \log x - 4 = 0 ; (\ln x)^2 - \ln x = 2 ;$$

$$-(\ln x)^2 + 7 \ln x - 6 = 0 ; 3(e^x)^2 + 5e^x - 2 = 0 ; (e^x)^2 - 3e^x - 4 = 0 ;$$

$$(\log x)^2 - \log x = 2 ; -(e^x)^2 + 7e^x - 6 = 0 ; 3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0 ; 9^x - 3^{x+1} - 10 = 0 ;$$

$$4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0 ; 3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0 ; 3 + \frac{2}{3-x} = 9^x ; 2 \times 10^{2x} + 3 \times 10^x - 5 = 0$$

Exercice 31 : Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$3(\ln x)^2 + 5 \ln x - 2 < 0 ; (\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 > 0 ; (\ln x)^2 - \ln x \leq 2 ; (e^x)^2 - e^x \geq 2$$

$$-(\ln x)^2 + 7 \ln x - 6 \geq 0 ; 3(e^x)^2 + 5e^x - 2 > 0 ; (e^x)^2 - 3e^x - 4 < 0 ; -(e^x)^2 + 7e^x - 6 \leq 0$$

Exercice 32 : Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

$$(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; \begin{cases} 5e^x + e^y = 4 \\ 4e^x - 6e^y = -7 \end{cases} ; \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 2 \ln x - \ln y = 0 \\ 4 \ln x + \ln y = 3 \end{cases} ; \begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases} ; \begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases} ; \begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases} ; \begin{cases} \ln(y+6) - \ln x = 3 \ln x \\ e^{6x} e^y = e^{-6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases} ; \begin{cases} 5 \log x + \log y = -4 \\ 4 \log x - 6 \log y = 7 \end{cases} ; \begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 729 \\ \ln x + \ln y = \ln 4 \end{cases} ; \begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ \ln 2x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$$

Exercice 33:

1-On considère l'application polynôme P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $P(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$.

- Vérifier que $P(8) = 0$.
- Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
- En déduire la résolution de l'inéquation : $(x \in \mathbb{R}), P(x) \leq 0$.

2- En utilisant les résultats de la question 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- L'équation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 = 0$.
- L'équation : $(\log x)^3 - 4(\log x)^2 - 29 \log x - 24 = 0$.
- L'équation : $(e^x)^3 - 4(e^x)^2 - 29e^x - 24 = 0$

$$d) \text{ L'équation : } 5^{3x} - 4 \times 5^{2x} - 29 \times 5^x - 24 = 0$$

$$e) \text{ L'équation : } 2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0$$

Exercice 34 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1°) a°) Vérifie que $P(-1) = 0$

b°) Ecris $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré,

c°) En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $P(x) \leq 0$

2°) En utilisant les résultats de la question 1) ; résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) 2 \ln^3 x - \ln^2 x - 5 \ln x - 2 \leq 0 ; b) 2 \ln x + \ln(2x-1) \leq \ln(5x+2) ;$$

Exercice 35 : Résous les équations différentielles :

$$y' - 2y = 0 ; 2y' = y ; 3y - 2y = 0 ; -2y' = \sqrt{2}y \text{ et } y' - (\ln 2)y = 0.$$

$$-f' + 2f = 0 ; 3\theta' + 6\theta = 0 ; y' - y = 0 \text{ et } 2g' - 5g = 0 ;$$

Exercice 36 : Résous les équations différentielles satisfaisant la condition donnée:

$$1) y' - y = 0; x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 1; 2) f' + 3f = 0; f(1) = 1; 3) 5f' + f = 0; f(-5) = 0;$$

$$4) -f' + 2f = 0; f(3) = -2; 5) 3\theta' + 6\theta = 0; \theta(4) = 2 \text{ et } 6) 2g' - 5g = 0; g(1) = -1$$

Exercice 37 : Soit $(E): y' - 3y = 0$.

a) Résous (E) .

b) Détermine la solution de (E) dont la courbe passe par le point $I(0; 2)$.

c) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point J d'abscisse 2 une tangente de coefficient directeur -2 .

d) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point P d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite $(D): 2y + x = 0$.

Exercice 38 : Résous dans $\mathbb{R}$

$$y'' - 3y' - 4y = 0 ; y'' - 4y' + 4y = 0 ; y'' + y' + y = 0 ; 2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0 ;$$

$$\leq \frac{0}{3} y'' - 2y' + 9y = 0 ; 2y'' + 3y' = 0 ; 3y'' - y = 0 ; y'' + y = 0$$

Exercice 39 : Détermine pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :

$$(E_1): y'' + y' - 6y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = -8$$

$$(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 4 \text{ et } f'(0) = 1.$$

$$(E_3): y'' - 6y' + 13y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 3 \text{ et } f'(0) = 5.$$

$$(E_4): 2y'' + 5y' + 3y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = 3.$$

$$(E_5): 9y'' + 64y = 0 \text{ Sachant que } f(\pi) = 0 \text{ et } f'(2\pi) = \frac{1}{3}.$$

$$(E_6): y'' + \pi^2 y = 0 \text{ Sachant que } y(0) = y'(0) = 0$$

Exercice 40 : On considère l'équation différentielle $(E): y' + y = x^2 + x$.

1) Détermine les réels a, b et c pour que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) .

2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_0): h' + h = 0$. (l'équation homogène associée à (E))

3) Résous l'équation différentielle (E_0) et en déduire les solutions de (E) .

4) Détermine la solution particulière φ de (E) telle que la courbe (C) de φ passe par le point $A(0; -1)$