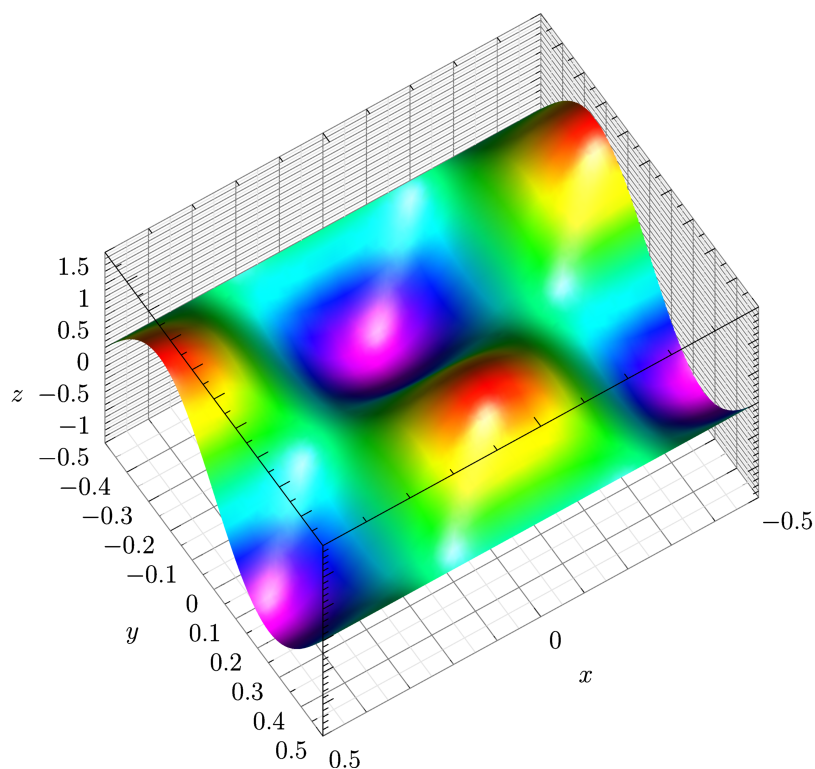


# Annales de mathématiques



Denis BITOUZÉ

# Avant-propos

Ces annales sont un recueil des énoncés et des corrigés de certains des contrôles des années précédentes.

Au chapitre I page 4, on trouvera les énoncés, éventuellement quelque peu modifiés, des épreuves. Pour la plupart d'entre elles, les documents et calculatrices personnels étaient interdits mais, lors de certaines, les calculatrices du département avaient été mises à la disposition des étudiants. Jusqu'à l'année universitaire 2004–2005, le temps imparti pour chaque épreuve était de 2 h. À partir de 2005–2006, le temps imparti pour

- les 1<sup>re</sup> et 3<sup>e</sup> épreuves de l'année universitaire était de 1 h ;
- les 2<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> épreuves de l'année universitaire était de 2 h.

Regroupés dans le chapitre II page 75, les corrigés indiquent de manière très précise la ou une des méthodes à employer et un exemple de rédaction dont il est fortement conseillé de s'inspirer.

Ces annales constituent un excellent moyen de jauger ce qui peut vous être demandé en contrôle et de vous exercer à composer en temps limité. Vous êtes donc invités à les travailler, avant la veille de la première épreuve !

# Table des matières

|                                     |          |                                         |    |
|-------------------------------------|----------|-----------------------------------------|----|
| <b>I Énoncés des épreuves</b>       | <b>4</b> |                                         |    |
| Année 1995–1996 . . . . .           | 4        | Année 2004–2005 . . . . .               | 38 |
| 2 avril 1996 . . . . .              | 4        | 5 janvier 2005 . . . . .                | 38 |
| 9 mai 1996 . . . . .                | 5        | 28 avril 2005 . . . . .                 | 39 |
| 19 juin 1996 . . . . .              | 6        | 12 mai 2005 . . . . .                   | 40 |
| Année 1996–1997 . . . . .           | 8        | 15 juin 2005 . . . . .                  | 41 |
| 9 janvier 1997 . . . . .            | 8        | Année 2005–2006 . . . . .               | 42 |
| 12 mars 1997 . . . . .              | 8        | 23 novembre 2005 . . . . .              | 42 |
| 4 juin 1997 . . . . .               | 10       | 26 janvier 2006 . . . . .               | 43 |
| Année 1997–1998 . . . . .           | 11       | 2 février 2006 . . . . .                | 44 |
| 24 novembre 1997 . . . . .          | 11       | 17 mai 2006 . . . . .                   | 45 |
| 16 février 1998 . . . . .           | 12       | 21 juin 2006 . . . . .                  | 46 |
| 11 juin 1998 . . . . .              | 14       | Année 2006–2007 . . . . .               | 47 |
| Année 1998–1999 . . . . .           | 15       | 1 <sup>er</sup> décembre 2006 . . . . . | 47 |
| 16 novembre 1998 . . . . .          | 15       | 15 janvier 2007 . . . . .               | 48 |
| 26 février 1999 . . . . .           | 16       | 22 janvier 2007 . . . . .               | 49 |
| 11 juin 1999 . . . . .              | 17       | 11 avril 2007 . . . . .                 | 50 |
| Année 1999–2000 . . . . .           | 19       | 13 juin 2007 . . . . .                  | 50 |
| 2 décembre 1999 . . . . .           | 19       | 20 juin 2007 . . . . .                  | 52 |
| 1 <sup>er</sup> mars 2000 . . . . . | 20       | Année 2007–2008 . . . . .               | 52 |
| 13 juin 2000 . . . . .              | 21       | 10 décembre 2007 . . . . .              | 52 |
| Année 2000–2001 . . . . .           | 23       | 15 janvier 2008 . . . . .               | 53 |
| 19 décembre 2000 . . . . .          | 23       | 18 janvier 2008 . . . . .               | 54 |
| 4 mai 2001 . . . . .                | 24       | 25 avril 2008 . . . . .                 | 55 |
| 15 juin 2001 . . . . .              | 25       | 12 juin 2008 . . . . .                  | 55 |
| Année 2001–2002 . . . . .           | 26       | Année 2008–2009 . . . . .               | 57 |
| 10 décembre 2001 . . . . .          | 26       | 24 novembre 2008 . . . . .              | 57 |
| 18 mars 2002 . . . . .              | 27       | 9 janvier 2009 . . . . .                | 57 |
| 17 juin 2002 . . . . .              | 29       | 22 janvier 2009 . . . . .               | 59 |
| Année 2002–2003 . . . . .           | 30       | 22 mai 2009 . . . . .                   | 59 |
| 18 décembre 2002 . . . . .          | 30       | 15 juin 2009 . . . . .                  | 60 |
| 9 avril 2003 . . . . .              | 31       | 17 juin 2009 . . . . .                  | 61 |
| 13 juin 2003 . . . . .              | 32       | Année 2009–2010 . . . . .               | 62 |
| Année 2003–2004 . . . . .           | 34       | 26 novembre 2009 . . . . .              | 62 |
| 16 décembre 2003 . . . . .          | 34       | 8 janvier 2010 . . . . .                | 63 |
| 7 avril 2004 . . . . .              | 35       | 25 mars 2010 . . . . .                  | 65 |
| 8 juin 2004 . . . . .               | 37       | 4 juin 2010 . . . . .                   | 65 |

|                                           |           |                                         |            |
|-------------------------------------------|-----------|-----------------------------------------|------------|
| Année 2010–2011 . . . . .                 | 67        | Année 2004–2005 . . . . .               | 156        |
| 10 décembre 2010 . . . . .                | 67        | 5 janvier 2005 . . . . .                | 156        |
| 19 janvier 2011 . . . . .                 | 67        | 28 avril 2005 . . . . .                 | 161        |
| 6 mai 2011 . . . . .                      | 68        | 12 mai 2005 . . . . .                   | 166        |
| 17 juin 2011 . . . . .                    | 69        | 15 juin 2005 . . . . .                  | 170        |
| Année 2011–2012 . . . . .                 | 71        | Année 2005–2006 . . . . .               | 170        |
| 25 novembre 2011 . . . . .                | 71        | 23 novembre 2005 . . . . .              | 170        |
| 12 janvier 2012 . . . . .                 | 72        | 26 janvier 2006 . . . . .               | 173        |
| 20 avril 2012 . . . . .                   | 72        | 2 février 2006 . . . . .                | 177        |
| 21 juin 2012 . . . . .                    | 73        | 17 mai 2006 . . . . .                   | 177        |
| <b>II Corrigés des épreuves</b> . . . . . | <b>75</b> | 21 juin 2006 . . . . .                  | 180        |
| Année 1995–1996 . . . . .                 | 75        | Année 2006–2007 . . . . .               | 180        |
| 2 avril 1996 . . . . .                    | 75        | 1 <sup>er</sup> décembre 2006 . . . . . | 180        |
| 9 mai 1996 . . . . .                      | 80        | 15 janvier 2007 . . . . .               | 183        |
| 19 juin 1996 . . . . .                    | 80        | 22 janvier 2007 . . . . .               | 187        |
| Année 1996–1997 . . . . .                 | 80        | 11 avril 2007 . . . . .                 | 191        |
| 9 janvier 1997 . . . . .                  | 80        | 13 juin 2007 . . . . .                  | 193        |
| 12 mars 1997 . . . . .                    | 83        | 20 juin 2007 . . . . .                  | 193        |
| 4 juin 1997 . . . . .                     | 86        | Année 2007–2008 . . . . .               | 196        |
| Année 1997–1998 . . . . .                 | 91        | 10 décembre 2007 . . . . .              | 196        |
| 24 novembre 1997 . . . . .                | 91        | 15 janvier 2008 . . . . .               | 197        |
| 16 février 1998 . . . . .                 | 94        | 18 janvier 2008 . . . . .               | 202        |
| 11 juin 1998 . . . . .                    | 99        | 25 avril 2008 . . . . .                 | 204        |
| Année 1998–1999 . . . . .                 | 99        | 12 juin 2008 . . . . .                  | 207        |
| 16 novembre 1998 . . . . .                | 99        | Année 2008–2009 . . . . .               | 208        |
| 26 février 1999 . . . . .                 | 104       | 24 novembre 2008 . . . . .              | 208        |
| 11 juin 1999 . . . . .                    | 106       | 9 janvier 2009 . . . . .                | 210        |
| Année 1999–2000 . . . . .                 | 106       | 22 janvier 2009 . . . . .               | 215        |
| 2 décembre 1999 . . . . .                 | 106       | 22 mai 2009 . . . . .                   | 217        |
| 1 <sup>er</sup> mars 2000 . . . . .       | 111       | 15 juin 2009 . . . . .                  | 221        |
| 13 juin 2000 . . . . .                    | 115       | 17 juin 2009 . . . . .                  | 222        |
| Année 2000–2001 . . . . .                 | 115       | Année 2009–2010 . . . . .               | 224        |
| 19 décembre 2000 . . . . .                | 115       | 26 novembre 2009 . . . . .              | 224        |
| 4 mai 2001 . . . . .                      | 121       | 8 janvier 2010 . . . . .                | 228        |
| 15 juin 2001 . . . . .                    | 127       | 25 mars 2010 . . . . .                  | 233        |
| Année 2001–2002 . . . . .                 | 127       | 4 juin 2010 . . . . .                   | 236        |
| 10 décembre 2001 . . . . .                | 127       | Année 2010–2011 . . . . .               | 239        |
| 18 mars 2002 . . . . .                    | 132       | 10 décembre 2010 . . . . .              | 239        |
| 17 juin 2002 . . . . .                    | 138       | 19 janvier 2011 . . . . .               | 242        |
| Année 2002–2003 . . . . .                 | 138       | 6 mai 2011 . . . . .                    | 246        |
| 18 décembre 2002 . . . . .                | 138       | 17 juin 2011 . . . . .                  | 250        |
| 9 avril 2003 . . . . .                    | 142       | Année 2011–2012 . . . . .               | 253        |
| 13 juin 2003 . . . . .                    | 148       | 25 novembre 2011 . . . . .              | 253        |
| Année 2003–2004 . . . . .                 | 148       | 12 janvier 2012 . . . . .               | 256        |
| 16 décembre 2003 . . . . .                | 148       | 20 avril 2012 . . . . .                 | 260        |
| 7 avril 2004 . . . . .                    | 152       | 21 juin 2012 . . . . .                  | 263        |
| 8 juin 2004 . . . . .                     | 156       | <b>Index</b> . . . . .                  | <b>269</b> |

# Chapitre I

## Énoncés des épreuves

### Année 1995–1996

2 avril 1996

#### Exercice 1 (sur 4)

1. Calculer le développement limité de  $\sqrt{1+x} \cos x$  à l'ordre 3 en 0.
2. Étudier localement au point d'abscisse  $x_0 = 0$  la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation

$$y = \frac{\sqrt{1+x} \cos x - 1}{x}.$$

#### Exercice 2 (sur 3)

1. Rappeler la définition de  $\operatorname{Arccos} x$ .
2. Rappeler l'expression de  $\cos 2a$  en fonction de  $\cos a$ .
3. Prouver que  $\cos(2 \operatorname{Arccos} \frac{5}{6}) = \frac{7}{18}$  et en déduire que  $2 \operatorname{Arccos} \frac{5}{6} = \operatorname{Arccos} \frac{7}{18}$ .

#### Exercice 3 (sur 5)

1. Démontrer que, en 0,  $\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ .
2. (a) Rappeler le développement limité de  $\ln(1+t)$  à l'ordre 3 en 0.

- (b) Calculer le développement limité de  $\ln(1 + \tan h) - \ln(1 - \tan h)$  à l'ordre 3 en 0.

3. On rappelle que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Déduire des questions précédentes le développement limité de  $\ln(\tan x)$  à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{4}$ .

#### Exercice 4 (sur 4)

1. (a) Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

- (b) Prouver que si  $c > 0$  alors

$$0 < \frac{1}{(1+c)^3} < 1.$$

- (c) En appliquant cette formule, établir que pour tout  $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2. Pour quelles valeurs de  $x$  cette inégalité permet-elle d'affirmer que  $x - \frac{x^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\ln(1+x)$  à  $10^{-3}$  près ?
3. Donner une valeur approchée de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 5 (sur 4)****1. Étude préliminaire.**

- (a) Pour  $t \geq 0$ , on pose  $v(t) = 2t\sqrt{4-t}$ .
- Prouver que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 4]$ .
  - Déterminer le maximum de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .
- (b) i. Pourquoi  $v$  est-elle intégrable sur  $\mathcal{D}$  ?
- Calculer l'intégrale de  $v$  sur  $\mathcal{D}$  au moyen d'une intégration par parties.

**Définition I.1.1.**

- iii. Soit  $f$  une fonction intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  la quantité  $\mu$  définie par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Déduire de la question précédente la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .

2. **Étude concrète.** Un motard réalise une expérience de vitesse sur une piste rectiligne d'extrémités  $A$  et  $B$ . Sa vitesse instantanée, exprimée en km/h, est donnée en fonction du temps par  $v(t) = at\sqrt{T-t}$  où

- $a$  est un paramètre réel strictement positif ;
- $t$  est exprimé en heure ;
- $0$  et  $T$  sont les instants respectivement de départ en  $A$  et d'arrivée en  $B$ .

- (a) Calculer  $v(0)$  et  $v(T)$  puis déterminer l'instant  $t_M$  de vitesse maximale ainsi que la vitesse maximale  $v_M = v(t_M)$ .
- (b) On désigne par  $x$  la distance parcourue depuis  $A$  et on rappelle

qu'alors la fonction  $x$  est une primitive de la fonction  $v$ . Calculer  $x(T)$  et en déduire la vitesse moyenne  $V$  du motard sur le parcours  $AB$ .

- (c) Prouver qu'il existe un instant au cours de l'expérience auquel la vitesse instantanée du motard égale sa vitesse moyenne.
- (d) *Application numérique.* Sachant que  $A$  et  $B$  sont distants de 1 km et que la vitesse maximale atteinte est 200 km/h, déterminer  $T$  en secondes puis  $V$  en km/h. On donne  $15\sqrt{3} \approx 26$  et  $80\sqrt{3} \approx 139$ .

**9 mai 1996****Exercice 1 (sur 4)**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}.$$

- Calculer le développement limité généralisé de  $f(x)$  à l'ordre 1 en  $\pm\infty$ .
- (a) Déterminer les asymptotes  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  à  $\mathcal{C}$  respectivement en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- (b) Préciser les positions relatives
  - de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}^+$  au voisinage de  $+\infty$
  - de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}^-$  au voisinage de  $-\infty$

**Exercice 2 (sur 5)**

- Soit  $\alpha$  un réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .
  - Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie circulaire et en déduire que
 
$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$
  - Rappeler l'expression de  $\sin 2\alpha$  en fonction de  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  et en déduire que
 
$$\sin 2\alpha = 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha.$$

- (c) Dédurre de ce qui précède que

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

2. On pose
- $t = \tan(x/2)$
- .

- (a) Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction
- $\tan$
- et en déduire que

$$dt = \frac{1}{2}(1 + t^2) dx.$$

- (b) À l'aide de la question (1c), exprimer
- $\sin x$
- en fonction de
- $t$
- .

3. On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

- (a) En utilisant le changement de variable
- $t = \tan(x/2)$
- , établir que

$$I = \int_0^1 \frac{2 dt}{(1 + t)^2}.$$

- (b) Quel changement de variable permet d'affirmer que

$$I = 2 \int_1^2 \frac{du}{u^2} ?$$

- (c) Calculer
- $I$
- .

**Exercice 3 (sur 4)**

1. (a) Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

- (b) Prouver que si
- $c > 0$
- alors

$$0 < \frac{1}{(1 + c)^{5/2}} < 1.$$

- (c) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, établir que pour tout
- $x > 0$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

2. Pour quelles valeurs de
- $x$
- cette inégalité permet-elle d'affirmer que
- $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$
- est une valeur approchée de
- $\sqrt{1 + x}$
- à
- $10^{-3}$
- près?

3. Donner une valeur approchée de
- $\sqrt{1,2}$
- à
- $10^{-3}$
- près.

**Exercice 4 (sur 4)**Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2)}.$$

- Pourquoi la fonction  $f$  n'est-elle dérivable que sur  $\mathbb{R}^*$  ?
- La fonction  $f$  admet-elle un développement limité en 0 d'ordre supérieur ou égal à 1 ?
- Déterminer les développements limités de  $f$  d'ordre 3 à droite et à gauche de 0.

**Exercice 5 (sur 3)**

- Calculer la dérivée de  $\text{Arctan}(\frac{1}{x})$ .
- On pose  $f(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan}(1/x)$ . Dédurre de la question (1) l'expression de  $f$ 
  - sur  $\mathbb{R}^{+*}$
  - sur  $\mathbb{R}^{-*}$ .

**19 juin 1996****Exercice 1 (sur 3)**

1. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

2. (a) Déterminer un équivalent, au voisinage de 1, de

$$\frac{x}{4x-1} \sqrt{x-1}.$$

(b) En déduire la nature de l'intégrale

$$\int_1^3 \frac{4x-1}{2x\sqrt{x-1}} dx.$$

### Exercice 2 (sur 3)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que  $f$  est partiellement dérivable mais discontinue au point  $(0, 0)$ .
2. (a) Déterminer la différentielle  $df(x, y)$  de  $f$  en tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
(b) Calculer l'image du couple  $(3, -4)$  par  $df(2, 1)$ .

### Exercice 3 (sur 4)

On pose  $\Omega = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  et on considère la forme différentielle  $\omega$  définie sur  $\Omega$  par

$$\omega(x, y) = \frac{1}{x+y} (ydx - xdy).$$

1. Prouver que la forme différentielle  $\omega$  n'est pas exacte.
2. Démontrer que la forme différentielle

$$\frac{1}{y} \omega$$

est exacte sur  $\Omega$  et déterminer une fonction dont elle est, sur cet ensemble, la différentielle.

#### Définition I.1.2.

La fonction

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{y}$$

est appelée *facteur intégrant de la forme différentielle*  $\omega$ .

### Exercice 4 (sur 5)

On considère l'intégrale  $I$  définie par

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{4+t^2}}.$$

1. Prouver que l'intégrale  $I$  est convergente.

2. On pose, pour  $X \geq 2$ ,

$$I(X) = \int_2^X \frac{dt}{t^2\sqrt{4+t^2}}.$$

En utilisant le changement de variable  $t = 2 \tan u$  pour  $u$  dans  $]0, \pi/2[$ , établir que

$$I(X) = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\text{Arctan} \frac{X}{2}} \frac{\cos u}{\sin^2 u} du.$$

3. En déduire la valeur de  $I$ .

### Exercice 5 (sur 5)

On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 y^2}.$$

1. Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de  $f$ .
3. **Nota.** Dans cette question, on ne cherchera pas à étudier le signe du discriminant  $\Delta' = (f''_{xy})^2 - f''_{x^2} f''_{y^2}$ . Soit  $x_0$  un réel et  $M_0(x_0, 0)$  un point critique de  $f$ . Préciser la nature de  $M_0$  en étudiant, pour  $(x, y)$  dans  $\mathcal{D}$ , le signe de  $f(x, y) - f(x_0, 0)$ . Qu'en est-il des autres points critiques de  $f$ ?
4. (a) Soit  $(x, y)$  un point de  $\mathcal{D}$ . Calculer  $df(x, y)$ .  
(b) Soit

$$(x, y) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(\Delta x, \Delta y) = (2.10^{-2}, 4.10^{-2})$$

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Sachant que  $\sqrt{6} \approx 2,45$ , estimer  $\Delta f(x, y)$  à l'aide de  $df(x, y)$ .

## Année 1996–1997

9 janvier 1997

## Exercice 1 (sur 4)

Calculer

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 - 1},$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan^2 x (1 - \sin x).$

## Exercice 2 (sur 6)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

- Le but de cette question est de démontrer le résultat, admis en cours, suivant : pour tout  $\alpha$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

- Sans calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .
- Sachant que  $\ln 2 < 1$  et en utilisant la question précédente, établir que pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x < \sqrt{x}$ .
- En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

- Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ . En posant  $X = x^\alpha$ , prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

- Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
  - Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

## Exercice 3 (sur 2)

- Rappeler, avec ses hypothèses, le théorème des accroissements finis.

- On note  $T$  la température (en  $^{\circ}\text{C}$ ) à l'instant  $t$  (en h). Quand la température diminue,  $dT/dt$  représente la vitesse de refroidissement. Le record de variation de température en l'espace de 12 h a été atteint en 1916 lorsque la température passa de  $6^{\circ}\text{C}$  à  $-48^{\circ}\text{C}$ . Prouver que la vitesse de refroidissement a, à un moment donné, dépassé  $-4^{\circ}\text{C h}^{-1}$  pendant cette période.

## Exercice 4 (sur 8)

- Rappeler la définition de  $\text{Arcsin } x$ .
  - Prouver que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\sin(\text{Arcsin } x) = x$ .
  - Démontrer que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$ .
  - Déduire de ce qui précède que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,

$$\sin(2 \text{Arcsin } x) = 2x\sqrt{1 - x^2}. \quad (\text{I.1})$$

- Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Arcsin } x$ ?
  - Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$ ? En déduire, à l'aide de la relation (I.1),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{\text{Arcsin } x}.$$

## Exercice 5 (Hors barème)

En revenant à la définition de la limite, démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 4 = 4.$$

12 mars 1997

## Exercice 1 (sur 7,5)

- Calculer l'intégrale

$$\int t e^{2t} dt.$$

2. Calculer, éventuellement au moyen d'un changement de variable, l'intégrale

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x \, dx.$$

4. (a) Soit  $\alpha$  et  $\theta$  deux réels.
- Après avoir rappelé l'expression de  $\cos 2\alpha$  en fonction de  $\sin \alpha$ , exprimer  $\sin^2 \alpha$  en fonction de  $\cos 2\alpha$ .
  - Rappeler l'expression de  $\sin 2\theta$  en fonction de  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$ . En déduire, à l'aide de la question précédente, que

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}.$$

- (b) Éventuellement au moyen du changement de variable  $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ , calculer

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

### Exercice 2 (sur 4)

1. Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$y' - 3x^2 y = x^2.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 10y' + 41y = 0.$$

### Exercice 3 (sur 1,5)

Effectuer la division selon les puissances *croissantes*, à l'ordre 3, du polynôme  $1 - 3X$  par le polynôme  $1 - X^2$ .

### Exercice 4 (sur 4,5)

1. Prouver que, pour tout  $h > 0$  et tout  $\theta$  dans  $]0, 1[$ ,

$$-1 < \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} < 0.$$

2. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

3. (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

déduire de la question précédente que, pour tout  $h > 0$ ,

$$1 - h + h^2 - h^3 < \frac{1}{1+h} < 1 - h + h^2.$$

- (b) Pour quelles valeurs de  $h$  l'inégalité précédente permet-elle d'affirmer que  $1 - h + h^2$  est une valeur approchée de  $\frac{1}{1+h}$  à  $10^{-3}$  près ?
- (c) Donner une valeur approchée de  $\frac{1}{1,09}$  à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 5 (sur 2,5)

1. (a) Soit  $a$  un réel strictement positif. Rappeler l'ensemble des réels  $\alpha$  pour lesquels converge l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

- (b) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Rappeler l'ensemble des réels  $\alpha$  pour lesquels converge l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} \, dx.$$

3. (**Hors barème**) Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx.$$

## 4 juin 1997

### Exercice 1 (sur 6)

- Rappeler, avec ses conditions d'application, la formule donnant la dérivée de la fonction réciproque  $f^{-1}$  d'une fonction numérique de variable réelle  $f$ .
- (a) Rappeler rapidement les principales propriétés et la représentation graphique de la fonction cosinus hyperbolique ch.  
(b) Rappeler la définition de la fonction Argch et exprimer sa dérivée.
- Calculer les intégrales

(a)

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

(b)

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}.$$

### Exercice 2 (sur 5)

- Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' - xy = 2x. \quad (E_1)$$

- Après avoir expliqué pourquoi l'équation sans second membre

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (E'_2)$$

admet comme solution générale

$$y = e^{-x} (C_1 x + C_0), \quad C_0, C_1 \in \mathbb{R},$$

résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 7x^2 + 28x + 15 \quad (E_2)$$

en en cherchant une solution particulière sous la forme  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

### Exercice 3 (sur 2,5)

- Soit  $k$  un entier naturel non nul. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que

$$\int (\ln t)^k dt = t (\ln t)^k - k \int (\ln t)^{k-1} dt.$$

- Calculer

$$\int_1^2 (\ln t)^3 dt.$$

### Exercice 4 (sur 3,5)

- Prouver que si  $c > 0$  alors

$$0 < \frac{1}{(1+c)^{7/2}} < 1.$$

- Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

- (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction

$$f : h \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+h}},$$

déduire de la question précédente que, pour tout  $h > 0$ ,

$$1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} - \frac{5h^3}{16} < \frac{1}{\sqrt{1+h}} < 1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8}.$$

- (b) Pour quelles valeurs de  $h$  cette inégalité permet-elle d'affirmer que  $1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8}$  est une valeur approchée de  $\frac{1}{\sqrt{1+h}}$  à  $10^{-3}$  près ?

- (c) Prouver que  $1 - 0,1/2 + 3(0,1)^2/8$  est une valeur approchée de  $\frac{1}{\sqrt{1,1}}$  à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 5 (sur 3)**

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction  $t \mapsto \sin t \cos t$ .

2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction

$$t \mapsto \frac{e^t - 1}{\ln(1 + t)}.$$

3. (**Hors barème**) On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentant la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $f(x) = \ln x$ .

- (a) Prouver que le développement limité à l'ordre 2 en  $x_0 = e$  de  $f$  est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 + o((x - e)^2).$$

- (b) Dédire de la question précédente l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = e$  ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

3. Développer  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$  et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}.$$

**Exercice 2 (sur 2)**

Calculer, par exemple en utilisant les équivalents,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{2}}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x - 1)}.$$

**Exercice 3 (sur 1,5)**

On rappelle que le nombre complexe  $j$  est défini par  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  où  $i^2 = -1$ . Déterminer le module et un argument puis placer dans le plan complexe l'image

1. de  $j$ ,
2. de  $j^2$ .

**Exercice 4 (sur 1,5)**

Soit  $y$  un réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

1. Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie circulaire et en déduire que

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

2. Rappeler l'expression de  $\sin 2y$  en fonction de  $\sin y$  et  $\cos y$  puis en déduire que

$$\sin 2y = 2 \tan y \cos^2 y.$$

3. Dédire de ce qui précède que

$$\sin 2y = \frac{2 \tan y}{1 + \tan^2 y}. \quad (\text{I.2})$$

**Année 1997–1998****24 novembre 1997****Exercice 1 (sur 5)**

1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) - \ln x.$$

2. Étudier la continuité, par prolongement éventuel, de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}.$$

**Exercice 5 (sur 10)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

On notera  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Le but de cette question est de déterminer  $\mathcal{D}_f$ . On pourra s'aider des questions suivantes.

- (a) i. Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

- ii. Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$\frac{2x}{1+x^2} \geq -1.$$

- (b) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction Arcsin et déduire  $\mathcal{D}_f$  des questions précédentes.

2. (a) Tracer, *rapidement*, l'allure de la courbe représentative de la fonction Arcsin.

- (b) Rappeler la parité de la fonction Arcsin puis étudier celle de  $f$ .

3. Calculer  $f(1)$  et  $\lim_{+\infty} f$ .

4. (a) i. Résoudre *rapidement*, à l'aide des calculs effectués à la question (1(a)i), l'équation

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1.$$

- ii. Rappeler l'ensemble sur lequel la fonction Arcsin est dérivable et en déduire le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^+$  sur lequel  $f$  est dérivable.

- (b) On pose

$$u(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Calculer  $u'(x)$ .

- (c) Prouver que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. Dans toute cette question, on pose  $y = \operatorname{Arctan} x$ .

- (a) Rappeler la définition de  $y$ .

- (b) Prouver que

- i. si  $0 \leq x \leq 1$  alors  $0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2}$ ,  
ii. si  $x > 1$  alors  $0 < \pi - 2y < \frac{\pi}{2}$ .

- (c) Exprimer  $x$  en fonction de  $y$  puis, à l'aide de l'égalité (I.2),  $f(x)$  en fonction de  $y$ .

- (d) **(Hors barème)**

- i. Déduire, à l'aide de la définition de la fonction Arcsin et des questions (5c) et (5(b)i), que

$$\text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ alors } f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x \quad (\text{I.3})$$

- ii. Déduire, à l'aide de la définition de la fonction Arcsin et des questions (5c) et (5(b)ii), en utilisant la relation liant  $\sin(\pi - 2y)$  et  $\sin 2y$ , que

$$\text{si } x > 1 \text{ alors } f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan} x. \quad (\text{I.4})$$

6. À l'aide des égalités (I.3) et (I.4), tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .

**16 février 1998****Exercice 1 (sur 4,5)**

1. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer

$$\int \rho e^{-\rho} d\rho \quad \text{et} \quad \int_0^{1/2} \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2. Au moyen de changements de variables, calculer

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} \quad \text{et} \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^4}.$$

**Exercice 2 (sur 2,5)**

Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre par exemple à l'aide de la méthode de la variation de la constante l'équation différentielle

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3}. \quad (\text{I.5})$$

**Exercice 3 (sur 2,5)**

Après avoir résolu l'équation sans second membre

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad (\text{I.6})$$

résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = 26x^2 + 10x + 9. \quad (\text{I.7})$$

**Exercice 4 (sur 7)**

1. On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique puis, *rapidement*, les principales propriétés, les dérivées première et seconde et la représentation graphique des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .

2. Soit  $a$  un réel,  $n$  un entier naturel non nul et  $f$  une fonction numérique de variable réelle. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange pour  $f$  en  $a$  à l'ordre  $n$ .
3. (a) Sachant que  $\operatorname{sh} \frac{1}{2} < 1$ , prouver que pour tout  $x$  tel que  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  et pour tout  $\theta$  dans  $]0, 1[$ ,  $0 \leq \operatorname{sh} \theta x < 1$ .
- (b) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction  $\operatorname{ch}$  en  $0$  à l'ordre 5 et en utilisant la question précédente, prouver que pour tout  $x$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

$$0 \leq \operatorname{ch} x - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \leq \frac{x^5}{120}.$$

- (c) On pose

$$\alpha = 1 + \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-4}}{24}$$

et

$$a = 1,00500417.$$

- i. Prouver que  $\alpha$  est une valeur approchée de  $\operatorname{ch} \frac{1}{10}$  à  $9.10^{-8}$  près et préciser s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut.
- ii. En quoi l'inégalité  $|\alpha - a| < 10^{-8}$  permet-elle d'affirmer que  $a$  est une valeur approchée de  $\operatorname{ch} \frac{1}{10}$  à  $10^{-7}$  près ?

**Exercice 5 (sur 3,5)**

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction  $\operatorname{Argch}$ . Rappeler à quoi équivaut  $y = \operatorname{Argch} x$ .
2. On rappelle le résultat suivant.

**Proposition 1.**

Soit  $f$  une fonction bijective d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  sur un sous-ensemble  $B$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x$  un élément de  $B$  tel que  $f$  soit dérivable et de dérivée non nulle en  $f^{-1}(x)$ . Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $x$  et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f' \left[ f^{-1}(x) \right]}.$$

- (a) Rappeler la dérivée de la fonction  $\operatorname{Argch}$  (on pourra le cas échéant la retrouver à l'aide de la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique et de la proposition précédente).
- (b) En déduire les intégrales

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

et

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}}$$

(on pourra poser  $t = \frac{3x}{2}$ ).

3. Le but de cette question est de prouver que

$$\forall x \geq 1, \quad \operatorname{Argch} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

- (a) Vérifier que la relation précédente est vraie pour  $x = 1$ .  
 (b) Dans toute la suite, on suppose  $x > 1$ . Prouver que

$$\begin{cases} y = \operatorname{Argch} x \\ x > 1 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

- (c) i. On considère  $x > 1$ . Prouver que l'ensemble des solutions de l'équation  $X^2 - 2xX + 1 = 0$ , d'inconnue  $X$ , est l'ensemble

$$\left\{ x + \sqrt{x^2 - 1}, x - \sqrt{x^2 - 1} \right\}.$$

- ii. (**Hors barème**) Prouver que l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

est l'ensemble vide. En déduire que si  $x > 1$  et  $y > 0$  alors l'égalité  $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$  n'a jamais lieu et conclure.

**11 juin 1998**

**Exercice 1 (sur 4,5)**

1. Comparer, pour  $u \geq 1$ ,  $e^{-u^2}$  et  $e^{-u}$ . En déduire la nature des intégrales

$$\int_1^{+\infty} e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

2. Dans cette question,  $a$  désigne un paramètre strictement positif.

(a) Prouver que

$$\int_0^X x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \left( -X e^{-aX^2} + \int_0^X e^{-ax^2} dx \right).$$

(b) Au moyen d'un changement de variable, en déduire que

$$\int_0^X x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \left( -X e^{-aX^2} + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{X\sqrt{a}} e^{-u^2} du \right) \quad (\text{I.8})$$

et préciser la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

puis son expression en fonction de  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ .

3. Les molécules de gaz enfermées dans un récipient à la température  $T$  (en degrés Kelvin) sont animées d'une vitesse de  $v$  cm/s. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann  $F$  définie par

$$F(v) = cv^2 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$$

où  $m$  est la masse d'une molécule, et  $c$  et  $k$  des constantes positives. La constante  $c$  doit être telle que

$$\int_0^{+\infty} F(v) dv = 1.$$

Grâce à l'égalité (I.8) et sachant que  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , déterminer l'expression de  $c$  en fonction de  $k$ ,  $T$  et  $m$  pour qu'il en soit ainsi.

**Exercice 2 (sur 2,5)**

1. Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0,0)$  ?
- (b) Prouver que  $f$  est partiellement dérivable en  $(0,0)$ .
2. Prouver la discontinuité en  $(0,0)$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^4+3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 3 (sur 2,5)**

Déterminer les extrema de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4y.$$

**Exercice 4 (sur 7)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- En en déterminant une racine évidente, factoriser le polynôme  $P = X^3 - 3X + 2$ .
- Étudier la fonction  $f$  en précisant notamment
  - ses ensembles de définition, continuité et dérivation,
  - ses limites aux bornes de son ensemble de définition,
  - sa dérivée et ses variations résumées dans un tableau de variation.
- Étudier localement  $\mathcal{C}_f$  au voisinage du point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- Étudier les branches infinies de  $\mathcal{C}_f$ .
- Esquisser  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 5 (sur 3,5)**

- (a) Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 5 de  $\tan$  et  $\text{sh}$ .

- (b) Rappeler la dérivée de  $\text{Arcsin}$  et en déduire son développement limité en 0 à l'ordre 5.

2. À l'aide des questions précédentes, prouver que pour  $x > 0$  voisin de 0,

$$\text{sh } x < \text{Arcsin } x < \tan x.$$

Qu'en est-il pour  $x < 0$  voisin de 0 ?

**Année 1998–1999****16 novembre 1998****Exercice 1 (sur 3)**

Au fur et à mesure qu'une navette spatiale prend de l'altitude, le poids de l'astronaute diminue jusqu'à atteindre un état d'apesanteur. Le poids  $P(z)$  (en kg) d'un astronaute, pesant  $P_0$  à la surface de la terre, est à l'altitude  $z$  (en km) donné par

$$P(z) = P_0 \left( \frac{R}{R+z} \right)^2$$

où  $R = 6400$  km.

- Soit  $p$  un réel strictement positif. Prouver que la solution de l'équation  $P(z) = p$  est

$$z = R \left( \sqrt{\frac{P_0}{p}} - 1 \right)$$

- À quelle altitude l'astronaute ne pèsera-t-il plus que le quart de son poids initial ?
- À quelle altitude l'astronaute, pesant 63 kg à la surface de la terre, ne pèsera-t-il plus que 7 kg ?
- À quelle altitude l'astronaute sera-t-il en état d'apesanteur complet ? Que penser du résultat ?

**Exercice 2 (sur 5)**

- Donner les équivalents en 0 de  $e^t - 1$ ,  $\ln(1+t)$ ,  $1 - \cos t$ ,  $\sin t$ ,  $\tan t$ .
- Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 84x}{\sin 105x}$$

(b)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7 + u)(\tan u)^2 \ln(1 + 3\sqrt{u})}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}.$$

**Exercice 3 (sur 3)**

Les fonctions  $f$  ci-dessous peuvent-elles être prolongées par continuité en  $x_0$  ?

1.  $x_0 = 0$  et

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - |x|};$$

2.  $x_0 = 2$  et

$$f : x \mapsto \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2};$$

3.  $x_0 = 3\pi/2$  et

$$f : x \mapsto (1 + \sin x) \tan^2 x.$$

**Exercice 4 (sur 3)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{(3x - \frac{\pi}{4})^2}{1 - \cos(3x - \frac{\pi}{4})}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .2. Prouver que  $f$  est continue ou peut être prolongée par continuité sur l'ensemble

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

**Exercice 5 (sur 6)**

On cherche à résoudre numériquement l'équation

$$e^{-x} = x. \quad (\text{I.9})$$

On donne

$$\begin{aligned} |e^{-\frac{1}{2}} - 0,6| &< 10^{-2}, \\ |e^{-\frac{3}{4}} - 0,47| &< 10^{-2} \\ |e^{-\frac{5}{8}} - 0,54| &< 10^{-2}. \end{aligned}$$

1. Étudier sur  $\mathbb{R}$ , sans la représenter graphiquement, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

On expliquera en particulier pourquoi  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Prouver que l'équation (I.9) admet une solution unique  $a$  sur  $\mathbb{R}$ , située dans l'intervalle  $]0, 1[$ .3. Déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $a$  et prouver que 0,56 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $a$ .**26 février 1999****Exercice 1 (sur 6,5)**

1. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer

$$\int (\ln s)^2 ds \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t \cos 3t dt.$$

2. Au moyen d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^3 \frac{dx}{9 + x^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 1}.$$

**Exercice 2 (sur 2)**1. Rappeler ce que signifie  $y = \operatorname{Arccos} x$ .2. Rappeler l'expression de  $\cos 2a$  en fonction de  $\cos a$ .

3. Prouver que  $\cos(2 \operatorname{Arccos} \frac{7}{8}) = \frac{17}{32}$  et indiquer précisément l'argument permettant d'en déduire que

$$2 \operatorname{Arccos} \frac{7}{8} = \operatorname{Arccos} \frac{17}{32}.$$

### Exercice 3 (sur 2,5)

1. Soit  $a$  et  $h$  deux réels,  $n$  un entier et  $f$  une fonction. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  pour  $f$  au point  $a$ .
2. Déterminer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3 pour la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ .

### Exercice 4 (sur 2,5)

Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2xy = x.$$

### Exercice 5 (sur 6,5)

1. (a) Calculer la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 10y = 0 \quad (\text{I.10})$$

et en déterminer la limite en  $+\infty$ .

- (b) Préciser la solution de l'équation (I.10) vérifiant

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. En utilisant éventuellement le théorème de la feuille annexe, déterminer une solution particulière puis, à l'aide de la question (1), la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 10y = 37 \cos 3x.$$

3. (a) Soit  $\varphi$  un réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ . Prouver que  $1 + \tan^2 \varphi = 1/\cos^2 \varphi$  et exprimer  $1 + \cotan^2 \varphi$  en fonction de  $\sin \varphi$ .

- (b) Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux réels strictement positifs. On pose

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ \varphi &= \operatorname{Arctan} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

- i. Rappeler ce que signifie l'égalité (I.11).
- ii. (**Hors barème**) En factorisant par  $\lambda_1^2$  (resp. par  $\lambda_2^2$ ) dans  $A$ , en déduire que

$$\frac{\lambda_1}{A} = \cos \varphi \quad (\text{resp.} \quad \frac{\lambda_2}{A} = \sin \varphi).$$

On pose, pour  $X$  réel,

$$y = \lambda_1 \cos X + \lambda_2 \sin X.$$

Prouver à l'aide de la question précédente que

$$y = A \cos(X - \varphi).$$

### Remarque I.4.1

On admettra dans la suite que cette dernière expression est valable pour tous  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  réels.

En déduire que la solution générale de l'équation (I.10) peut s'écrire

$$y = Ae^{-x} \cos(3x - \varphi), \quad A \in \mathbb{R}^+, \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [.$$

## 11 juin 1999

### Exercice 1 (sur 8,5)

1. On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique puis, *rapidement*, les principales propriétés, les dérivées première et seconde et la représentation graphique des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .

2. Prouver que la fonction  $\operatorname{sh}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Rappeler le théorème donnant la dérivée de la bijection réciproque  $f^{-1}$  d'une bijection  $f$  et, à l'aide de la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique, en déduire que, pour tout  $x$  réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Rappeler, pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(1+u)^\alpha$$

et déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire que celui de  $\operatorname{Argsh} x$  à l'ordre 5 en 0 est

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5). \quad (\text{I.12})$$

5. À l'aide du développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{Argsh} x$ , étudier localement au point d'abscisse 0 la fonction  $\operatorname{Argsh}$ .
6. À l'aide de l'égalité (I.12), déterminer un équivalent en 0 de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  et donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{x^3}} dx.$$

### Exercice 2 (sur 3)

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y=0\}$ .

2. Calculer  $f(0,0)$  et, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(2x, x)$ . La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0,0)$ ?
3. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité partielle de  $f$  en  $(0,0)$  par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ .
4. Pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $x+y \neq 0$ , calculer  $f'_x(x, y)$  et  $f'_y(x, y)$ .

### Exercice 3 (sur 3)

1. (a) Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.  
(b) Prouver que si  $x > 0$  et  $0 < \theta < 1$  alors

$$0 < \frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}} < 1.$$

- (c) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, établir que pour tout  $x > 0$ ,

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

2. Donner une valeur approchée de  $\sqrt{1,2}$  à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 4 (sur 3)

1. En en donnant la valeur exacte, prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale  $I$  définie par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

et, en justifiant le calcul, déterminer en fonction de  $I$  l'expression de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} dx.$$

**Exercice 5 (sur 2,5)**

Étudier les branches infinies de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

**Année 1999–2000****2 décembre 1999****Exercice 1 (sur 3,5)**

1. Pour  $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ , rappeler les valeurs de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .
2. On considère les nombres complexes  $z_1 = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_2 = 1 - i$  et  $z_3 = \sqrt{3} + i$ .
  - (a) Déterminer (par le calcul ou géométriquement) les modules et arguments de  $z_1, z_2, z_3$ .
  - (b) Déterminer la forme exponentielle de  $z_1, z_2, z_3$ .
  - (c) Déterminer les modules et arguments de  $z_1 z_2, \frac{z_2}{z_3}, z_1^4$ .

**Exercice 2 (sur 3,5)**

Pour chaque fonction  $f$  et chaque réel  $x_0$  indiqués, calculer  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

1.  $x_0 = 0$  et  $x_0 = +\infty$  et

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x};$$

2.  $x_0 = 4$  et

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2 - x - 12};$$

3.  $x_0 = 3$  et

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3};$$

4.  $x_0 = 0$  et

$$f(x) = x \ln x;$$

5.  $x_0 = +\infty$  et

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1};$$

6.  $x_0 = +\infty$  et

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x.$$

**Exercice 3 (sur 3)**

1. Rappeler les équivalents en 0 de

$$e^t - 1, \quad \ln(1+t), \quad 1 - \cos t, \quad \sin t, \quad \tan t.$$

2. Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1},$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 3x}.$$

3. En posant éventuellement  $x = 2 + h$ , calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{\sin(x-2)}.$$

**Exercice 4 (sur 4)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Étudier la parité de  $f$ .
3. Prouver que la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en 0.
4. (a) Soit  $\lambda$  un réel et  $\varphi$  la fonction constante égale à  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ . En revenant à la définition, prouver que, pour tout  $x$  réel,  $\varphi'(x) = 0$ .

- (b) Soit  $\lambda$  un réel et  $u$  et  $v$  de deux fonctions dérivables. Rappeler les dérivées de  $u + v$ ,  $\lambda u$ ,  $uv$  et  $\frac{u}{v}$ .

- (c) (**Hors barème**) Prouver que, pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}_f$ ,

$$f'(x) = \frac{\sin x - x}{1 - \cos x}.$$

### Exercice 5 (sur 6)

1. Le but de cette question est de prouver que

$$2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \operatorname{Arctan} \frac{3}{4}. \quad (\text{I.13})$$

- (a) Rappeler la définition de  $y = \operatorname{Arctan} x$ . Adapter cette définition au cas de l'égalité (I.13).

- (b) i. Rappeler l'expression de  $\tan 2a$  en fonction de  $\tan a$  et en déduire une expression simplifiée de  $\tan(2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3})$ .  
 ii. Rappeler le sens de variation de la fonction  $\operatorname{Arctan}$  et en déduire un encadrement de  $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}$ .

- (c) Conclure.

2. Prouver l'égalité

$$2 \operatorname{Arctan} 3 = \pi - \operatorname{Arctan} \frac{3}{4}$$

dont on notera qu'elle équivaut à

$$\pi - 2 \operatorname{Arctan} 3 = \operatorname{Arctan} \frac{3}{4}.$$

3. (**Hors barème**) Plus généralement, prouver que

$$2 \operatorname{Arctan} x = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \pi + \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

**1<sup>er</sup> mars 2000**

### Exercice 1 (sur 8)

#### 1. Étude préliminaire.

- (a) Pour  $t \geq 0$ , on pose  $v(t) = 2t\sqrt{4-t}$ .

- i. Prouver que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 4]$ .

- ii. Déterminer le maximum de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .

- (b) i. Pourquoi  $v$  est-elle intégrable sur  $\mathcal{D}$ ?

- ii. Calculer l'intégrale de  $v$  sur  $\mathcal{D}$  au moyen d'une intégration par parties.

#### Définition I.5.1.

- iii. Soit  $f$  une fonction intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  la quantité  $\mu$  définie par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Déduire de la question précédente la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .

2. **Étude concrète.** Un motard réalise une expérience de vitesse sur une piste rectiligne d'extrémités  $A$  et  $B$ . Sa vitesse instantanée, exprimée en km/h, est donnée en fonction du temps par  $v(t) = at\sqrt{T-t}$  où

- $a$  est un paramètre réel strictement positif
- $t$  est exprimé en heure
- 0 et  $T$  sont les instants respectivement de départ en  $A$  et d'arrivée en  $B$ .

- (a) Calculer  $v(0)$  et  $v(T)$  puis déterminer l'instant  $t_M$  de vitesse maximale ainsi que la vitesse maximale  $v_M = v(t_M)$ .

- (b) On désigne par  $x$  la distance parcourue depuis  $A$  et on rappelle qu'alors la fonction  $x$  est une primitive de la fonction  $v$ . Calculer  $x(T)$  et en déduire la vitesse moyenne  $V$  du motard sur le parcours  $AB$ .
- (c) Prouver qu'il existe un instant au cours de l'expérience auquel la vitesse instantanée du motard égale sa vitesse moyenne.
- (d) *Application numérique.* Sachant que  $A$  et  $B$  sont distants de 1 km et que la vitesse maximale atteinte est 200 km/h, déterminer  $T$  en secondes puis  $V$  en km/h. On donne  $15\sqrt{3} \approx 26$  et  $80\sqrt{3} \approx 139$ .

**Exercice 2 (sur 3)**

1. Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$y' + (\cos x)y = 2 \cos x.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 8y' + 25y = 0$$

et en chercher la solution  $y_0$  vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 10$ .

**Exercice 3 (sur 4)**

1. (a) Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3.
- (b) Prouver que si  $h > 0$  et  $0 < \theta < 1$  alors  $0 < (1 + \theta h)^{-3} < 1$ .
- (c) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, établir pour tout  $h > 0$  l'inégalité

$$h - \frac{h^2}{2} < \ln(1+h) < h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}.$$

2. Pour quelles valeurs de  $h > 0$  cette inégalité permet-elle d'affirmer que  $h - \frac{h^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\ln(1+h)$  à  $10^{-3}$  près ?

3. Donner une valeur approchée de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 4 (sur 2)**

Calculer, éventuellement au moyen d'un changement de variable, les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt, \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$$

**Exercice 5 (sur 3)**

On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ , la fonction  $\operatorname{Argth} x$  satisfait

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Soit  $x$  dans  $] -1, 1[$ . Expliciter  $(\operatorname{Argth} x)'$ .
2. À l'aide d'une intégration par parties et d'un éventuel changement de variable, calculer

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx.$$

**13 juin 2000****Exercice 1 (sur 5)**

1. Démontrer que, en 0,  $\tanh = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ .
2. (a) Rappeler le développement limité de  $\ln(1+t)$  à l'ordre 3 en 0.
- (b) Calculer le développement limité de  $\ln(1 + \tanh) - \ln(1 - \tanh)$  à l'ordre 3 en 0.
3. On rappelle que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Déduire des questions précédentes le développement limité de  $\ln(\tan x)$  à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 2 (sur 3,5)**

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + e^{1/x^2}} - 1$$

et on note  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  les ensemble de définition et courbe représentative de  $f$ .

1. (a) Rappeler le sens de variation de la fonction exponentielle et en déduire une minoration, pour tout  $x \neq 0$ , de  $e^{1/x^2}$ .
- (b) Prouver que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ .
2. (a) En procédant éventuellement au changement de variable  $h = 1/x$ , prouver que  $f$  admet pour développement limité généralisé au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

- (b) Déterminer le développement limité généralisé à l'ordre 3 de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ .
- (c) Étudier les branches infinies de  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 3 (sur 4,5)**

1. (a) Prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-s} ds.$$

- (b) i. Pour  $s \geq 1$ , comparer  $e^{-s^2}$  et  $e^{-s}$ .
- ii. En déduire la nature des intégrales

$$\int_1^{+\infty} e^{-s^2} ds \quad \text{puis} \quad \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^3} dt.$$

**Exercice 4 (sur 1,5)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$  puis en déterminer l'ensemble de continuité.

**Exercice 5 (sur 5,5)**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2y^2}.$$

1. Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de  $f$ .
3. **Nota.** Dans cette question, on ne cherchera pas à étudier le signe du discriminant

$$\Delta' = (f''_{xy})^2 - f''_{x^2}f''_{y^2}.$$

Soit  $x_0$  un réel et  $M_0(x_0, 0)$  un point critique de  $f$ . Préciser la nature de  $M_0$  en étudiant, pour  $(x, y)$  dans  $\mathcal{D}$ , le signe de  $f(x, y) - f(x_0, 0)$ . Qu'en est-il des autres points critiques de  $f$  ?

4. (a) Soit  $(x, y)$  un point de  $\mathcal{D}$ . Calculer  $df(x, y)$ .
- (b) Soit  $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  et  $(\Delta x, \Delta y) = (2 \cdot 10^{-2}, 4 \cdot 10^{-2})$ . On pose

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Sachant que  $\sqrt{6} \approx 2,45$ , estimer  $\Delta f(x, y)$  à l'aide de  $df(x, y)$ .

## Année 2000–2001

19 décembre 2000

## Exercice 1 (sur 3,5)

1. (a) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8}.$$

- (b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}.$$

- (c) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}.$$

2. Prouver la continuité en 0 de la fonction
- $f$
- définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

## Exercice 2 (sur 4,75)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $]-\pi, \pi]$ , les équations suivantes.

1.  $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$ ,
2.  $\sin 2x = \sin x$ ,
3.  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3})$ .

## Exercice 3 (sur 2,75)

1. Rappeler les équivalents en 0 de  $e^x - 1$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $1 - \cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ .
2. À l'aide des équivalents, calculer les limites

- (a) en 0 de

$$\frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)},$$

- (b) en 0 de

$$\frac{\tan^2(\sqrt{\pi x})}{1 - \cos x},$$

- (c) en 2 de

$$\frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)},$$

## Exercice 4 (sur 5,25)

1. (a) Rappeler la définition de  $y = \operatorname{Arccos} x$ .
- (b) À l'aide de cette définition, prouver que  $2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} = \operatorname{Arccos} \frac{1}{8}$ .

2. Soit
- $f$
- la fonction définie sur
- $\mathbb{R}$
- par

$$f(x) = \operatorname{Arccos}(2x^2 - 1).$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
- (b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'$  de  $f$ .
- (c) Calculer, sur  $\mathcal{D}'$ , la dérivée de  $f$  et en déduire qu'il existe des constantes  $K_+$  et  $K_-$  telles que
  - i. si  $0 < x < 1$ ,  $f(x) = 2 \operatorname{Arccos} x + K_+$
  - ii. si  $-1 < x < 0$ ,  $f(x) = -2 \operatorname{Arccos} x + K_-$
- (d) Déterminer les constantes  $K_+$  et  $K_-$  ci-dessus.
- (e) Ce qui a été obtenu à la question n° 2c est-il valable pour  $x = -1$ ,  $x = 0$  et  $x = 1$ ?
- (f) Retrouver le résultat de la question n° 1b.

## Exercice 5 (sur 3,75)

On cherche à résoudre numériquement l'équation

$$e^{-x} = x. \quad (\text{I.14})$$

1. Étudier sur  $\mathbb{R}$ , sans la représenter graphiquement, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

On expliquera en particulier pourquoi  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Prouver que l'équation (I.14) admet une solution unique  $a$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Prouver que  $a$  appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ .
4. Déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $a$  et prouver que 0,57 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $a$ .

## 4 mai 2001

### Exercice 1 (sur 4,5)

1. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer

$$\int \rho e^{-\rho} d\rho \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

2. Calculer, au moyen éventuel de changements de variables,

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1}.$$

3. (**Hors barème**) Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction intégrable sur  $[-a, a]$ . On pose  $I = \int_{-a}^a f(s) ds$ .

(a) Prouver que, si  $f$  est paire,  $I = 2 \int_0^a f(s) ds$ .

(b) Prouver que, si  $f$  est impaire,  $I = -I$ . Qu'en conclue-t-on ?

### Exercice 2 (sur 1,5)

Sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre par exemple à l'aide de la méthode de la variation de la constante, l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x} y = x.$$

### Exercice 3 (sur 2)

On considère un réel  $c$  et l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + cy = 0 \quad (\text{I.15})$$

1. On pose  $c = -3$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.15).
2. On pose  $c = 1$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.15).
3. On pose  $c = 10$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.15).

### Exercice 4 (sur 3,5)

1. On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique puis, *rapidement*, les principales propriétés, les dérivées première et seconde et la représentation graphique des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .

2. Soit  $x_0$  un réel,  $h$  un réel non nul,  $n$  un entier naturel non nul et  $f$  une fonction numérique de variable réelle. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange pour  $f$  sur  $[x_0, x_0 + h]$  à l'ordre  $n$ .

3. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction  $\operatorname{sh}$  en 0 à l'ordre 4.

4. (**Hors barème**)

(a) Sachant que  $\operatorname{ch} \frac{1}{2} < 3/2$ , prouver que pour tout  $h$  tel que  $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$  et pour tout  $\theta$  dans  $]0, 1[$ ,  $0 \leq \operatorname{ch} \theta h < 3/2$ .

(b) En utilisant les deux questions précédentes, prouver que pour tout  $h$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

$$0 \leq \operatorname{sh} h - \left( h + \frac{h^3}{6} \right) < \frac{h^5}{80}.$$

(c) On pose

$$\alpha = 10^{-1} + \frac{10^{-3}}{6} \quad \text{et} \quad a = 0,10016.$$

- i. Prouver que  $\alpha$  est une valeur approchée de  $\operatorname{sh} \frac{1}{10}$  à  $\frac{10^{-5}}{80} 10^{-6}$  près et préciser s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut.
- ii. En quoi l'inégalité  $|\alpha - a| < 7 \cdot 10^{-6}$  permet-elle d'affirmer que  $a$  est une valeur approchée de  $\operatorname{sh} \frac{1}{10}$  à  $10^{-5}$  près ?

### Exercice 5 (sur 8,5)

1. Calculer le développement limité de  $(e^x - 1)\cos x$  à l'ordre 4 en 0.
2. Calculer le développement limité de  $\operatorname{In} \cos x$  à l'ordre 6 en 0.
3. Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 16}$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

- (a) Étudier  $\mathcal{C}$  localement au point d'abscisse 0.
- (b) En procédant éventuellement au changement de variable  $h = 1/x$ , prouver que  $f$  admet pour développement limité généralisé au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(x) = x + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

- (c) Déterminer le développement limité généralisé à l'ordre 3 de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ .
- (d) Étudier les branches infinies de  $\mathcal{C}$ .

### Théorème I.6.1.

Soit  $(a, b, c)$  un triplet de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ,  $P$  une fonction polynôme et  $\alpha$  et  $\omega$  deux réels. On considère les équations différentielles

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \cos \omega x \quad (\text{I.16})$$

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \sin \omega x. \quad (\text{I.17})$$

Alors, une solution particulière

• de l'équation différentielle (I.16) est  $y = \operatorname{Re}(e^{\rho x} Q(x))$

• de l'équation différentielle (I.17) est  $y = \operatorname{Im}(e^{\rho x} Q(x))$

où

$$\rho = \alpha + i\omega$$

•  $Q$  est la fonction polynôme complexe qu'on détermine en résolvant l'équation

$$aQ'' + (2a\rho + b)Q' + (a\rho^2 + b\rho + c)Q = P$$

sachant que

$$1. \text{ si } a\rho^2 + b\rho + c \neq 0, \text{ alors}$$

$$\partial Q = \partial P \quad \text{et} \quad \operatorname{val} Q = 0;$$

$$2. \text{ si } a\rho^2 + b\rho + c = 0 \text{ et } 2a\rho + b \neq 0, \text{ alors}$$

$$\partial Q = \partial P + 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{val} Q = 1;$$

$$3. \text{ si } a\rho^2 + b\rho + c = 0 \text{ et } 2a\rho + b = 0, \text{ alors}$$

$$\partial Q = \partial P + 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{val} Q = 2.$$

## 15 juin 2001

### Exercice 1 (sur 3,5)

1. Comparer, pour tout  $x \geq 1$ ,  $\ln x$  et  $x$ . En déduire la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx.$$

2. Étudier la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 1} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 1} dx.$$

### Exercice 2 (sur 5,5)

1. (Question préliminaire) Prouver que, si  $q \neq 1$ , alors

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. On fixe  $k$  dans  $\mathbb{N}$  et on pose

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx.$$

- (a) Au moyen d'une double intégration par parties, prouver que  $I_0 = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$ .  
 (b) Exprimer  $\sin(t + k\pi)$  en fonction de  $\sin t$  puis, au moyen d'un changement de variable, prouver que  $I_k = (-1)^{-k} e^{-k\pi} I_0$ .

3. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx.$$

Prouver que  $I$  est absolument convergente et déduire des questions 1 et 2b que  $I = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 3 (sur 6)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}.$$

2. Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 5x - 2y + 9.$$

- (a) Calculer les dérivées premières et secondes de  $f$ .  
 (b) On se propose de chercher si  $f$  présente un extremum. Prouver que  $f$  admet pour seul point critique le point  $(4, 3)$ .  
 (c) Soit  $h$  et  $k$  des réels.  
 i. Calculer  $f(4 + h, 3 + k)$ .

- ii. En posant  $u = h/k$  pour  $k \neq 0$ , prouver que  $f(4 + h, 3 + k) - f(4, 3) \geq 0$ .

- iii. Quelle est la nature du point  $f(4, 3)$  pour  $f$  ?

### Exercice 4 (sur 1,5)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$y' + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

### Exercice 5 (sur 3,5)

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 de  $e^t$ ,  $\ln(1+t)$ ,  $\cos t$ ,  $\sin t$ .

2. On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$ .

- (a) Prouver que le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3 est, si  $x$  est positif,

$$f(x) = x - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3).$$

- (b) Étudier localement en 0 la courbe représentant  $f$ .

## Année 2001–2002

### 10 décembre 2001

#### Exercice 1 (sur 6)

Calculer les limites suivantes.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$  ;  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 2x + 4}{1 - x^5}$  ;  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$  ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 7x + 12}$  ;
- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  ;  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x$  ;
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$  ;

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e}{\ln(x-1)}.$$

**Exercice 2 (sur 3)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $] -\pi, \pi]$ , les équations

1.  $\cos(3x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ;
2.  $\tan x = \cotan x$ .

**Exercice 3 (sur 2)**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1$ .

**Exercice 4 (sur 4)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Étudier
  - (a) la parité de  $f$ ;
  - (b) la périodicité de  $f$ .
3. Déterminer  $\lim_{\pi} f$ .
4. Prouver que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0.
5. Pour  $x \neq 0, [2\pi]$ , simplifier l'expression de  $f(x)$ .

**Exercice 5 (sur 5)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^5 + x^2 - 1.$$

1. Factoriser  $a^5 - b^5$  par  $a - b$ , en déduire le taux de variation de  $f$  puis prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
2. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
3. Prouver
  - (a) que  $\frac{103}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ ;
  - (b) que 0,805 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

**Exercice 6 (Hors barème sur 2)**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = (x - 1)^2$ . Prouver, en revenant à la définition, que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

**18 mars 2002****Exercice 1 (sur 4,5)**

1. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  en  $a$  pour une fonction  $f$ .
2. Déterminer les développements de Taylor-Young d'ordre 3 en 0 de  $\sin x$  et  $\tan x$ . En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

3. (a) Déterminer les développements de Taylor-Young en 0 de  $\operatorname{ch} x - \cos x$  d'ordres 2 et 3.
- (b) En déduire
  - i.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2},$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x - x^2}{x^2},$$

iii.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x - x^2}{x^3}.$$

**Exercice 2 (sur 2,5)**

L'objet de cet exercice est de prouver que, pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\operatorname{Argch} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right). \quad (\text{I.18})$$

On rappelle que

$$y = \operatorname{Argch} x \iff \begin{cases} \operatorname{ch} y = x \\ y \geq 0. \end{cases}$$

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction Argch.
2. (a) Prouver que si  $x \geq 1$  alors  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0$ .  
(b) En revenant à la définition de la fonction ch, calculer  $\text{ch} \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]$  pour  $x \geq 1$ .
3. Dédire de ce qui précède la relation (I.18) pour  $x \geq 1$ .

**Exercice 3 (sur 1,5)**

Soit  $f$  une fonction et  $a$  et  $h$  deux réels.

1. Rappeler le théorème des accroissements finis pour  $f$  sur l'intervalle  $[a, a + h]$ .
2. Pour  $n$  entier naturel, rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange pour  $f$  à l'ordre  $n$  sur l'intervalle  $[a, a + h]$ .
3. Le théorème des accroissements finis peut-il être considéré comme un cas particulier de la formule de Taylor-Lagrange? Préciser.

**Exercice 4 (sur 5,5)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

et  $h$  un réel strictement positif.

1. Déterminer, pour tout entier naturel non nul  $n$  et tout  $x > -1$ , l'expression de  $f^{(n)}(x)$ .
2. Soit  $n$  entier naturel non nul. Prouver que si  $0 < \theta < 1$  alors  $0 < (1 + \theta h)^{-n} < 1$ .
3. (a) En appliquant le théorème des accroissements finis à  $f$  sur l'intervalle  $[0, h]$ , établir l'encadrement

$$-h < \ln(1 + h) - h < 0.$$

- (b) En déduire une valeur approchée de  $\ln(1, 1)$  à  $10^{-1}$  près.

4. (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, établir l'encadrement

$$-\frac{h^2}{2} < \ln(1 + h) - h < 0.$$

- (b) En déduire une valeur approchée de  $\ln(1, 1)$  à  $10^{-2}$  près.

5. (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, établir l'encadrement

$$0 < \ln(1 + h) - \left(h - \frac{h^2}{2}\right) < \frac{h^3}{3}. \quad (\text{I.19})$$

- (b) En déduire une valeur approchée de  $\ln(1, 1)$  à  $10^{-3}$  près.

- (c) Pour quelles valeurs de  $h > 0$  l'encadrement (I.19) permet-il d'affirmer que  $h - \frac{h^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\ln(1 + h)$  à  $10^{-3}$  près?

**Exercice 5 (sur 6)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \text{Arcsin} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

1. Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$-1 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1.$$

En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Déterminer l'ensemble de continuité de  $f$ .
3. Déterminer l'ensemble d'étude de  $f$ .
4. Calculer les valeur(s) et/ou limite(s) de  $f$  aux bornes de son ensemble d'étude.
5. Rappeler l'ensemble sur lequel la fonction Arcsin est dérivable; en déduire l'ensemble de dérivabilité de  $f$  et prouver que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

6. Étudier les variations de  $f$  et en esquisser la courbe représentative  $\mathcal{C}$ .
7. Pour  $x \geq 0$ , utiliser l'expression de  $f'(x)$  pour déterminer une expression plus simple de  $f(x)$ .
8. Construire les courbes représentatives des fonctions  $\operatorname{Arctan}$ ,  $-\operatorname{Arctan}$ ,  $-2\operatorname{Arctan}$  et  $f$  en précisant, pour  $f$ , les points et les tangentes remarquables.

## 17 juin 2002

### Exercice 1 (sur 8,5)

1. On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique puis, *rapidement*, les principales propriétés, les dérivées première et seconde et la représentation graphique des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .

2. Prouver que la fonction  $\operatorname{sh}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Rappeler le théorème donnant la dérivée de la bijection réciproque  $f^{-1}$  d'une bijection  $f$  et, à l'aide de la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique, en déduire que, pour tout  $x$  réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Rappeler, pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(1+u)^\alpha$$

et déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire que celui de  $\operatorname{Argsh} x$  à l'ordre 5 en 0 est

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5). \quad (\text{I.20})$$

5. À l'aide du développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{Argsh} x$ , étudier localement au point d'abscisse 0 la fonction  $\operatorname{Argsh}$ .
6. À l'aide de l'égalité (I.20), déterminer un équivalent en 0 de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  et donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{x^3}} dx.$$

### Exercice 2 (sur 3)

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y=0\}$ .
2. Calculer  $f(0,0)$  et, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(2x, x)$ .
3. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité partielle de  $f$  en  $(0,0)$  par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ .
4. Pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $x+y \neq 0$ , calculer  $f'_x(x, y)$  et  $f'_y(x, y)$ .

### Exercice 3 (sur 3)

1. (a) Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.  
(b) Prouver que si  $x > 0$  et  $0 < \theta < 1$  alors

$$0 < \frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}} < 1.$$

- (c) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, établir que pour tout  $x > 0$ ,

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

2. Donner une valeur approchée de  $\sqrt{1,2}$  à  $10^{-3}$  près.

#### Exercice 4 (sur 3)

1. En en donnant la valeur exacte, prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale  $I$  définie par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

et, en justifiant le calcul, déterminer en fonction de  $I$  l'expression de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} dx.$$

#### Exercice 5 (sur 2,5)

Étudier les branches infinies de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

## Année 2002–2003

18 décembre 2002

#### Exercice 1 (sur 1)

Exprimer sans valeur absolue la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = |2x+4| - |3x-9|$$

#### Exercice 2 (sur 3)

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $] -\pi, \pi]$ , l'équation

$$\cos 2x = \sin 2x.$$

#### Exercice 3 (sur 8)

1. (a) Calculer les limites en  $0^+$  et en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto x + 1/x$ .

- (b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^3 - 64}.$$

- (c) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}.$$

- (d) Prouver que l'expression  $x^2 - 4x - 45$  est factorisable par  $x-9$ . En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 4x - 45}.$$

2. (a) Rappeler les équivalents en 0 de  $e^x - 1$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $1 - \cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ .

- (b) Calculer les limites quand  $x \rightarrow 0$  de

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{x}{\ln(1+x)}; \\ \text{ii. } & \frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{(e^x - 1) \sin 2x}. \end{aligned}$$

- (c) Calculer la limite quand  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  de

$$\frac{1 - \tan x}{\cos 2x}.$$

#### Exercice 4 (sur 5)

On cherche à résoudre numériquement l'équation

$$x^4 + 4x = 1. \quad (\text{I.21})$$

1. Étudier sur  $\mathbb{R}$ , sans la représenter graphiquement, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^4 + 4x - 1.$$

2. Prouver que l'équation (I.21) admet une solution unique  $x_0$  sur l'intervalle  $]0, 1[$ .
3. Déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$  et prouver que 0,49 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

### Exercice 5 (sur 3)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en 0 (on justifiera l'affirmation)?
2. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 (on justifiera l'affirmation)?

## 9 avril 2003

### Exercice 1 (sur 7)

1. Déterminer des primitives de

(a)

$$\cos^2 x \sin x$$

(b)

$$x\sqrt{1+x^2}.$$

2. En intégrant par parties, calculer

(a)

$$\int \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

(b)

$$\int_1^e x^2 \ln x dx.$$

3. (a) Au moyen d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

- (b) i. Rappeler l'expression de  $\cos 2\alpha$  en fonction de  $\cos \alpha$  et en déduire une expression de  $\cos^2 \alpha$  en fonction de  $\cos 2\alpha$ .

- ii. Au moyen du changement de variable  $t = \tan \alpha$ , calculer

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

4. Calculer

- (a) pour  $x$  positif,

$$\int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$$

- (b)

$$\int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt.$$

### Exercice 2 (sur 3)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes et en déterminer les solutions valant 1 en 0.

1.  $y' + 2y = 0,$

2.  $\frac{dy}{dx} + y = -x,$

3.  $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2 - 1}.$

### Exercice 3 (sur 3)

Le but de cet exercice est de prouver que

$$2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{I.22})$$

1. Rappeler la définition de  $y = \operatorname{Arcsin} x$ . Adapter cette définition au cas de l'égalité (I.22).

2. (a) On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Déterminer une expression simplifiée de  $\sin(2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2})$ .

- (b) Rappeler le sens de variation de la fonction  $\text{Arcsin}$  et en déduire un encadrement de  $2\text{Arcsin}\frac{1}{2}$ .

3. Conclure.

#### Exercice 4 (sur 4)

1. Prouver que, pour tout  $h > 0$  et tout  $\theta$  dans  $]0, 1[$ ,

$$-1 < \frac{-1}{(1+\theta h)^4} < 0.$$

2. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

3. (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

déduire de la question précédente que, pour tout  $h > 0$ ,

$$1 - h + h^2 - h^3 < \frac{1}{1+h} < 1 - h + h^2.$$

- (b) Pour quelles valeurs de  $h$  l'inégalité précédente permet-elle d'affirmer que  $1 - h + h^2$  est une valeur approchée de  $\frac{1}{1+h}$  à  $10^{-3}$  près ?

- (c) Donner une valeur approchée de  $\frac{1}{1,09}$  à  $10^{-3}$  près.

#### Exercice 5 (sur 4)

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}(3x - 4x^3).$$

1. Factoriser les polynômes  $4x^3 - 3x + 1$  et  $4x^3 - 3x - 1$  pour prouver que

$$\begin{cases} 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^3 - 3x - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \leq 0. \end{cases}$$

2. En utilisant la question 1, déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

3. Exprimer la dérivée  $f'$  de  $f$  en en simplifiant *au maximum* l'expression.

4. Déduire de la question précédente que, si  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,

$$f(x) = 3\text{Arcsin } x.$$

### 13 juin 2003

#### Exercice 1 (sur 4)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .

- (b) Étudier les branches infinies de  $f$ .

#### Exercice 2 (sur 2)

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes de fonction inconnue  $y$  et de variable  $x$  :

(a)  $y'' - 5y' + 6y = 0$  ;

(b)  $4y'' - 4y' + y = 0$  ;

- (c)  $y'' - 4y' + 5y = 0$  ; de cette dernière équation, déterminer la solution telle que

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. (**Hors barème**) Résoudre, en s'aidant éventuellement du Théorème 1 page suivante, l'équation de fonction inconnue  $x$  et de variable  $t$

$$x'' + x = 2\sin t.$$

**Exercice 3 (sur 4)**

1. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

**Exercice 4 (sur 2)**

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition
- $\mathcal{D}$
- de la fonction
- $f$
- définie de
- $\mathbb{R}^2$
- dans
- $\mathbb{R}$
- par

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 - y}.$$

2. Soit
- $f$
- la fonction définie de
- $\mathbb{R}^2$
- dans
- $\mathbb{R}$
- par

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Déterminer l'unique point critique  $(x_0, y_0)$  de  $f$  et prouver que  $f$  y atteint un extremum qu'on précisera.

**Exercice 5 (sur 8)**

On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

- Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique.
- Prouver que la fonction  $\operatorname{th}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ .
- Rappeler le théorème donnant la dérivée de la bijection réciproque  $f^{-1}$  d'une bijection  $f$  et, à l'aide de la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique, en déduire que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

4. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$\frac{1}{1 - u}$$

et déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de

$$\frac{1}{1 - x^2}.$$

En déduire que celui de  $\operatorname{Argth} x$  à l'ordre 6 en 0 est

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6). \quad (\text{I.23})$$

- À l'aide du développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{Argth} x$ , étudier localement au point d'abscisse 0 la fonction  $\operatorname{Argth}$ .
- À l'aide de l'égalité (I.23), déterminer un équivalent en 0 de la fonction  $\operatorname{Argth}$  et donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Argth} x}{\sqrt{x^3}} dx.$$

**Théorème 1.**

Soit  $(a, b, c)$  un triplet de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ,  $P$  une fonction polynôme et  $\alpha$  et  $\omega$  deux réels. On considère les équations différentielles

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \cos \omega x \quad (\text{I.24})$$

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \sin \omega x. \quad (\text{I.25})$$

Alors, une solution particulière

- de l'équation différentielle (I.24) est  $y = \operatorname{Re}(e^{\rho x} Q(x))$

- de l'équation différentielle (I.25) est  $y = \operatorname{Im}(e^{\rho x} Q(x))$

où

- $\rho = \alpha + i\omega$

- $Q$  est la fonction polynôme complexe qu'on détermine en résolvant l'équation

$$aQ'' + (2a\rho + b)Q' + (a\rho^2 + b\rho + c)Q = P$$

sachant que

1. si  $a\rho^2 + b\rho + c \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P \quad \text{et} \quad \text{val} Q = 0;$$

2. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 1 \quad \text{et} \quad \text{val} Q = 1;$$

3. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b = 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 2 \quad \text{et} \quad \text{val} Q = 2.$$

## Année 2003–2004

16 décembre 2003

### Exercice 1 (sur 3)

1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x$$

2. Étudier la continuité, par prolongement éventuel, de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

3. Développer  $(a-b)(a^2+ab+b^2)$  et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x}.$$

### Exercice 2 (sur 2)

Calculer, par exemple en utilisant les équivalents,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{2}}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}.$$

### Exercice 3 (sur 4)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $] -\pi, \pi]$ , les équations suivantes.

1.  $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2},$

2.  $\sin 2x = \sin x,$

3.  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3}).$

### Exercice 4 (sur 1)

Soit  $y$  un réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

1. Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie circulaire et en déduire que

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

2. Rappeler l'expression de  $\sin 2y$  en fonction de  $\sin y$  et  $\cos y$  puis en déduire que

$$\sin 2y = 2 \tan y \cos^2 y.$$

3. Déduire de ce qui précède que

$$\sin 2y = \frac{2 \tan y}{1 + \tan^2 y}. \quad (\text{I.26})$$

### Exercice 5 (sur 10)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \text{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

On notera  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Le but de cette question est de déterminer  $\mathcal{D}_f$ . On pourra s'aider des questions suivantes.

- (a) i. Résoudre les équations

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2x}{1+x^2} = -1.$$

ii. Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

et

$$\frac{2x}{1+x^2} \geq -1.$$

(b) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction Arcsin et déduire  $\mathcal{D}_f$  des questions précédentes.

2. (a) Tracer, *rapidement*, *l'allure* de la courbe représentative de la fonction Arcsin.

(b) Rappeler la parité de la fonction Arcsin puis étudier celle de  $f$ .

3. Calculer  $f(1)$  et  $\lim_{+\infty} f$ .

4. (a) Rappeler l'ensemble sur lequel la fonction Arcsin est dérivable et, en s'aidant de la question 1(a)i page précédente, en déduire le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^+$  sur lequel  $f$  est dérivable.

(b) On pose

$$u(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Calculer  $u'(x)$ .

(c) Prouver que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. Le but de cette question est de prouver que

$$f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{Arctan} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - 2 \operatorname{Arctan} x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(I.27)

(a) On considère un réel  $x$  tel que  $0 \leq x \leq 1$ . En revenant à la définition de l'arc sinus, exprimer de façon équivalente, puis prouver l'égalité

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

(on s'aidera de l'égalité (I.26 page précédente) de la question 3 page précédente de l'exercice 4 page précédente).

(b) On considère un réel  $x$  tel que  $x > 1$ . De même, en revenant à la définition de l'arc sinus, exprimer de façon équivalente, puis prouver l'égalité

$$\pi - 2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

(on s'aidera de l'égalité (I.26) de la question 3 page précédente de l'exercice 4 page précédente).

(c) À l'aide de l'égalité (I.27), tracer *l'allure* de  $\mathcal{C}_f$ .

## 7 avril 2004

### Exercice 1 (sur 3)

1. Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} dx.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales

$$\int t e^{2t} dt, \quad \int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx.$$

3. Calculer, éventuellement au moyen d'un changement de variable, les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt, \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$$

### Exercice 2 (sur 2,5)

1. Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$y' - 3x^2 y = x^2.$$

## 2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 10y' + 41y = 0.$$

**Exercice 3 (sur 5)**

1. Prouver que, pour tout  $h > 0$  et tout  $\theta$  dans  $]0, 1[$ ,

$$-1 < \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} < 0.$$

2. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

3. (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

déduire de la question précédente que, pour tout  $h > 0$ ,

$$1 - h + h^2 - h^3 < \frac{1}{1+h} < 1 - h + h^2.$$

- (b) Donner une valeur approchée de  $\frac{1}{1,09}$  à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 4 (sur 4)**

1. (a) Soit  $a$  un réel strictement positif. Rappeler l'ensemble des réels  $\alpha$  pour lesquels converge l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

- (b) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Rappeler l'ensemble des réels  $\alpha$  pour lesquels converge l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

## 2. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx.$$

## 3. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx.$$

**Exercice 5 (sur 5,5)**

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction  $\text{Argch}$ . Rappeler à quoi équivaut  $y = \text{Argch } x$ .

2. Le but de cette question est de prouver que

$$\forall x \geq 1, \quad \text{Argch } x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

- (a) Vérifier que la relation précédente est vraie pour  $x = 1$ .

- (b) Dans toute la suite, on suppose  $x > 1$ . Prouver que

$$\begin{cases} y = \text{Argch } x \\ x > 1 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

- (c) i. On considère  $x > 1$ . Prouver que l'ensemble des solutions de l'équation  $X^2 - 2xX + 1 = 0$ , d'inconnue  $X$ , est l'ensemble

$$\left\{ x + \sqrt{x^2 - 1}, x - \sqrt{x^2 - 1} \right\}.$$

- ii. (**Hors barème**) Prouver que l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

est l'ensemble vide. En déduire que si  $x > 1$  et  $y > 0$  alors l'égalité  $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$  n'a jamais lieu et conclure.

## 8 juin 2004

**Exercice 1 (sur 3,5)**

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .

2. (a) Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  en tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(b) En revenant à la définition, prouver que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

(c) i. Vers quel point tend  $(x, 2x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ ?

ii. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 2x).$$

La fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est-elle continue en  $(0, 0)$  (justifier)?

**Exercice 2 (sur 7,5)**

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions

(a)  $t \mapsto e^t$ ;

(b)  $t \mapsto \ln(1 + t)$ ;

(c)  $t \mapsto \cos t$ ;

(d)  $t \mapsto \sin t$ .

2. Prouver que le développements limités en 0

(a) de  $e^{\sin x}$  à l'ordre 2 est

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(b) de  $\ln \cos 6x$  à l'ordre 4 est

$$-18x^2 - 108x^4 + o(x^4).$$

3. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x^2 e^{\sin x}}{\ln \cos 6x}$$

dont la courbe représentative est notée  $\mathcal{C}$ .

(a) Dédire de la question précédente que le développement limité en 0 à l'ordre 2 de  $f$  est

$$f(x) = -\frac{1}{18} \left( 1 + x - \frac{11}{2}x^2 + o(x^2) \right).$$

(b) Donner l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 ainsi que les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

**Exercice 3 (sur 2,5)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Étudier les branches infinies de la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$ .

**Exercice 4 (sur 3,5)**

1. Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$\ln(1 + \operatorname{ch} x) - \ln 2 \geq 0.$$

2. À l'aide d'un développement limité, établir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{ch} x) - \ln 2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

et en déduire un équivalent en 0 de

$$\frac{\ln(1 + \operatorname{ch} x) - \ln 2}{(\sqrt[3]{x})^7}.$$

3. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \operatorname{ch} x) - \ln 2}{(\sqrt[3]{x})^7} dx.$$

**Exercice 5 (sur 3)**

Soit  $R$  la fonction d'ensemble de départ  $\mathbb{R}^2$  et est définie par

$$R(\rho, \theta) = \ln \left[ \left( 16 - \rho^2 - \theta^2 \right) \left( \rho^2 + \theta^2 - 4 \right) \right].$$

1. Préciser et représenter graphiquement dans le plan l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_R$  de  $R$ .
2. On rappelle que la différentielle  $dR(\rho, \theta)$  de  $R$ , en un point  $(\rho, \theta)$  où  $R$  est partiellement dérivable, est définie par

$$dR(\rho, \theta) = \frac{\partial R}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\rho + \frac{\partial R}{\partial \theta}(\rho, \theta) d\theta.$$

Calculer  $dR(\rho, \theta)$ .

**Année 2004–2005****5 janvier 2005****Exercice 1 (sur 2)**

1. Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x.$$

2. Développer  $(a-b)(a^2+ab+b^2)$  et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x}.$$

**Exercice 2 (sur 4)**

1. Donner les équivalents en 0 de

$$e^t - 1, \quad \ln(1+t), \quad 1 - \cos t, \quad \sin t, \quad \tan t.$$

2. Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 84x}{\sin 105x}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{2}}$$

(c)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}.$$

**Exercice 3 (sur 3,5)**

Les fonctions  $f$  ci-dessous peuvent-elles être prolongées par continuité en  $x_0$  ?

1.  $x_0 = 0$  et

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - |x|};$$

2.  $x_0 = 2$  et

$$f : x \mapsto \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2};$$

3.  $x_0 = 3\pi/2$  et

$$f : x \mapsto (1 + \sin x) \tan^2 x.$$

**Exercice 4 (sur 4)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $] -\pi, \pi ]$ , les équations suivantes.

1.  $\sin(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2},$
2.  $\cos 2x = \cos x,$
3.  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3}).$

**Exercice 5 (sur 6,5)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^5 + x^2 - 1.$$

1. Factoriser  $b^5 - a^5$  par  $b - a$ , en déduire le taux de variation de  $f$  puis prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
2. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
3. Prouver
  - (a) que  $\frac{103}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$  ;
  - (b) que 0,805 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

**28 avril 2005**

**Exercice 1**

1. Pour une fonction dérivable  $u$ , donner les primitives de

$$\frac{u'}{\cos^2 u} \quad \text{et} \quad \frac{u'}{1 + u^2}.$$

2. Déterminer

(a)

$$\int \left( x^3 + \frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx$$

(b)

$$\int x(1 + x^2) dx$$

(c)

$$\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 4x + 9}} dx$$

(d)

$$\int \frac{e^{2s}}{3 + e^{2s}} ds$$

(e)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} dt.$$

3. (a) Rappeler les formules d'Euler.
- (b) À l'aide des formules d'Euler, linéariser puis déterminer les primitives de  $\sin^3 x$ .
- (c) Reprendre les calculs en remarquant que  $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x$ .

**Exercice 2**

À l'aide d'intégrations par parties, calculer

- 1.

$$\int \ln t dt$$

2. pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$

$$\int t^n \ln t dt$$

- 3.

$$\int x \sin 2x dx$$

- 4.

$$\int \frac{s}{\operatorname{ch}^2 s} dx$$

- 5.

$$\int \operatorname{Arctan} x dx$$

- 6.

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\operatorname{Arccos} x)^2 dx.$$

**Exercice 3**

À l'aide de changements de variable, calculer

- 1.

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9}$$

et, pour  $a$  dans  $\mathbb{R}^*$ ,

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

2.

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

**Exercice 4**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + (\cos x)y = 2 \cos x$$

par exemple après en avoir résolu l'équation sans second membre associée.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 8y' + 25y = 0$$

et en chercher la solution  $y_0$  vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 10$ .

**Exercice 5**

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction intégrable sur  $[-a, a]$ . On pose  $I = \int_{-a}^a f(s) ds$ .

1. Prouver que, si  $f$  est paire,  $I = 2 \int_0^a f(s) ds$ .
2. Prouver que, si  $f$  est impaire,  $I = -I$ . Qu'en conclue-t-on ?

**12 mai 2005****Exercice 1**

On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ , la fonction  $\operatorname{Argth} x$  satisfait

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Soit  $x$  dans  $] -1, 1[$ . Prouver que

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx.$$

**Exercice 2**

1. Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$y' - 3x^2 y = x^2.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 10y' + 41y = 0.$$

**Exercice 3**1. Soit  $\alpha$  un réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

(a) Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie circulaire et en déduire que

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

(b) Rappeler l'expression de  $\sin 2\alpha$  en fonction de  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  et en déduire que

$$\sin 2\alpha = 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha.$$

(c) Déduire de ce qui précède que

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

2. On pose  $t = \tan(x/2)$ .(a) Pour une fonction dérivable  $u$ , rappeler les expressions de la dérivée de la fonction  $\tan u$  et en déduire que

$$dt = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx.$$

(b) À l'aide de la question (1c), exprimer  $\sin x$  en fonction de  $t$ .

3. On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

- (a) En utilisant le changement de variable  $t = \tan(x/2)$ , établir que

$$I = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2}.$$

- (b) À l'aide du changement de variable permettant d'affirmer que

$$I = 2 \int_1^2 \frac{du}{u^2},$$

calculer  $I$ .

#### Exercice 4 (Étude préliminaire)

Pour  $t \geq 0$ , on pose  $v(t) = 2t\sqrt{4-t}$ .

1. Prouver que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 4]$ .
2. Déterminer le maximum de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .
3. (a) Pourquoi  $v$  est-elle intégrable sur  $\mathcal{D}$ ?
- (b) Prouver, au moyen d'une intégration par parties, que l'intégrale de  $v$  sur  $\mathcal{D}$  vaut  $\frac{256}{15}$ .

##### Définition I.10.1.

- (c) Soit  $f$  une fonction intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  la quantité  $\mu$  définie par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Déduire de la question précédente la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .

#### Exercice 5 (Étude concrète de l'exercice précédent)

Un motard réalise une expérience de vitesse sur une piste rectiligne d'extrémités  $A$  et  $B$ . Sa vitesse instantanée, exprimée en  $\text{km h}^{-1}$ , est donnée en fonction du temps par  $v(t) = at\sqrt{T-t}$  où

- $a$  est un paramètre réel strictement positif;
- $t$  est exprimé en heure;

- 0 et  $T$  sont les instants respectivement de départ en  $A$  et d'arrivée en  $B$ .

1. Calculer  $v(0)$  et  $v(T)$  puis déterminer l'instant  $t_M$  de vitesse maximale ainsi que la vitesse maximale  $v_M = v(t_M)$ .
2. On désigne par  $x$  la distance parcourue depuis  $A$  et on rappelle qu'alors la fonction  $x$  est une primitive de la fonction  $v$ . Calculer  $x(T)$  et en déduire la vitesse moyenne  $V$  du motard sur le parcours  $AB$ .
3. Prouver qu'il existe un instant au cours de l'expérience auquel la vitesse instantanée du motard égale sa vitesse moyenne.
4. *Application numérique.* Sachant que  $A$  et  $B$  sont distants de 1 km et que la vitesse maximale atteinte est  $200 \text{ km h}^{-1}$ , déterminer  $T$  en secondes puis  $V$  en  $\text{km h}^{-1}$ . On donne  $15\sqrt{3} \approx 26$  et  $80\sqrt{3} \approx 139$ .

15 juin 2005

#### Exercice 1

1. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3.
2. Prouver que si  $h > 0$  et  $0 < \theta < 1$  alors  $0 < (1 + \theta h)^{-3} < 1$ .
3. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, établir pour tout  $h > 0$  l'inégalité

$$h - \frac{h^2}{2} < \ln(1+h) < h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}.$$

4. En justifiant le résultat, donner une valeur approchée de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-3}$  près.

#### Exercice 2

1. En en donnant la valeur exacte, prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale  $I$  définie par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

3. (a) Rappeler un équivalent de  $\ln(1+t)$  en 0 (on pourra s'aider d'un développement limité de  $\ln(1+t)$  en 0).  
(b) Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^3} dt.$$

### Exercice 3

1. (a) Démontrer que, en 0,  $\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ .  
(b) i. Rappeler le développement limité de  $\ln(1+t)$  à l'ordre 3 en 0.  
ii. Calculer le développement limité de  $\ln(1+\tan h) - \ln(1-\tan h)$  à l'ordre 3 en 0.  
(c) On rappelle que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Déduire des questions précédentes le développement limité de  $\ln(\tan x)$  à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{4}$ .

2. Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$$

### Exercice 4

On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Rappeler, pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(1+u)^\alpha$$

et déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire que celui de  $\operatorname{Argsh} x$  à l'ordre 5 en 0 est

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

2. À l'aide du développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{Argsh} x$ , étudier localement au point d'abscisse 0 la fonction  $\operatorname{Argsh}$ .

### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de  $f$ .  
2. (a) Que vaut  $f(0,0)$ ?  
(b) Pour tout  $x \neq 0$ , calculer  $f(2x, x)$ . La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0,0)$ ?  
3. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité partielle de  $f$  en  $(0,0)$  par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ .  
4. Pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $x+y \neq 0$ , calculer  $f'_x(x, y)$  et  $f'_y(x, y)$ .

## Année 2005–2006

23 novembre 2005

### Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 1 = 0 \text{ et } \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0.$$

2. Résoudre l'inéquation suivante

$$\frac{2x-3}{x+2} \geq \frac{x-1}{x+2}.$$

3. Factoriser  $x^2 - 2x - 3$  puis résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} \leq 0.$$

### Exercice 2

- Pour  $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ , rappeler les valeurs de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .
- On considère les nombres complexes  $z_1 = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_2 = 1 - i$  et  $z_3 = \sqrt{3} + i$ .
  - Déterminer (par le calcul ou géométriquement) les modules et arguments de  $z_1, z_2, z_3$ .
  - Déterminer la forme exponentielle de  $z_1, z_2, z_3$ .
  - Déterminer les modules et arguments de  $z_1 z_2, \frac{z_2}{z_3}, z_1^4$ .

### Exercice 3

Calculer ou donner

1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x.$$

### Exercice 4

Développer  $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$  et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}.$$

### Exercice 5

- En réduisant au même dénominateur prouver que

$$\frac{\cos 3a}{\sin a} + \frac{\sin 3a}{\cos a} = \cotan a - \tan a$$

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Le but de cette question est de prouver que

$$1 - \sin x - \cos x = 0$$

$$\iff x \equiv 0 [2\pi]$$

$$\text{ou } x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]. \quad (\text{I.28})$$

- Résoudre l'équation  $\sin t - \cos t = 0$ .
- Poser  $x = 2t$  et réécrire l'équation (I.28) de façon à ce qu'elle soit sous forme factorisée.
- Résoudre l'équation (I.28).

## 26 janvier 2006

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x}$$

- Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
- Prouver que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0.
- Pour  $x \notin 0[2\pi]$ , simplifier l'expression de  $f(x)$ .

### Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}(x^2 - 3).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
2. Calculer la dérivée de  $f$ .

**Exercice 3**

1. Rappeler la définition de  $\operatorname{Arcsin} x$ .
2. Prouver que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

et en déduire une simplification de  $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$ .

**Exercice 4**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

**Le but de cet exercice est de démontrer le résultat, admis en cours, suivant : pour tout  $\alpha$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ ,**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

1. Sans calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .
2. Sachant que  $\ln 2 < 1$  et en utilisant la question précédente, établir que pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x < \sqrt{x}$ .
3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

4. Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ . En posant  $X = x^\alpha$ , prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2.$$

1. En étudiant le signe de sa dérivée, prouver que  $f$  est strictement monotone sur  $[0, 1]$ .
2. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
3. Prouver, en utilisant la méthode de dichotomie,
  - (a) que  $\frac{35}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$  ;
  - (b) que  $0,27$  est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .
4. Déterminer une racine évidente de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

et en déduire la valeur exacte de  $x_0$ .

**2 février 2006****Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{2 \cos^2 x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Prouver que  $f$  peut être prolongée par continuité en  $\frac{\pi}{2}$ .
3. Pour  $x \neq \frac{\pi}{2}, [2\pi]$ , simplifier l'expression de  $f(x)$ .

**Exercice 2**

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \left[ (x - 3)^2 \right].$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
2. Calculer la dérivée de  $f$ .

**Exercice 3**

Le but de cet exercice est de prouver que

$$2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{I.29})$$

1. Rappeler la définition de  $y = \operatorname{Arcsin} x$ . Adapter cette définition au cas de l'égalité (I.29).
2. (a) On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Déterminer une expression simplifiée de  $\sin(2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2})$ .  
(b) Rappeler le sens de variation de la fonction  $\operatorname{Arcsin}$  et en déduire un encadrement de  $2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$ .
3. Conclure.

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en 0 (on justifiera l'affirmation) ?
2. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 (on justifiera l'affirmation) ?

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15$$

dont on admettra qu'elle est strictement croissante sur  $[2, 3]$ .

1. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]2, 3[$ .
2. Prouver, en utilisant la méthode de dichotomie,
  - (a) que  $\frac{287}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$  ;
  - (b) que 2,24 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

3. En remarquant que  $-3$  est racine de l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$$

donner la valeur exacte de  $x_0$ .

**17 mai 2006**

**Exercice 1**

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx$$

2.

$$\int \frac{t^3 - 1}{\sqrt[3]{t^4 - 4t + 3}} \, dt$$

**Exercice 2**

En dérivant préalablement la fonction cotan, prouver par une intégration par parties que :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-s}{\sin^2 s} \, ds = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

**Exercice 3**

Calculer les quantités suivantes au moyen d'un changement de variable :

1.

$$\int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 16}$$

2. en posant par exemple  $x = t^2$ ,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

**Exercice 4**

Résoudre les équations différentielles :

1.

$$y' + (\ln x)y = 4 \ln x$$

2.

$$y'' + 4y' + 6y = 0$$

**Exercice 5**Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en 0 (on justifiera l'affirmation) ?
2. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 (on justifiera l'affirmation) ?

**21 juin 2006****Exercice 1**

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions

- (a)  $t \mapsto e^t$  ;
- (b)  $t \mapsto \ln(1+t)$  ;
- (c)  $t \mapsto \cos t$  ;
- (d)  $t \mapsto \sin t$  ;
- (e)  $t \mapsto \operatorname{sh} t$ .

2. Calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 de  $\ln(1+x)\operatorname{sh} x$ .

3. Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de

$$\frac{\cos t - 1}{\sin t}.$$

4. Calculer le développement limité d'ordre 4 en  $x_0 = 2$  de  $\exp((x-2)^2)$ .

**Exercice 2**Calculer, pour tout paramètre  $\beta$  réel,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln(\cos \frac{\beta}{x})}$$

**Exercice 3**

1. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3 + x + 1} dx.$$

2. Discuter, selon  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^3 + x + 1)^\alpha} dx.$$

**Exercice 4**On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Prouver que

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de

$$\frac{1}{1-x^2}.$$

- (b) En déduire que celui de  $\operatorname{Argth} x$  à l'ordre 6 en 0 est

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6). \quad (\text{I.30})$$

3. À l'aide du développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{Argth} x$ , étudier localement au point d'abscisse 0 la fonction  $\operatorname{Argth}$ .

4. À l'aide de l'égalité (I.30), déterminer un équivalent en 0 de la fonction  $\operatorname{Argth}$  et donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Argth} x}{(\sqrt{x})^3} dx.$$

**Exercice 5**

1. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-u} du.$$

2.

- (a) Comparer, pour  $u \geq 1$ ,  $e^{-u^2}$  et  $e^{-u}$ .  
 (b) En déduire la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-u^2} du$$

puis de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

## Année 2006–2007

1<sup>er</sup> décembre 2006

### Exercice 1

En utilisant les équivalents pour les deux dernières questions, calculer

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{1 - 2x^3}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{\tan 3t}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}.$$

### Exercice 2

1. On pose :  $z_1 = -3i$  et  $z_2 = -3 + 3i$ . Déterminer (par le calcul ou géométriquement) les modules et arguments de

(a)  $z_1$  ;

(b)  $z_2$  ;

(c)  $z_1 z_2$

(d)  $z_1/z_2$ .

2. Déterminer la forme trigonométrique de  $z_3 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$  ( $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ ).

### Exercice 3

1. Simplifier l'expression de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x| + 1}$$

puis construire sa courbe.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation trigonométrique :

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}.$$

### Exercice 4

En justifiant le résultat, étudier le prolongement par continuité

1. en  $x_0 = 4$  de la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

2. en  $x_0 = 0$  de la fonction :

$$f: x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$$

### Exercice 5

On cherche à résoudre numériquement l'équation  $f(x) = 0$  où

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 21x + 7$$

1. En admettant que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]2, 3[$ , prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur cet intervalle.  
 2. En procédant par dichotomie, déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $x_0$  et prouver que 2,6 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

**15 janvier 2007**

**Exercice 1**

Énoncer le théorème des accroissements finis sous deux formes :

1. sur un intervalle  $[a, b]$  où  $a < b$  ;
2. sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $a + h$  où  $a \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 2**

1. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ .
  - (a) déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  ;
  - (b) déterminer l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'_f$  de  $f$  ;
  - (c) calculer la dérivée de  $f$  ;
  - (d) déterminer la différentielle de  $f$  en  $x_0 = 1$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{x}$ .
  - (a) déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  ;
  - (b) déterminer l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'_f$  de  $f$  ;
  - (c) calculer la dérivée de  $f$  ;
  - (d) déterminer la différentielle de  $f$  en  $x_0 = 2$ .

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
2. La fonction  $f$  est-elle, en 0,
  - (a) continue ?
  - (b) dérivable ?
3. Définir explicitement, notamment en 0 :

- (a) la fonction  $f'$  ;
- (b) la fonction  $f''$ . Cette fonction  $f''$  est-elle dérivable en 0 ?

4. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation complet.
5. On donne  $e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,72$  et  $\frac{1}{3e} \approx 0,12$ . Construire approximativement la courbe représentative de  $f$  sur  $[0, 2]$  en en précisant au moins trois points caractéristiques.

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la parité de  $f$ .
3. (a) Rappeler l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $\operatorname{Arctan}$  puis, pour une fonction  $u$ , la dérivée de  $\operatorname{Arctan} u$ .  
(b) En déduire l'ensemble de dérivabilité de  $f$  et y calculer  $f'$ .
4. En déduire que si  $x \in ]-1, 1[$  :

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right). \quad (\text{I.31})$$

Quelles égalités de même nature obtient-on sur les intervalles  $]1, +\infty[$  et  $] -\infty, -1[$  ?

5. Rappeler la définition de  $\operatorname{Arctan}$  et l'utiliser afin de prouver différemment, pour  $x \in ]-1, 1[$ , l'égalité (I.31).

**Exercice 5**

1. Déterminer des primitives des fonctions
  - (a)  $x \mapsto x^4 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x}$ ,
  - (b)  $x \mapsto x^2 \sqrt{1+x^3}$ ,

(c)  $x \mapsto \tan x$ .

2. Déterminer la primitive de  $\frac{\cos}{1+\sin^2}$  s'annulant en  $\pi/2$ .

**22 janvier 2007**

**Exercice 1**

1. Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x.$$

2. Rappeler la factorisation de  $a^3 - b^3$  et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}.$$

3. À l'aide des équivalents, calculer les limites en 0 de

(a)

$$\frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)}$$

(b)

$$\frac{\tan^2(\sqrt{\pi}x)}{1 - \cos x}$$

4. Déterminer l'ensemble de définition et étudier la continuité, par prolongement éventuel, de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}.$$

**Exercice 2**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $]-\pi, \pi]$ , les équations suivantes.

1.  $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2},$

2.  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3}).$

**Exercice 3**

Déterminer les primitives de

1.

$$\cos^2 x \sin x$$

2.

$$\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right).$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Arccos, en n'omettant pas ses points caractéristiques.

2. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$ . On pourra s'aider des questions suivantes.

(a) Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1.$$

(b) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction Arccos et déduire  $\mathcal{D}_f$  des questions précédentes.

3. Étudier la parité de la fonction  $f$ .

4. Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $\lim_{+\infty} f$ .

5. (a) Résoudre *rapidement*, à l'aide des calculs effectués à la question (2a), les équations

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1.$$

(b) Rappeler l'ensemble sur lequel la fonction Arccos est dérivable, en déduire le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^+$  sur lequel  $f$  est dérivable puis y calculer  $f'$ .

(c) En déduire que si  $x > 0$ ,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right). \quad (\text{I.32})$$

Qu'en est-il pour  $x = 0$ ? Quelle égalité analogue obtient-on pour  $x < 0$ ?

6. À l'aide de l'égalité (I.32), tracer l'allure de la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ .

## 11 avril 2007

### Exercice 1

Calculer une primitive

1. de la fonction :

$$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}}$$

2. de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

### Exercice 2

Par intégration par parties,

1. calculer

$$\int (\ln t)^2 dt$$

2. prouver que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \sin x) dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

### Exercice 3

Au moyen d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$$

### Exercice 4

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$y' + \frac{2}{x}y = x$$

puis donner la solution s'annulant en  $x_0 = 1$ .

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

### Exercice 5

On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , exprimer  $\operatorname{sh}^{(n)}$ .
- Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 4.
- En déduire le développement de Taylor-Lagrange de la fonction  $\operatorname{sh}$  en 0 à l'ordre 4.

## 13 juin 2007

### Exercice 1

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions

- $t \mapsto e^t$ ;
- $t \mapsto \cos t$ ;
- $t \mapsto \sin t$ ;
- $t \mapsto \operatorname{ch} t$ ;
- $t \mapsto \ln(1+t)$ ;
- pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto (1+t)^\alpha$ .

2. (a) Calculer le développement limité de  $\sqrt{1+x} \cos x$  à l'ordre 3 en 0.  
 (b) Étudier localement au point d'abscisse  $x_0 = 0$  la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation

$$y = \frac{\sqrt{1+x} \cos x - 1}{x}.$$

**Exercice 2**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Étudier les branches infinies de la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$ .

**Exercice 3**

1. Démontrer que, en 0,  $\tanh = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ .

2. En déduire que le développement limité de  $\ln(1 + \tanh) - \ln(1 - \tanh)$  à l'ordre 3 en 0 est :

$$\ln(1 + \tanh) - \ln(1 - \tanh) = 2h + \frac{4}{3}h^3 + o(h^3)$$

3. On rappelle que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Déduire des questions précédentes le développement limité de  $\ln(\tan x)$  à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 4**

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + e^{1/x^2} - 1}$$

et on note  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  les ensemble de définition et courbe représentative de  $f$ .

1. (a) Rappeler le sens de variation de la fonction exponentielle et en déduire une minoration, pour tout  $x \neq 0$ , de  $e^{1/x^2}$ .  
(b) Prouver que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ .
2. (a) En procédant éventuellement au changement de variable  $t = 1/x$ , prouver que  $f$  admet pour développement limité généralisé au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

- (b) Déterminer le développement limité généralisé à l'ordre 3 de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ .

- (c) Étudier les branches infinies de  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 5**

1. On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Indiquer la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique puis, *rapidement*, les principales propriétés, les dérivées première et seconde et la représentation graphique des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .

2. Prouver que la fonction  $\operatorname{sh}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire que le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{Argsh} x$  est

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5). \quad (\text{I.33})$$

5. À l'aide du développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{Argsh} x$ , étudier localement au point d'abscisse 0 la fonction  $\operatorname{Argsh}$ .
6. À l'aide de l'égalité (I.33), déterminer un équivalent en 0 de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  et donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\operatorname{Argsh} x}{(\sqrt{x})^3} dx.$$

**20 juin 2007****Exercice 1**

On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ , la fonction  $\operatorname{Argth} x$  satisfait

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Soit  $x$  dans  $] -1, 1[$ . Expliciter  $(\operatorname{Argth} x)'$ .
2. À l'aide d'une intégration par parties et d'un éventuel changement de variable, prouver que

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx = \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2.$$

**Exercice 2**

Calculer, éventuellement au moyen d'un changement de variable, les intégrales :

1.

$$\int_0^1 \frac{e^s}{e^s + 1} \, ds$$

2.

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$$

**Exercice 3**

1. Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle

$$y' + (\cos x)y = 2 \cos x.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 8y' + 25y = 0$$

et en chercher la solution  $y_0$  vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y_0'(0) = 10$ .

**Exercice 4**

1. Rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3.

2. Soit  $f$  la fonction  $f$  définie par  $f: x \mapsto \ln(1+x)$ .

- (a) Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , exprimer la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$ .
- (b) Exprimer le développement de Taylor-Lagrange de la fonction  $f$  en 0 à l'ordre 3.

**Année 2007–2008****10 décembre 2007****Exercice 1**

1. Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0.$$

2. Factoriser  $x^2 - 3x - 4$  puis résoudre l'inéquation :

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} \leq \frac{x + 4}{x - 1}.$$

**Exercice 2**

1. Résoudre les équations

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \tan 2x + \tan x = 0$$

2. Résoudre graphiquement (sans démonstration), dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $2 \sin x \geq 1$ .

**Exercice 3**

1. Rappeler le développement de  $(a + b)^4$ .
2. En le considérant comme la partie réelle d'un nombre complexe à bien choisir, exprimer  $\cos 4\theta$ , en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

**Exercice 4**

1. Rappeler les formules d'Euler.

2. Linéariser  $\sin^4 x$

### Exercice 5

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

**15 janvier 2008**

### Exercice 1

Calculer

1.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x$$

### Exercice 2

1. Rappeler les équivalents en 0 de  $e^x - 1$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $1 - \cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ .

2. Calculer les limites en 0 de

(a)

$$\frac{\sin 2t}{\sin 3t}$$

(b)

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\tan x}.$$

3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sqrt{1 - \cos(x-1)}}$$

### Exercice 3

Étudier la continuité, par prolongement éventuel, des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies respectivement par

1.

$$f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2}$$

2.

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1-x}$$

(on pourra effectuer le changement de variable  $t = \sqrt[4]{x}$ )

3.

$$h(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

### Exercice 4

On cherche à résoudre numériquement l'équation  $f(x) = 0$  où

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1. En admettant que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0, 1[$ , prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur cet intervalle.

2. En procédant par dichotomie, déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $x_0$  et prouver que 0,6 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

### Exercice 5

1. Rappeler la définition de l'arc cosinus.

2. Rappeler l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $\text{Arccos}$ .

3. Tracer la courbe de la fonction  $\operatorname{Arccos}$ .
4. Calculer  $\operatorname{Arccos} 0$ ,  $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Arccos} 1$ ,  $\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2})$ ,  $\operatorname{Arccos}(-1)$ ,  $\operatorname{Arccos}(\sqrt{3})$ .
5. Soit  $x$  dans  $\mathcal{D}_{\operatorname{Arccos}}$ . Prouver que
 
$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi.$$
6. Interpréter l'égalité précédente relativement à la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\operatorname{Arccos}$ .

**18 janvier 2008**

**Exercice 1**

1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - x}{2 - x}.$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$\sqrt{x+2} - x \geq 0$$

puis exprimer sans valeurs absolues  $|\sqrt{x+2} - x|$ .

**Exercice 2**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $]-\pi, \pi]$ , les équations suivantes.

1.  $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$ ,
2.  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3})$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $]-\pi, \pi]$ , l'inéquation  $\cos 2x \geq \sin 2x$ .

**Exercice 3**

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes

(a)  $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$  ;

(b)  $(1 + i \tan \varphi)^2$ .

2. Calculer

(a)  $\operatorname{Arg}(\bar{z})$  en fonction de  $\operatorname{Arg}(z)$ . Quel est le lien géométrique entre les images de  $z$  et  $\bar{z}$  ?

(b)  $\operatorname{Arg}(i\bar{z})$  en fonction de  $\operatorname{Arg}(z)$ . Quel est le lien géométrique entre les images de  $z$  et  $i\bar{z}$  ?

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \left( \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right).$$

1. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$ . On pourra s'aider des questions suivantes.

(a) Résoudre l'inéquation

$$\left| \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right| \leq 1.$$

(b) Dédire  $\mathcal{D}_f$  de la question précédente.

(c) Résoudre *rapidement*, à l'aide de la question (1a), l'équation

$$\left| \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right| = 1.$$

2. Étudier la parité de la fonction  $f$ .

3. Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $\lim_{+\infty} f$ .

4. Prouver que, si  $x \geq 0$ ,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right). \quad (\text{I.34})$$

Quelle égalité analogue obtient-on pour  $x < 0$  ?

5. À l'aide de l'égalité (I.34), tracer l'allure de la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ .

**25 avril 2008****Exercice 1**

Calculer une primitive

1. de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x} \sqrt{1 + \ln x}$$

2. de la fonction :

$$z \mapsto \frac{e^z}{\sqrt{1 - e^{2z}}}$$

**Exercice 2**

Par intégration par parties,

1. calculer

$$\int s \operatorname{Arctan} s \, ds$$

2. prouver que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) \ln(1 + \cos x) \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

**Exercice 3**

Au moyen de changements de variable,

1. calculer

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16}$$

2. calculer

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 16}$$

3. calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1}$$

**Exercice 4**

1. Pour un entier  $n$  quelconque, rappeler, avec ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre  $n$ .
2. On pose  $f(x) = (1 + x)^4$ .
  - (a) Développer l'expression de  $f(x)$ .
  - (b) Donner le développement de Taylor-Lagrange de  $f$  en 0
    - i. à l'ordre 2 ;
    - ii. à l'ordre 3 ;
    - iii. à l'ordre 4.

**12 juin 2008****Exercice 1**

1. Rappeler, ou calculer, les développements limités d'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{ch} x$  et  $\operatorname{sh} x$ .
2. Prouver que le développement limité d'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{th} x$  est

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

**Exercice 2**

1. Déterminer le développement limité d'ordre 4 en  $-1$  de  $\ln(2 + x)\sin(x + 1)$ .
2. Prouver que

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{162} + o(x^3)$$

**Exercice 3**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 4y = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 4y = x$$

3. En en résolvant d'abord l'équation sans second membre, résoudre l'équation différentielle

$$y' - 4x^3y = x^3.$$

Déterminer, parmi toutes les solutions trouvées, celle qui s'annule en 0.

**Exercice 4**On considère un réel  $c$  et l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + cy = 0 \quad (\text{I.35})$$

1. On pose
- $c = -3$
- . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.35).

2. On pose  $c = 1$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.35).

3. On pose  $c = 10$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.35).

### Exercice 5

1. (a) À l'aide de l'exercice 4 page précédente, déterminer la limite en  $+\infty$  de la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 10y = 0 \quad (\text{I.36})$$

(b) Prouver que la solution de l'équation (I.36) vérifiant

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

est

$$y = \frac{1}{3} e^{-x} \sin(3x)$$

2. En utilisant le théorème 1, déterminer une solution particulière puis, à l'aide de la question 3 de l'exercice 4 page précédente, la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 10y = 37 \cos 3x.$$

3. (a) Soit  $\varphi$  un réel de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Prouver que  $1 + \tan^2 \varphi = 1/\cos^2 \varphi$  et exprimer  $1 + \cotan^2 \varphi$  en fonction de  $\sin \varphi$ .

(b) Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux réels strictement positifs. On pose

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ \varphi &= \operatorname{Arctan} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

i. Rappeler ce que signifie l'égalité (I.37).

ii. En factorisant par  $\lambda_1^2$  (resp. par  $\lambda_2^2$ ) dans  $A$ , en déduire que

$$\frac{\lambda_1}{A} = \cos \varphi \quad \left( \text{resp.} \quad \frac{\lambda_2}{A} = \sin \varphi \right).$$

iii. On pose, pour  $X$  réel,

$$y = \lambda_1 \cos X + \lambda_2 \sin X.$$

Prouver à l'aide de la question précédente que

$$y = A \cos(X - \varphi).$$

**Remarque** On admettra dans la suite que cette dernière expression est valable pour tous  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  réels.

iv. En déduire que la solution générale de l'équation (I.36) peut s'écrire

$$y = A e^{-x} \cos(3x - \varphi), \quad A \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

**Théorème.** Soit  $(a, b, c)$  un triplet de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ,  $P$  une fonction polynôme et  $\alpha$  et  $\omega$  deux réels. On considère les équations différentielles

$$ay'' + by' + cy = P(x) e^{\alpha x} \cos \omega x \quad (\text{I.38})$$

$$ay'' + by' + cy = P(x) e^{\alpha x} \sin \omega x. \quad (\text{I.39})$$

Alors, une solution particulière

- de l'équation différentielle (I.52) est  $y = \operatorname{Re}(e^{\rho x} Q(x))$
- de l'équation différentielle (I.53) est  $y = \operatorname{Im}(e^{\rho x} Q(x))$

où

- $\rho = \alpha + i\omega$
- $Q$  est la fonction polynôme *complexe* qu'on détermine en résolvant l'équation

$$aQ'' + (2a\rho + b)Q' + (a\rho^2 + b\rho + c)Q = P$$

sachant que

1. si  $a\rho^2 + b\rho + c \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P \quad \text{et} \quad \text{val} Q = 0;$$

2. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 1 \quad \text{et} \quad \text{val} Q = 1;$$

3. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b = 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 2 \quad \text{et} \quad \text{val} Q = 2.$$

2. Étudier la parité de  $f$ .

### Exercice 3

- Calculer  $\pi/3 - \pi/4$  puis  $\cos(\pi/12)$  et  $\sin(\pi/12)$ .
- En déduire  $\cos(11\pi/12)$ ,  $\sin(11\pi/12)$ , puis  $\cos(5\pi/12)$ ,  $\sin(5\pi/12)$ ,  $\cos(7\pi/12)$  et  $\sin(7\pi/12)$ .

### Exercice 4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Exercice 5

En cherchant une racine évidente puis en factorisant à la volée, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$$

## Année 2008–2009

### 24 novembre 2008

#### Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{4x^2 - 9}{x - \frac{3}{2}} = 0$$

2. Rappeler le développement de  $(a + b)^3$  puis résoudre l'équation

$$t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$$

3. Factoriser  $x^2 + 2x - 3$  puis résoudre l'inéquation :

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 2} \leq \frac{x + 3}{x + 2}.$$

#### Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\tan x}{|x| - \frac{\pi}{4}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

### 9 janvier 2009

#### Exercice 1

Pour chaque fonction  $f$  et chaque réel  $x_0$  indiqués, calculer  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

1.  $x_0 = 0$  et  $x_0 = +\infty$  et

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x};$$

2.  $x_0 = 4$  et

$$f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - x - 12};$$

3.  $x_0 = 3$  et

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3};$$

4.  $x_0 = 0$  et

$$f(x) = x \ln x;$$

5.  $x_0 = +\infty$  et

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1};$$

6.  $x_0 = +\infty$  et

$$f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}.$$

**Exercice 2**

1. Donner les équivalents en 0 de

$$e^t - 1, \quad \ln(1+t), \quad 1 - \cos t, \quad \sin t, \quad \tan t.$$

2. Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1},$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 84x}{\sin 105x}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 3x}.$$

(d)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})}$$

3. En posant éventuellement
- $x = 2 + h$
- , calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{\sin(x-2)}.$$

**Exercice 3**

Les fonctions  $f$  ci-dessous peuvent-elles être prolongées par continuité en  $x_0$  ?

- 1.
- $x_0 = 0$
- et

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - |x|};$$

- 2.
- $x_0 = 2$
- et

$$f : x \mapsto \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2};$$

- 3.
- $x_0 = 3\pi/2$
- et

$$f : x \mapsto (1 + \sin x) \tan^2 x.$$

**Exercice 4**

On cherche à résoudre numériquement l'équation

$$\ln x = 2 - x. \quad (\text{I.40})$$

1. Étudier, sans nécessairement la représenter graphiquement, la fonction
- $f$
- définie sur
- $\mathbb{R}$
- par

$$f(x) = \ln x + x - 2$$

On recourra éventuellement à un calcul de dérivée pour expliquer pourquoi  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

2. Prouver que l'équation (I.40) admet une solution unique
- $\alpha$
- sur
- $\mathbb{R}^{+*}$
- , située dans l'intervalle
- $]1, 2[$
- .

3. Sachant que

$$\begin{array}{llll} 0,6 & < & \ln 2 & < & 0,7 \\ -0,095 & < & \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} & < & -0,094 \\ 0,30 & < & \ln \frac{7}{4} - \frac{1}{4} & < & 0,31 \\ 0,11 & < & \ln \frac{13}{8} - \frac{3}{8} & < & 0,12 \end{array}$$

- (a) déterminer une valeur approchée fractionnaire à
- $10^{-1}$
- près de
- $\alpha$

- (b) prouver que 1,6 est une valeur approchée à
- $10^{-1}$
- près de
- $\alpha$
- .

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{(3x - \frac{\pi}{4})^2}{1 - \cos(3x - \frac{\pi}{4})}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition
- $\mathcal{D}_f$
- de
- $f$
- .

2. Prouver que
- $f$
- est continue ou peut être prolongée par continuité sur l'ensemble

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

## 22 janvier 2009

### Exercice 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $]-\pi, \pi]$ , les équations

1.  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;
2.  $\tan x = \cotan x$ .

### Exercice 2

1. On rappelle que le nombre complexe  $j$  est défini par  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  où  $i^2 = -1$ . Déterminer le module et un argument puis placer dans le plan complexe l'image

- (a) de  $j$ ,
- (b) de  $j^2$ .

2. Calculer  $\text{Arg}(j^2 + ij^2)$ .
3. Pour  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ , déterminer la forme trigonométrique de  $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

### Exercice 3

Au fur et à mesure qu'une navette spatiale prend de l'altitude, le poids de l'astronaute diminue jusqu'à atteindre un état d'apesanteur. Le poids  $P(z)$  (en kg) d'un astronaute, pesant  $P_0$  à la surface de la terre, est à l'altitude  $z$  (en km) donné par

$$P(z) = P_0 \left( \frac{R}{R+z} \right)^2$$

où  $R = 6400$  km.

1. Soit  $p$  un réel strictement positif. Prouver que la solution de l'équation  $P(z) = p$  est

$$z = R \left( \sqrt{\frac{P_0}{p}} - 1 \right)$$

2. À quelle altitude l'astronaute ne pèsera-t-il plus que le quart de son poids initial ?
3. À quelle altitude l'astronaute, pesant 63 kg à la surface de la terre, ne pèsera-t-il plus que 7 kg ?

4. À quelle altitude l'astronaute sera-t-il en état d'apesanteur complet ? Que penser du résultat ?

### Exercice 4

1. Prouver que

$$\sqrt{x+2} - x \geq 0 \quad \text{si et seulement si} \quad -2 \leq x \leq 2$$

2. Exprimer sans valeurs absolues  $|\sqrt{x+2} - x|$ .

## 22 mai 2009

### Exercice 1

1. Rappeler à quoi équivaut

$$y = \text{Arcsin } x$$

2. De la fonction Arcsin, rappeler :

- (a) l'ensemble de définition ;
- (b) l'ensemble de dérivabilité.

3. Rappeler la dérivée de la fonction Arcsin.

4. Prouver que, pour tout  $x$  convenable,

$$\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$$

En déduire une expression simplifiée de  $\tan(\text{Arcsin } x)$ .

### Exercice 2

Déterminer des primitives de

$$1. \quad x\sqrt{1+x^2}$$

$$2. \quad \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$3. \quad \frac{1}{x \cos^2(\ln x)}$$

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en 0 (on justifiera l'affirmation) ?

2. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 (on justifiera l'affirmation) ?

**Exercice 4**

Pour  $t \geq 0$ , on pose  $v(t) = t\sqrt{3-t}$ .

1. Prouver que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 3]$ .
2. Déterminer le maximum de la fonction  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .
3. (a) Pourquoi la fonction  $v$  est-elle intégrable sur  $\mathcal{D}$  ?  
(b) Prouver, au moyen d'une intégration par parties, que l'intégrale de  $v$  sur  $\mathcal{D}$  vaut  $\frac{12}{5}\sqrt{3}$ .

**Définition I.14.1.**

- (c) Soit  $f$  une fonction intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  la quantité  $\mu$  définie par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Déduire de la question précédente la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

1. Prouver que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer, pour tout  $x$  réel,  $f'(x)$ .
3. Rappeler la dérivée de la fonction Argsh et en déduire que, pour tout  $x$  réel,

$$\text{Argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

**15 juin 2009**

**Exercice 1**

1. (a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

- (b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

2. Après avoir résolu l'équation sans second membre associée, résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 2 \sin x$$

3. On considère l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2 - 1} \quad (\text{I.41})$$

- (a) Déterminer les intervalles où l'équation (I.41) est définie.
- (b) Résoudre l'équation (I.41) sur  $]1, +\infty[$ .
- (c) Parmi les solutions de l'équation (I.41) sur  $]1, +\infty[$ , déterminer celle(s)
  - i. s'annulant en 2 ;
  - ii. tendant vers 0 en  $+\infty$ .

**Exercice 2**

On considère un réel  $c$  et l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + cy = 0 \quad (\text{I.42})$$

1. On pose  $c = 9$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.42).
2. On pose  $c = 18$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.42).
  - (a) On pose  $c = 5$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.42).
  - (b) Déterminer une solution particulière, puis la solution générale de l'équation

$$y'' - 6y' + 5y = e^{2x}$$

**Exercice 3**

1. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\ln(1+x)\cos x$ .

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 1 de  $\ln x \cos(x-1)$ .

2. Prouver que, si  $x$  est positif, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sqrt{\ln(1+x^2)}$  est :

$$\sqrt{\ln(1+x^2)} = x - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$$

#### Exercice 4

On note  $f$  la fonction, éventuellement prolongée par continuité en 0, définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

1. Prouver que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f$  est :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

2. En déduire :

- (a) la limite de  $f$  en 0 ;
- (b) la dérivée de  $f$  en 0 ;
- (c) l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  en 0 ;
- (d) la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

#### Exercice 5

1. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) En déduire que celui de  $\operatorname{Arcsin} x$  à l'ordre 5 en 0 est

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \quad (\text{I.43})$$

2. Calculer les primitives suivantes :

(a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

(c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$$

3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, prouver que

$$\int \operatorname{Arcsin} x dx = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

(b) En déduire la valeur de

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{Arcsin} x dx$$

4. (a) Rappeler trois expressions de  $\cos 2\theta$  et en déduire une expression de  $\cos^2 \theta$ .

(b) Au moyen du changement de variable  $x = \sin \theta$ , prouver que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

(c) Par intégration par parties, calculer

$$\int x \operatorname{Arcsin} x dx$$

### 17 juin 2009

#### Exercice 1

L'objet de cet exercice est de prouver que, pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\operatorname{Argch} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right). \quad (\text{I.44})$$

On rappelle que

$$y = \operatorname{Argch} x \iff \begin{cases} \operatorname{ch} y = x \\ y \geq 0. \end{cases}$$

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction  $\operatorname{Argch}$ .

2. (a) Prouver que si  $x \geq 1$  alors  $\ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \geq 0$ .

(b) En revenant à la définition de la fonction  $\operatorname{ch}$ , calculer  $\operatorname{ch}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$  pour  $x \geq 1$ .

3. Dédurre de ce qui précède la relation (I.44) pour  $x \geq 1$ .

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

1. Prouver que, pour tout  $x$  réel,

$$-1 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1.$$

En déduire l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .

2. Déterminer l'ensemble de continuité  $\mathcal{C}$  de  $f$ .
3. Déterminer l'ensemble d'étude  $\mathcal{E}$  de  $f$ .
4. Calculer les valeur(s) et/ou limite(s) de  $f$  aux bornes de son ensemble d'étude.
5. Rappeler l'ensemble sur lequel la fonction  $\operatorname{Arcsin}$  est dérivable et en déduire l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'$  de  $f$ .
6. Prouver que, sur  $\mathcal{D}'$ ,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

7. Étudier les variations de  $f$  et en esquisser la courbe représentative.
8. Pour  $x \geq 0$ , utiliser l'expression de  $f'(x)$  pour déterminer une expression plus simple de  $f(x)$ .
9. Construire les courbes représentatives des fonctions  $\operatorname{Arctan}$ ,  $-\operatorname{Arctan}$ ,  $-2\operatorname{Arctan}$  et  $f$  en précisant, pour  $f$ , les points et les tangentes remarquables.

### Exercice 3

Déterminer des primitives de

- $\frac{e^z}{\sqrt{1-e^{2z}}}$ ,
- $\frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$ .
- $\frac{1}{x \cos^2(\ln x)}$

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
- La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0?
- Que peut-on dire de  $f'$  en 0?

### Exercice 5

1. Par intégration par parties, calculer

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\operatorname{Arccos} x)^2 dx$$

2. On note  $F(x)$  la primitive :

$$F(x) = \int e^x \cos x dx$$

Par intégration par parties, obtenir une égalité liant  $F(x)$  à elle-même et permettant de déduire sa valeur.

## Année 2009–2010

### 26 novembre 2009

#### Exercice 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

- $x^2 - 1 = 0$
- $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$
- $x^3 - 1 = 0$
- $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 0$

#### Exercice 2

1. Exprimer  $\cos 2\alpha$  puis  $\cos 3\alpha$  en fonction de  $\cos \alpha$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

**Exercice 3**

On rappelle que le nombre complexe  $j$  est défini par

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calculer le module et un argument, puis placer dans le plan complexe l'image

1. de  $j$
2. de  $j^2$
3. de  $j^3$  (pour ce dernier, en retrouver alors une expression plus simple).

**Exercice 4**

Calculer les limites suivantes, en ne distinguant limites à gauche et à droite qu'en cas de nécessité.

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^3 + 1}{x^2 - 1}$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 2x + 4}{1 - x^5}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 7x + 12}$
2. (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}}$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x$
3. Pour les deux questions suivantes, on pourra recourir aux équivalents.  
 (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e}{\ln(x-1)}$

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .

2. Étudier

- (a) la parité de  $f$  ;
- (b) la périodicité de  $f$ .

3. Déterminer  $\lim_{\pi} f$ .

4. En utilisant les équivalents, prouver que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0.

5. Pour  $x \notin 0[2\pi]$ , simplifier l'expression de  $f(x)$ .

**8 janvier 2010****Exercice 1**

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction  $f$  est-elle continue en 0 (on justifiera l'affirmation) ?

2. Même question pour la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Exercice 2**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2 - 3).$$

2. On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

En déduire une expression simplifiée de  $\tan(\operatorname{Arcsin}(x^2 - 3))$ .

**Exercice 3**

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat, admis en cours, suivant : pour tout  $\alpha$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

1. De la fonction  $x \mapsto \ln x$ , rappeler :

- (a) son ensemble de définition ;
- (b) son ensemble de continuité ;
- (c) les limites aux bornes de son ensemble de définition ;
- (d) son sens de variation ;
- (e) la courbe représentative.

2. De la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ , rappeler :

- (a) son ensemble de définition ;
- (b) son ensemble de continuité ;
- (c) les limites aux bornes de son ensemble de définition ;
- (d) son sens de variation ;
- (e) la courbe représentative (qui sera tracée dans le même repère que la courbe de la fonction  $x \mapsto \ln x$ ).

3. On admettra dans la suite que, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x < \sqrt{x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ .

4. Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ . En posant  $X = x^\alpha$ , prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

**Exercice 4**

On cherche à résoudre numériquement l'équation

$$e^{-x} = x \quad (\text{I.45})$$

On utilisera les inégalités :  $|e^{-\frac{1}{2}} - 0,6| < 10^{-2}$ ,  
 $|e^{-\frac{3}{4}} - 0,47| < 10^{-2}$ ,  $|e^{-\frac{5}{8}} - 0,54| < 10^{-2}$ .

1. Étudier sur  $\mathbb{R}$ , sans la représenter graphiquement, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

On expliquera en particulier pourquoi  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- 2. Prouver que l'équation (I.45) admet une solution unique  $x_0$  sur  $\mathbb{R}$ , située dans l'intervalle  $]0,1[$ .
- 3. Déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .
- 4. Prouver que 0,6 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

**Exercice 5**

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \text{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

- 1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2. (a) Rappeler la parité et tracer rapidement la courbe représentative de la fonction Arctan.  
 (b) Étudier la parité de  $f$ .
- 3. (a) Rappeler la définition de l'arc tangente.  
 (b) Prouver que, si  $x \in ]-1,1[$ ,

$$2 \text{Arctan } x = \text{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right) \quad (\text{I.46})$$

- (c) Obtenir des égalités de même nature que l'égalité (I.46) :  
 i. pour  $x \in ]1, +\infty[$ .  
 ii. pour  $x \in ]-\infty, -1[$ .

4. (a) Prouver que pour  $x$  et  $y$  positifs tels que  $0 < xy < 1$ ,

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy}$$

- (b) Établir des égalités de même nature pour  $x$  et  $y$  positifs tels que  $xy > 1$ .  
 (c) En déduire que  $\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = \pi$ .

## 25 mars 2010

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
- La fonction  $f$  est-elle, en 0,
  - continue ?
  - dérivable ?
- Définir explicitement, notamment en 0 :
  - la fonction  $f'$  ;
  - la fonction  $f''$ . Cette fonction  $f''$  est-elle dérivable en 0 ?
- Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation complet.
- On donne  $e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,72$  et  $\frac{1}{3e} \approx 0,12$ . Construire approximativement la courbe représentative de  $f$  sur  $[0, 2]$  en en précisant au moins trois points caractéristiques.

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{x}$ .

- déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  ;
- déterminer l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'_f$  de  $f$  ;

- calculer la dérivée de  $f$  ;

- déterminer la différentielle de  $f$  en  $x_0 = 2$ .

### Exercice 3

- Déterminer des primitives des fonctions

(a)  $x \mapsto x^4 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x}$ ,

(b)  $x \mapsto x^2 \sqrt{1+x^3}$ ,

(c)  $x \mapsto \tan x$ .

- Déterminer la primitive de  $\frac{\cos}{1+\sin^2}$  s'annulant en  $\pi/2$ .

### Exercice 4

Par intégration par parties,

- calculer

$$\int (\ln t)^2 dt$$

- prouver que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \sin x) dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

### Exercice 5

Au moyen d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$$

## 4 juin 2010

### Exercice 1

- En recourant au besoin à une intégration par partie, rappeler ce que vaut

$$\int \ln x dx$$

- Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + (\ln x)y = 0$$

- Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + (\ln x)y = 2 \ln x$$

**Exercice 2**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 6y = 0 \quad (\text{I.47})$$

2. Chercher la solution
- $y_0$
- de l'équation (I.47) vérifiant
- $y_0(0) = 1$
- et
- $y'_0(0) = 0$
- .

**Exercice 3**

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions

- (a)  $x \mapsto e^x$
- (b)  $x \mapsto \cos x$
- (c)  $x \mapsto \sin x$
- (d)  $x \mapsto \ln(1+x)$
- (e)  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Calculer les développements limités

- (a) en 0 à l'ordre 3 de  $\sqrt{1+x}$
- (b) en 0 à l'ordre 3 de  $\ln(1+x) \cos x$
- (c) en 1 à l'ordre 3 de  $\ln x \cos(x-1)$

**Exercice 4**On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions

- (a)  $x \mapsto \operatorname{ch} x$
- (b)  $x \mapsto \operatorname{sh} x$

2. Démontrer que, en 0,
- $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
- .

3. En déduire que le développement limité de
- $\sin(\operatorname{th} x)$
- à l'ordre 5 en 0 est :

$$\sin(\operatorname{th} x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{37x^5}{120} + o(x^5)$$

4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{th} x) - x}{\sin x - x}$$

**Exercice 5**

1. Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique puis,
- rapidement*
- , les principales propriétés, les dérivées première et seconde et la représentation graphique des fonctions
- $\operatorname{ch}$
- et
- $\operatorname{sh}$
- . Expliquer pourquoi ces fonctions sont des bijections (qui seront précisées).

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. On rappelle que, pour tout
- $x$
- réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

En déduire que le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{Argsh} x$  est

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \quad (\text{I.48})$$

4. À l'aide de l'égalité (I.48), déterminer :

- (a) la limite de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  en 0 ;
- (b) la dérivée de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  en 0 ;
- (c) l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  en 0 ;
- (d) la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

# Année 2010–2011

10 décembre 2010

## Exercice 1

- (a) Résoudre l'équation  $x^2 - 9 = 0$   
(b) Résoudre l'équation

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$$

- (a) Factoriser  $x^2 + 2x - 3$ .  
(b) Résoudre l'inéquation :

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 1} \leq \frac{x + 3}{x + 1}$$

## Exercice 2

Résoudre l'équation

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

## Exercice 3

En cherchant une racine évidente puis en factorisant à la volée, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = 0$$

## Exercice 4

- Calculer la limite de

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$$

- en  $0^-$   
(b) en  $+\infty$

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 64}$$

- (a) Rappeler

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

- En déduire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t)}{t}$$

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

- Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - \ln(2x^2)$$

- Calculer les limites de

$$\frac{1 - \cos x}{x^2}$$

- en 0  
(b) en  $+\infty$

## Exercice 5

- Rappeler le développement de  $(a + b)^4$ .
- En le considérant comme la partie réelle d'un nombre complexe à bien choisir, exprimer  $\cos 4\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

# 19 janvier 2011

## Exercice 1

- Donner les équivalents en 0 de

$$e^t - 1, \quad \ln(1+t), \quad 1 - \cos t, \quad \sin t, \quad \tan t$$

- Calculer

- 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$$

- 

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotan x$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 49x}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\tan 49x}$$

(e)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{(\tan x)^2}$$

3. Prouver que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{\ln \frac{x}{2}} = 2e^2$$

**Exercice 2**

En justifiant le résultat, étudier le prolongement par continuité

1. en  $x_0 = 0$  de la fonction :

$$f: x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$$

2. en  $x_0 = 4$  de la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

**Exercice 3**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Étudier la parité de  $f$ .
3. Prouver que la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en 0.

**Exercice 4**

1. Rappeler la définition de l'arc cosinus.
2. Rappeler l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction Arccos.
3. Tracer la courbe de la fonction Arccos.
4. Calculer  $\text{Arccos } 0$ ,  $\text{Arccos } \frac{1}{2}$ ,  $\text{Arccos } 1$ ,  $\text{Arccos } (-\frac{1}{2})$ ,  $\text{Arccos } (-1)$ ,  $\text{Arccos } (\sqrt{3})$ .
5. Soit  $x$  dans  $\mathcal{D}_{\text{Arccos}}$ . Prouver que
 
$$\text{Arccos } x + \text{Arccos } (-x) = \pi$$
6. Interpréter l'égalité précédente relativement à la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction Arccos.

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^5 + x^2 - 1$$

1. Factoriser  $a^5 - b^5$  par  $a - b$ , en déduire le taux de variation de  $f$  puis prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
2. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
3. Prouver
  - (a) que  $\frac{103}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$  ;
  - (b) que 0,805 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

**6 mai 2011****Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \text{Arcsin } \frac{1}{x}$ .

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction Arcsin.
2. Prouver que l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}$ , est  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'$  de  $f$ .

4. Prouver que, pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}'$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

5. Déterminer la différentielle de  $f$  en  $x_0 = 2$ .

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
3. Que peut-on dire de  $f'$  en 0 ?

### Exercice 3

1. Déterminer des primitives de

(a)  $\frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x-2}}$

(b)  $\cos x \sin^2 x$

(c)  $\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}$

2. Avec l'aide éventuelle des formules d'Euler, linéariser puis déterminer les primitives de  $\sin^2 x$ .

### Exercice 4

1. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer

(a)  $\int \rho e^{-\rho} d\rho$

(b)  $\int s \operatorname{Arctan} s ds$

2. Au moyen d'un changement de variable, calculer :

(a)

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$$

(b) pour  $a$  un réel non nul,

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$$

### Exercice 5

On rappelle que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ , la fonction  $\operatorname{Argth}$  satisfait

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Soit  $x$  dans  $] -1, 1[$ . Prouver que

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x dx.$$

**17 juin 2011**

### Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + 2y = -x$$

### Exercice 2

1. Prouver par intégration par parties que, sur  $] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} [$ ,

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln(\cos x) + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

2. Résoudre sur  $] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} [$  l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\cos^2 x} y = 0$$

3. Résoudre sur  $] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} [$  l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\cos^2 x} y = \frac{4x}{\cos^2 x} \quad (\text{I.49})$$

4. Déterminer la solution de l'équation (II.100) s'annulant en 0.

**Exercice 3**

1. On considère un réel  $b$  et l'équation différentielle

$$y'' + by' + 4y = 0 \quad (\text{I.50})$$

- (a) On pose  $b = 5$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.50).  
 (b) On pose  $b = -4$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.50).  
 (c) On pose  $b = 0$ . Réécrire et résoudre dans ce cas l'équation (I.50).
2. En utilisant éventuellement le théorème 1, déterminer une solution particulière puis, à l'aide de la question 1c), la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \cos 3x \quad (\text{I.51})$$

3. Déterminer la solution de l'équation (I.51) telle que

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4**

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \cos x$ ,  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .  
 2. Prouver que le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction  $t \mapsto \sin t \cos t$  est :

$$t - \frac{2}{3}t^3 + o(t^4)$$

3. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction

$$t \mapsto \frac{e^t - 1}{\ln(1+t)}$$

4. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentant la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $f(x) = \ln x$ .

- (a) Prouver que le développement limité à l'ordre 2 en  $x_0 = e$  de  $f$  est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + o((x-e)^2)$$

- (b) Dédire de la question précédente l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = e$  ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

**Exercice 5**

On rappelle que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions

(a)  $x \mapsto \operatorname{ch} x$

(b)  $x \mapsto \operatorname{sh} x$

2. Démontrer que, en 0,  $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ .

3. En déduire que le développement limité de  $\cos(\operatorname{th} x)$  à l'ordre 5 en 0 est :

$$\cos(\operatorname{th} x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5)$$

4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{th} x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}$$

**Théorème 1.**

Soit  $(a, b, c)$  un triplet de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ,  $P$  une fonction polynôme et  $\alpha$  et  $\omega$  deux réels. On considère les équations différentielles

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \cos \omega x \quad (\text{I.52})$$

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \sin \omega x \quad (\text{I.53})$$

Alors, une solution particulière

- de l'équation différentielle (I.52) est  $y = \operatorname{Re}(e^{\alpha x} Q(x))$

- de l'équation différentielle (I.53) est  $y = \operatorname{Im}(e^{\alpha x} Q(x))$

où

- $\rho = \alpha + i\omega$
- $Q$  est la fonction polynôme complexe qu'on détermine en résolvant l'équation

$$aQ'' + (2a\rho + b)Q' + (a\rho^2 + b\rho + c)Q = P$$

sachant que

1. si  $a\rho^2 + b\rho + c \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P \quad \text{et} \quad \text{val } Q = 0$$

2. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 1 \quad \text{et} \quad \text{val } Q = 1$$

3. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b = 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 2 \quad \text{et} \quad \text{val } Q = 2.$$

## Année 2011–2012

### 25 novembre 2011

#### Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :

$$16x^2 - 25 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{16x^2 - 25}{x - \frac{5}{4}} = 0$$

2. Factoriser  $x^2 + 2x - 3$  puis résoudre l'inéquation :

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 2} \leq \frac{x + 3}{x + 2}.$$

#### Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

1. Exprimer la fonction  $f$  sans valeur absolue.
2. Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

#### Exercice 3

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

2. (a) En remarquant que  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ , prouver que

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

- (b) En déduire  $\sin \frac{\pi}{8}$  et  $\tan \frac{\pi}{8}$ .

#### Exercice 4

1. (a) Rappeler les formules d'Euler.  
(b) Linéariser  $\cos^3 x$ .
2. En cherchant une racine évidente puis en factorisant à la volée, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$$

#### Exercice 5

1. Calculer

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{1 - 2x^3}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

2. Rappeler

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

3. Prouver que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

## 12 janvier 2012

## Exercice 1

1. Rappeler les équivalents en 0 de  $e^x - 1$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $1 - \cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ .
2. Calculer les limites en 0 de

(a)

$$\frac{1 - \cos x}{x(e^x - 1)}$$

(b)

$$\frac{\sin 21t}{\sin 7t}$$

(c)

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\tan x}$$

(d)

$$\frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7 + u)(\tan u)^2 \ln(1 + 3\sqrt{u})}$$

## Exercice 2

Calculer

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e}{\sqrt{1 - \cos(x-2)}}$$

## Exercice 3

En effectuant un changement de variable puis en recourant aux équivalents, calculer

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x}$$

## Exercice 4

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Étudier la parité de  $f$ .
3. Prouver que la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en 0.

## Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

1. Factoriser  $a^3 - b^3$ , en déduire le taux de variation :

$$\tau_{\{b,a\}} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

de  $f$  entre  $b$  et  $a$  puis prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
3. Prouver
  - (a) Déterminer une valeur approchée fractionnaire à  $\frac{1}{128}$  près puis à  $10^{-2}$  près de  $x_0$  ;
  - (b) que 0,68 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

## 20 avril 2012

## Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en 0 (on justifiera l'affirmation) ?
2. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 (on justifiera l'affirmation) ?

## Exercice 2

Déterminer des primitives de

1.  $x\sqrt{1+x^2}$

2.  $x^2 \operatorname{sh}(x^3)$

3.  $\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}$

**Exercice 3**

Calculer la primitive de  $\cotan x$  s'annulant en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

1. Calculer, pour tout  $x$  réel,  $f'(x)$ .
2. Rappeler la dérivée de la fonction  $\operatorname{Argch}$  et en déduire que, pour tout  $x$  réel,

$$\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \operatorname{Argch} \frac{1}{x}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité  $\mathcal{D}'_f$  de  $f$ .
3. Calculer la dérivée de  $f$ .
4. Déterminer la différentielle de  $f$  en  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

**21 juin 2012**

**Exercice 1**

1. En intégrant par parties,

- (a) calculer

$$\int \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

- (b) prouver que

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

2. Au moyen d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9}$$

**Exercice 2**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes, puis en déterminer les solutions valant 1 en 0.

1.  $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
2.  $\frac{dy}{dx} + y = -x$
3.  $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2+1}$

**Exercice 3**

Toutes les équations différentielles de cet exercice sont de fonction inconnue  $y$  et de variable  $x$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- (a)  $y'' - 5y' + 6y = 0$
- (b)  $4y'' - 4y' + y = 0$
- (c)  $y'' - 4y' + 5y = 0$ . De cette dernière équation, déterminer la solution telle que

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2. En s'aidant éventuellement du théorème 1 page suivante, résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$y'' - 4y' + 5y = e^x$$

**Exercice 4**

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \cos x$ ,  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .
2. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\ln(1+x)\cos x$ .  
(b) En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 1 de  $\ln x \cos(x-1)$ .

3. On note  $f$  la fonction, éventuellement prolongée par continuité en 0, définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Prouver que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f$  est :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

#### Exercice 5

1. Prouver que, si  $x$  est positif, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sqrt{\ln(1+x^2)}$  est :

$$\sqrt{\ln(1+x^2)} = x - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$$

2. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (b) (**Hors barème**) En déduire que celui de  $\operatorname{Arcsin} x$  à l'ordre 5 en 0 est

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \quad (\text{I.54})$$

#### Théorème 1.

Soit  $(a, b, c)$  un triplet de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ,  $P$  une fonction polynôme et  $\alpha$  et  $\omega$  deux réels. On considère les

équations différentielles

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \cos \omega x \quad (\text{I.55})$$

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \sin \omega x \quad (\text{I.56})$$

Alors, une solution particulière

- de l'équation différentielle (I.55) est  $y = \operatorname{Re}(e^{\rho x} Q(x))$
- de l'équation différentielle (I.56) est  $y = \operatorname{Im}(e^{\rho x} Q(x))$

où

- $\rho = \alpha + i\omega$
- $Q$  est la fonction polynôme complexe qu'on détermine en résolvant l'équation

$$aQ'' + (2a\rho + b)Q' + (a\rho^2 + b\rho + c)Q = P$$

sachant que

1. si  $a\rho^2 + b\rho + c \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P \quad \text{et} \quad \operatorname{val} Q = 0$$

2. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b \neq 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{val} Q = 1$$

3. si  $a\rho^2 + b\rho + c = 0$  et  $2a\rho + b = 0$ , alors

$$\partial Q = \partial P + 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{val} Q = 2$$

## Chapitre II

# Corrigés des épreuves

Année 1995–1996

2 avril 1996

Exercice 1 (p. 4).

1. On a à effectuer un produit de développements limités.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} \cos x &= \left[ 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1!} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)x^3}{3!} + o(x^3) \right] \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right] \\ &= \left[ 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right] \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right] \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) x^2 + \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) x^2 + o(x^3) \\ \sqrt{1+x} \cos x &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

2. On a

$$\frac{\sqrt{1+x} \cos x - 1}{x} = \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3) - 1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}x - \frac{3}{16}x^2 + o(x^2).$$

Donc  $\mathcal{C}$  admet au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0 = 0$  (d'ordonnée  $1/2$ ) une tangente  $\mathcal{T}$  d'équation  $y = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}x$  et, puisque  $-\frac{3}{16}x^2 \leq 0$  pour tout  $x$  réel,  $\mathcal{C}$  reste en dessous de  $\mathcal{T}$  dans un voisinage de  $M_0$ .

Exercice 2 (p. 4).

1. Par définition,

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

2. Pour tout réel  $a$ ,  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ .

3. Il vient de la relation précédente que

$$\cos(2 \operatorname{Arccos} \frac{5}{6}) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} \frac{5}{6}) - 1 = 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}. \quad (\text{II.2})$$

Or  $0 \leq \frac{5}{6} \leq 1$  donc  $\operatorname{Arccos} 1 \leq \operatorname{Arccos} \frac{5}{6} \leq \operatorname{Arccos} 0$  (car la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est décroissante sur  $[-1, 1]$ ) donc  $0 \leq \operatorname{Arccos} \frac{5}{6} \leq \pi/2$  et par suite  $0 \leq 2\operatorname{Arccos} \frac{5}{6} \leq \pi$ . On déduit alors de (II.1) et de (II.2) que  $2\operatorname{Arccos} \frac{5}{6} = \operatorname{Arccos} \frac{7}{18}$ .

### Exercice 3 (p. 4).

1. On a à effectuer un quotient de développements limités.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

Or, le quotient de la division euclidienne de  $x - \frac{x^3}{6}$  par  $1 - \frac{x^2}{2}$  est  $x + \frac{x^3}{3}$  avec un reste de  $\frac{x^3}{3}$ ; donc  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ .

2. (a) On sait que  $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$ .

(b) Puisque  $h = \pm \tan x$  tend vers 0 si  $x$  tend vers 0, on obtient le développement limité de  $\ln(1+\tan x) + \ln(1-\tan x)$  par composition des développements limités de  $\ln(1+h)$  et  $h = \pm \tan x$ :

$$\begin{aligned} \ln(1 \pm \tan x) &= \ln \left[ 1 \pm \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right] \\ &= \pm \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{1}{2} \left[ \pm \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[ \pm \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right]^3 + o \left( \left[ \pm \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right]^3 \right) \\ &= \pm \left( x + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \ln(1 + \tan x) - \ln(1 - \tan x) &= \left[ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \right] \\ &\quad - \left[ -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \right] \\ \ln(1 + \tan x) - \ln(1 - \tan x) &= 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

3. On pose  $t = \pi/4 + x$ . Alors, puisque  $\tan(\pi/4) = 1$ ,

$$\tan(\pi/4 + x) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan x}{1 - \tan(\pi/4)\tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \ln(\tan t) &= \ln(\tan(\pi/4 + x)) \\
 &= \ln\left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right) \\
 &= \ln(1 + \tan x) - \ln(1 - \tan x) \\
 &= 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \\
 \ln(\tan t) &= 2(t - \pi/4) + \frac{4}{3}(t - \pi/4)^3 + o((t - \pi/4)^3).
 \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 4).**

1. (a) Pour une fonction  $f$  de classe  $C^3$  sur un intervalle  $[x_0, x]$ , la formule de Taylor-Lagrange en  $x_0$  à l'ordre 2 donne

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3$$

où  $c$  est un réel de l'intervalle  $]x_0, x[$ .

- (b) Si  $c > 0$ , alors  $1 + c > 1$  donc  $(1 + c)^3 > 1$  et par conséquent

$$0 < \frac{1}{(1 + c)^3} < 1. \quad (\text{II.3})$$

- (c) Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $f : t \mapsto \ln(1 + t)$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0, x]$  donc, grâce à la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(c)}{6}x^3$$

où  $0 < c < x$ . Or

$$f(x) = \ln(1 + x) \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{(1 + x)^3}$$

donc, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(1 + c)^3}x^3.$$

De la double inégalité (II.3) on déduit pour tout  $x > 0$  que

$$0 < \frac{1}{3(1 + c)^3}x^3 < \frac{x^3}{3}$$

d'où

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2. Cette inégalité permet d'affirmer que  $x - \frac{x^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\ln(1 + x)$  à  $10^{-3}$  près dès que  $(0 <) \frac{x^3}{3} \leq 10^{-3}$  i.e. dès que  $(0 <) x \leq \sqrt[3]{3} 10^{-1}$  (on peut même préciser qu'il s'agit alors d'une valeur approchée par défaut).

3. On note que  $\ln(1,1) = \ln(1 + 0,1)$ . Or, si  $x = 0,1 (> 0)$ , on a  $(0 <) x \leq \sqrt[3]{3} 10^{-1}$  et donc  $0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 0,095$  est une valeur approchée de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-3}$  près par défaut.

### Exercice 5 (p. 5).

#### 1. Étude préliminaire.

- (a) i. Puisque l'ensemble de départ de la fonction  $v$  est  $[0, +\infty[$  et puisque  $\sqrt{4-t}$  n'existe que pour  $t \leq 4$ , l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 4]$ .  
 ii. La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0, 4[$  et pour  $0 \leq t < 4$ , on a

$$v'(t) = 2 \left[ \sqrt{4-t} + \frac{-t}{2\sqrt{4-t}} \right] = \frac{2(4-t) - t}{\sqrt{4-t}} = \frac{8-3t}{\sqrt{4-t}}.$$

Il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 8/3[$ , nulle en  $8/3$  et strictement négative sur  $[8/3, 4[$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 8/3$  et vaut alors  $v(8/3) = 32/(3\sqrt{3})$ .

- (b) i. La fonction  $v$  est intégrable sur  $[0, 4]$  car elle est continue sur cet intervalle.  
 ii. On procède à une intégration par parties pour calculer  $\int_0^4 v(t) dt$ .

$$\begin{aligned} \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^4 2t\sqrt{4-t} dt \\ &= 2 \left( \left[ -\frac{2}{3}t(4-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \int_0^4 -\frac{2}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= 2 \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^4 (4-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= \frac{4}{3} \left[ -\frac{2}{5}(4-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{15} 4^{\frac{5}{2}} \\ \int_0^4 v(t) dt &= \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

- iii. On sait que la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $[0, 4]$  est donnée par

$$V = \frac{1}{4-0} \int_0^4 v(t) dt = \frac{64}{15}.$$

#### 2. Etude concrète.

- (a) On a immédiatement  $v(0) = v(T) = 0$ . La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0, T[$  et pour  $0 \leq t < T$ , on a

$$v'(t) = a \left[ \sqrt{T-t} + \frac{-t}{2\sqrt{T-t}} \right] = a \frac{2(T-t) - t}{\sqrt{T-t}} = a \frac{2T-3t}{\sqrt{T-t}}.$$

Puisque  $a > 0$ , il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 2T/3[$ , nulle en  $2T/3$  et strictement négative sur  $[2T/3, T[$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 2T/3$  et vaut alors  $v(2T/3) = 2aT\sqrt{T/3}/3 = 2a(T/3)^{3/2}$ .

- (b) Puisque  $dx(t) = v(t) dt$  et  $x(0) = 0$ , la fonction  $t \mapsto x(t)$  est la primitive s'annulant en 0 de la fonction (continue sur  $[0, T]$ )  $t \mapsto v(t)$ ; donc

$$\begin{aligned}
 x(T) &= \int_0^T v(t) dt \\
 &= \int_0^T at\sqrt{T-t} dt \\
 &= a \left( \left[ -\frac{2}{3}t(T-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^T - \int_0^T -\frac{2}{3}(T-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\
 &= a \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^T (T-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\
 &= \frac{2a}{3} \left( \left[ -\frac{2}{5}(T-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^T \right) \\
 x(T) &= \frac{4a}{15} T^{\frac{5}{2}}.
 \end{aligned}$$

La vitesse moyenne  $V$  du motard sur le parcours  $AB$  est donnée par

$$V = \frac{1}{T-0} \int_0^T v(t) dt = \frac{x(T)}{T} = \frac{4a}{15} T^{\frac{3}{2}}.$$

- (c) La fonction  $v$  étant continue sur  $[0, T]$ , on peut lui appliquer sur cet intervalle la formule de la moyenne : il existe un réel  $c$  dans  $[0, T]$  tel que

$$v(c) = \frac{1}{T-0} \int_0^T v(t) dt$$

*i.e.* tel que  $v(c) = V$ . Ceci prouve qu'il existe un instant au cours de l'expérience auquel la vitesse instantanée du motard égale sa vitesse moyenne.

- (d) *Application numérique.* On a

$$\begin{cases} x(T) = 1 \\ v_M = 200 \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} \frac{4a}{15} T^{\frac{5}{2}} = 1 \\ 2a(T/3)^{3/2} = 200 \end{cases}$$

d'où, par division,

$$\frac{\frac{4}{15} T^{\frac{5}{2}}}{2(T/3)^{3/2}} = \frac{1}{200}$$

*i.e.*

$$T = \frac{1}{80\sqrt{3}} \text{ h} = \frac{3600}{80\sqrt{3}} \text{ s} = 15\sqrt{3} \text{ s} \approx 26 \text{ s}.$$

Donc  $V = x(T)/T = 1/T = 80\sqrt{3} \approx 139 \text{ km/h}$ .

**9 mai 1996****19 juin 1996****Année 1996–1997****9 janvier 1997****Exercice 1 (p. 7).**

1. On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2-1} &= \frac{(x^2-3)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-1}} \\ \sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2-1} &= \frac{-2}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2-1} = 0.$$

2. On a, pour tout  $x \neq \pi/2 [2\pi]$ ,

$$\begin{aligned}\tan^2 x (1 - \sin x) &= \frac{\sin^2 x (1 - \sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x}.\end{aligned}$$

Donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan^2 x (1 - \sin x) = 1/2.$$

**Exercice 2 (p. 8).**

1. (a) L'ensemble de définition de la fonction  $f$  est  $\mathbb{R}^{+*}$ . Sur cet ensemble,  $f$  est continue et dérivable et, pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Or,

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 2 > \sqrt{x} > 0 \iff 4 > x > 0.$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 4[$ , strictement décroissante sur  $]4, +\infty[$  et admet un maximum absolu en 4.

(b) Puisque  $f$  admet un maximum absolu en 4, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) \leq f(4)$ . Or  $f(4) = \ln 4 - 2 = 2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1)$  est strictement négatif. Par suite, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) < 0$  i.e.  $\ln x < \sqrt{x}$ .

(c) On a donc, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x/x < 1/\sqrt{x}$  et, pour  $x > 1$ ,  $0 < \ln x/x < 1/\sqrt{x}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{x} = 0$ , il s'ensuit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

(d) Pour  $x > 0$ , posons  $X = x^\alpha$ . Alors  $x = X^{1/\alpha}$  et donc

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln X^{1/\alpha}}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X}.$$

Or, si  $x \rightarrow +\infty$  alors  $X \rightarrow +\infty$  donc, en vertu de la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

2. (a) Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/\sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{x}(\ln x/\sqrt{x} - 1)$$

si bien que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

(b) À voir.

### Exercice 3 (p. 8).

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors, il existe un réel  $c$  dans  $]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

2. La température  $T$  est une fonction de la variable  $t$  (supposée dans l'énoncé) continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ; donc, si  $t_0$  est l'instant de début de la période considérée,  $T$  est continue sur  $[t_0, t_0 + 12]$  et dérivable sur  $]t_0, t_0 + 12[$ . Par le théorème des accroissements finis, il existe un instant  $t_1$  dans  $]t_0, t_0 + 12[$  tel que

$$\frac{T(t_0 + 12) - T(t_0)}{t_0 + 12 - t_0} = \frac{dT}{dt}(t_1)$$

i.e. tel que

$$\frac{dT}{dt}(t_1) = \frac{-48 - 6}{12} = -9/2.$$

Puisque  $-9/2 < -4$ , il existe donc un instant, au cours de la période considérée, en lequel la vitesse de refroidissement a dépassé  $-4^\circ\text{C/h}$ .

### Exercice 4 (p. 8).

1. (a) Par définition,

$$y = \operatorname{Arcsin} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2. \end{cases}$$

- (b) Soit  $x$  un nombre dans  $[-1, 1]$  et  $y = \operatorname{Arcsin} x$ . Alors, par définition,  $x = \sin y$  i.e.  $x = \sin(\operatorname{Arcsin} x)$ .

- (c) Soit  $x$  un nombre dans  $[-1, 1]$ . Alors,

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Arcsin} x &\iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x^2 = \sin^2 y \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos^2 y = 1 - x^2 \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |\cos y| = \sqrt{1 - x^2} \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\implies \cos y = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

car, si  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , alors  $\cos y \geq 0$  et donc  $|\cos y| = \cos y$ . Il s'ensuit que  $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

- (d) On sait que, pour tout  $\theta$  réel,  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ . Donc, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,

$$\sin(2 \operatorname{Arcsin} x) = 2 \sin(\operatorname{Arcsin} x) \cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x \sqrt{1 - x^2}. \quad (\text{II.4})$$

2. (a) Puisque  $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$ , la fonction  $\operatorname{Arcsin}$  étant continue sur  $[-1, 1]$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Arcsin} x = 0$ .

- (b) On sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (\text{II.5})$$

Or, d'après la relation (II.4),

$$\frac{x \sqrt{1 - x^2}}{\operatorname{Arcsin} x} = \frac{\sin(2 \operatorname{Arcsin} x)/2}{\operatorname{Arcsin} x} = \frac{\sin(2 \operatorname{Arcsin} x)}{2 \operatorname{Arcsin} x}.$$

Donc, d'après le théorème sur les limites de fonctions composées et la relation (II.5),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{\operatorname{Arcsin} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \operatorname{Arcsin} x)}{2 \operatorname{Arcsin} x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

**Exercice 5 (p. 8).** On rappelle que, par définition,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 4 = 4$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$|x| < \alpha \implies |x^2 + 4 - 4| < \varepsilon. \quad (\text{II.6})$$

Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque ; on doit chercher  $\alpha > 0$  (dépendant *a priori* de  $\varepsilon$ ), tel que

$$|x| < \alpha \implies |x^2 + 4 - 4| < \varepsilon$$

i.e. tel que

$$|x| < \alpha \implies x^2 < \varepsilon$$

i.e. tel que

$$|x| < \alpha \implies |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

On constate que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , le réel  $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$  est tel que la condition (II.6) soit réalisée ; donc  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 4 = 4$ .

## 12 mars 1997

### Exercice 1 (p. 9).

1. En intégrant par parties,

$$\int t e^{2t} dt = t \frac{e^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2} dt = t \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} = \frac{e^{2t}}{4} (2t - 1).$$

2. Puisque  $dx/x = d(\ln x)$ ,

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^3} = \left[ \frac{-1}{2(\ln x)^2} \right]_e^{e^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

3. En intégrant par parties,

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx = \left[ x \operatorname{Arctan} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

si bien que l'intégrale demandée égale  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[ \ln |1+x^2| \right]_0^1$  soit  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

4. (a) i. On sait que  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$  donc  $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ .  
ii. On a  $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$  donc

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \left( \frac{\sin 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{4} = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}.$$

- (b) Posons  $\theta = \operatorname{Arcsin} x$  i.e.  $x = \sin \theta$  avec  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  (la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$  réalise en fait une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[0, \pi/2]$ ). Il s'en suit que

- $dx = \cos \theta d\theta$
- $x^2 \sqrt{1-x^2} = \sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \sin^2 \theta \sqrt{\cos^2 \theta} = \sin^2 \theta |\cos \theta| = \sin^2 \theta \cos \theta$  car  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .
- si  $x = 0$  alors  $\theta = 0$  et si  $x = 1$  alors  $\theta = \pi/2$ .

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\theta}{8} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left[ \theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} (\pi/2 - 0) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 9).**

1. • On sait que la solution générale de l'équation

$$y' - 3x^2 y = 0 \quad (\text{II.7})$$

est

$$y = C \exp \left( - \int -3x^2 dx \right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = Ce^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On constate que  $y = -1/3$  est solution particulière de l'équation

$$y' - 3x^2 y = x^2. \quad (\text{II.8})$$

- Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.8), somme de la solution générale de l'équation (II.7) et d'une solution particulière de l'équation (II.8), est

$$y = Ce^{x^3} - \frac{1}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' - 10y' + 41y = 0 \quad (\text{II.9})$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 - 10r + 41 = 0 \quad (\text{II.10})$$

de discriminant  $\Delta = 100 - 164 = -64 = (8i)^2$ . Donc l'équation (II.10) a pour solutions (complexes conjuguées)

$$r_+ = \frac{10 + 8i}{2} = 5 + 4i \quad \text{et} \quad r_- = \frac{10 - 8i}{2} = 5 - 4i.$$

Donc la solution générale de l'équation (II.9) est

$$y = e^{5x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 3 (p. 9).** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes et  $k$  un entier positif. On rappelle que le polynôme  $Q$  est le quotient dans la division selon les puissances croissantes, à l'ordre  $k$ , de  $A$  par  $B$  si et seulement si il existe un polynôme  $R$  tel que

$$\begin{cases} A = B.Q + X^{k+1}R \\ \partial^\circ Q \leq k. \end{cases}$$

Ici,  $A = 1 - 3X$ ,  $B = 1 - X^2$  et  $k = 3$ . On trouve

$$Q = 1 - 3X + X^2 - 3X^3 \quad \text{et} \quad X^4 R = X^4 - 3X^5 \quad (\text{i.e. } R = 1 - 3X).$$

**Exercice 4 (p. 9).**

1. Si  $h > 0$  alors, pour  $\theta$  dans  $]0, 1[$ , on a  $1 + \theta h > 1$  donc  $(1 + \theta h)^4 > 1$  et par conséquent

$$-1 < \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} < 0. \quad (\text{II.11})$$

2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  ( $h \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre 3 sur le même intervalle ouvert. Alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = f(0) + f'(0)\frac{h}{1!} + f''(0)\frac{h^2}{2!} + f'''(\theta h)\frac{h^3}{3!}. \quad (\text{II.12})$$

3. (a) Pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f : x \mapsto 1/(1+x)$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0, h]$  donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2. Or

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

donc

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = -1 \quad f''(0) = 2 \quad f'''(\theta h) = \frac{-6}{(1 + \theta h)^4}.$$

Par conséquent, pour tout  $h > 0$ , la formule (II.12) donne

$$f(h) = 1 - h + h^2 + \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} h^3.$$

De la double inégalité (II.11), on déduit pour tout  $h > 0$  que

$$1 - h + h^2 - h^3 < \frac{1}{1+x} < 1 - h + h^2.$$

- (b) Cette inégalité permet d'affirmer, pour  $h > 0$ , que  $1 - h + h^2$  est une valeur approchée de  $1/(1+h)$  à  $10^{-3}$  près dès que  $(0 <) | -h^3 | \leq 10^{-3}$  i.e. dès que  $(0 <) h \leq 10^{-1}$  (on peut même préciser qu'il s'agit alors d'une valeur approchée par excès).
- (c) On note que  $1/(1,09) = 1/(1 + 0,09)$ . Or, si  $h = 0,09 (> 0)$ , on a  $(0 <) h \leq 10^{-1}$  et donc  $1 - 0,09 + (0,09)^2 = 0,9181$  est une valeur approchée, par excès, de  $1/(1,09)$  à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 5 (p. 9).**

1. On a vu en cours que

(a) l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge si et seulement si  $\alpha > 1$

(b) l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

2. • La fonction  $f : x \mapsto (1+x)/(4+x^3)$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{\sqrt[3]{-4}\}$  donc est continue sur  $[3, +\infty[$ . De plus, elle est positive sur cet intervalle.
- On a

$$\frac{1+x}{4+x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} \quad i.e. \quad \frac{1+x}{4+x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

et  $g : x \mapsto 1/x^2$  est continue sur  $[3, +\infty[$ . Donc, puisque  $f$  et  $g$  sont continues et positives sur  $[3, +\infty[$  et équivalentes en  $+\infty$ , les intégrales

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx \quad \text{et} \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

sont de même nature. Or, en vertu de la question 1a page précédente, l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

converge donc il en est de même de l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx.$$

3. La fonction  $f : x \mapsto (1+x)/(4+x^3)$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{\sqrt[3]{-4}\}$  donc est continue sur  $[0, 3]$ . Par suite, l'intégrale

$$\int_0^3 \frac{1+x}{4+x^3} dx$$

est une intégrale de Riemann. Par ailleurs, on a prouvé que l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx$$

converge. On en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx$$

est la somme de deux intégrales convergentes et est, à ce titre, elle-même convergente.

**4 juin 1997**

**Exercice 1 (p. 10).**

1. Soit  $f$  une fonction bijective d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  sur un sous-ensemble  $B$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x$  un élément de  $B$  tel que  $f$  soit dérivable et de dérivée non nulle en  $f^{-1}(x)$ . Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $x$  et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

2. (a) La fonction cosinus hyperbolique  $\text{ch}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

C'est une fonction paire, de dérivée  $\text{sh}$  (strictement positive sur  $\mathbb{R}^+$ ). Par ailleurs,  $\text{ch } 0 = 1$  et  $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$ . On se reportera au cours pour la représentation graphique de la fonction  $\text{ch}$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$ .

- (b) La bijection réciproque de la fonction  $\text{ch}$  restreinte à  $\mathbb{R}^+$  est la fonction notée  $\text{Argch}$  :

$$y = \text{Argch } x \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = \text{ch } y \\ y \geq 0. \end{cases}$$

On sait que, pour tout  $x > 1$ ,

$$(\text{Argch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (\text{II.13})$$

3. (a) D'après la relation (II.13),

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \text{Argch } t.$$

- (b) On a

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} &= \int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{\frac{9x^2}{4} - 1}} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{d\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 d\left(\text{Argch}\left(\frac{3}{2}x\right)\right) \\ \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} &= \frac{1}{3} \left(\text{Argch } 6 - \text{Argch } \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 10).**

1. On sait que la solution générale de l'équation

$$(1+x^2)y' - xy = 0 \quad (E'_1)$$

est

$$y = C \exp\left(-\int -\frac{x}{1+x^2} dx\right), \quad C \in \mathbb{R} \quad i.e. \quad y = C\sqrt{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

car

$$\exp\left(-\int -\frac{x}{1+x^2} dx\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln|1+x^2|\right).$$

Par ailleurs, on constate que  $y = -2$  est solution particulière de l'équation complète

$$(1+x^2)y' - xy = 2x. \quad (E_1)$$

On aurait pu aussi utiliser la méthode de la variation de la constante qui conduit au même résultat. Il s'en suit que la solution générale de l'équation  $(E_1)$ , somme de la solution générale de l'équation  $(E'_1)$  et d'une solution particulière de l'équation  $(E_1)$ , est

$$y = -2 + C\sqrt{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (E'_2)$$

a pour équation caractéristique  $r^2 + 2r + 1 = 0$  ayant pour solution réelle double  $r = -1$ . On a vu en cours qu'alors la solution générale de l'équation  $(E'_2)$  est

$$y = e^{-x}(C_1x + C_0), \quad C_0, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, la fonction  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  est une solution particulière de l'équation complète  $(E_2)$

$$\text{si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\alpha + 2(2\alpha x + \beta) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 7x^2 + 28x + 15$$

$$\text{si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + 2\alpha + 2\beta + \gamma = 7x^2 + 28x + 15$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \alpha &= 7 \\ 4\alpha + \beta &= 28 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma &= 15 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \alpha &= 7 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 1 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } y = 7x^2 + 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation  $(E_2)$  est

$$y = 7x^2 + 1 + e^{-x}(C_1x + C_0), \quad C_0, C_1 \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 3 (p. 10).**

1. Soit  $k$  un entier naturel non nul. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int (\ln t)^k dt &= t (\ln t)^k - \int t \times k \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^{k-1} dt \\ \int (\ln t)^k dt &= t (\ln t)^k - k \int (\ln t)^{k-1} dt.\end{aligned}$$

2. Il s'en suit que

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\ln t)^3 dt &= \left[ t (\ln t)^3 \right]_1^2 - 3 \int_1^2 (\ln t)^2 dt \\ &= 2 (\ln 2)^3 - 3 \left( \left[ t (\ln t)^2 \right]_1^2 - 3 \int_1^2 (\ln t)^1 dt \right) \\ &= 2 (\ln 2)^3 - 3 \times 2 (\ln 2)^2 + 6 \int_1^2 \ln t dt \\ &= 2 (\ln 2)^3 - 6 (\ln 2)^2 + 6 \left( \left[ t (\ln t)^1 \right]_1^2 - 2 \int_1^2 dt \right) \\ \int_1^2 (\ln t)^3 dt &= 2 (\ln 2)^3 - 6 (\ln 2)^2 + 12 \ln 2 - 24.\end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 10).**

1. Si  $h > 0$  alors, pour  $\theta$  dans  $]0, 1[$ , on a  $1 + \theta h > 1$  donc  $(1 + \theta h)^{\frac{7}{2}} > 1$  et par conséquent

$$0 < \frac{1}{(1 + \theta h)^{\frac{7}{2}}} < 1. \quad (\text{II.14})$$

2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  ( $h \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre 3 sur le même intervalle ouvert. Alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = f(0) + f'(0) \frac{h}{1!} + f''(0) \frac{h^2}{2!} + f'''(\theta h) \frac{h^3}{3!}. \quad (\text{II.15})$$

3. (a) Pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f : x \mapsto 1/\sqrt{1+x}$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0, h]$  donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2. Or

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (1+x)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } k = 0, \\ -\frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{3}{2}} & \text{si } k = 1, \\ \frac{3}{4} (1+x)^{-\frac{5}{2}} & \text{si } k = 2, \\ -\frac{15}{8} (1+x)^{-\frac{7}{2}} & \text{si } k = 3, \end{cases}$$

donc

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{3}{4}, \quad f'''(\theta) = -\frac{15}{8} (1 + \theta h)^{-\frac{7}{2}}.$$

Par conséquent, pour tout  $h > 0$ , il existe d'après la formule (II.15) un réel  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = 1 - \frac{h}{2} + \frac{3}{4} \frac{h^2}{2} - \frac{15}{8} (1 + \theta h)^{-\frac{7}{2}} \frac{h^3}{6}.$$

De la double inégalité (II.14), on déduit pour tout  $h > 0$  que

$$-\frac{15}{8} < -\frac{15}{8} (1 + \theta h)^{-\frac{7}{2}} < 0$$

d'où

$$-\frac{5}{16} h^3 < -\frac{15}{8} (1 + \theta h)^{-\frac{7}{2}} \frac{h^3}{6} < 0$$

et par suite

$$1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} - \frac{5h^3}{16} < \frac{1}{\sqrt{1+h}} < 1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8}.$$

- (b) Cette inégalité permet d'affirmer, pour  $h > 0$ , que  $1 - \frac{h}{2} + \frac{3}{8}h^2$  est une valeur approchée de  $1/\sqrt{1+h}$  à  $10^{-3}$  près dès que  $(0 <) |-\frac{5}{16}h^3| \leq 10^{-3}$  i.e. dès que  $(0 <) h \leq 10^{-1} \sqrt[3]{16/5}$  (on peut même préciser qu'il s'agit alors d'une valeur approchée par excès).
- (c) On note que  $1/\sqrt{1,1} = 1/\sqrt{1+0,1}$ . Or, si  $h = 0,1$  ( $> 0$ ), on a  $(0 <) h \leq 10^{-1} \sqrt[3]{16/5}$  et donc  $1 - 0,1/2 + 3(0,1)^2/8 = 0,95375$  est une valeur approchée, par excès, de  $1/\sqrt{1,1}$  à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 5 (p. 11).

1. Le premier terme non nul dans le développement limité en 0

- de  $\sin t$  est celui d'ordre 1
- de  $\cos t$  est celui d'ordre 0,

le développement limité en 0 de  $\sin t \cos t$  à l'ordre 4 sera obtenu par produit des développements limité en 0 de  $\sin t$  à l'ordre 4 et de  $\sin t$  à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \sin t \cos t &= \left[ t - \frac{t^3}{3} + o(t^4) \right] \left[ 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \right] \\ &= t - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) t^3 + o(t^4) \\ \sin t \cos t &= t - \frac{2}{3} t^3 + o(t^4). \end{aligned}$$

(On pouvait aussi utiliser l'identité  $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$ .)

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^t - 1}{\ln(1+t)} &= \frac{t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)} \\ \frac{e^t - 1}{\ln(1+t)} &= \frac{t \left[ 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2) \right]}{t \left[ 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \right]}. \end{aligned}$$

La division selon les puissances croissantes de  $1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}$  par  $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}$  à l'ordre 2 vaut  $1 + t + \frac{t^2}{3}$ . Donc

$$\frac{e^t - 1}{\ln(1+t)} = 1 + t + \frac{t^2}{3} + o(t^2).$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e+h) \\ &= 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + o((x-e)^2). \end{aligned}$$

(b) Dédurre de la question précédente l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = e$  ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

## Année 1997–1998

### 24 novembre 1997

#### Exercice 1 (p. 11).

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right);$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 1/x = 1$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = 0.$$

2. L'ensemble de définition de  $f$  est  $[-1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ . Sur cet ensemble,  $f$  est continue. Examinons le cas du point  $x_0 = 3$ ; en multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée  $\sqrt{x+1} + 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 3$  en posant  $f(3) = 1/4$ .

3. Il est clair que  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1^3 - (\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{(1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}$$

donc la limite demandée est  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice 2 (p. 11).** On sait que, en 0,

$$e^x - 1 \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

Donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ , on a en 0

$$\tan \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \quad \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},$$

si bien que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{x} \frac{x}{2}} = 2.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

**Exercice 3 (p. 11).**

1. On note que  $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$  donc  $|j| = 1$  et  $\text{Arg } j \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .
2. On sait que  $|j^2| = |j|^2$  et que  $\text{Arg}(j^2) \equiv 2 \text{Arg } j [2\pi]$  donc  $|j^2| = 1$  et que  $\text{Arg}(j^2) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$ .

**Exercice 4 (p. 11). Exercice !**

**Exercice 5 (p. 12).**

1. On sait que l'ensemble de définition de la fonction Arcsin est  $[-1, 1]$  donc, puisque  $2x/(1+x^2)$  est défini pour tout  $x$  réel,

$$x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} + 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2x+1+x^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \end{cases}$$

Donc

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{-(1+x)^2}{1+x^2} \leq 0. \end{cases}$$

si bien que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

*Autre méthode.*

$$x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \iff \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1 \iff 2|x| \leq 1+x^2$$

d'où

$$x \in \mathcal{D}_f \iff 1 + |x|^2 - 2|x| \geq 0 \iff (|x| - 1)^2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}.$$

2. (a) **Cours !**

- (b) La fonction Arcsin est impaire. L'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est symétrique par rapport à 0 ; pour  $x$  dans  $\mathcal{D}_f$ , on a

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} \right) = \operatorname{Arcsin} \left( -\frac{2x}{1+x^2} \right) = -\operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

D'où  $f(-x) = -f(x)$  donc  $f$  est impaire et on ne l'étudie que sur  $\mathbb{R}^+$ .

3. On a  $f(1) = \operatorname{Arcsin} 1 = \pi/2$ . D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x/(1+x^2) = 0$  donc, puisque la fonction Arcsin est continue sur  $[-1, 1]$  donc en 0, on a  $\lim_{+\infty} f = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$ .
4. (a) i. D'après la question (1),  $2x/(1+x^2) = 1$  si et seulement si  $x = 1$ . De plus, d'après la question (1),  $2x/(1+x^2) = -1$  si et seulement si  $x = -1$ .
- ii. On sait que l'ensemble sur lequel la fonction Arcsin est dérivable est  $] -1, 1[$ . Donc le sous-ensemble de  $\mathcal{D}_f$  sur lequel  $f$  est dérivable est  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  et, par suite, celui de  $\mathbb{R}^+$  sur lequel  $f$  est dérivable est  $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

(b) **Exercice !**

- (c) Si  $u$  est une fonction dérivable en  $x$  et  $-1 < u(x) < 1$  alors

$$(\operatorname{Arcsin} u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

Le reste de la question est en **exercice !**

5. (a) Par définition,

$$y = \operatorname{Arctan} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- (b) i. Si  $0 \leq x \leq 1$  alors, la fonction Arctan étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Arctan} 0 \leq \operatorname{Arctan} x \leq \operatorname{Arctan} 1$ , d'où  $0 \leq \operatorname{Arctan} x \leq \frac{\pi}{4}$  i.e.  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$  donc  $0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2}$ .
- ii. Si  $x > 1$  alors, la fonction Arctan étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Arctan} x > \operatorname{Arctan} 1$ , d'où  $\pi/2 > \operatorname{Arctan} x > \frac{\pi}{4}$  (car, par définition,  $\operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$ ) i.e.  $\frac{\pi}{2} < 2y < \pi$  d'où  $-\pi < -2y < -\frac{\pi}{2}$  et finalement  $0 < \pi - 2y < \frac{\pi}{2}$ .
- (c) Soit  $x \geq 0$ . à l'aide de l'égalité

$$\sin 2y = \frac{2 \tan y}{1 + \tan^2 y}$$

démontrée à l'Exercice (24), on obtient

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2 \tan y}{1 + \tan^2 y} \right) = \operatorname{Arcsin} (\sin 2y). \quad (\text{II.16})$$

- (d) i. Si  $0 \leq x \leq 1$  alors  $0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2}$  donc, en utilisant l'égalité (II.16),

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arcsin} (\sin 2y) \\ 0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ce qui, par définition de la fonction Arcsin, équivaut à

$$\begin{cases} \sin 2y = \sin f(x) \\ -\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Or, si deux nombres ont même sinus et sont compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ , ils sont égaux. Il s'ensuit que  $f(x) = 2y$  soit, par la définition de  $y$ ,

$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x.$$

ii. Si  $x > 1$  alors  $0 < \pi - 2y < \frac{\pi}{2}$  donc, en utilisant l'égalité (II.16),

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2y) \\ 0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

soit, puisque  $\sin(\pi - 2y) = \sin 2y$ ,

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - 2y)) \\ 0 \leq \pi - 2y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ce qui, par définition de la fonction Arcsin, équivaut à

$$\begin{cases} \sin(\pi - 2y) = \sin f(x) \\ -\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \pi - 2y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, il s'ensuit que  $f(x) = \pi - 2y$  soit, par la définition de  $y$ ,

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan} x.$$

## 6. Exercice !

### 16 février 1998

#### Exercice 1 (p. 12).

1. On a

$$\int \rho e^{-\rho} d\rho = -\rho e^{-\rho} - \int -e^{-\rho} d\rho = -\rho e^{-\rho} - e^{-\rho}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin} x d(-\sqrt{1-x^2}) \\ &= \left[ -\operatorname{Arcsin} x \sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -\sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{3}{4}} + \left[ x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{6 - \sqrt{3}\pi}{12}. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} &= \int_0^3 \frac{dx}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 \frac{3d\frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 d\operatorname{Arctan} \frac{x}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} \frac{x}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{1}{3} (\operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0) \\
 \int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} &= \frac{\pi}{12}.
 \end{aligned}$$

De plus, avec  $u = \ln x$ ,

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^4} = \int_e^{e^2} \frac{d \ln x}{(\ln x)^4} = \int_1^2 \frac{du}{u^4} = \left[ \frac{u^{-3}}{-3} \right]_1^2 = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{8} - 1 \right) = \frac{7}{24}.$$

**Exercice 2 (p. 12).** On sait que la solution générale de l'équation

$$y' + 3x^2 y = 0 \quad (\text{II.17})$$

est

$$y = C \exp\left(-\int 3x^2 dx\right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{-x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Utilisons la méthode de la variation de la constante et cherchons une solution particulière de l'équation complète

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3} \quad (\text{II.18})$$

sous la forme  $y = C(x)e^{-x^3}$ . Alors  $y = C(x)e^{-x^3}$  est solution de (II.18) si et seulement si  $C'(x)e^{-x^3} = e^{-x^3}$  si et seulement si  $C(x) = x + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $y = (x + K)e^{-x^3}$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . On sait qu'alors la solution générale de l'équation complète (II.18) est  $y = (x + K)e^{-x^3}$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3 (p. 13).** L'équation différentielle sans second membre

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad (\text{II.19})$$

a pour équation caractéristique  $r^2 - 4r + 13 = 0$  soit  $(r - 2)^2 + 9 = 0$  soit  $(r - 2)^2 - (3i)^2 = 0$  soit  $(r - 2 - 3i)(r - 2 + 3i) = 0$  soit  $r = 2 + 3i$  ou  $r = 2 - 3i$ . On a vu en cours qu'alors la solution générale de l'équation (II.19) est

$$y = e^{2x} (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, puisque le coefficient de  $y$  dans l'équation complète

$$y'' - 4y' + 13y = 26x^2 + 10x + 9. \quad (\text{II.20})$$

est non nul, cette équation admet comme solution particulière une fonction de la forme  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ . Or  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  est solution particulière de (II.20)

$$\text{si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\alpha - 4(2\alpha x + \beta) + 13(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 26x^2 + 10x + 9$$

$$\text{si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 13\alpha x^2 + (-8\alpha + 13\beta)x + 2\alpha - 4\beta + 13\gamma = 26x^2 + 10x + 9$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} 13\alpha &= 26 \\ -8\alpha + 13\beta &= 10 \\ 2\alpha - 4\beta + 13\gamma &= 9 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= 1 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } y = 2x^2 + 2x + 1.$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle (II.20) est

$$y = 2x^2 + 2x + 1 + e^{2x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

#### Exercice 4 (p. 13).

1. La relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$$

- La fonction  $\text{ch}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , paire, de dérivée première  $\text{sh}$  et de dérivée seconde  $\text{ch}$ ; par ailleurs,  $\text{ch } 0 = 1$  et  $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$ . On se reportera au cours pour sa représentation graphique.
  - La fonction  $\text{sh}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, de dérivée première  $\text{ch}$  et de dérivée seconde  $\text{sh}$ ; par ailleurs,  $\text{sh } 0 = 0$  et  $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . On se reportera au cours pour sa représentation graphique.
2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur un intervalle fermé d'extrémités  $x_0$  et  $x_0 + h$  ( $x \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre  $n + 1$  sur le même intervalle ouvert. Alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre  $n + 1$ , il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{h^k}{k!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h). \quad (\text{II.21})$$

3. (a) La fonction  $\text{ch}$  étant croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 < \theta < 1 \end{cases} \implies 0 \leq \theta x < \frac{1}{2} \implies \text{ch } 0 \leq \text{ch } \theta x < \text{ch } \frac{1}{2} \implies 1 \leq \text{ch } \theta x < 3/2.$$

- (b) Pour tout  $x \neq 0$ , la fonction  $\text{sh}$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle fermé d'extrémités 0 et  $x$  donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 5. Or il est clair que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\text{sh}^{(k)} x = \begin{cases} \text{sh } x & \text{si } k \text{ est pair} \\ \text{ch } x & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

donc

$$\text{sh}^{(k)} 0 = \begin{cases} \text{sh } 0 = 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \text{ch } 0 = 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout  $x \neq 0$ , la formule (II.21 page précédente) à l'ordre 5 assure l'existence d'un réel  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ch } \theta x$$

i.e.

$$\text{sh } x - \left( x + \frac{x^3}{6} \right) = \frac{x^5}{120} \text{ch } \theta x. \quad (\text{II.22})$$

Or, si  $x$  est dans  $[0, \frac{1}{2}]$  alors, d'après la question 3a page précédente,

$$\begin{cases} \frac{x^5}{120} \geq 0 \\ 1 \leq \text{ch } \theta x < 3/2 \end{cases}$$

si bien que

$$\frac{x^5}{120} \leq \frac{x^5}{120} \text{sh } \theta x < \frac{x^5}{80}.$$

On déduit de cet encadrement et de la relation (II.22) l'encadrement demandé.

- (c) i. La question précédente permet d'affirmer, puisque  $\frac{1}{10}$  est dans  $[0, \frac{1}{2}]$ , que

$$0 \leq \text{ch } \frac{1}{10} - \left( 1 + \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-4}}{24} \right) \leq \frac{10^{-5}}{120}.$$

Or il est clair que  $10^3 < 9 \times 120$  donc  $\frac{10^{-5}}{120} < 9 \cdot 10^{-8}$ . Ceci prouve que  $\alpha$  est une valeur approchée de  $\text{ch } \frac{1}{10}$  à  $9 \cdot 10^{-8}$  près et, puisque

$$0 \leq \text{ch } \frac{1}{10} - \left( 1 + \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-4}}{24} \right) \quad \text{i.e.} \quad \text{ch } \frac{1}{10} \geq \alpha,$$

c'est par défaut que  $\alpha$  est une valeur approchée de  $\text{ch } \frac{1}{10}$  à  $9 \cdot 10^{-8}$ .

- ii. Puisque  $|\alpha - a| < 10^{-8}$ , l'inégalité triangulaire permet d'affirmer que

$$\left| \text{ch } \frac{1}{10} - a \right| \leq \left| \text{ch } \frac{1}{10} - \alpha \right| + |\alpha - a| < 9 \cdot 10^{-8} + 10^{-8} = 10^{-7}$$

si bien que  $a$  est une valeur approchée de  $\text{ch } \frac{1}{10}$  à  $10^{-7}$  près.

**Exercice 5 (p. 14).**

1. La bijection réciproque de la fonction  $\text{ch}$  restreinte à  $\mathbb{R}^+$  est la fonction  $\text{Argch}$ , dont l'ensemble de définition est  $[1, +\infty[$ . Donc

$$y = \text{Argch } x \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = \text{ch } y \\ y \geq 0. \end{cases}$$

2. (a) La dérivée de la fonction  $\text{Argch}$  est donnée par

$$\forall x > 1, \quad \text{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- (b) On en déduit

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \text{Argch } t$$

et avec  $t = \frac{3}{2}x$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} = \int_{\frac{2}{3}}^6 \frac{\frac{2}{3} dt}{\sqrt{4t^2 - 4}} = \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{3}}^6 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{3} \left( \text{Argch } 6 - \text{Argch } \frac{3}{2} \right).$$

3. (a) On a  $\text{Argch } 1 = 0$  et  $\ln(1 + \sqrt{1^2 - 1}) = 0$  donc, pour  $x = 1$ , la relation  $\text{Argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  est vraie.

- (b) On a, par définition,

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \text{Argch } x \\ x > 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \text{ch } y \\ x > 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \text{ch } y \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2xe^y = (e^y)^2 + 1 \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\ y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) i. On a,  $x^2 - 1$  étant strictement positif puisque  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} X^2 - 2xX + 1 = 0 &\iff (X - x)^2 + 1 - x^2 = 0 \\ &\iff (X - x)^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2 = 0 \\ &\iff (X - x - \sqrt{x^2 - 1})(X - x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \\ &\iff X = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ou} \quad X = x - \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

ii. On a, pour  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} > 1 \\ x > 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - 1 > \sqrt{x^2 - 1} \\ x > 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (x - 1)^2 > x^2 - 1 \\ x > 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + 1 > -1 \\ x > 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \end{cases} \\
 &\iff x \in \emptyset
 \end{aligned}$$

Supposons  $x > 1$  et  $y > 0$ . Alors  $e^y > 1$  donc, d'après le raisonnement précédent,  $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$  n'a lieu pour aucun  $x$  réel. On a donc, pour  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = \operatorname{Argch} x \\ x > 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\ y > 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \\
 &\iff \begin{cases} y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(car  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 > 0$  si  $x \geq 1$ )

$$\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Donc, pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

**11 juin 1998**

**Année 1998–1999**

**16 novembre 1998**

**Exercice 1 (p. 15).**

1. L'équation  $P(z) = p$  équivaut à

$$\begin{aligned}
 & P_0 \left( \frac{R}{R+z} \right)^2 = p \\
 \text{i.e. } & \left| \frac{R+z}{R} \right| = \sqrt{\frac{P_0}{p}} \quad (\text{car } P_0 > 0 \text{ et } p > 0) \\
 \text{i.e. } & z = R \sqrt{\frac{P_0}{p}} - R \quad (\text{car } R > 0 \text{ et } z \geq 0) \\
 \text{i.e. } & z = R \left( \sqrt{\frac{P_0}{p}} - 1 \right). \tag{II.23}
 \end{aligned}$$

2. L'astronaute ne pèsera plus que le quart de son poids initial si et seulement si

$$\begin{aligned}
 & P(z) = P_0/4 \\
 \text{i.e. } & z = R \left( \sqrt{\frac{P_0}{P_0/4}} - 1 \right) \\
 \text{i.e. } & z = R (\sqrt{4} - 1) \\
 \text{i.e. } & z = R.
 \end{aligned}$$

Donc, c'est à l'altitude 6400 km que l'astronaute ne pèsera plus que le quart de son poids initial.

3. D'après la question 1, l'astronaute, pesant 63 kg à la surface de la terre, ne pèsera plus que 7 kg si et seulement si

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} P(z) &= 7 \\ P_0 &= 63 \end{cases} \\
 \text{i.e. } & z = R \left( \sqrt{\frac{63}{7}} - 1 \right) \\
 \text{i.e. } & z = R (\sqrt{9} - 1) \\
 \text{i.e. } & z = 2R.
 \end{aligned}$$

Donc, c'est à l'altitude 12 800 km que l'astronaute ne pèsera plus que 7 kg.

4. L'astronaute en état d'apesanteur complet si et seulement si son poids  $p$  est nul ce qui correspond, d'après (II.23) à  $z = +\infty$ . Bien sûr, ce résultat est d'autant moins valable d'un point de vue physique, qu'à grande altitude (*i.e.* loin de la terre), l'astronaute risquerait de s'approcher d'autres astres et d'être donc soumis à l'attraction que ceux-ci opéreraient, ce qui créerait de la pesanteur. Il est à noter que la relation donnant  $P(z)$  n'est autre que la loi de la gravitation universelle de Newton.

### Exercice 2 (p. 16).

1. Consulter le cours !

2.

(a) La limite demandée est  $\frac{4}{5}$  car

$$\frac{\sin 84x}{\sin 105x} \underset{0}{\sim} \frac{84x}{105x} \underset{0}{\sim} \frac{84}{105} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{84}{105} = \frac{4}{5}.$$

(b) La limite demandée est  $\frac{2}{21}$  car

$$\frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})} \underset{0}{\sim} \frac{2u^2 \sqrt{u}}{(7+u)u^2 \times 3\sqrt{u}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{21}.$$

(c) Posons  $t = x - 1$  i.e.  $x = 1 + t$ ; alors  $x \rightarrow 1$  équivaut à  $t \rightarrow 0$  et on a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{1+t} - e}{\ln(1+t)}.$$

Par conséquent, la limite demandée est  $e$  car

$$\frac{e^{1+t} - e}{\ln(1+t)} = \frac{e(e^t - 1)}{\ln(1+t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{e \times t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} e.$$

**Exercice 3 (p. 16).**1. Pour tout  $x$  non nul, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - |x|} = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 - |x|} \\ &= \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| - 1)} = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = -1$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = -1$ .2. Pour tout  $x \neq 2$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} = \frac{(3 - \sqrt{2x+5})(3 + \sqrt{2x+5})}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{9 - (2x+5)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \frac{4 - 2x}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}} = -\frac{1}{3}$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 2 en posant  $f(2) = -\frac{1}{3}$ .

3. Pour tout  $x \neq \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin x) \tan^2 x = \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1}{2}$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en  $\frac{3\pi}{2}$  en posant  $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ .

#### Exercice 4 (p. 16).

1. Un réel  $x$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_f$  si et seulement si

$$\begin{aligned} 1 - \cos(3x - \frac{\pi}{4}) &= 0 \\ \text{i.e. } \cos(3x - \frac{\pi}{4}) &= 1 \\ \text{i.e. } \cos(3x - \frac{\pi}{4}) &= \cos 0 \\ \text{i.e. } 3x - \frac{\pi}{4} &\equiv 0 [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{4} \equiv -0 [2\pi] \\ \text{i.e. } 3x &\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \text{i.e. } x &\equiv \frac{\pi}{12} [\frac{2\pi}{3}]. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. La fonction  $f$  est construite de manière naturelle. Elle est donc continue sur son ensemble de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus, pour  $\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}$  et  $k = 0$  i.e. pour  $\frac{\pi}{12}$ , on a, en posant  $t = 3x - \frac{\pi}{4}$ ,

$$x \rightarrow \frac{\pi}{12} \quad \text{si et seulement si} \quad t \rightarrow 0.$$

Or

$$\frac{(3x - \frac{\pi}{4})^2}{1 - \cos(3x - \frac{\pi}{4})} = \frac{t^2}{1 - \cos t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{\frac{t^2}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} f(x) = 2$$

si bien que  $f$  est prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{12}$  en posant  $f(\frac{\pi}{12}) = 2$ . Il s'ensuit que  $f$  peut être prolongée par continuité sur l'ensemble

$$\left( \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cup \left\{ \frac{\pi}{12} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

**Exercice 5 (p. 16).**

1. Il est clair que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$  et  $\lim_{-\infty} \exp = 0$ , on a

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = 1 + e^{-x}.$$

Donc  $f' > 0$  sur  $\mathbb{R}$  si bien que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On aurait aussi pu remarquer que  $f$  est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$  :  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto -e^{-x}$  — cette dernière l'étant car la fonction  $\exp$  l'est —.

2. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f$  est continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{-\infty} f < 0 < \lim_{+\infty} f$ , l'équation  $f(x) = 0$ , équivalente à l'équation (1), admet une unique solution réelle  $a$ . Puisque de plus  $f(0) = -1 < 0$  et  $f(1) = 1 - e^{-1} = e^0 - e^{-1} > 0$  (car  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ), on sait que  $a$  appartient à  $]0, 1[$ .
3. (a) Puisque

$$\left| e^{-\frac{1}{2}} - 0,6 \right| < 10^{-2},$$

on a  $-0,61 < -e^{-\frac{1}{2}} < -0,59$  donc

$$\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}} < 0 \quad \text{si bien que} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) < 0.$$

Or  $f(0) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  et donc  $a$  appartient à  $] \frac{1}{2}, 1[$ .

(b) De plus, puisque

$$\left| e^{-\frac{3}{4}} - 0,47 \right| < 10^{-2}$$

on a  $-0,48 < -e^{-\frac{3}{4}} < -0,46$  donc

$$\frac{3}{4} - e^{-\frac{3}{4}} > 0 \quad \text{si bien que} \quad f\left(\frac{3}{4}\right) > 0.$$

Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4})$  et donc  $a$  appartient à  $] \frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ .

(c) Enfin,  $\frac{5}{8} = 0,625$  (**division euclidienne!**) donc, puisque

$$\left| e^{-\frac{5}{8}} - 0,54 \right| < 10^{-2},$$

on a  $-0,55 < -e^{-\frac{5}{8}} < -0,53$  donc

$$\frac{5}{8} - e^{-\frac{5}{8}} > 0 \quad \text{si bien que} \quad f\left(\frac{5}{8}\right) > 0.$$

Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4})$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{5}{8})$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$ .

(d) • Le diamètre de l'intervalle  $]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$  est  $0,125$  donc  $a$  est distant de son centre  $\frac{9}{16}$  d'au plus son rayon qui vaut  $\frac{0,125}{2}$  soit  $0,0625$ . Par conséquent

$$\left| a - \frac{9}{16} \right| < 0,0625 < 10^{-1}$$

donc  $\frac{9}{16}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $a$ .

• De plus,  $\frac{9}{16} = \frac{1}{2} + 0,0625 = 0,5625$  donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |a - 0,56| &= |a - 0,5625 + 0,5625 - 0,56| \\ &\leq |a - 0,5625| + |0,5625 - 0,56| \\ &< 0,0625 + 0,0025 \\ &= 0,065 \\ &< 10^{-1} \end{aligned}$$

si bien que  $0,56$  est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $a$ .

## 26 février 1999

### Exercice 1 (p. 16).

1. On a, pour une certaine constante  $C$ ,

$$\begin{aligned} \int (\ln s)^2 ds &= s(\ln s)^2 - 2 \int s \ln s \frac{ds}{s} = s(\ln s)^2 - 2 \int \ln s ds \\ &= s(\ln s)^2 - 2 \left( s \ln s - \int s \frac{ds}{s} \right) = s(\ln s)^2 - 2 \left( s \ln s - \int ds \right) \\ &= s(\ln s)^2 - 2(s \ln s - s + C). \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^\pi t \cos 3t dt = \left[ t \frac{\sin 3t}{3} \right]_0^\pi - \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin 3t dt = -\frac{1}{3} \left[ \frac{-\cos 3t}{3} \right]_0^\pi = -\frac{2}{9}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{9+x^2} &= \int_0^3 \frac{dx}{9\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} = \frac{3}{9} \int_0^3 \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 d\left(\operatorname{Arctan} \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} \frac{x}{3} \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 \right] = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

On a, pour une certaine constante  $C$ ,

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 1} &= \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} \\ &= \int d\left(\frac{-1}{t+1}\right) = \frac{-1}{t+1} + C.\end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 16).**

1. Par définition,

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

2. Pour tout réel  $a$ , on sait que  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ .

3. Puisque pour tout  $t$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\operatorname{Arccos} t) = t$ , il vient de la relation précédente que

$$\cos(2 \operatorname{Arccos} \frac{7}{8}) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} \frac{7}{8}) - 1 = 2\left(\frac{7}{8}\right)^2 - 1 = \frac{17}{32}. \quad (\text{II.25})$$

Or  $0 \leq \frac{7}{8} \leq 1$  donc  $\operatorname{Arccos} 1 \leq \operatorname{Arccos} \frac{7}{8} \leq \operatorname{Arccos} 0$  (car la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est décroissante sur  $[-1, 1]$ ) donc  $0 \leq \operatorname{Arccos} \frac{7}{8} \leq \pi/2$  et par suite  $0 \leq 2 \operatorname{Arccos} \frac{7}{8} \leq \pi$ . On déduit alors de (II.24) et de (II.25) que  $2 \operatorname{Arccos} \frac{7}{8} = \operatorname{Arccos} \frac{17}{32}$ .

**Exercice 3 (p. 17).**

1. Voir le cours.

2. Pour tout  $h > -1$ , la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle d'extrémités 0 et  $h$  donc, grâce à la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3, on sait qu'il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\theta h)}{6}h^3$$

Or

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{2}} & \text{si } k=0, \\ \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } k=1, \\ -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & \text{si } k=2, \\ \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & \text{si } k=3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } k=1, \\ -\frac{1}{4} & \text{si } k=2. \end{cases}$$

Il s'ensuit que, pour tout  $h > -1$ , il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16}(1+\theta h)^{-\frac{5}{2}}.$$

**Exercice 4 (p. 17).** On sait que la solution générale de l'équation

$$y' - 2xy = 0 \quad (\text{II.26})$$

est

$$y = C \exp\left(-\int -2x dx\right), C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

On constate que  $y = -1/2$  est solution particulière de l'équation

$$y' - 2xy = x. \quad (\text{II.27})$$

Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.27), somme de la solution générale de l'équation (II.26) et d'une solution particulière de l'équation (II.27), est

$$y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 5 (p. 17).** On sait que la solution générale de l'équation

$$y' - 2xy = 0 \quad (\text{II.28})$$

est

$$y = C \exp\left(-\int -2x dx\right), C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

On constate que  $y = -1/2$  est solution particulière de l'équation

$$y' - 2xy = x. \quad (\text{II.29})$$

Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.27), somme de la solution générale de l'équation (II.26) et d'une solution particulière de l'équation (II.27), est

$$y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**11 juin 1999**

**Année 1999–2000**

**2 décembre 1999**

**Exercice 1 (p. 19).**

1. Voir le cours.
- 2.

(a) Puisque

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

on a  $|z_1| = 1$  et  $\text{Arg}(z_1) = \frac{2\pi}{3}$ .

On voit aisément géométriquement que  $|z_2| = \sqrt{2}$  et  $\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ .

Puisque  $z_3 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$  et

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

on a  $|z_3| = 2$  et  $\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{6}$ .

(b) Il s'ensuit que  $z_1 = e^{2i\pi/3}$ ,  $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$  et  $z_3 = 2e^{i\pi/6}$ .

(c) On a donc

$$z_1 z_2 = e^{2i\pi/3} \times \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(2\pi/3 - \pi/4)} = \sqrt{2}e^{5i\pi/12}$$

si bien que  $|z_1 z_2| = \sqrt{2}$  et  $\text{Arg}(z_1 z_2) = \frac{5\pi}{12}$ ;

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\pi/4 - \pi/6)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-5i\pi/12}$$

si bien que  $|\frac{z_2}{z_3}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\text{Arg}(\frac{z_2}{z_3}) = -\frac{5\pi}{12}$ ;

$$z_1^4 = j^4 = (e^{2i\pi/3})^4 = e^{8i\pi/3} = e^{i(2\pi/3 + 2\pi)} = e^{2i\pi/3} = j = z_1$$

si bien que  $|z_1^4| = 1$  et  $\text{Arg}(z_1^4) = \frac{2\pi}{3}$ .

### Exercice 2 (p. 19).

1. On remarque que  $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$  donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} 1-x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$ , on a  $\lim_0 f = +\infty$ . Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{+\infty} f = 0$ .
2. On remarque que, pour  $x \neq 4$ ,  $f(x) = \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$  donc  $\lim_4 f = \frac{1}{7}$ .
3. On remarque que, pour  $x \neq 3$ ,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

donc  $\lim_3 f = \frac{1}{4}$ .

4. On sait que « la puissance l'emporte sur le logarithme » donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ , on a  $\lim_0 f = 0$ .
5. On remarque que

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

donc  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

6. Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ , on a  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

**Exercice 3 (p. 19).**

1. Voir le cours.

2.

(a) La limite demandée est 0 car, en 0,

$$\frac{1 - \cos x}{e^x - 1} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x} \sim \frac{x}{2}.$$

(b) La limite demandée est  $2/3$  car, en 0,

$$\frac{\ln(1+2x)}{\tan 3x} \sim \frac{2x}{3x} \sim \frac{2}{3}.$$

3. Posons  $x = 2 + h$ . Alors

$$\frac{e^x - e^2}{\sin(x-2)} = \frac{e^{2+h} - e^2}{\sin h} = \frac{e^2(e^h - 1)}{\sin h}$$

ce qui, en 0, est équivalent à  $\frac{e^2 \times h}{h} = e^2$  donc la limite demandée est  $e^2$ .

**Exercice 4 (p. 19).**

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc

$$x \notin \mathcal{D}_f \iff 1 - \cos x = 0 \iff \cos x = 1 \iff x \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Il s'en suit que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. La fonction  $f$  est paire car

(a) son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 ;

(b) puisque les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}_f$ ,

$$f(-x) = \frac{(-x)(-\sin x)}{1 - \cos x} = f(x).$$

3. En 0, la fonction  $f$  n'est pas continue mais

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^2/2} \sim 2.$$

Donc  $f$  peut-être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = 2$ .

4. (a) Soit  $x$  un réel. Alors

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

donc  $\varphi'(x) = 0$ .

(b) Voir le cours.

(c) On a, pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}_f$ ,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x \sin x)'(1 - \cos x) - x \sin x(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{(\sin x + x \cos x)(1 - \cos x) - x \sin x \sin x}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{(\sin x + x \cos x)(1 - \cos x) - x \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{(\sin x + x \cos x)(1 - \cos x) - x(1 - \cos^2 x)}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{(1 - \cos x)(\sin x + x \cos x - x(1 + \cos x))}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{\sin x - x}{1 - \cos x}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 5 (p. 20).**

1. (a) La définition de  $y = \text{Arctan } x$  est

$$y = \text{Arctan } x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Donc, par définition,

$$2 \text{Arctan } \frac{1}{3} = \text{Arctan } \frac{3}{4} \iff \begin{cases} \frac{3}{4} = \tan(2 \text{Arctan } \frac{1}{3}) \\ -\frac{\pi}{2} < 2 \text{Arctan } \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

(b) i. On sait que

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

donc

$$\tan\left(2 \text{Arctan } \frac{1}{3}\right) = \frac{2 \tan(\text{Arctan } \frac{1}{3})}{1 - \tan^2(\text{Arctan } \frac{1}{3})} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}. \quad (\text{II.31})$$

ii. La fonction  $\text{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc, puisque  $0 < \frac{1}{3} < 1$ , on a  $\text{Arctan } 0 < \text{Arctan } \frac{1}{3} < \text{Arctan } 1$  i.e.  $0 < \text{Arctan } \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$  ce qui implique

$$-\frac{\pi}{2} < 2 \text{Arctan } \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{II.32})$$

(c) D'après l'équivalence (II.30), l'égalité (II.31) et l'encadrement (II.32) prouvent que  $2 \text{Arctan } \frac{1}{3} = \text{Arctan } \frac{3}{4}$ .

2. Par définition,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Arctan} 3 = \pi - \operatorname{Arctan} \frac{3}{4} &\iff \pi - 2 \operatorname{Arctan} 3 = \operatorname{Arctan} \frac{3}{4} \\ &\iff \begin{cases} \frac{3}{4} = \tan(\pi - 2 \operatorname{Arctan} 3) \\ -\frac{\pi}{2} < \pi - 2 \operatorname{Arctan} 3 < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

(a) On sait que  $\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$  donc

$$\tan(\pi - 2 \operatorname{Arctan} 3) = -\tan(2 \operatorname{Arctan} 3) = -\frac{2 \tan(\operatorname{Arctan} 3)}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan} 3)} = -\frac{2 \times 3}{1 - 3^2} = \frac{3}{4}. \quad (\text{II.34})$$

(b) La fonction  $\operatorname{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc, puisque  $1 < 3$ , on a  $\operatorname{Arctan} 1 < \operatorname{Arctan} 3 (< \frac{\pi}{2})$  i.e.  $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan} 3 < \frac{\pi}{2}$  i.e.  $\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} 3 < \pi$  donc  $-\pi < -2 \operatorname{Arctan} 3 < -\frac{\pi}{2}$  i.e.  $0 < \pi - 2 \operatorname{Arctan} 3 < \frac{\pi}{2}$  ce qui implique

$$-\frac{\pi}{2} < \pi - 2 \operatorname{Arctan} 3 < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{II.35})$$

(c) D'après l'équivalence (II.33), l'égalité (II.34) et l'encadrement (II.35) prouvent que  $2 \operatorname{Arctan} 3 = \pi - \operatorname{Arctan} \frac{3}{4}$ .

3. (a) Soit d'abord  $x$  un réel tel que  $0 \leq x < 1$ . Par définition,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2} \iff \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} = \tan(2 \operatorname{Arctan} x) \\ -\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

i. On a

$$\tan(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2 \tan(\operatorname{Arctan} x)}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{2x}{1-x^2}. \quad (\text{II.37})$$

ii. La fonction  $\operatorname{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc, puisque  $0 < x < 1$ , on a  $\operatorname{Arctan} 0 < \operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan} 1$  i.e.  $0 < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{4}$  ce qui implique

$$-\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{II.38})$$

iii. D'après l'équivalence (II.36), l'égalité (II.37) et l'encadrement (II.38) prouvent que, si  $0 \leq x < 1$ ,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2}.$$

(b) Soit ensuite  $x$  un réel tel que  $x > 1$ . L'égalité  $2 \operatorname{Arctan} x = \pi + \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2}$  équivaut à  $2 \operatorname{Arctan} x - \pi = \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2}$ . Or, par définition,

$$2 \operatorname{Arctan} x - \pi = \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2} \iff \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} = \tan(2 \operatorname{Arctan} x - \pi) \\ -\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x - \pi < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

i. On sait que  $\tan(\theta - \pi) = \frac{\sin(\theta - \pi)}{\cos(\theta - \pi)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$  donc

$$\tan(2\operatorname{Arctan} x - \pi) = \tan(2\operatorname{Arctan} x) = \frac{2\tan(\operatorname{Arctan} x)}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{2x}{1 - x^2}. \quad (\text{II.40})$$

ii. La fonction  $\operatorname{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc, puisque  $1 < x$ , on a  $\operatorname{Arctan} 1 < \operatorname{Arctan} x (< \frac{\pi}{2})$  i.e.  $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$  i.e.  $\frac{\pi}{2} < 2\operatorname{Arctan} x < \pi$  i.e.  $-\frac{\pi}{2} < 2\operatorname{Arctan} x - \pi < 0$  ce qui implique

$$-\frac{\pi}{2} < 2\operatorname{Arctan} x - \pi < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{II.41})$$

iii. D'après l'équivalence (II.39), l'égalité (II.40) et l'encadrement (II.41) prouvent que, si  $x > 1$ ,

$$2\operatorname{Arctan} x = \pi + \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

## 1<sup>er</sup> mars 2000

### Exercice 1 (p. 21).

#### 1. Étude préliminaire.

- (a) i. Puisque l'ensemble de départ de la fonction  $v$  est  $[0, +\infty[$  et puisque  $\sqrt{4-t}$  n'existe que pour  $t \leq 4$ , l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 4]$ .  
 ii. La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0, 4[$  et pour  $0 \leq t < 4$ , on a

$$v'(t) = 2 \left[ \sqrt{4-t} + \frac{-t}{2\sqrt{4-t}} \right] = \frac{2(4-t) - t}{\sqrt{4-t}} = \frac{8-3t}{\sqrt{4-t}}.$$

Il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 8/3[$ , nulle en  $8/3$  et strictement négative sur  $[8/3, 4]$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 8/3$  et vaut alors  $v(8/3) = 32/(3\sqrt{3})$ .

- (b) i. La fonction  $v$  est intégrable sur  $[0, 4]$  car elle est continue sur cet intervalle.  
 ii. On procède à une intégration par parties pour calculer  $\int_0^4 v(t) dt$ .

$$\begin{aligned} \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^4 2t\sqrt{4-t} dt \\ &= 2 \left( \left[ -\frac{2}{3}t(4-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \int_0^4 -\frac{2}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= 2 \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^4 (4-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= \frac{4}{3} \left[ -\frac{2}{5}(4-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{15} 4^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

iii. D'après la définition, la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $[0, 4]$  est donnée par  $V = \frac{1}{4-0} \int_0^4 v(t) dt = \frac{64}{15}$ .

## 2. Étude concrète.

(a) On a immédiatement  $v(0) = v(T) = 0$ . La fonction  $v$  est dérivable sur  $]0, T[$  et pour  $0 \leq t < T$ , on a

$$v'(t) = a \left[ \sqrt{T-t} + \frac{-t}{2\sqrt{T-t}} \right] = a \frac{2(T-t) - t}{2\sqrt{T-t}} = a \frac{2T-3t}{2\sqrt{T-t}}.$$

Puisque  $a > 0$ , il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 2T/3[$ , nulle en  $2T/3$  et strictement négative sur  $[2T/3, T[$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 2T/3$  et vaut alors  $v(2T/3) = 2aT \sqrt{T/3}/3 = 2a(T/3)^{3/2}$ .

(b) Puisque  $dx(t) = v(t) dt$  et  $x(0) = 0$ , la fonction  $t \mapsto x(t)$  est la primitive s'annulant en 0 de la fonction (continue sur  $[0, T]$ )  $t \mapsto v(t)$ ; donc

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T v(t) dt \\ &= \int_0^T at \sqrt{T-t} dt \\ &= a \left( \left[ -\frac{2}{3} t(T-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^T - \int_0^T -\frac{2}{3} (T-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= a \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^T (T-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= \frac{2a}{3} \left( \left[ -\frac{2}{5} (T-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^T \right) \\ x(T) &= \frac{4a}{15} T^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

La vitesse moyenne  $V$  du motard sur le parcours  $AB$  est donnée par  $V = \frac{1}{T-0} \int_0^T v(t) dt = \frac{x(T)}{T} = \frac{4a}{15} T^{\frac{3}{2}}$ .

(c) La fonction  $x$  étant continue sur  $[0, T]$  et dérivable sur  $]0, T[$ , on peut lui appliquer sur cet intervalle le théorème des accroissements finis : il existe un réel  $c$  dans  $]0, T[$  tel que  $x(T) - x(0) = (T-0)x'(c)$  i.e. tel que  $v(c) = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$  ou encore tel que  $v(c) = V$ . Ceci prouve qu'il existe un instant au cours de l'expérience auquel la vitesse instantanée du motard égale sa vitesse moyenne.

(d) *Application numérique.* On a

$$\begin{cases} x(T) &= 1 \\ v_M &= 200 \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} \frac{4a}{15} T^{\frac{5}{2}} &= 1 \\ 2a(T/3)^{3/2} &= 200 \end{cases}$$

d'où, par division,

$$\frac{\frac{4}{15} T^{\frac{5}{2}}}{2(T/3)^{3/2}} = \frac{1}{200}$$

*i.e.*

$$T = \frac{1}{80\sqrt{3}} \text{ h} = \frac{3600}{80\sqrt{3}} \text{ s} = 15\sqrt{3} \text{ s} \approx 26 \text{ s}.$$

$$\text{Donc } V = x(T)/T = 1/T = 80\sqrt{3} \approx 139 \text{ km/h}.$$

**Exercice 2 (p. 21).**

1. • On sait que la solution générale de l'équation

$$y' + (\cos x)y = 0 \quad (\text{II.42})$$

est

$$y = C \exp\left(-\int \cos x \, dx\right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = Ce^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On constate que  $y = 2$  est solution particulière de l'équation

$$y' + (\cos x)y = 2 \cos x. \quad (\text{II.43})$$

- Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.43), somme de la solution générale de l'équation (II.42) et d'une solution particulière de l'équation (II.43), est

$$y = 2 + Ce^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' + 8y' + 25y = 0 \quad (\text{II.44})$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 + 8r + 25 = 0 \quad (\text{II.45})$$

de discriminant  $\Delta = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$ . Donc l'équation (II.45) a pour solutions (complexes conjuguées)

$$r^{\pm} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i.$$

Donc la solution générale de l'équation (II.44) est

$$y = e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $y_0$  est solution de l'équation (II.44) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 10$  si et seulement si

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ y_0(0) &= 1 \\ y'_0(0) &= 10 \end{cases}$$

*i.e.*

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ -4\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 10 \end{cases}$$

car si  $y_0 = e^{-4x}(\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x)$  alors

$$y_0' = -4e^{-4x}(\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x) + e^{-4x}(-3\lambda_1 \sin 3x + 3\lambda_2 \cos 3x).$$

Le précédent système équivaut à

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x}(\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 14/3 \end{cases}$$

donc la fonction  $y_0$  solution de l'équation (II.44) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y_0'(0) = 10$  est donnée par

$$y_0 = e^{-4x} \left( \cos 3x + \frac{14}{3} \sin 3x \right).$$

### Exercice 3 (p. 21).

1. (a) Pour une fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  et dérivable à l'ordre 3 sur l'intervalle ouvert correspondant, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 donne

$$f(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\theta h)}{3!}h^3$$

où  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .

- (b) Si  $h > 0$  et  $0 < \theta < 1$  alors  $\theta h > 0$  donc  $1 + \theta h > 1$  si bien que  $(1 + \theta h)^3 > 1$  et par conséquent

$$0 < (1 + \theta h)^{-3} < 1. \quad (\text{II.46})$$

- (c) Pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f : t \mapsto \ln(1 + t)$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0, h]$  donc, grâce à la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3, on a

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\theta h)}{6}h^3$$

où  $0 < \theta < 1$ . Or

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$$

donc, pour tout  $h > 0$ ,

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + (1+\theta h)^{-3} \frac{h^3}{3}.$$

De la double inégalité (II.46) on déduit pour tout  $h > 0$  que

$$0 < (1+\theta h)^{-3} \frac{h^3}{3} < \frac{h^3}{3}$$

d'où

$$h - \frac{h^2}{2} < \ln(1+h) < h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}.$$

2. Cette inégalité permet d'affirmer que  $h - \frac{h^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\ln(1+h)$  à  $10^{-3}$  près dès que  $(0 <) \frac{h^3}{3} \leq 10^{-3}$  i.e. dès que  $(0 <) h \leq \sqrt[3]{3} 10^{-1}$  (on peut même préciser qu'il s'agit alors d'une valeur approchée par défaut).
3. On note que  $\ln(1,1) = \ln(1+0,1)$ . Or, si  $h = 0,1 (> 0)$ , on a  $(0 <) h \leq \sqrt[3]{3} 10^{-1}$  et donc  $0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 0,095$  est une valeur approchée de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-3}$  près par défaut.

**Exercice 4 (p. 21).** On a

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{d(e^t + 1)}{e^t + 1} dt = \left[ \ln|e^t + 1| \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln \frac{e + 1}{2}.$$

Puisque  $dx/x = d(\ln x)$ ,

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^3} = \left[ \frac{-1}{2(\ln x)^2} \right]_e^{e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

**Exercice 5 (p. 21).**

1. On peut calculer à l'aide de la relation

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

mais on a aussi vu en cours que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. En intégrant par parties,

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x dx = \left[ x \operatorname{Argth} x \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Argth} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}$$

si bien que

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x dx = \frac{1}{4} \ln \frac{3/2}{1/2} + \frac{1}{2} \left[ \ln|1-x^2| \right]_0^{1/2} = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2.$$

**13 juin 2000**

**Année 2000–2001**

**19 décembre 2000**

**Exercice 1 (p. 23).**

1. (a) On a, si  $x \neq 2$ ,

$$\frac{x-2}{x^3-8} = \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{x^2+2x+4} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{1}{12}.$$

(b) On a, si  $x \neq 6$ ,

$$\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} = \frac{x+3-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+3} \xrightarrow{x \rightarrow 6} \frac{1}{6}.$$

(c) On a, si  $x > 0$ ,

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x} = \frac{(\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x})(\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x})}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x}} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x}}.$$

Or

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln \frac{x+1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0$$

et

$$\lim_{+\infty} \ln = +\infty \quad \text{donc} \quad \sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

si bien que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x} = 0.$$

2. On a, si  $x \neq 0$ ,

$$|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc, par un corollaire du théorème « des gendarmes »,  $\lim_0 f = 0$ . Or  $f(0) = 0$  donc  $f$  est continue en 0.

### Exercice 2 (p. 23).

1. On a

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \\ &\iff x - \frac{\pi}{8} \equiv \frac{\pi}{3} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{8} \equiv -\frac{\pi}{3} \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{11\pi}{24} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{24} \left[ 2\pi \right]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{11\pi}{24} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{24} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $]-\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{24} \right\}$ .

2. On a

$$\begin{aligned}\sin 2x = \sin x &\iff 2x \equiv x \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi - x \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv 0 \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv \pi \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv 0 \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \frac{2\pi}{3} \right].\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\sin 2x = \sin x$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi\}$ .

3. On a

$$\begin{aligned}\tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x \equiv x + \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \left[ \frac{\pi}{2} \right].\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\}$ .

### Exercice 3 (p. 23).

1. Voir le cours.

2.

(a) En 0,

$$\frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} \sim \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}}{x(2+x)} \sim \frac{1}{2+x} \sim \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} = \frac{1}{2}.$$

(b) En 0,

$$\frac{\tan^2(\sqrt{\pi x})}{1 - \cos x} \sim \frac{(\sqrt{\pi x})^2}{\frac{x^2}{2}} \sim 2\pi$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(\sqrt{\pi x})}{1 - \cos x} = 2\pi.$$

(c) Posons  $x = 2 + h$ . Alors, si  $h \rightarrow 0$

$$\frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)} = \frac{\ln(1+h)}{\sin h} \sim \frac{h}{h} = 1$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)} = 1.$$

#### Exercice 4 (p. 23).

1. (a) On a

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

(b) D'après la définition précédente, pour prouver que  $2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} = \operatorname{Arccos} \frac{1}{8}$ , il suffit de prouver que

i.  $\cos(2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4}) = \frac{1}{8},$

ii.  $0 \leq 2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} \leq \pi.$

Or,

i. puisque  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ , on a

$$\cos\left(2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4}\right) = 2 \cos^2\left(\operatorname{Arccos} \frac{3}{4}\right) - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8},$$

ii. puisque  $0 < \frac{3}{4} < 1$ , la fonction  $\operatorname{Arccos}$  étant strictement décroissante, on a  $\operatorname{Arccos} 1 < \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} < \operatorname{Arccos} 0$  i.e.  $0 < \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} < \pi/2$  d'où  $0 \leq 2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} \leq \pi.$

Il s'ensuit que  $2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} = \operatorname{Arccos} \frac{1}{8}.$

2. (a) Puisque l'ensemble de définition de la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est égal à  $[-1, 1]$ , on a  $\mathcal{D} = [-1, 1]$  car

$$x \in \mathcal{D} \iff -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$$

$$\iff 0 \leq 2x^2 \leq 2$$

$$\iff 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\iff 0 \leq |x| \leq 1$$

$$\iff -1 \leq x \leq 1.$$

(b) Puisque l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est égal à  $] -1, 1[$ , on a  $\mathcal{D}' = ] -1, 0[ \cup ] 0, 1[$  car

$$x \in \mathcal{D}' \iff -1 < 2x^2 - 1 < 1$$

$$\iff 0 < 2x^2 < 2$$

$$\iff 0 < x^2 < 1$$

$$\iff 0 < |x| < 1$$

$$\iff x \in ] -1, 0[ \cup ] 0, 1[.$$

(c) Pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}'$ , on a

$$f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} = \frac{-4x}{\sqrt{1 - 4x^4 + 4x^2 - 1}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$$

donc

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

si bien que

$$f'(x) = \begin{cases} 2 (\operatorname{Arccos} x)' & \text{si } 0 < x < 1 \\ -2 (\operatorname{Arccos} x)' & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit qu'il existe des constantes  $K_+$  et  $K_-$  telles que

$$f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{Arccos} x + K_+ & \text{si } 0 < x < 1 \\ -2 \operatorname{Arccos} x + K_- & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

(d) Pour  $x = 1/2$ , on obtient en particulier  $f(1/2) = 2 \operatorname{Arccos}(1/2) + K_+$  c'est-à-dire, compte-tenu de la définition de  $f$ ,  $2\pi/3 = 2\pi/3 + K_+$  soit  $K_+ = 0$ . Pour  $x = -1/2$ , on obtient en particulier  $f(-1/2) = -2 \operatorname{Arccos}(-1/2) + K_-$  c'est-à-dire, compte-tenu de la définition de  $f$ ,  $2\pi/3 = -4\pi/3 + K_-$  soit  $K_- = \pi$ . On obtient donc

$$f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{Arccos} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \pi - 2 \operatorname{Arccos} x & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

(e) Pour  $x = -1$ , on a  $f(-1) = \operatorname{Arccos} 1 = 0 = \pi - 2 \operatorname{Arccos}(-1)$ . Pour  $x = 0$ , on a  $f(0) = \operatorname{Arccos}(-1) = \pi = 2 \operatorname{Arccos} 0$ . Pour  $x = 1$ , on a  $f(1) = \operatorname{Arccos} 1 = 0 = 2 \operatorname{Arccos} 1$ . Donc les relations précédentes sont encore valables pour  $x = -1$ ,  $x = 0$  et  $x = 1$ . En conclusion,

$$\operatorname{Arccos}(2x^2 - 1) = \begin{cases} 2 \operatorname{Arccos} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - 2 \operatorname{Arccos} x & \text{si } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

(f) D'après les relations (II.47), puisque  $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$ , on a

$$2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4} = \operatorname{Arccos} \left( 2 \left( \frac{3}{4} \right)^2 - 1 \right) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{8}.$$

### Exercice 5 (p. 24).

1. Il est clair que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$  et  $\lim_{-\infty} \exp = 0$ , on a

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = 1 + e^{-x}.$$

Donc  $f' > 0$  sur  $\mathbb{R}$  si bien que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f$  est continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{-\infty} f < 0 < \lim_{+\infty} f$ , l'équation  $f(x) = 0$ , équivalente à l'équation  $e^{-x} = x$ , admet une unique solution réelle  $a$ .
3. Puisque de plus  $f(0) = -1 < 0$  et  $f(1) = 1 - e^{-1} = e^0 - e^{-1} > 0$  (car  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ), on sait que  $a$  appartient à  $]0, 1[$ .
4. (a) On met en œuvre la méthode de dichotomie.
- i. Une valeur approchée de  $e^{-\frac{1}{2}}$  à la calculatrice montre que  $\frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} < 0$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0$ . Or  $f(0) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{1}{2}, 1[$ .
  - ii. Une valeur approchée de  $e^{-\frac{3}{4}}$  à la calculatrice montre que  $\frac{3}{4} - e^{-\frac{3}{4}} < 0$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4})$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ .
  - iii. Une valeur approchée de  $e^{-\frac{5}{8}}$  à la calculatrice montre que  $\frac{5}{8} - e^{-\frac{5}{8}} > 0$  donc  $f(\frac{5}{8}) > 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4})$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{5}{8})$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$ .
  - iv. Une valeur approchée de  $e^{-\frac{9}{16}}$  à la calculatrice montre que  $\frac{9}{16} - e^{-\frac{9}{16}} < 0$  donc  $f(\frac{9}{16}) < 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{5}{8})$  donc  $f(\frac{9}{16}) < 0 < f(\frac{5}{8})$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{9}{16}, \frac{5}{8}[$ .
  - v. Une valeur approchée de  $e^{-\frac{19}{32}}$  à la calculatrice montre que  $\frac{19}{32} - e^{-\frac{19}{32}} > 0$  donc  $f(\frac{19}{32}) > 0$ . Or  $f(\frac{9}{16}) < 0 < f(\frac{5}{8})$  donc  $f(\frac{9}{16}) < 0 < f(\frac{19}{32})$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{9}{16}, \frac{19}{32}[$ .
  - vi. Une valeur approchée de  $e^{-\frac{37}{64}}$  à la calculatrice montre que  $\frac{37}{64} - e^{-\frac{37}{64}} > 0$  donc  $f(\frac{37}{64}) > 0$ . Or  $f(\frac{9}{16}) < 0 < f(\frac{19}{32})$  donc  $f(\frac{9}{16}) < 0 < f(\frac{37}{64})$  et donc  $a$  appartient à  $]\frac{9}{16}, \frac{37}{64}[$ .
- (b) i. L'intervalle  $]\frac{9}{16}, \frac{37}{64}[$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $a$  est distant de son centre  $\frac{73}{128}$  d'au plus son rayon qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| a - \frac{73}{128} \right| < \frac{1}{128} < 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{73}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $a$ .

- ii. De plus, une valeur approchée de  $\frac{73}{128}$  donnée par la calculatrice est  $\frac{73}{128} \approx 0,57$  à  $10^{-3}$  près donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |a - 0,57| &= \left| a - \frac{73}{128} + \frac{73}{128} - 0,57 \right| \\ &\leq \left| a - \frac{73}{128} \right| + \left| \frac{73}{128} - 0,57 \right| \\ &< \frac{1}{128} + 10^{-3} \\ &< 10^{-2} \quad (\text{car } \frac{1}{128} < 0,008) \end{aligned}$$

si bien que 0,57 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $a$ .

## 4 mai 2001

## Exercice 1 (p. 24).

1. On a

$$\int \rho e^{-\rho} d\rho = -\rho e^{-\rho} - \int -e^{-\rho} d\rho = -\rho e^{-\rho} - e^{-\rho}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta &= \left[ \theta \tan \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \tan \frac{-\pi}{4} \right) - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d \cos \theta}{\cos \theta} \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d \ln |\cos \theta| \\ &= \left[ \ln |\cos \theta| \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| - \ln \left| \frac{-\sqrt{2}}{2} \right| \\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta &= 0. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9} &= \int_0^3 \frac{dx}{9 \left( \frac{x^2}{9} + 1 \right)} \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 \frac{dx}{\left( \frac{x}{3} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 \frac{3 d \frac{x}{3}}{\left( \frac{x}{3} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 d \operatorname{Arctan} \frac{x}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} \frac{x}{3} \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} (\operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0) \\ \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9} &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{(2x + 1)^2} = \left[ -\frac{1}{2(2x + 1)} \right]_0^1 = -1/6 + 1/2 = 1/3.$$

### 3. (Hors barème)

(a) On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a f(s) ds \\ &= \int_{-a}^0 f(s) ds + \int_0^a f(s) ds \\ &= \int_a^0 f(-t) d(-t) + \int_0^a f(s) ds \quad \text{en posant } t = -s \\ &= - \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(s) ds \quad \text{car } f \text{ est paire donc } f(-t) = f(t) \\ &= 2 \int_0^a f(s) ds \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a f(s) ds \\ &= \int_{-a}^0 f(s) ds + \int_0^a f(s) ds \\ &= \int_a^{-a} f(-t) d(-t) \quad \text{en posant } t = -s \\ &= \int_a^{-a} f(t) dt \quad \text{car } f \text{ est impaire donc } f(-t) = -f(t) \\ &= -I \end{aligned}$$

Donc  $2I = 0$  si bien que  $I = 0$ .

**Exercice 2 (p. 24).** On sait que la solution générale de l'équation

$$y' + \frac{1}{x} y = 0$$

est, sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (puisque la fonction  $x \mapsto 1/x$  est continue sur cet intervalle),

$$y = C \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{-\ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C/x, \quad C \in \mathbb{R}$$

car  $x > 0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Utilisons la méthode de la variation de la constante et cherchons une solution particulière de l'équation complète

$$y' + \frac{1}{x} y = x \tag{II.48}$$

sous la forme  $y = C(x)/x$ . Alors  $y = C(x)/x$  est solution de l'équation (II.48) si et seulement si  $C'(x)/x = x$  si et seulement si  $C(x) = \int x^2 dx$  si et seulement si  $C(x) = x^3/3 + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $y = (x^3/3 + K)/x$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Donc la solution générale de l'équation complète (II.48) est, sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $y = x^2/3 + K/x$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3 (p. 24).**

1. L'équation

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \iff (r - 1)(r + 3) = 0 \iff r = -1 \text{ ou } r = 3.$$

Donc la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' - 3y = 0$  est

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' + 2y' + y = 0$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r + 1)^2 = 0$$

dont  $-1$  est racine double. Donc la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' + y = 0$  est

$$y = e^{-x}(\lambda_1 x + \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3. L'équation

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

a pour équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 10 = 0 &\iff (r + 1)^2 + 9 = 0 \\ &\iff (r + 1)^2 - (3i)^2 = 0 \\ &\iff (r + 1 + 3i)(r + 1 - 3i) = 0 \\ &r = -1 - 3i \quad \text{ou} \quad r = -1 + 3i. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation  $y'' + 2y' + 10y = 0$  est

$$y = e^{-x}(\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 4 (p. 25).**

1. La relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

- La fonction  $\operatorname{ch}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , paire, de dérivée première  $\operatorname{sh}$  et de dérivée seconde  $\operatorname{ch}$ ; par ailleurs,  $\operatorname{ch} 0 = 1$  et  $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$ . On se reportera au cours pour sa représentation graphique.
  - La fonction  $\operatorname{sh}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, de dérivée première  $\operatorname{ch}$  et de dérivée seconde  $\operatorname{sh}$ ; par ailleurs,  $\operatorname{sh} 0 = 0$  et  $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . On se reportera au cours pour sa représentation graphique.
2. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle fermé d'extrémités  $x_0$  et  $x_0 + h$  ( $h \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre  $n + 1$  sur le même intervalle ouvert. Alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange en  $x_0$  à l'ordre  $n + 1$ , il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{h^k}{k!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h). \quad (\text{II.49})$$

3. Pour tout  $h \neq 0$ , la fonction  $f : x \mapsto \operatorname{sh} x$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 4. Or il est clair que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\operatorname{sh}^{(k)} x = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{si } k \text{ est pair} \\ \operatorname{ch} x & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

donc

$$\operatorname{sh}^{(k)} 0 = \begin{cases} \operatorname{sh} 0 = 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \operatorname{ch} 0 = 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout  $h \neq 0$ , la formule (II.49) à l'ordre  $n = 4$  assure l'existence d'un réel  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\operatorname{sh} h = h + \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} \operatorname{ch} \theta h \quad (\text{II.50})$$

#### 4. (Hors barème)

- (a) La fonction  $\operatorname{ch}$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$\begin{cases} 0 \leq h \leq \frac{1}{2} \\ 0 < \theta < 1 \end{cases} \implies 0 \leq \theta h < \frac{1}{2} \implies \operatorname{ch} 0 \leq \operatorname{ch} \theta h < \operatorname{ch} \frac{1}{2} \implies 0 \leq \operatorname{ch} \theta h < \frac{3}{2}.$$

- (b) L'équation (II.50) équivaut à

$$\operatorname{sh} h - \left( h + \frac{h^3}{6} \right) = \frac{h^5}{120} \operatorname{ch} \theta h. \quad (\text{II.51})$$

Or, si  $h$  est dans  $[0, \frac{1}{2}]$  alors, d'après la question 4a,  $0 \leq \operatorname{ch} \theta h < \frac{3}{2}$  si bien que

$$0 \leq \frac{h^5}{120} \operatorname{ch} \theta h < \frac{h^5}{80}.$$

On déduit de cet encadrement et de la relation (II.51) l'encadrement demandé.

- (c) i. La question précédente permet d'affirmer, puisque  $\frac{1}{10}$  est dans  $[0, \frac{1}{2}]$ , que

$$0 \leq \operatorname{sh} \frac{1}{10} - \left(10^{-1} + \frac{10^{-3}}{6}\right) < \frac{10^{-5}}{80}.$$

Ceci prouve que  $\alpha$  est une valeur approchée de  $\operatorname{sh} \frac{1}{10}$  à  $\frac{10^{-5}}{80}$  près et, puisque

$$0 \leq \operatorname{sh} \frac{1}{10} - \alpha \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{sh} \frac{1}{10} \geq \alpha,$$

c'est par défaut que  $\alpha$  est une valeur approchée de  $\operatorname{sh} \frac{1}{10}$  à  $\frac{10^{-5}}{80}$  près.

- ii. Puisque  $|\alpha - a| < 7 \cdot 10^{-6}$ , l'inégalité triangulaire permet d'affirmer que

$$\left| \operatorname{sh} \frac{1}{10} - a \right| \leq \left| \operatorname{sh} \frac{1}{10} - \alpha \right| + |\alpha - a| < \frac{10^{-5}}{80} + 7 \cdot 10^{-6} = \frac{57}{80} \cdot 10^{-5} < 10^{-5}$$

si bien que  $a$  est une valeur approchée de  $\operatorname{sh} \frac{1}{10}$  à  $10^{-5}$  près.

### Exercice 5 (p. 25).

1. On a à effectuer un produit de développements limités.

$$\begin{aligned} (e^x - 1) \cos x &= \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - 1 \right] \times \left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] \\ &= \left[ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right] \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) x^3 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) x^4 + o(x^4) \\ (e^x - 1) \cos x &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. On a à effectuer une composition de développements limités.

$$\begin{aligned} \ln \cos x &= \ln \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right] \\ &= \left[ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right] - \frac{1}{2} \left[ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]^2 + \frac{1}{3} \left[ -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \left( \frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) x^4 + \left( -\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24} \right) x^6 + o(x^6) \\ \ln \cos x &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6). \end{aligned}$$

3. (a) On effectue le développement limité de  $f$  en 0 jusqu'au 1<sup>er</sup> ordre suivant strictement

l'ordre 1 dont le coefficient est non nul.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + 16)^{1/4} \\ &= 2 \left( \frac{x^4}{16} + 1 \right)^{1/4} \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{16} + o(x^4) \right) \\ f(x) &= 2 + \frac{x^4}{32} + o(x^4). \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\mathcal{C}$  admet au point d'abscisse 0 une tangente  $\mathcal{T}$  d'équation  $y = 2$  et, puisque

$$f(x) - 2 = \frac{x^4}{32} + o(x^4) = x^4 \left( \frac{1}{32} + o(1) \right)$$

est localement positif en 0, la courbe  $\mathcal{C}$  est au dessus de  $\mathcal{T}$  localement en 0.

(b) On pose  $h = 1/x$ . Alors  $h \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow +\infty$  et

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^4 + 16} &= \sqrt[4]{\frac{1}{h^4} + 16} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2}} \sqrt[4]{1 + 16h^4} \\ &= \frac{1}{|h|} (1 + 16h^4)^{1/4} \\ &= \frac{1}{|h|} \left( 1 + \frac{1}{4} \cdot 16h^4 + o(h^4) \right) \\ &= \frac{1}{|h|} + 4h^2 |h| + o(h^2 |h|) \quad \text{car } h^4 = h^2 |h|^2 \\ \sqrt[4]{x^4 + 16} &= |x| + 4 \frac{1}{x^2 |x|} + o \left( \frac{1}{x^2 |x|} \right). \end{aligned}$$

Donc, si  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x$  est positif et donc

$$f(x) = x + \frac{4}{x^3} + o \left( \frac{1}{x^3} \right).$$

(c) De même, si  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $x$  est négatif et donc

$$f(x) = -x - \frac{4}{x^3} + o \left( \frac{1}{x^3} \right).$$

(d) Il s'en suit que, au voisinage de  $+\infty$ , la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote  $\mathcal{D}^+$  d'équation  $y = x$  et, puisque

$$f(x) - x = \frac{4}{x^3} + o \left( \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{x^3} (4 + o(1))$$

est localement positif en  $+\infty$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est au dessus de  $\mathcal{D}^+$  localement en  $+\infty$ . De même, au voisinage de  $-\infty$ , la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote  $\mathcal{D}^-$  d'équation  $y = -x$  et, puisque

$$f(x) + x = -\frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3}(-4 + o(1))$$

est localement positif en  $-\infty$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est au dessus de  $\mathcal{D}^-$  localement en  $-\infty$  (ce qui pouvait s'obtenir par le caractère pair de la fonction  $f$ ).

15 juin 2001

Année 2001–2002

10 décembre 2001

Exercice 1 (p. 26).

1. On a

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 2x + 4}{1 - x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{-x} = 0$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 12$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+4)} = -4$ ;

2. (a) pour tout  $a$  réel,  $\sqrt{x+a} \sim \sqrt{x}$  en  $+\infty$  car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+a}{x}} = \sqrt{1} = 1$$

donc, en  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} &= x \left( \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \right) \\ &= x \left( \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \right) \\ &\sim \frac{2x}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

si bien que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = -\infty$ ;

3. (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$  car, en 0,  $\tan x \sim x$  et  $\ln(1+x) \sim x$ ;

(b) en posant  $h = x - 2$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e}{\ln(x-1)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{h+2}{2}} - e}{\ln(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+\frac{h}{2}} - e}{\ln(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e \left( e^{\frac{h}{2}} - 1 \right)}{\ln(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e \times \frac{h}{2}}{h} \\ &= \frac{e}{2}\end{aligned}$$

car, quand  $h \rightarrow 0$ , on a  $\ln(h+1) \sim h$  et  $\frac{h}{2} \rightarrow 0$  donc  $e^{\frac{h}{2}} - 1 \sim \frac{h}{2}$ .

**Exercice 2 (p. 26).**

1. On a

$$\begin{aligned}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \iff 3x - \frac{\pi}{6} \equiv x + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\text{ou } 3x - \frac{\pi}{6} \equiv -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ \iff 2x &\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\text{ou } 4x \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \iff x &\equiv \frac{5\pi}{24} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{48} \left[\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

donc les solutions de l'équation  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  appartenant à  $] -\pi, \pi]$  sont

$$\frac{5\pi}{24} - \pi, \frac{5\pi}{24}, -\frac{\pi}{48} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{48}, -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{48} + \pi$$

soit

$$-\frac{19\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, -\frac{25\pi}{48}, -\frac{\pi}{48}, \frac{23\pi}{48}, \frac{47\pi}{48}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 \tan x = \cotan x &\iff \tan x = \frac{1}{\tan x} \\
 &\iff \tan x = \frac{1}{\tan x} \\
 &\iff \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ \tan x \neq 0 \end{cases} \\
 &\iff \tan x = 1 \quad \text{ou} \quad \tan x = -1 \\
 &\iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

donc les solutions de l'équation  $\tan x = \cotan x$  appartenant à  $] -\pi, \pi]$  sont  $\frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{\pi}{2}$  soit  $-\frac{3\pi}{4}$ ,  $-\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ .

**Exercice 3 (p. 26).** Dans  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}
 z^3 = 1 &\iff z^3 = e^{i.k2\pi}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{où } i^2 = -1 \\
 &\iff z = e^{i.k\frac{2\pi}{3}}, k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z = e^{i.k\frac{2\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{car } \theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
 &\iff z \in \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\
 &\iff z \in \{1, j, j^2\}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 27).**

1. Puisque les fonctions sin et cos sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 x \notin \mathcal{D} &\iff \sin^2 x = 0 \\
 &\iff \sin x = 0 \\
 &\iff x \equiv 0 [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - 0 [2\pi] \\
 &\iff x \equiv 0 [\pi].
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. (a) L'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est symétrique par rapport à 0 et, si  $x \in \mathcal{D}$ ,

$$f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 \sin^2(-x)} = \frac{1 - \cos x}{2 (-\sin x)^2} = \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} = f(x)$$

car les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire. Donc  $f$  est paire.

(b) Les fonctions sin et cos étant  $2\pi$ -périodiques, il en est de même de  $f$ .

3. Quand  $x \rightarrow \pi$ ,  $\cos x \rightarrow -1$  donc  $1 - \cos x \rightarrow 2$  et  $\sin x \rightarrow 0$  donc  $\sin^2 x \rightarrow 0^+$  si bien que  $\lim_{\pi} f = +\infty$ .

4. Puisque  $0 \notin \mathcal{D}$ , la fonction  $f$  n'est pas continue en 0 mais, en 0, on a  $1 - \cos x \sim x^2/2$  et  $\sin x \sim x$  donc

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} \sim \frac{1}{4}$$

si bien que  $f$  admet, en 0, la limite finie  $1/4$ . On peut donc prolonger  $f$  par continuité en 0, en posant  $f(0) = 1/4$ .

5. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos^2 x)} \\ &= \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos x)} \quad \text{si } 1 - \cos x \neq 0 \text{ i.e. si } x \neq 0[2\pi]. \end{aligned}$$

### Exercice 5 (p. 27).

1. On a

$$b^5 - a^5 = (b - a)(b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4).$$

Donc le taux  $\tau_{\{a,b\}}$  de variation de  $f$  entre deux réels quelconques distincts  $a$  et  $b$ , défini par

$$\tau_{\{a,b\}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

vérifie

$$\begin{aligned} \tau_{\{a,b\}} &= \frac{(b^5 + b^2 - 1) - (a^5 + a^2 - 1)}{b - a} \\ &= \frac{b^5 - a^5 + b^2 - a^2}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4) + (b - a)(b + a)}{b - a} \\ &= b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4 + b + a. \end{aligned}$$

Si  $a$  et  $b$  sont distincts dans  $[0, +\infty[$ , ce taux est alors strictement positif puisque  $a$  et  $b$  sont positifs ou nuls et puisque l'un au moins d'entre eux est strictement positif. Ceci prouve, par définition, que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. La fonction  $f$ , polynômiale, est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, 1]$ ; elle est de plus strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  donc sur  $[0, 1]$ . Donc, grâce à un théorème du cours, on sait que  $f$  est une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[f(0), f(1)]$ , i.e. sur  $[-1, 1]$ . Par conséquent, 0 appartenant à  $[-1, 1]$ , il existe un unique antécédent  $x_0$  à 0 par  $f$  dans  $[0, 1]$  et  $x_0$  n'est ni 0 ni 1 puisque  $f(0) \neq 0$  et  $f(1) \neq 1$ . Ceci prouve que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .

3. (a) On met en œuvre la méthode de dichotomie.

- i. Le milieu de l'intervalle  $]0, 1[$  est  $\frac{1}{2}$  et un calcul (éventuellement à la calculatrice) montre que  $f(\frac{1}{2}) < 0$ . Or  $f(0) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, 1[$ .
- ii. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{1}{2}, 1[$  est  $\frac{3}{4}$  et un calcul montre que  $f(\frac{3}{4}) < 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(1)$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, 1[$ .
- iii. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{3}{4}, 1[$  est  $\frac{7}{8}$  et un calcul montre que  $f(\frac{7}{8}) > 0$ . Or  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{7}{8})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$ .
- iv. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$  est  $\frac{13}{16}$  et un calcul montre que  $f(\frac{13}{16}) > 0$ . Or  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{7}{8})$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, \frac{13}{16}[$ .
- v. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{3}{4}, \frac{13}{16}[$  est  $\frac{25}{32}$  et un calcul montre que  $f(\frac{25}{32}) < 0$ . Or  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  donc  $f(\frac{25}{32}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{25}{32}, \frac{13}{16}[$ .
- vi. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{25}{32}, \frac{13}{16}[$  est  $\frac{51}{64}$  et un calcul montre que  $f(\frac{51}{64}) < 0$ . Or  $f(\frac{25}{32}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  donc  $f(\frac{51}{64}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{51}{64}, \frac{13}{16}[$ .

L'intervalle  $I = ] \frac{51}{64}, \frac{13}{16}[$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{103}{128}$  de  $I$  d'au plus le rayon de  $I$  qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{103}{128} \right| < \frac{1}{128} < 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{103}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

(b) De plus, une valeur approchée de  $\frac{103}{128}$  donnée par la calculatrice est  $\frac{103}{128} \approx 0,805$  à  $10^{-3}$  près donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,805| &= \left| x_0 - \frac{103}{128} + \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{103}{128} \right| + \left| \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &< \frac{1}{128} + 10^{-3} \\ &< 10^{-2} \quad (\text{car } \frac{1}{128} < 0,008) \end{aligned}$$

si bien que 0,805 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

**Exercice 6 (p. 27).** Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque ; on doit prouver qu'il existe  $\alpha > 0$  (qui, en général, dépend de  $\varepsilon$ )

$$\text{tel que } |x - 1| < \alpha \implies |(x - 1)^2 - 0| < \varepsilon$$

$$\text{i.e. tel que } |x - 1| < \alpha \implies \sqrt{(x - 1)^2} < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\text{i.e. tel que } |x - 1| < \alpha \implies |x - 1| < \sqrt{\varepsilon}.$$

On constate qu'il existe  $\alpha > 0$  satisfaisant cette condition :  $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$  convient (ainsi que tous les réels strictement positifs inférieurs à  $\sqrt{\varepsilon}$ , par exemple  $\alpha = \sqrt{\varepsilon}/2$ ,  $\alpha = \sqrt{\varepsilon}/3$ , etc.). Ceci ayant été prouvé pour un réel  $\varepsilon > 0$  quelconque, c'est vrai pour *tout* réel  $\varepsilon > 0$ . On a donc bien prouvé que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

# 18 mars 2002

**Exercice 1 (p. 27).**

1. Cf. cours !
2. Les fonctions  $\sin$  et  $\tan$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  respectivement sur  $\mathbb{R}$  et sur  $] -\pi/2, \pi/2[$ . Donc on peut leur appliquer la formule de Taylor-Young d'ordre 3 en 0. On sait que  $\sin^{(0)} = \sin$ ,  $\sin^{(1)} = \cos$ ,  $\sin^{(2)} = -\sin$ ,  $\sin^{(3)} = -\cos$  et on a

$$\tan^{(0)} = \tan$$

$$\tan^{(1)} = 1 + \tan^2$$

$$\tan^{(2)} = 2(1 + \tan^2)\tan = 2(\tan + \tan^3)$$

$$\tan^{(3)} = 2(1 + \tan^2 + 3(1 + \tan^2)\tan^2) = 2(1 + 4\tan^2 + 3\tan^4).$$

On sait donc qu'il existe deux fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  de limite nulle en 0 telles que

$$\sin x = \sum_{k=0}^3 \frac{\sin^{(k)} 0}{k!} x^k + x^3 \varepsilon_1(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\tan x = \sum_{k=0}^3 \frac{\tan^{(k)} 0}{k!} x^k + x^3 \varepsilon_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x) - \left(x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x)\right)}{x^3} \\ &= \frac{-\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_1(x) - x^3 \varepsilon_2(x)}{x^3} \\ &= -\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

si bien que, puisque  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont de limite nulle en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

3. (a) Les fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\cos$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc il en est de même de la fonction  $\operatorname{ch} - \cos$ . Donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à tous ordres en 0. On sait que  $\operatorname{ch}^{(0)} = \operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{ch}^{(1)} = \operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}^{(2)} = \operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{ch}^{(3)} = \operatorname{sh}$ , et  $\cos^{(0)} = \cos$ ,  $\cos^{(1)} = -\sin$ ,  $\cos^{(2)} = -\cos$ ,  $\cos^{(3)} = \sin$  si bien que

$$(\operatorname{ch} - \cos)^{(0)}(0) = 1 - 1 = 0$$

$$(\operatorname{ch} - \cos)^{(1)}(0) = 0 - 0 = 0$$

$$(\operatorname{ch} - \cos)^{(2)}(0) = 1 - (-1) = 2$$

$$(\operatorname{ch} - \cos)^{(3)}(0) = 0 - 0 = 0.$$

On sait donc qu'il existe deux fonctions  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  de limite nulle en 0 telles que

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x - \cos x &= \sum_{k=0}^2 \frac{(\operatorname{ch} - \cos)^{(k)} 0}{k!} x^k + x^2 \varepsilon_2(x) = x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \\ \operatorname{ch} x - \cos x &= \sum_{k=0}^3 \frac{(\operatorname{ch} - \cos)^{(k)} 0}{k!} x^k + x^3 \varepsilon_3(x) = x^2 + x^3 \varepsilon_3(x).\end{aligned}$$

(b) Par conséquent,

i.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \varepsilon_2(x) = 1,$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0,$$

iii.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

### Exercice 2 (p. 27).

1. L'ensemble de définition de la fonction  $\operatorname{Argch}$  est  $[1, +\infty[$  (car  $\operatorname{Argch}$  est la bijection réciproque de la fonction  $\operatorname{ch}$  restreinte à  $\mathbb{R}^+$  et que  $\operatorname{ch}(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[$ ).
2. Soit  $x$  un réel vérifiant  $x \geq 1$ .

- (a) Alors  $x^2 - 1 \geq 0$  donc  $\sqrt{x^2 - 1}$  existe bien et est, comme toute racine carrée, positif; donc  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq x \geq 1$ . La fonction  $\ln$  étant, sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , strictement croissante,  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq \ln 1$  i.e.  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0$ .

(b) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right] \\ = \frac{1}{2} \left[ \exp \left( \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right) + \exp \left( -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right) \right] \quad (\text{II.52})\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right] &= \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= x.\end{aligned}$$

3. Donc, si on pose

$$y = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

les deux questions précédentes prouvent que

$$\begin{cases} \operatorname{ch} y = x \\ y \geq 0. \end{cases}$$

ce qui assure, d'après la définition de  $\operatorname{Argch}$  rappelée dans l'énoncé, que pour tout  $x \geq 1$  (i.e. pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $\operatorname{Argch}$ ),

$$\operatorname{Argch} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

**Exercice 3 (p. 28).**

1. Cf. le cours !
2. Cf. le cours !
3. Le théorème des accroissements finis est la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  dans le cas particulier où  $n = 0$ .

**Exercice 4 (p. 28).**

1. On a, pour tout  $x > -1$ ,

$$f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1},$$

$$f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2},$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4},$$

$$f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}.$$

On pourrait prouver par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$  et tout  $x > -1$ ,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}.$$

2. Si  $h > 0$  et  $0 < \theta < 1$  alors

$$0 < \theta h < h$$

$$\text{donc } 1 < 1 + \theta h < 1 + h$$

$$\text{donc } 1^n < (1 + \theta h)^n < (1 + h)^n \quad \text{car } x \mapsto x^n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$\text{donc } (1 + h)^{-n} < (1 + \theta h)^{-n} < 1.$$

On en déduit, puisque  $(1 + h)^{-n} > 0$  pour  $h > 0$ , que

$$0 < (1 + \theta h)^{-n} < 1. \tag{II.53}$$

3. (a) La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est continue sur l'intervalle  $[0, h]$  et dérivable sur l'intervalle  $]0, h[$ . Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} \ln(1+h) - \ln 1 &= \frac{1}{1+\theta h} (h-0) \\ \text{i.e. } \ln(1+h) &= \frac{h}{1+\theta h}. \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Or, d'après l'encadrement (II.53) pour  $n = 1$ ,

$$0 < \frac{1}{1+\theta h} < 1$$

d'où, pour  $h > 0$ ,

$$0 < \frac{h}{1+\theta h} < h$$

et donc, d'après l'égalité (II.54),

$$0 < \ln(1+h) < h$$

i.e.

$$-h < \ln(1+h) - h < 0.$$

- (b) En appliquant l'encadrement précédent à  $h = 0,1$ , on obtient  $-0,1 < \ln(1,1) - 0,1 < 0$  ce qui prouve qu'une valeur approchée (par excès) de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-1}$  près est  $0,1$ .
4. (a) La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[0, h]$  et dérivable à l'ordre 2 sur l'intervalle  $]0, h[$ . Donc, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} \ln(1+h) &= \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + \frac{f''(0+\theta h)}{2!} h^2 \\ \text{i.e. } \ln(1+h) &= \ln 1 + \frac{1}{1} h - (1+\theta h)^{-2} \frac{h^2}{2!} \\ \text{i.e. } \ln(1+h) - h &= -(1+\theta h)^{-2} \frac{h^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

Or, d'après l'encadrement (II.53) pour  $n = 2$ ,

$$0 < \frac{1}{(1+\theta h)^2} < 1$$

d'où, pour  $h > 0$ ,

$$-\frac{h^2}{2} < -\frac{1}{(1+\theta h)^2} \frac{h^2}{2} < 0$$

et donc, d'après l'égalité (II.55),

$$-\frac{h^2}{2} < \ln(1+h) - h < 0.$$

- (b) En appliquant l'encadrement précédent à  $h = 0,1$ , on obtient  $-(0,1)^2/2 < \ln(1,1) - 0,1 < 0$  d'où  $-10^{-2} < \ln(1,1) - 0,1 < 0$  ce qui prouve qu'une valeur approchée (par excès) de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-2}$  près est  $0,1$ .
5. (a) La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $[0, h]$  et dérivable à l'ordre 3 sur l'intervalle  $]0, h[$ . Donc, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned}\ln(1+h) &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + \frac{f'''(0+\theta h)}{3!} h^3 \\ \text{i.e. } \ln(1+h) &= \ln 1 + \frac{1}{1} h - \frac{1}{2!} h^2 + \frac{1}{3!} (1+\theta h)^{-3} h^3 \\ \text{i.e. } \ln(1+h) - \left(h - \frac{h^2}{2}\right) &= (1+\theta h)^{-3} \frac{h^3}{3}.\end{aligned}\tag{II.56}$$

Or, d'après l'encadrement (II.53) pour  $n = 3$ ,

$$0 < \frac{1}{(1+\theta h)^3} < 1$$

d'où, pour  $h > 0$ ,

$$0 < \frac{1}{(1+\theta h)^3} \frac{h^3}{3} < \frac{h^3}{3}$$

et donc, d'après l'égalité (II.56),

$$0 < \ln(1+h) - \left(h - \frac{h^2}{2}\right) < \frac{h^3}{3}.\tag{II.57}$$

- (b) En appliquant l'encadrement précédent à  $h = 0,1$ , on obtient  $0 < \ln(1,1) - (0,1 - (0,1)^2/2) < (0,1)^3/3$  d'où  $0 < \ln(1,1) - 0,095 < 10^{-3}$  ce qui prouve qu'une valeur approchée (par défaut) de  $\ln(1,1)$  à  $10^{-3}$  près est  $0,095$ .
6. L'encadrement (II.57) permet d'affirmer que  $h - \frac{h^2}{2}$  est une valeur approchée de  $\ln(1+h)$  à  $10^{-3}$  près pour tout  $h > 0$  tel que  $\frac{h^3}{3} < 10^{-3}$  i.e. tel que  $0 < h < \sqrt[3]{3 \times 10^{-3}}$  i.e. tel que  $0 < h < \sqrt[3]{3}/10$ .

### Exercice 5 (p. 29).

1. On sait que l'ensemble de définition de Arcsin est  $[-1, 1]$  donc  $f(x)$  existe si et seulement si

$$\begin{aligned}-1 &\leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \\ \text{i.e. } -1-x^2 &\leq 1-x^2 \leq 1+x^2 \quad 1+x^2 \text{ est } > 0 \text{ pour tout } x \text{ réel} \\ \text{i.e. } -2 &\leq 0 \leq 2x^2 \quad \text{en ajoutant } x^2 \text{ et en retranchant } 1 \\ \text{i.e. } x &\in \mathbb{R} \quad \text{car cette double inégalité est vraie pour tout } x \text{ réel.}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

2. Comme toute fonction définie de manière « naturelle », la fonction  $f$  est continue sur son ensemble de définition *i.e.* sur  $\mathbb{R}$ .
3. L'ensemble de définition de  $f$  est clairement symétrique par rapport à 0 et, pour tout  $x$  réel, on a

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin} \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \operatorname{Arcsin} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x)$$

si bien que  $f$  est paire et que son ensemble d'étude peut être ramené à  $\mathcal{D} \cap [0, +\infty[ = [0, +\infty[$ .

4. On a  $f(0) = \operatorname{Arcsin} 1 = \pi/2$  et, puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = -1,$$

on a  $\lim_{+\infty} f = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\pi/2$ .

5. On sait que l'ensemble de dérivation de  $\operatorname{Arcsin}$  est  $] -1, 1[$  donc, en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la question 1 page précédente,  $f'(x)$  existe si et seulement si  $4x^2 > 0$  soit  $x \neq 0$ . On a, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{-4x}{\frac{(1+x^2)^2}{1+x^2} \sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2) \sqrt{4x^2}} \\ &= \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} \\ &= \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6. On en déduit que, sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , la fonction  $f$  est strictement décroissante.
7. On déduit de l'expression de  $f'(x)$  pour  $x > 0$  qu'il existe une constante  $C$  réelle telle que, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = -2 \operatorname{Arctan} x + C$$

et, puisque

$$\begin{cases} f(1) & = 0 \\ -2 \operatorname{Arctan} 1 + C & = -2 \frac{\pi}{4} + C, \end{cases}$$

on a  $-2 \frac{\pi}{4} + C = 0$  *i.e.*  $C = \pi/2$  d'où finalement, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = -2 \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2}.$$

Cette égalité est en fait vraie pour tout  $x \geq 0$  puisqu'on constate qu'elle est vraie aussi pour  $x = 0$  car

$$\begin{cases} f(0) &= \frac{\pi}{2} \\ -2 \operatorname{Arctan} 0 + \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Les représentations graphiques des fonctions  $\operatorname{Arctan}$ ,  $-\operatorname{Arctan}$ ,  $-2 \operatorname{Arctan}$  et  $f$  figurent sur la figure II.1. On notera que la courbe  $\mathcal{C}$  représentant  $f$  se déduit de celle représentant  $-2 \operatorname{Arctan}$  par un translation de vecteur  $(0, \pi/2)$  et que  $\mathcal{C}$

- admet au point  $(0, \pi/2)$  une demi-tangente de coefficient directeur  $(-2)$ ;
- intersecte l'axe des abscisses au point  $(1, 0)$  où elle admet une tangente de coefficient directeur  $(-1)$ ;
- admet la droite d'équation  $y = -\pi/2$  comme asymptote aux voisinages de  $+\infty$  et  $-\infty$ .

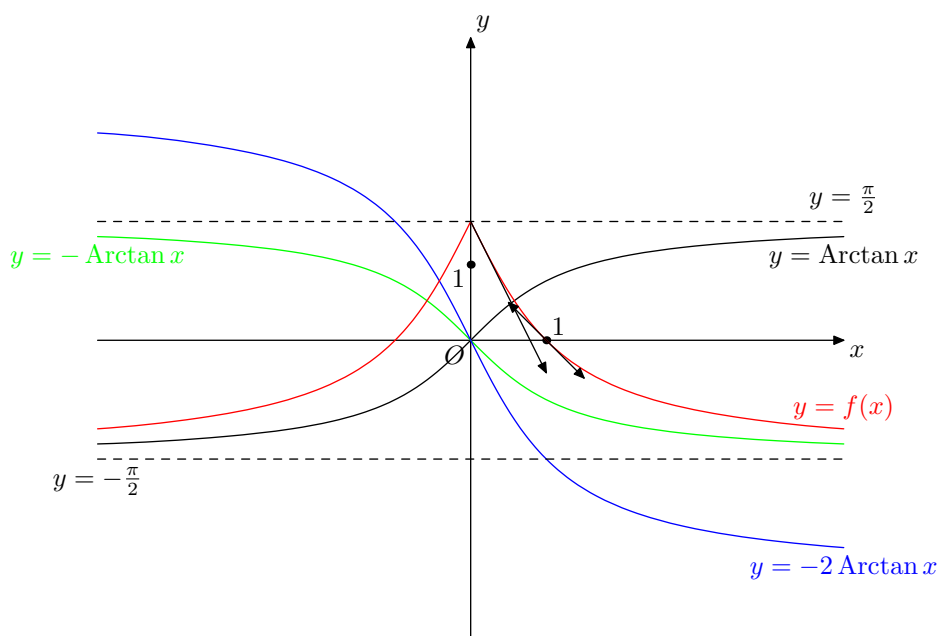


FIGURE II.1 – Représentations graphiques des fonctions  $\operatorname{Arctan}$ ,  $-\operatorname{Arctan}$ ,  $-2 \operatorname{Arctan}$  et  $f$

On trouvera dans le dossier public du réseau de la salle informatique cette même figure avec de belles couleurs qui en rendent la lecture plus claire...

17 juin 2002

Année 2002–2003

18 décembre 2002

Exercice 1 (p. 30). Facile !

**Exercice 2 (p. 30).**

1. En vertu de l'équivalence

$$\cos X = \cos \alpha \iff X \equiv \alpha [2\pi] \quad \text{ou} \quad X \equiv -\alpha [2\pi],$$

on a

$$\begin{aligned} \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x - \frac{\pi}{6} \equiv 2x + \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{6} \equiv -\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{30} \left[\frac{2\pi}{5}\right]. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des solutions, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  est

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \cos 2x = \sin 2x &\iff \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} - 2x [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) [2\pi] \\ &\iff 4x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 0 \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des solutions, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $\cos 2x = \sin 2x$  est

$$\left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions de l'équation  $\cos 2x = \sin 2x$  appartenant à  $] -\pi, \pi]$  sont  $-7\pi/8, -3\pi/8, \pi/8$  et  $5\pi/8$ .

**Exercice 3 (p. 30).**

1. (a) On a immédiatement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty.$$

(b) On a

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x^3 - 64} = \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)} = \frac{x-4}{x^2 + 4x + 16}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^3 - 64} = 0.$$

(c) On a

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{1}{4}.$$

(d) Posons  $\varphi(x) = x^2 - 4x - 45$ . On constate que la fonction polynôme  $\varphi$  vérifie  $\varphi(9) = 0$  ce qui prouve que  $x^2 - 4x - 45$  est factorisable par  $x - 9$ . Par factorisation « à la volée », on obtient

$$x^2 - 4x - 45 = (x - 9)(x + 5).$$

On en déduit que

$$\frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 4x - 45} = \frac{3 - \sqrt{x}}{(x - 9)(x + 5)} = \frac{\cancel{3 - \sqrt{x}}}{(\cancel{3 - \sqrt{x}})(\sqrt{x} + 3)(x + 5)} = -\frac{1}{(\sqrt{x} + 3)(x + 5)}$$

si bien que

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 4x - 45} = -\frac{1}{84}.$$

2. (a) Cf. le cours.

(b) On a

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \text{ car, en 0,}$$

$$\frac{x}{\ln(1+x)} \sim \frac{x}{x} = 1;$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{(e^x - 1) \sin 2x} = \frac{1}{36} \text{ car, quand } x \rightarrow 0, \text{ il en est de même de } x/3 \text{ et de } 2x, \text{ et donc}$$

$$\frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{(e^x - 1) \sin 2x} \sim \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^2}{x \times 2x} = \frac{1}{36}$$

(c) La limite demandée égale 1. En effet, posons  $h = x - \frac{\pi}{4}$  i.e.  $x = h + \frac{\pi}{4}$ ; alors

$$\frac{1 - \tan x}{\cos 2x} = \frac{1 - \tan \left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \left[2 \left(h + \frac{\pi}{4}\right)\right]} = \frac{1 - \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \tan \frac{\pi}{4}}}{\cos 2h \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2h \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}}{-\sin 2h}$$

donc, quand  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  (i.e. quand  $h \rightarrow 0$ )

$$\frac{1 - \tan x}{\cos 2x} = \frac{-2 \tan h}{-(1 - \tan h) \sin 2h} \sim \frac{-2h}{-2h(1 - \tan h)} \rightarrow 1.$$

**Exercice 4 (p. 30).**

1. La fonction  $f$  admet  $\mathbb{R}$  pour ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité. Les limites de  $f$  en  $\pm\infty$  valent toutes deux  $+\infty$ . Pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = 4(x^3 + 1)$  ce qui prouve que  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, -1[$  et est strictement croissante sur  $] -1, +\infty[$ .

2. L'équation

$$x^4 + 4x = 1 \quad (\text{II.58})$$

équivalant à  $f(x) = 0$ . Or,  $f$  est une fonction strictement croissante et continue sur l'intervalle  $]0, 1[$  telle que  $f(0) \times f(1) < 0$  (puisque  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 4$ ). Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (II.58) admet une solution unique  $x_0$  sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

3. **Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 = ]0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_2 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 2 :** Le milieu de l'intervalle  $I_3 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 3 :** Le milieu de l'intervalle  $I_4 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 4 :** Le milieu de l'intervalle  $I_5 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 5 :** Le milieu de l'intervalle  $I_6 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

L'intervalle  $I_6$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{31}{128}$  de  $I_6$  d'au plus le rayon de  $I_6$  qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{31}{128} \right| \leq \frac{1}{128} \leq 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{31}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,24| &= \left| x_0 - \frac{31}{128} + \frac{31}{128} - 0,24 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{31}{128} \right| + \left| \frac{31}{128} - 0,24 \right| \\ &\leq \frac{1}{128} + \left| \frac{31}{128} - 0,24 \right| \\ &\leq 10^{-2} \end{aligned}$$

si bien que 0,24 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

#### Exercice 5 (p. 31).

1. La fonction  $f$  est continue en 0 car

- elle est définie en ce point ;
- on a

$$|f(x)| = |x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

et  $|x|$  tend vers 0 en 0 donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 f = 0 = f(0)$ .

2. Pour  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 car

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0.

## 9 avril 2003

### Exercice 1 (p. 31).

1. (a) On a

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin x \, dx &= \int (-\cos x)' \cos^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int 2x \sqrt{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1+x^2)' (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C, C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta &= \theta \tan \theta - \int \tan \theta \, d\theta \\ &= \theta \tan \theta - \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \, d\theta \\ &= \theta \tan \theta - \int \frac{(-\cos \theta)'}{\cos \theta} \, d\theta \\ &= \theta \tan \theta + \ln |\cos \theta| + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x^2 \ln x \, dx &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx \\
 &= \frac{e^3}{3} - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e \\
 &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{2e^3 + 1}{9}.
 \end{aligned}$$

3. On a

(a)

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9} &= \int_0^3 \frac{dx}{9 \left( \frac{x^2}{9} + 1 \right)} \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 \frac{dx}{\left( \frac{x}{3} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{d\frac{x}{3}}{\left( \frac{x}{3} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} \quad \text{où } t = \frac{x}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{12}.
 \end{aligned}$$

(b) i. Pour tout réel  $\alpha$ , on a  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  d'où

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \quad (\text{II.59})$$

ii. En posant  $t = \tan \alpha$ ,

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 \alpha) d\alpha}{(1+\tan^2 \alpha)^2}$$

car

- la fonction  $\alpha \mapsto \tan \alpha$  est une bijection de  $[0, \pi/4]$  sur  $[0, 1]$
- si  $t = \tan \alpha$  alors  $dt = d(\tan \alpha) = (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha$

donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 \alpha) d\alpha}{(1+\tan^2 \alpha)^2} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{1+\tan^2 \alpha} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \alpha d\alpha \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} d\alpha \quad \text{d'après (II.59)} \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

4. (a) En posant  $u = \sqrt{t}$ ,

$$\int_0^x e^{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\sqrt{x}} 2ue^u du$$

car, pour  $x \geq 0$ ,

- la fonction  $t \mapsto u = \sqrt{t}$  est une bijection de  $[0, x]$  sur  $[0, \sqrt{x}]$
- $u = \sqrt{t}$  équivaut à  $t = u^2$  et on a  $dt = d(u^2) = 2u du$

donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt &= 2 \left( \left[ ue^u \right]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} e^u du \right) \\
 &= 2 \left( \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - \left[ e^u \right]_0^{\sqrt{x}} \right) \\
 &= 2 \left( \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + 1 \right) \\
 &= 2 \left( (\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt &= \int \frac{\sin t(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t} dt \\
 &= \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt - \int \sin t dt \\
 &= \int \frac{-(\cos t)'}{\cos^2 t} dt + \cos t \\
 &= \frac{1}{\cos t} + \cos t + C, C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 31).**

1. La solution générale de l'équation  $y' + 2y = 0$  est

$$y = C e^{-\int 2 dx}, C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{-2x}, C \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors  $y(0) = 1$  si et seulement si  $C = 1$  si bien que la solution valant 1 en 0 est  $y = e^{-2x}$ .

2. Les fonctions  $a : x \mapsto 1$  et  $b : x \mapsto -x$  étant continues sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y = -x &\iff y = e^{-\int dx} \int (-x) e^{\int dx} dx \\ &\iff y = e^{-x} \int (-x) e^x dx \\ &\iff y = -e^{-x} \left( x e^x - \int e^x dx \right) \\ &\iff y = -e^{-x} (x e^x - e^x + C), C \in \mathbb{R} \\ &\iff y = -x + 1 - C e^{-x}, C \in \mathbb{R} \\ &\iff y = -x + 1 + C e^{-x}, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On obtient alors  $y(0) = 1$  si et seulement si  $C = 0$  si bien que la solution valant 1 en 0 est  $y = -x + 1$ .

3. L'ensemble de continuité commun aux fonctions  $a : t \mapsto 1/t$  et  $b : t \mapsto 1/(t^2 - 1)$  étant  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[ \cup ] 0, 1[ \cup ] 1, +\infty[$ , la résolution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} x = \frac{1}{t^2 - 1} \tag{II.60}$$

est à effectuer sur chacun des intervalles  $] -\infty, -1[$ ,  $] -1, 0[$ ,  $] 0, 1[$  et  $] 1, +\infty[$ . Cependant, tant que la distinction n'est pas nécessaire, on mène une résolution commune aux 4 cas : sur chacun des intervalles  $] -\infty, -1[$ ,  $] -1, 0[$ ,  $] 0, 1[$  et  $] 1, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} x = \frac{1}{t^2 - 1} &\iff x = e^{-\int \frac{dt}{t}} \int \frac{1}{t^2 - 1} e^{\int \frac{dt}{t}} dt \\ &\iff x = e^{-\ln|t|} \int \frac{1}{t^2 - 1} e^{\ln|t|} dt \\ &\iff x = e^{\ln \frac{1}{|t|}} \int \frac{|t|}{t^2 - 1} dt \\ &\iff x = \frac{1}{|t|} \int \frac{|t|}{t^2 - 1} dt \\ &\iff x = \frac{1}{t} \int \frac{t}{t^2 - 1} dt \quad \text{quelque soit le signe de } t \\ &\iff x = \frac{1}{2t} \int \frac{d(t^2 - 1)}{t^2 - 1} \\ &\iff x = \frac{1}{2t} \left( \ln|t^2 - 1| + C \right), C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'équation (II.60) n'étant pas définie en 0, aucune de ses solutions ne vaut 1 en 0.

**Exercice 3 (p. 31).** La solution la plus rapide pour prouver que

$$2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

est de remarquer que  $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$  et  $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$  ce qui fait que l'égalité à prouver est triviale. Ceux qui n'avaient pas remarqué cela pouvaient procéder comme suit.

1. La définition de  $y = \operatorname{Arcsin} x$  est

$$y = \operatorname{Arcsin} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Donc, par définition,

$$2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \left( 2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \right) \\ -\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

2. (a) On sait que

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

donc, d'après le rappel,

$$\sin \left( 2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \right) = 2 \sin \left( \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \right) \cos \left( \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \right) = 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{II.62})$$

(b) La fonction  $\operatorname{Arcsin}$  est strictement croissante sur  $[-1, 1]$  donc, puisque  $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on a  $\operatorname{Arcsin} 0 \leq \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \leq \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$  i.e.  $0 \leq \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{4}$  ce qui implique

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{II.63})$$

3. D'après l'équivalence (II.61), l'égalité (II.62) et l'encadrement (II.63) prouvent que  $2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Exercice 4 (p. 32).**

1. Si  $h > 0$  alors, pour  $\theta$  dans  $]0, 1[$ , on a  $1 + \theta h > 1$  donc  $(1 + \theta h)^4 > 1$  et par conséquent

$$-1 < \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} < 0. \quad (\text{II.64})$$

2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  ( $h \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre 3 sur le même intervalle ouvert. Alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = f(0) + f'(0) \frac{h}{1!} + f''(0) \frac{h^2}{2!} + f'''(\theta h) \frac{h^3}{3!}. \quad (\text{II.65})$$

3. (a) Pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f : x \mapsto 1/(1+x)$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0, h]$  donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2. Or

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

donc

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = -1 \quad f''(0) = 2 \quad f'''(\theta h) = \frac{-6}{(1+\theta h)^4}.$$

Par conséquent, pour tout  $h > 0$ , la formule (II.65) donne

$$f(h) = 1 - h + h^2 + \frac{-1}{(1+\theta h)^4} h^3.$$

De la double inégalité (II.64), on déduit pour tout  $h > 0$  que

$$1 - h + h^2 - h^3 < \frac{1}{1+x} < 1 - h + h^2.$$

- (b) Cette inégalité permet d'affirmer, pour  $h > 0$ , que  $1 - h + h^2$  est une valeur approchée de  $1/(1+h)$  à  $10^{-3}$  près dès que  $(0 <) | -h^3 | \leq 10^{-3}$  i.e. dès que  $(0 <) h \leq 10^{-1}$  (on peut même préciser qu'il s'agit alors d'une valeur approchée par excès).
- (c) On note que  $1/(1,09) = 1/(1+0,09)$ . Or, si  $h = 0,09 (> 0)$ , on a  $(0 <) h \leq 10^{-1}$  et donc  $1 - 0,09 + (0,09)^2 = 0,9181$  est une valeur approchée, par excès, de  $1/(1,09)$  à  $10^{-3}$  près.

#### Exercice 5 (p. 32).

1. On remarque que  $(-1)$  et  $1$  sont racines respectives des polynômes  $4x^3 - 3x + 1$  et  $4x^3 - 3x - 1$ . Par factorisation à la volée, on obtient

$$\begin{cases} 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = (x+1)(2x-1)^2 \\ 4x^3 - 3x - 1 = (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = (x-1)(2x+1)^2 \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

si bien que

$$\begin{cases} 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^3 - 3x - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \\ (x-1)(2x+1)^2 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \leq 0. \end{cases}$$

2. Puisque l'ensemble de définition de la fonction Arcsin est  $[-1, 1]$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si

$$\begin{aligned} -1 \leq 3x - 4x^3 \leq 1 &\iff \begin{cases} 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^3 - 3x - 1 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \leq 0. \end{cases} \\ &\iff -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de la fonction  $f$  est  $[-1, 1]$ .

3. La fonction Arcsin n'est dérivable que sur  $] -1, 1[$  et, d'après (II.66),  $|3x - 4x^3| = 1$  si et seulement si  $|x| = 1$  ou  $|x| = \frac{1}{2}$ . Donc la fonction  $f$  n'est dérivable que sur  $] -1, -\frac{1}{2}[ \cup ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \cup ] \frac{1}{2}, 1[$ . Pour  $x$  dans cet ensemble,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}} \\ &= \frac{3(1 - 4x^2)}{\sqrt{(1 - (3x - 4x^3))(1 + (3x - 4x^3))}} \\ &= \frac{3(1 - 4x^2)}{\sqrt{(1 - 3x + 4x^3)(1 + 3x - 4x^3)}} \\ &= \frac{3(1 - 4x^2)}{\sqrt{(1+x)(2x-1)^2(1-x)(2x+1)^2}} \\ &= \frac{3(1 - 4x^2)}{|2x-1||2x+1|\sqrt{(1+x)(1-x)}} \\ &= \frac{3(1 - 4x^2)}{|1 - 4x^2|\sqrt{1-x^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1 - 4x^2 > 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1 - 4x^2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Si  $x \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , on a  $1 - 4x^2 > 0$  et donc

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc il existe une constante  $C$  réelle telle que, pour tout  $x$  dans  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,

$$f(x) = 3 \operatorname{Arcsin} x + C.$$

Or,  $f(0) = \operatorname{Arcsin}(3 \times 0 - 4 \times 0^3) = 0$  et  $3 \operatorname{Arcsin} 0 + C = C$  donc  $C = 0$  si bien que, pour tout  $x$  dans  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,

$$f(x) = 3 \operatorname{Arcsin} x.$$

**13 juin 2003**

**Année 2003–2004**

**16 décembre 2003**

**Exercice 1 (p. 34).**

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right);$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 1/x = 1$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = 0.$$

2. L'ensemble de définition de  $f$  est  $[-1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ . Sur cet ensemble,  $f$  est continue. Examinons le cas du point  $x_0 = 3$ ; en multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée  $\sqrt{x+1} + 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 3$  en posant  $f(3) = 1/4$ .

3. Il est clair que  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1^3 - (\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{(1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}$$

donc la limite demandée est  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice 2 (p. 34).** On sait que, en 0,

$$e^x - 1 \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

Donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ , on a en 0

$$\tan \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \quad \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},$$

si bien que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{x} \frac{x}{2}} = 2.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

**Exercice 3 (p. 34).**

1. On a

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \\ &\iff x - \frac{\pi}{8} \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{8} \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{11\pi}{24} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{24} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{11\pi}{24} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{24} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\{-\frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}\}$ .

2. On a

$$\begin{aligned} \sin 2x = \sin x &\iff 2x \equiv x \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi - x \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv 0 \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv \pi \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv 0 \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \frac{2\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\sin 2x = \sin x$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi\}$ .

3. On a

$$\begin{aligned} \tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3}) &\iff 3x \equiv x + \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \left[ \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3})$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\}$ .

**Exercice 4 (p. 34). Exercice !**

**Exercice 5 (p. 35).**

1. (a) i.

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff 2x = 1+x^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$$

On prouverait de façon analogue que

$$\frac{2x}{1+x^2} = -1 \iff x = -1$$

ii. On a

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} + 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2x+1+x^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}.$$

si bien que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

*Autre méthode.*

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 &\iff \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \iff \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1 \iff 2|x| \leq 1+x^2 \\ &\iff 1+|x|^2 - 2|x| \geq 0 \iff (|x|-1)^2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (b) On sait que l'ensemble de définition de la fonction Arcsin est  $[-1, 1]$  donc, puisque  $2x/(1+x^2)$  est défini pour tout  $x$  réel,

$$x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff x \in \mathbb{R}.$$

2. (a) **Cours !**

- (b) La fonction Arcsin est impaire. L'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est symétrique par rapport à 0 ; pour  $x$  dans  $\mathcal{D}_f$ , on a

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} \right) = \operatorname{Arcsin} \left( -\frac{2x}{1+x^2} \right) = -\operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

D'où  $f(-x) = -f(x)$  donc  $f$  est impaire et on ne l'étudie que sur  $\mathbb{R}^+$ .

3. On a  $f(1) = \operatorname{Arcsin} 1 = \pi/2$ . D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x/(1+x^2) = 0$  donc, puisque la fonction Arcsin est continue sur  $[-1, 1]$  donc en 0, on a  $\lim_{+\infty} f = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$ .
4. (a) On sait que l'ensemble sur lequel la fonction Arcsin est dérivable est  $] -1, 1[$ . Or on sait que  $2x/(1+x^2) = \pm 1$  si et seulement si  $x = \pm 1$ . Donc le sous-ensemble de  $\mathcal{D}_f$  sur lequel  $f$  est dérivable est  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  et, par suite, celui de  $\mathbb{R}^+$  sur lequel  $f$  est dérivable est  $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

(b) **Exercice !**

- (c) Si  $u$  est une fonction dérivable en  $x$  et  $-1 < u(x) < 1$  alors

$$(\operatorname{Arcsin} u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

Le reste de la question est en **exercice !**

5. (a) On considère un réel  $x$  tel que  $0 \leq x \leq 1$ . Par définition de l'arc sinus,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) \iff \begin{cases} \sin(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{Arctan} x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Or on sait que

$$\sin(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2 \tan(\operatorname{Arctan} x)}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{2x}{1+x^2}$$

puisque, pour tout  $x$  réel,  $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$ .

En outre, puisque  $0 \leq x \leq 1$ , on a  $\operatorname{Arctan} 0 \leq \operatorname{Arctan} x \leq \operatorname{Arctan} 1$  car la fonction  $\operatorname{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Il s'ensuit que  $0 \leq 2 \operatorname{Arctan} x \leq \frac{\pi}{2}$  d'où  $-\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{Arctan} x \leq \frac{\pi}{2}$ .

On en conclut que, si  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

(b) On considère un réel  $x$  tel que  $x > 1$ . On prouverait de façon analogue que

$$\pi - 2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

en prouvant

$$\begin{cases} \sin(\pi - 2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \pi - 2 \operatorname{Arctan} x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

## 6. Exercice !

### 7 avril 2004

#### Exercice 1 (p. 35).

1. On a

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} dx = \int \frac{\frac{1}{3} d(x^3 + 3x - 2)}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} = \frac{2}{3} \int \frac{d(x^3 + 3x - 2)}{2\sqrt{x^3 + 3x - 2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 3x - 2}.$$

2. En intégrant par parties,

$$\int t e^{2t} dt = t \frac{e^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2} dt = t \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} = \frac{e^{2t}}{4} (2t - 1).$$

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx = \left[ x \operatorname{Arctan} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

si bien que l'intégrale demandée égale  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[ \ln |1+x^2| \right]_0^1$  soit  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

3. On a

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{d(e^t + 1)}{e^t + 1} dt = \left[ \ln |e^t + 1| \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln \frac{e + 1}{2}.$$

Puisque  $dx/x = d(\ln x)$ ,

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^3} = \left[ \frac{-1}{2(\ln x)^2} \right]_e^{e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

**Exercice 2 (p. 35).**

1. • On sait que la solution générale de l'équation

$$y' - 3x^2y = 0 \quad (\text{II.67})$$

est

$$y = C \exp\left(-\int -3x^2 dx\right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = Ce^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On constate que  $y = -1/3$  est solution particulière de l'équation

$$y' - 3x^2y = x^2. \quad (\text{II.68})$$

- Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.68), somme de la solution générale de l'équation (II.67) et d'une solution particulière de l'équation (II.68), est

$$y = Ce^{x^3} - \frac{1}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' - 10y' + 41y = 0 \quad (\text{II.69})$$

a pour équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2 - 10r + 41 = 0 &\iff (r-5)^2 + 16 = 0 \iff (r-5)^2 - (4i)^2 = 0 \\ &\iff (r-5-4i)(r-5+4i) = 0 \iff r = 5 \pm 4i. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation (II.69) est

$$y = e^{5x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 3 (p. 36).**

1. Si  $h > 0$  alors, pour  $\theta$  dans  $]0, 1[$ , on a  $1 + \theta h > 1$  donc  $(1 + \theta h)^4 > 1$  et par conséquent

$$-1 < \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} < 0. \quad (\text{II.70})$$

2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  ( $h \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre 3 sur le même intervalle ouvert. Alors, d'après la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2, il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = f(0) + f'(0)\frac{h}{1!} + f''(0)\frac{h^2}{2!} + f'''(\theta h)\frac{h^3}{3!}. \quad (\text{II.71})$$

3. (a) Pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f : x \mapsto 1/(1+x)$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0, h]$  donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2. Or

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

donc

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(\theta h) = \frac{-6}{(1 + \theta h)^4}.$$

Par conséquent, pour tout  $h > 0$ , la formule (II.71) donne

$$f(h) = 1 - h + h^2 + \frac{-1}{(1 + \theta h)^4} h^3.$$

De la double inégalité (II.70), on déduit pour tout  $h > 0$  que

$$1 - h + h^2 - h^3 < \frac{1}{1 + h} < 1 - h + h^2.$$

(b) On note que  $1/(1,09) = 1/(1 + 0,09)$ . Or, si  $h = 0,09 (> 0)$ , on a

$$\left| \frac{1}{1 + h} - (1 - h + h^2) \right| < h^3 < (10^{-1})^3 = 10^{-3}$$

et donc  $1 - 0,09 + (0,09)^2 = 0,9181$  est une valeur approchée (en fait, par excès) de  $1/(1,09)$  à  $10^{-3}$  près.

#### Exercice 4 (p. 36).

1. On a vu en cours que

(a) l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge si et seulement si  $\alpha > 1$

(b) l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

2. • La fonction  $f : x \mapsto (1+x)/(4+x^3)$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{\sqrt[3]{-4}\}$  donc est continue sur  $[3, +\infty[$ . De plus, elle est positive sur cet intervalle.

• On a

$$\frac{1+x}{4+x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} \quad i.e. \quad \frac{1+x}{4+x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

et  $g : x \mapsto 1/x^2$  est continue sur  $[3, +\infty[$ . Donc, puisque  $f$  et  $g$  sont continues et positives sur  $[3, +\infty[$  et équivalentes en  $+\infty$ , les intégrales

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx \quad \text{et} \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

sont de même nature. Or, en vertu de la question 1a page précédente, l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

converge donc il en est de même de l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx.$$

3. La fonction  $f : x \mapsto (1+x)/(4+x^3)$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{\sqrt[3]{-4}\}$  donc est continue sur  $[0, 3]$ . Par suite, l'intégrale

$$\int_0^3 \frac{1+x}{4+x^3} dx$$

est une intégrale de Riemann. Par ailleurs, on a prouvé que l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx$$

converge. On en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{4+x^3} dx$$

est la somme de deux intégrales convergentes et est, à ce titre, elle-même convergente.

#### Exercice 5 (p. 36).

1. La bijection réciproque de la fonction  $\operatorname{ch}$  restreinte à  $\mathbb{R}^+$  est la fonction  $\operatorname{Argch}$ , dont l'ensemble de définition est  $[1, +\infty[$ . Donc

$$y = \operatorname{Argch} x \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ y \geq 0. \end{cases}$$

2. (a) On a  $\operatorname{Argch} 1 = 0$  et  $\ln(1 + \sqrt{1^2 - 1}) = 0$  donc, pour  $x = 1$ , la relation  $\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  est vraie.

(b) On a, par définition,

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \operatorname{Argch} x \\ x > 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ x > 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2xe^y = (e^y)^2 + 1 \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\ y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(c) i. On a,  $x^2 - 1$  étant strictement positif puisque  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} X^2 - 2xX + 1 = 0 &\iff (X - x)^2 + 1 - x^2 = 0 \\ &\iff (X - x)^2 - \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(X - x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(X - x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0 \\ &\iff X = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ou} \quad X = x - \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

ii. On a, pour  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} > 1 \\ x > 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - 1 > \sqrt{x^2 - 1} \\ x > 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x - 1)^2 > x^2 - 1 \\ x > 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 1 > -1 \\ x > 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \end{cases} \\ &\iff x \in \emptyset \end{aligned}$$

Supposons  $x > 1$  et  $y > 0$ . Alors  $e^y > 1$  donc, d'après le raisonnement précédent,  $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$  n'a lieu pour aucun  $x$  réel. On a donc, pour  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \operatorname{Argch} x \\ x > 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ou} \quad e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \\ y \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(car  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 > 0$  si  $x \geq 1$ )

$$\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Donc, pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

8 juin 2004

Année 2004–2005

5 janvier 2005

Exercice 1 (p. 38).

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right);$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 1/x = 1$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = 0.$$

2. Il est clair que  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$  et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1^3 - (\sqrt[3]{x})^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{(1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \end{aligned}$$

donc la limite demandée est  $\frac{1}{3}$ .

### Exercice 2 (p. 38).

1. Consulter le cours!

2.

(a) La limite demandée est  $\frac{4}{5}$  car

$$\frac{\sin 84x}{\sin 105x} \underset{0}{\sim} \frac{84x}{105x} \underset{0}{\sim} \frac{84}{105} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{84}{105} = \frac{4}{5}.$$

(b) Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ , on a en 0

$$\tan \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \quad \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},$$

si bien que la limite demandée est 2 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{x} \frac{x}{2}} = 2.$$

(c) La limite demandée est  $\frac{2}{21}$  car

$$\frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})} \underset{0}{\sim} \frac{2u^2 \sqrt{u}}{(7+u)u^2 \times 3\sqrt{u}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{21}.$$

(d) Posons  $t = x - 1$  i.e.  $x = 1 + t$ ; alors  $x \rightarrow 1$  équivaut à  $t \rightarrow 0$  et on a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln(x - 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{1+t} - e}{\ln(1 + t)}.$$

Par conséquent, la limite demandée est  $e$  car

$$\frac{e^{1+t} - e}{\ln(1 + t)} = \frac{e(e^t - 1)}{\ln(1 + t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{e \times t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} e.$$

### Exercice 3 (p. 38).

1. Pour tout  $x$  non nul, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - |x|} = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 - |x|} \\ &= \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| - 1)} = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = -1$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = -1$ .

2. Pour tout  $x \neq 2$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} = \frac{(3 - \sqrt{2x + 5})(3 + \sqrt{2x + 5})}{(x - 2)(3 + \sqrt{2x + 5})} \\ &= \frac{9 - (2x + 5)}{(x - 2)(3 + \sqrt{2x + 5})} = \frac{4 - 2x}{(x - 2)(3 + \sqrt{2x + 5})} \\ &= \frac{-2(x - 2)}{(x - 2)(3 + \sqrt{2x + 5})} = \frac{-2}{3 + \sqrt{2x + 5}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3 + \sqrt{2x + 5}} = -\frac{1}{3}$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 2 en posant  $f(2) = -\frac{1}{3}$ .

3. Pour tout  $x \neq \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin x) \tan^2 x = \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1}{2}$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en  $\frac{3\pi}{2}$  en posant  $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 4 (p. 38).**

1. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} &\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ &\iff x - \frac{\pi}{8} \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{8} \equiv \pi - \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{7\pi}{24} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{23\pi}{24} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\sin(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{7\pi}{24} + k 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{23\pi}{24} + k 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $]-\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ \frac{7\pi}{24}, \frac{23\pi}{24} \right\}$ .

2. On a

$$\begin{aligned} \cos 2x = \cos x &\iff 2x \equiv x \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -x \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad 3x \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\cos 2x = \cos x$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $]-\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3} \right\}$ .

3. On a

$$\begin{aligned} \tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x \equiv x + \frac{\pi}{3} \pmod{\pi} \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3})$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right\}$ .

**Exercice 5 (p. 38).**

1. On a

$$b^5 - a^5 = (b - a)(b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4).$$

Donc le taux  $\tau_{\{a,b\}}$  de variation de  $f$  entre deux réels quelconques distincts  $a$  et  $b$ , défini par

$$\tau_{\{a,b\}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

vérifie

$$\begin{aligned} \tau_{\{a,b\}} &= \frac{(b^5 + b^2 - 1) - (a^5 + a^2 - 1)}{b - a} \\ &= \frac{b^5 - a^5 + b^2 - a^2}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4) + (b - a)(b + a)}{b - a} \\ &= b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4 + b + a. \end{aligned}$$

Si  $a$  et  $b$  sont distincts dans  $[0, +\infty[$ , ce taux est alors strictement positif puisque  $a$  et  $b$  sont positifs ou nuls et puisque l'un au moins d'entre eux est strictement positif. Ceci prouve, par définition, que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. La fonction  $f$ , polynomiale, est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, 1]$ ; elle est de plus strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  donc sur  $[0, 1]$ . Donc, grâce à un théorème du cours, on sait que  $f$  est une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[f(0), f(1)]$ , i.e. sur  $[-1, 1]$ . Par conséquent, 0 appartenant à  $[-1, 1]$ , il existe un unique antécédent  $x_0$  à 0 par  $f$  dans  $[0, 1]$  et  $x_0$  n'est ni 0 ni 1 puisque  $f(0) \neq 0$  et  $f(1) \neq 1$ . Ceci prouve que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .

3. (a) On met en œuvre la méthode de dichotomie.

- i. Le milieu de l'intervalle  $]0, 1[$  est  $\frac{1}{2}$  et un calcul (éventuellement à la calculatrice) montre que  $f(\frac{1}{2}) < 0$ . Or  $f(0) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, 1[$ .
- ii. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{1}{2}, 1[$  est  $\frac{3}{4}$  et un calcul montre que  $f(\frac{3}{4}) < 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(1)$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, 1[$ .
- iii. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{3}{4}, 1[$  est  $\frac{7}{8}$  et un calcul montre que  $f(\frac{7}{8}) > 0$ . Or  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{7}{8})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$ .
- iv. Le milieu de l'intervalle  $] \frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$  est  $\frac{13}{16}$  et un calcul montre que  $f(\frac{13}{16}) > 0$ . Or  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{7}{8})$  donc  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, \frac{13}{16}[$ .

v. Le milieu de l'intervalle  $]\frac{3}{4}, \frac{13}{16}[$  est  $\frac{25}{32}$  et un calcul montre que  $f(\frac{25}{32}) < 0$ . Or  $f(\frac{3}{4}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  donc  $f(\frac{25}{32}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  et donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{25}{32}, \frac{13}{16}[$ .

vi. Le milieu de l'intervalle  $]\frac{25}{32}, \frac{13}{16}[$  est  $\frac{51}{64}$  et un calcul montre que  $f(\frac{51}{64}) < 0$ . Or  $f(\frac{25}{32}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  donc  $f(\frac{51}{64}) < 0 < f(\frac{13}{16})$  et donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{51}{64}, \frac{13}{16}[$ .

L'intervalle  $I = ]\frac{51}{64}, \frac{13}{16}[$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{103}{128}$  de  $I$  d'au plus le rayon de  $I$  qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{103}{128} \right| < \frac{1}{128} < 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{103}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

(b) De plus, une valeur approchée de  $\frac{103}{128}$  donnée par la calculatrice est  $\frac{103}{128} \approx 0,805$  à  $10^{-3}$  près donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,805| &= \left| x_0 - \frac{103}{128} + \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{103}{128} \right| + \left| \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &< \frac{1}{128} + 10^{-3} \\ &< 10^{-2} \quad (\text{car } \frac{1}{128} < 0,008) \end{aligned}$$

si bien que 0,805 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

## 28 avril 2005

### Exercice 1 (p. 39).

1. Cf. cours.

2. (a) On a

$$\int \left( x^3 + \frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| - \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

(b) On a

$$\int x(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2) dx = \frac{1}{4} (1+x^2)^2.$$

(c) On a

$$\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 4x + 9}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4x^3 + 4}{2\sqrt{x^4 + 4x + 9}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 4x + 9}.$$

(d) On a

$$\int \frac{e^{2s}}{3 + e^{2s}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{(3 + e^{2s})'}{3 + e^{2s}} ds = \frac{1}{2} \ln|3 + e^{2s}| = \frac{1}{2} \ln(3 + e^{2s}).$$

(e) Puisque  $\cos t \geq 0$  sur  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , on a

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{|\cos t|} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = [t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

3. (a) Les formules d'Euler sont

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{4} \int (\sin 3x - 3 \sin x) dx = -\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \cos 3x + 3 \cos x \right) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(c) On a également

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 39).** On a

1.

$$\int \ln t dt = t \ln t - \int t \frac{1}{t} dt = t \ln t - t$$

2. pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int t^n \ln t dt &= \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t - \frac{1}{n+1} \int t^{n+1} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{n+1} \left( t^{n+1} \ln t - \int t^n dt \right) \\ &= \frac{t^{n+1}}{n+1} \left( \ln t - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

3.

$$\int x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

4.

$$\int \frac{s}{\operatorname{ch}^2 s} \, ds = s \operatorname{th} s - \int \operatorname{th} s \, ds = s \operatorname{th} s - \int \frac{\operatorname{sh} s}{\operatorname{ch} s} \, ds = s \operatorname{th} s - \ln |\operatorname{ch} s| = s \operatorname{th} s - \ln \operatorname{ch} s.$$

5.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Arctan} x \, dx &= x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2). \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (\operatorname{Arccos} x)^2 \, dx &= \left[ x (\operatorname{Arccos} x)^2 \right]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} 2x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arccos} x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{9} - \frac{-1}{2} \times \frac{4\pi^2}{9} - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arccos} x \, dx \\ &= \frac{5\pi^2}{18} - 2 \left( \left[ \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arccos} x \right]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \right) \\ &= \frac{5\pi^2}{18} - 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{3} + \left[ x \right]_{-1/2}^{1/2} \right) \\ &= \frac{5\pi^2}{18} + \sqrt{3} \frac{\pi}{3} - 2. \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 39).**1. On pose  $t = x/3$  i.e.  $x = 3t$ ; alors

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} = \int_0^1 \frac{3 \, dt}{9t^2+9} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

De manière analogue, on pose  $t = x/a$  i.e.  $x = at$ ; alors

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \int_0^1 \frac{a \, dt}{a^2 t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{4a}.$$

2. On pose  $t = \sqrt{x}$  i.e.  $x = t^2$  et  $dx = 2t dt$ ; alors

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t dt}{(t^2+1)t} \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2 dt}{t^2+1} \\ &= 2 \left( \operatorname{Arctan} \sqrt{3} - \operatorname{Arctan} 1 \right) \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

#### Exercice 4 (p. 40).

1. • On sait que la solution générale de l'équation

$$y' + (\cos x)y = 0 \quad (\text{II.72})$$

est

$$y = C \exp \left( - \int \cos x dx \right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• On constate que  $y = 2$  est solution particulière de l'équation

$$y' + (\cos x)y = 2 \cos x. \quad (\text{II.73})$$

• Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.73), somme de la solution générale de l'équation (II.72) et d'une solution particulière de l'équation (II.73), est

$$y = 2 + C e^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' + 8y' + 25y = 0 \quad (\text{II.74})$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 + 8r + 25 = 0 \quad (\text{II.75})$$

de discriminant  $\Delta = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$ . Donc l'équation (II.75) a pour solutions (complexes conjuguées)

$$r^{\pm} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i.$$

Donc la solution générale de l'équation (II.74) est

$$y = e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $y_0$  est solution de l'équation (II.74) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 10$  si et seulement si

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ y_0(0) &= 1 \\ y'_0(0) &= 10 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ -4\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 10 \end{cases}$$

car si  $y_0 = e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x)$  alors

$$y_0' = -4e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x) + e^{-4x} (-3\lambda_1 \sin 3x + 3\lambda_2 \cos 3x).$$

Le précédent système équivaut à

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 14/3 \end{cases}$$

donc la fonction  $y_0$  solution de l'équation (II.74) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y_0'(0) = 10$  est donnée par

$$y_0 = e^{-4x} \left( \cos 3x + \frac{14}{3} \sin 3x \right).$$

#### Exercice 5 (p. 40).

1. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a f(s) \, ds \\ &= \int_{-a}^0 f(s) \, ds + \int_0^a f(s) \, ds \\ &= \int_a^0 f(-t) \, d(-t) + \int_0^a f(s) \, ds \quad \text{en posant } t = -s \\ &= - \int_a^0 f(t) \, dt + \int_0^a f(s) \, ds \quad \text{car } f \text{ est paire donc } f(-t) = f(t) \\ &= 2 \int_0^a f(s) \, ds \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a f(s) \, ds \\ &= \int_{-a}^0 f(s) \, ds + \int_0^a f(s) \, ds \\ &= \int_a^0 f(-t) \, d(-t) \quad \text{en posant } t = -s \\ &= \int_a^0 f(t) \, dt \quad \text{car } f \text{ est impaire donc } f(-t) = -f(t) \\ &= -I \end{aligned}$$

Donc  $2I = 0$  si bien que  $I = 0$ .

## 12 mai 2005

## Exercice 1 (p. 40).

1. On peut calculer à l'aide de la relation

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

mais on a aussi vu en cours que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. En intégrant par parties,

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx = \left[ x \operatorname{Argth} x \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Argth} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}$$

si bien que

$$\int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx = \frac{1}{4} \ln \frac{3/2}{1/2} + \frac{1}{2} \left[ \ln |1-x^2| \right]_0^{1/2} = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2.$$

## Exercice 2 (p. 40).

1. • On sait que la solution générale de l'équation

$$y' - 3x^2 y = 0 \tag{II.76}$$

est

$$y = C \exp \left( - \int -3x^2 \, dx \right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On constate que  $y = -1/3$  est solution particulière de l'équation

$$y' - 3x^2 y = x^2. \tag{II.77}$$

- Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.77), somme de la solution générale de l'équation (II.76) et d'une solution particulière de l'équation (II.77), est

$$y = C e^{x^3} - \frac{1}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' - 10y' + 41y = 0 \tag{II.78}$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 - 10r + 41 = 0 \tag{II.79}$$

de discriminant  $\Delta = 100 - 164 = -64 = (8i)^2$ . Donc l'équation (II.79) a pour solutions (complexes conjuguées)

$$r_+ = \frac{10 + 8i}{2} = 5 + 4i \quad \text{et} \quad r_- = \frac{10 - 8i}{2} = 5 - 4i.$$

Donc la solution générale de l'équation (II.78) est

$$y = e^{5x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### Exercice 3 (p. 40).

1.

(a) De la relation fondamentale de la trigonométrie circulaire

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

on peut déduire, en divisant par  $\cos^2 \alpha$  que

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (\text{II.80})$$

(b) On sait que  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  si bien que

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha = 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha.$$

(c) On déduit de ce qui précède, en prenant l'inverse des membres de l'égalité (II.80), que

$$\sin 2\alpha = 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

2. On pose  $t = \tan(x/2)$ .

(a) Pour une fonction  $u$  dérivable,

$$(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

si bien que

$$dt = d \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx.$$

(b) À l'aide de la question (1c), on a

$$\sin x = \sin 2 \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

3. On pose

(a) Dans l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x},$$

le changement de variable  $t = \tan(x/2)$  conduit à

$$\begin{aligned} \begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \end{cases} &\iff \begin{cases} dt = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \\ \tan \frac{0}{2} \leq \tan \frac{x}{2} \leq \tan \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1+t^2}{1+2t+t^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{2dt}{1+t^2} = dx \\ \tan \frac{0}{2} \leq t \leq \tan \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

si bien que

$$I = \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1+t^2}{(1+t)^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2}.$$

(b) On a

$$\begin{cases} u = 1 + t \\ 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{u^2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = 1 + t \\ 1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{u^2} \end{cases}$$

si bien que

$$I = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2} = 2 \int_1^2 \frac{du}{u^2} = 2 \left[ \frac{-1}{u} \right]_1^2 = 1.$$

#### Exercice 4 (p. 41).

1.

(a) Puisque l'ensemble de départ de la fonction  $v$  est  $[0, +\infty[$  et puisque  $\sqrt{4-t}$  n'existe que pour  $t \leq 4$ , l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 4]$ .

(b) La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0, 4[$  et pour  $0 \leq t < 4$ , on a

$$v'(t) = 2 \left[ \sqrt{4-t} + \frac{-t}{2\sqrt{4-t}} \right] = \frac{2(4-t) - t}{\sqrt{4-t}} = \frac{8-3t}{\sqrt{4-t}}.$$

Il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 8/3[$ , nulle en  $8/3$  et strictement négative sur  $[8/3, 4[$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 8/3$  et vaut alors  $v(8/3) = 32/(3\sqrt{3})$ .

2. (a) La fonction  $v$  est intégrable sur  $[0, 4]$  car elle est continue sur cet intervalle.  
 (b) On procède à une intégration par parties pour calculer  $\int_0^4 v(t) dt$ .

$$\begin{aligned} \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^4 2t \sqrt{4-t} dt \\ &= 2 \left( \left[ -\frac{2}{3} t(4-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \int_0^4 -\frac{2}{3} (4-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= 2 \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^4 (4-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= \frac{4}{3} \left[ -\frac{2}{5} (4-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{15} 4^{\frac{5}{2}} \\ \int_0^4 v(t) dt &= \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

- (c) On sait que la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $[0, 4]$  est donnée par

$$V = \frac{1}{4-0} \int_0^4 v(t) dt = \frac{64}{15}.$$

**Exercice 5 (p. 41).**

1. On a immédiatement  $v(0) = v(T) = 0$ . La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0, T[$  et pour  $0 \leq t < T$ , on a

$$v'(t) = a \left[ \sqrt{T-t} + \frac{-t}{2\sqrt{T-t}} \right] = a \frac{2(T-t) - t}{\sqrt{T-t}} = a \frac{2T-3t}{\sqrt{T-t}}.$$

Puisque  $a > 0$ , il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 2T/3[$ , nulle en  $2T/3$  et strictement négative sur  $[2T/3, T[$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 2T/3$  et vaut alors  $v(2T/3) = 2aT \sqrt{T/3} = 2a(T/3)^{3/2}$ .

2. Puisque  $dx(t) = v(t) dt$  et  $x(0) = 0$ , la fonction  $t \mapsto x(t)$  est la primitive s'annulant en 0 de la fonction (continue sur  $[0, T]$ )  $t \mapsto v(t)$ ; donc

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T v(t) dt \\ &= \int_0^T a t \sqrt{T-t} dt \\ &= a \left( \left[ -\frac{2}{3} t(T-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^T - \int_0^T -\frac{2}{3} (T-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= a \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^T (T-t)^{\frac{3}{2}} dt \right) \\ &= \frac{2a}{3} \left( \left[ -\frac{2}{5} (T-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^T \right) \\ x(T) &= \frac{4a}{15} T^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

La vitesse moyenne  $V$  du motard sur le parcours  $AB$  est donnée par

$$V = \frac{1}{T-0} \int_0^T v(t) dt = \frac{x(T)}{T} = \frac{4a}{15} T^{\frac{3}{2}}.$$

3. La fonction  $x$  étant continue sur  $[0, T]$  et dérivable sur  $]0, T[$ , on peut lui appliquer sur cet intervalle le théorème des accroissements finis : il existe un réel  $c$  dans  $]0, T[$  tel que  $x(T) - x(0) = (T - 0)x'(c)$  i.e. tel que  $v(c) = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$  ou encore tel que  $v(c) = V$ . Ceci prouve qu'il existe un instant au cours de l'expérience auquel la vitesse instantanée du motard égale sa vitesse moyenne.

4. *Application numérique.* On a

$$\begin{cases} x(T) = 1 \\ v_M = 200 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \frac{4a}{15} T^{\frac{5}{2}} = 1 \\ 2a(T/3)^{3/2} = 200 \end{cases}$$

d'où, par division,

$$\frac{\frac{4}{15} T^{\frac{5}{2}}}{2(T/3)^{3/2}} = \frac{1}{200}.$$

i.e., en heures,

$$T = \frac{1}{80\sqrt{3}}.$$

Exprimé en secondes,

$$T = \frac{3600}{80\sqrt{3}} = 15\sqrt{3}$$

si bien que

$$T \approx 26 \text{ s.}$$

En outre,  $V = x(T)/T = 1/T = 80\sqrt{3}$  donc  $V \approx 139 \text{ km h}^{-1}$ .

**15 juin 2005**

**Année 2005–2006**

**23 novembre 2005**

**Exercice 1 (p. 42).**

1. On a

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}. \\ \frac{x^2-1}{x-1} = 0 &\iff \begin{cases} x^2-1 = 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff x = -1. \end{aligned}$$

2. On a, grâce à un tableau de signes,

$$\frac{2x-3}{x+2} \geq \frac{x-1}{x+2} \iff \frac{2x-3-(x-1)}{x+2} \geq 0 \iff \frac{x-2}{x+2} \geq 0 \iff x \in ]-\infty, -2[ \cup [2, +\infty[.$$

3. On a  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$  d'où, grâce à un tableau de signes,

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} \leq 0 \iff \frac{(x+1)(x-3)}{x+2} \leq 0 \iff x \in ]-\infty, -2[ \cup [-1, 3].$$

### Exercice 2 (p. 43).

1. Voir le cours.

2.

(a) Puisque

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

on a  $|z_1| = 1$  et  $\text{Arg}(z_1) = \frac{2\pi}{3}$ .

On voit aisément géométriquement que  $|z_2| = \sqrt{2}$  et  $\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ .

Puisque  $z_3 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$  et

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

on a  $|z_3| = 2$  et  $\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{6}$ .

(b) Il s'ensuit que  $z_1 = e^{2i\pi/3}$ ,  $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$  et  $z_3 = 2e^{i\pi/6}$ .

(c) On a donc

$$z_1 z_2 = e^{2i\pi/3} \times \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(2\pi/3 - \pi/4)} = \sqrt{2}e^{5i\pi/12}$$

si bien que  $|z_1 z_2| = \sqrt{2}$  et  $\text{Arg}(z_1 z_2) = \frac{5\pi}{12}$ ;

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\pi/4 - \pi/6)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-5i\pi/12}$$

si bien que  $\left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\text{Arg}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = -\frac{5\pi}{12}$ ;

$$z_1^4 = j^4 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^4 = e^{8i\pi/3} = e^{i(2\pi/3 + 2\pi)} = e^{2i\pi/3} = j = z_1$$

si bien que  $|z_1^4| = 1$  et  $\text{Arg}(z_1^4) = \frac{2\pi}{3}$ .

### Exercice 3 (p. 43).

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}.$$

2. On a

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}.$$

3. On sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

4. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right);$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 1/x = 1$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = 0.$$

**Exercice 4 (p. 43).** Il est clair que  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1^3-(\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}$$

donc la limite demandée est  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice 5 (p. 43).**

1. On a

$$\begin{aligned} \frac{\cos 3a}{\sin a} + \frac{\sin 3a}{\cos a} &= \frac{\cos 3a \cos a + \sin a \sin 3a}{\cos a \sin a} \\ &= \frac{\cos(3a-a)}{\cos a \sin a} \\ &= \frac{\cos 2a}{\cos a \sin a} \\ &= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos a \sin a} \\ &= \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a} \\ &= \cotan a - \tan a. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \\ &\iff x - \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} \equiv \pi - \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]. \end{aligned}$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned}
 \sin t - \cos t = 0 &\iff \sin t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\
 &\iff t \equiv \frac{\pi}{2} - t [2\pi] \text{ ou } t \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) [2\pi] \\
 &\iff 2t \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } 0 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\
 &\iff t \equiv \frac{\pi}{4} [\pi].
 \end{aligned}$$

(b) En posant  $x = 2t$ , on a

$$\begin{aligned}
 1 - \sin x - \cos x = 0 &\iff 1 - \sin 2t - \cos 2t = 0 \\
 &\iff 1 - 2\sin t \cos t - (1 - 2\sin^2 t) = 0 \\
 &\iff 2\sin^2 t - 2\sin t \cos t = 0 \\
 &\iff 2\sin t (\sin t - \cos t) = 0 \\
 &\iff \sin t (\sin t - \cos t) = 0
 \end{aligned}$$

(c) On a donc, avec  $x = 2t$ ,

$$\begin{aligned}
 1 - \sin x - \cos x = 0 &\iff \sin t (\sin t - \cos t) = 0 \\
 &\iff \sin t = 0 \text{ ou } \sin t - \cos t = 0 \\
 &\iff t \equiv 0 [\pi] \text{ ou } t \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \\
 &\iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].
 \end{aligned}$$

## 26 janvier 2006

### Exercice 1 (p. 43).

1. Puisque les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 x \notin \mathcal{D} &\iff \sin^2 x = 0 \\
 &\iff \sin x = 0 \\
 &\iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi [2\pi] \\
 &\iff x \equiv 0 [\pi].
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. Puisque  $0 \notin \mathcal{D}$ , la fonction  $f$  n'est pas continue en 0 mais, en 0, on a  $1 - \cos x \sim x^2/2$  et  $\sin x \sim x$  donc

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} \sim \frac{1}{4}$$

si bien que  $f$  admet, en 0, la limite finie  $1/4$ . On peut donc prolonger  $f$  par continuité en 0, en posant  $f(0) = 1/4$ .

3. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos^2 x)} \\ &= \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos x)} \quad \text{si } 1 - \cos x \neq 0 \text{ i.e. si } x \neq 0[2\pi]. \end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 43).**

1. Puisque l'ensemble de définition de la fonction Arcsin est  $[-1, 1]$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si

$$-1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \iff 2 \leq x^2 \leq 4 \iff \sqrt{2} \leq |x| \leq 2.$$

Donc l'ensemble de définition de la fonction  $f$  est  $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$ .

Puisque l'ensemble de dérivabilité de la fonction Arcsin est  $] -1, 1[$ , en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes ci-dessus, on constate que l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$  est  $] -2, -\sqrt{2}[ \cup ] \sqrt{2}, 2[$ .

2. Pour  $x$  dans  $] -2, -\sqrt{2}[ \cup ] \sqrt{2}, 2[$ , on a

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 3)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 - 2)(4 - x^2)}}.$$

**Exercice 3 (p. 44).**

1. Par définition,

$$y = \operatorname{Arcsin} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2. \end{cases}$$

2. Soit  $x$  un nombre dans  $[-1, 1]$  et  $y = \operatorname{Arcsin} x$ . Alors, par définition,  $x = \sin y$  i.e.  $x = \sin(\operatorname{Arcsin} x)$ .
3. Soit  $x$  un nombre dans  $[-1, 1]$ . Alors,

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Arcsin} x &\iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x^2 = \sin^2 y \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos^2 y = 1 - x^2 \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |\cos y| = \sqrt{1 - x^2} \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases} \\ &\implies \cos y = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

car, si  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , alors  $\cos y \geq 0$  et donc  $|\cos y| = \cos y$ . Il s'ensuit que  $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ .

4. On a

$$\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Exercice 4 (p. 44).**

1. L'ensemble de définition de la fonction  $f$  est  $\mathbb{R}^{+*}$ . Sur cet ensemble,  $f$  est continue et dérivable et, pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Or,

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 2 > \sqrt{x} > 0 \iff 4 > x > 0.$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 4[$ , strictement décroissante sur  $]4, +\infty[$  et admet un maximum absolu en 4.

2. Puisque  $f$  admet un maximum absolu en 4, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) \leq f(4)$ . Or  $f(4) = \ln 4 - 2 = 2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1)$  est strictement négatif. Par suite, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) < 0$  i.e.  $\ln x < \sqrt{x}$ .
3. On a donc, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x/x < 1/\sqrt{x}$  et, pour  $x > 1$ ,  $0 < \ln x/x < 1/\sqrt{x}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{x} = 0$ , il s'ensuit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

4. Pour  $x > 0$ , posons  $X = x^\alpha$ . Alors  $x = X^{1/\alpha}$  et donc

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln(X^{1/\alpha})}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X}.$$

Or, si  $x \rightarrow +\infty$  alors  $X \rightarrow +\infty$  donc, en vertu de la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

**Exercice 5 (p. 44).**

1. On a, pour tout  $x$  réel,

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 7$$

fonction polynôme admettant pour racine évidente  $(-1)$ . Il s'ensuit que :

$$f'(x) = (x+1)(3x-7)$$

si bien que  $f'$  est de signe négatif entre ses racines  $-1$  et  $\frac{7}{3}$ , donc entre 0 et 1, ce qui prouve que  $f$  est strictement monotone (décroissante) sur  $[0, 1]$ .

2. La fonction  $f$ , polynomiale, est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, 1]$  ; elle est de plus strictement croissante sur  $[0, 1]$ . Donc, grâce à un théorème du cours, on sait que  $f$  est une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[f(0), f(1)]$ , i.e. sur  $[-6, 1]$ . Par conséquent, 0 appartenant à  $[-6, 1]$ , il existe un unique antécédent  $x_0$  à 0 par  $f$  dans  $[0, 1]$  et  $x_0$  n'est ni 0 ni 1 puisque  $f(0) \neq 0$  et  $f(1) \neq 1$ . Ceci prouve que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .

3. (a) On met en œuvre la méthode de dichotomie.

**Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_7 = ]0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_8 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 2 :** Le milieu de l'intervalle  $I_9 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 3 :** Le milieu de l'intervalle  $I_{10} = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 4 :** Le milieu de l'intervalle  $I_{11} = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 5 :** Le milieu de l'intervalle  $I_{12} = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

L'intervalle  $I_{12}$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{35}{128}$  de  $I_{12}$  d'au plus le rayon de  $I_{12}$  qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{35}{128} \right| \leq \frac{1}{128} \leq 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{35}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

- (b) Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,27| &= \left| x_0 - \frac{35}{128} + \frac{35}{128} - 0,27 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{35}{128} \right| + \left| \frac{35}{128} - 0,27 \right| \\ &\leq \frac{1}{128} + \left| \frac{35}{128} - 0,27 \right| \\ &\leq 10^{-2} \end{aligned}$$

si bien que 0,27 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

4. On constate que  $(-2)$  est une racine évidente de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0 \quad (\text{II.81})$$

Il s'ensuit, par une factorisation à la volée, que

$$\begin{aligned}
 (II.81) &\iff (x+2)(x^2-4x+1)=0 \\
 &\iff (x+2)\left[(x^2-4x+4)-3\right]=0 \\
 &\iff (x+2)\left[(x-2)^2-3\right]=0 \\
 &\iff (x+2)\left[(x-2)-\sqrt{3}\right]\left[(x-2)+\sqrt{3}\right]=0 \\
 &\iff x \in \{-2, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}.
 \end{aligned}$$

Donc les racines de l'équation  $f(x)=0$  sont  $-2$ ,  $2-\sqrt{3}$  et  $2+\sqrt{3}$ ; parmi elles, seule  $2-\sqrt{3}$  appartient à  $]0, 1[$  si bien que  $x_0 = 2-\sqrt{3}$ .

## 2 février 2006

Exercice 5 (p. 45).

## 17 mai 2006

Exercice 1 (p. 45). On a

1.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x \sin x \, dx &= \int (-\cos x)' \cos^2 x \, dx \\
 &= - \int (\cos x)' \cos^2 x \, dx \\
 &= -\frac{1}{3} \cos^3 x, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{t^3-1}{\sqrt[3]{t^4-4t+3}} \, dt &= \frac{1}{4} \int \frac{4t^3-4}{(t^4-4t+3)^{\frac{1}{3}}} \, dt \\
 &= \frac{1}{4} \int (t^4-4t+3)' (t^4-4t+3)^{-\frac{1}{3}} \, dt \\
 &= \frac{1}{4} \frac{(t^4-4t+3)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \\
 &= \frac{3}{8} (t^4-4t+3)^{\frac{2}{3}}, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 (p. 45). Il est facile de voir que

$$\forall x \neq 0[\pi], \quad (\cotan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-s}{\sin^2 s} ds &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} s \frac{-1}{\sin^2 s} ds \\
 &= \left[ s \cotan s \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotan s ds \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} ds \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)'}{\sin x} ds \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \left[ \ln |\sin x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \left( \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.
 \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 45).**

1. On effectue ci-dessous le changement de variable implicite  $t = x/4$  :

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 16} dx &= \int_0^4 \frac{dx}{16 \left( \frac{x^2}{16} + 1 \right)} \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^4 \frac{dx}{\left( \frac{x}{4} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^4 \frac{4 d\frac{x}{4}}{\left( \frac{x}{4} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^4 d\operatorname{Arctan} \frac{x}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \operatorname{Arctan} \frac{x}{4} \right]_0^4 \\
 &= \frac{1}{4} (\operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0) \\
 \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 16} &= \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

2. On pose  $x = t^2$ . L'application  $t \mapsto t^2$  étant une bijection de  $[0, \sqrt{3}]$  sur  $[0, 3]$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2}} \quad \text{car } dx = d(t^2) = 2t dt \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)} \quad \text{car } \sqrt{t^2} = |t| = t \text{ puisque } t \in [0, \sqrt{3}] \\ &= 2 \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left( \operatorname{Arctan} \sqrt{3} - \operatorname{Arctan} 0 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 45).** Résolvons les équations demandées.

1. On résout d'abord l'équation sans second membre associée. Sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , la fonction  $\ln$  est continue donc

$$\begin{aligned} y' + (\ln x)y &= 0 \iff y = Ce^{-\int \ln x dx}, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\iff y = Ce^{-(x \ln x - x)}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{par intégration par parties} \\ &\iff y = Ce^{x(1-\ln x)}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On remarque que l'équation avec second membre admet comme solution particulière la fonction  $y = 4$ . Donc la solution générale de l'équation complète est

$$y = 4 + Ce^{x(1-\ln x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation

$$y'' + 4y' + 6y = 0 \tag{II.82}$$

est  $r^2 + 4r + 6 = 0$ . Or

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 6 = 0 &\iff (r+2)^2 + 2 = 0 \\ &\iff (r+2)^2 - (i\sqrt{2})^2 = 0 \\ &\iff (r+2-i\sqrt{2})(r+2+i\sqrt{2}) = 0 \\ &\iff r = -2 \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique admettant deux racines complexes conjuguées de partie réelle  $(-2)$  et de parties imaginaires  $\pm\sqrt{2}$ , la solution générale de l'équation (II.82) est

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 5 (p. 46).**

1. La fonction  $f$  est continue en 0 car

- elle est définie en ce point ;
- on a

$$|f(x)| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

et  $|x|$  tend vers 0 en 0 donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 f = 0 = f(0)$ .

2. Pour  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 car

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0.

**21 juin 2006**

**Année 2006–2007**

**1<sup>er</sup> décembre 2006**

**Exercice 1 (p. 47).**

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{1 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3}{-2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

3. Puisque, en 0,  $\tan t \sim t$ , et puisque lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $2t$  et  $3t$  tendent vers 0, on a

$$\frac{\tan 2t}{\tan 3t} \underset{0}{\sim} \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2}{3}.$$

4. Puisque, en 0,  $\ln(1+h) \sim h$  et  $\sin h \sim h$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

**Exercice 2 (p. 47).**

1. • On note que  $z_1 = -3i = 3(-i) = 3e^{i\frac{-\pi}{2}}$  donc  $z_1$  a pour module 3 et pour argument  $-\frac{\pi}{2}$ .
- Une figure montre que  $z_2$  a pour module  $3\sqrt{2}$  (diagonale d'un carré de côté 3) et pour argument  $\frac{3\pi}{4}$ .
- On a donc

$$\begin{cases} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| = 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \\ \text{Arg}(z_1 z_2) &\equiv \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2| = 3/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} \\ \text{Arg}(z_1/z_2) &\equiv \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{5\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]. \end{cases}$$

2. On a

$$\begin{aligned} z_3 &= 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha \\ &= 1 + \cos \left(2\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin \left(2\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 1 + 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + i \times 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Or  $\frac{\alpha}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  puisque  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ ; donc  $2\cos \frac{\alpha}{2} > 0$  si bien que la forme trigonométrique de  $z_3$  est :

$$z_3 = 2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

**Exercice 3 (p. 47).**

1. Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 2|x| + 1} \\ &= \sqrt{|x|^2 + 2|x| + 1} \\ &= \sqrt{(|x| + 1)^2} \\ &= ||x| + 1| \\ &= |x| + 1 \text{ car } |x| + 1 \geq 1 > 0. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \cos^2 x = \frac{3}{4} &\iff \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &\iff |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Donc  $\cos^2 x = \frac{3}{4}$  si et seulement si

$$x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi].$$

Autrement dit  $\cos^2 x = \frac{3}{4}$  si et seulement si  $x \equiv \frac{\pi}{6} [\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6} [\pi]$ .

**Exercice 4 (p. 47).**

1. En  $x_0 = 4$ , la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en posant  $f(4) = \frac{1}{12}$  car, si  $x \neq 4$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x - 4}{(\sqrt{x} + 2)(x - 4)(x - 1)} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)(x - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{1}{12}.$$

2. En  $x_0 = 0$ , la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en posant  $f(0) = 0$  car

$$|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

puisque  $|\sin(\mathbb{R})| = [0, 1]$  du fait que  $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 f = 0$ .

**Exercice 5 (p. 47).**

1. La fonction  $f$ , polynômiale, est continue sur  $\mathbb{R}$  donc aussi sur l'intervalle  $]2, 3[$ . Par ailleurs,  $f(2) = -15$  et  $f(3) = 16$  donc  $f$  s'annule au moins une fois sur  $]2, 3[$ . Puisque  $f$  est en outre strictement croissante sur  $]2, 3[$ , elle ne s'y annule qu'une seule fois. Il s'ensuit que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur cet intervalle.
2. Mettons en œuvre la méthode de dichotomie.

**Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 3 = ]2, 3[$  est  $\frac{5}{2}$  et un calcul montre que  $f(2) \times f(\frac{5}{2}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{5}{2}, 3[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 4 = ]\frac{5}{2}, 3[$  est  $\frac{11}{4}$  et un calcul montre que  $f(\frac{5}{2}) \times f(\frac{11}{4}) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{5}{2}, \frac{11}{4}[$ .

L'intervalle  $I_1 4$  est de diamètre  $\frac{1}{8}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{21}{8}$  de  $I_1 4$  d'au plus le rayon de  $I_1 4$  qui vaut  $\frac{1}{16}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{21}{8} \right| \leq \frac{1}{16} \leq 10^{-1}$$

si bien que  $\frac{21}{8}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 2,6| &= \left| x_0 - \frac{21}{8} + \frac{21}{8} - 2,6 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{21}{8} \right| + \left| \frac{21}{8} - 2,6 \right| \\ &\leq \frac{1}{16} + \left| \frac{21}{8} - 2,6 \right| \\ &\leq 10^{-1} \end{aligned}$$

si bien que 2,6 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

**Remarque II.12.1**

En notant que  $\frac{1}{3}$  est solution de l'équation  $f(x) = 0$ , on peut constater que  $x_0 = \sqrt{7}$  (la 3<sup>e</sup> solution étant  $-\sqrt{7}$ ).

**15 janvier 2007**

**Exercice 1 (p. 47).** Cf. cours.

**Exercice 2 (p. 48).**

1.

- (a) La fonction  $\sqrt{\cdot}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ . Or, pour tout  $x$  réel,  $x^2 \geq 0$  donc  $1 + x^2 \geq 1 \geq 0$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
- (b) La fonction  $\sqrt{\cdot}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Or, pour tout  $x$  réel,  $x^2 \geq 0$  donc  $1 + x^2 \geq 1 > 0$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{D}'_f = \mathbb{R}$ .
- (c) Si  $u$  est une fonction dérivable et  $> 0$ , la fonction  $\sqrt{u}$  a pour dérivée  $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ . Donc, pour tout  $x$  réel,

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- (d) On a  $df(1) = f'(1)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dx$  donc

$$\begin{aligned} df(1): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}h \end{aligned}$$

2.

- (a) La fonction Arccos a pour ensemble de définition  $[-1, 1]$ . Donc

$$x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \iff \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \iff \frac{1}{|x|} \leq 1 \iff |x| \geq 1 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1.$$

Donc  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

- (b) La fonction Arccos est a pour ensemble de dérivation  $] -1, 1[$ . Donc, par un raisonnement analogue au précédent, on obtient  $\mathcal{D}'_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .
- (c) Si  $u$  est une fonction dérivable, la fonction  $\text{Arccos } u$  a pour dérivée  $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$  là où  $-1 < u < 1$ . Donc, pour tout  $x$  dans  $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{x^2}{|x|} \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (\text{car } x^2 = |x|^2).$$

- (d) On a  $df(2) = f'(2)dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}dx$  donc

$$\begin{aligned} df(2): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{3}}h \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 48).**

1. L'ensemble de définition de  $f$  est  $]0, +\infty[ \cup \{0\} = \mathbb{R}^+$  car

(a) la quantité  $x^3 \ln x$  existe si et seulement si  $x \in ]0, +\infty[$ ;

(b) la fonction  $f$  est définie en 0 par  $f(0) = 0$ .

2. La fonction  $f$  est, en 0,

(a) continue (à droite) car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0 = f(0)$  (puisque « la puissance l'emporte sur le logarithme »);

(b) dérivable (à droite) car, pour  $h > 0$ ,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = h^2 \ln h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

si bien que  $f'(0) = 0$ .

3. (a) Si  $x > 0$  alors

$$f'(x) = (x^3 \ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} = x^2 (3 \ln x + 1).$$

et, comme on l'a vu,  $f'(0) = 0$ .

(b) Si  $x > 0$  alors

$$f''(x) = (x^2 (3 \ln x + 1))' = 2x (3 \ln x + 1) + x^2 \times \frac{3}{x} = x (6 \ln x + 5).$$

et, pour  $h > 0$ ,

$$\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{h^2 (3 \ln h + 1) - 0}{h} = h (3 \ln h + 1) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

si bien que  $f$  est dérivable deux fois (à droite) en 0, avec  $f''(0) = 0$ . Mais la fonction  $f''$  n'est pas dérivable (à droite) en 0 car le taux de variation de  $f''$  en 0 n'admet pas de limite finie en 0 :

$$\frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \frac{h (6 \ln h + 5) - 0}{h} = 6 \ln h + 5 \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} -\infty$$

4. Si  $x > 0$ , on a

$$f'(x) > 0 \iff x^2 (3 \ln x + 1) > 0 \iff 3 \ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{3}}$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, e^{-\frac{1}{3}}]$  et strictement croissante sur  $]e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$ .  
En outre,

$$f(x) = x^3 \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et  $f(0) = 0$ .

5. La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  sur  $[0, 2]$  se trouve figure II.2 page suivante. On note sur cette courbe trois points caractéristiques :

FIGURE II.2 – Représentation graphique de la fonction  $f$ 

- le point de coordonnées  $(0, 0)$  en lequel  $\mathcal{C}_f$  admet une demi-tangente parallèle à l'axe  $(O, x)$  ;
- le point de coordonnées  $(e^{-\frac{1}{3}}, \frac{1}{3e})$  en lequel  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente parallèle à l'axe  $(O, x)$  ;
- le point de coordonnées  $(1, 0)$  en lequel  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente de pente 1 puisque

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1^2(3\ln 1 + 1) = 1. \end{cases}$$

**Exercice 4 (p. 48).**

1. L'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  car

- l'ensemble de définition de la fonction Arctan est  $\mathbb{R}$  ;
- la quantité  $\frac{2x}{1-x^2}$  existe si et seulement si  $1 - x^2 \neq 0$  et

$$1 - x^2 = 0 \iff (1 - x)(1 + x) = 0 \iff x \in \{-1, 1\}.$$

2. La fonction  $f$  est impaire car

- l'ensemble  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 ;
- si  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f(-x) = 2 \operatorname{Arctan}(-x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2(-x)}{1 - (-x)^2}\right) = -2 \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right) = -f(x)$$

puisque la fonction Arctan est impaire.

3. (a) L'ensemble de dérivabilité de la fonction Arctan est  $\mathbb{R}$  et, pour une fonction  $u$ , on a

$$(\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

(b) L'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$  est donc  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  et, pour  $x$  dans cet ensemble, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \frac{1}{1 + x^2} - \frac{\frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{1 + x^2} - \frac{2 + 2x^2}{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2} \\ &= \frac{2}{1 + x^2} - \frac{2(1 + x^2)}{((1 + x^2))^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. On déduit de ce qui précède que, sur chacun des 3 intervalles de  $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , la fonction  $f$  est constante. En particulier, si  $x \in ]-1, 1[$  :

$$f(x) = f(0) = 2 \operatorname{Arctan} 0 - \operatorname{Arctan} \left( \frac{2 \times 0}{1 - 0^2} \right) = 0$$

si bien que, pour  $x \in ]-1, 1[$  :

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1 - x^2} \right).$$

De même, si  $x \in ]1, +\infty[$  :

$$f(x) = f(\sqrt{3}) = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{3} - \operatorname{Arctan} \left( \frac{2 \times \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}^2} \right) = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{3} - \operatorname{Arctan} (-\sqrt{3}) = \pi$$

si bien que, pour  $x \in ]1, +\infty[$  :

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1 - x^2} \right) + \pi.$$

Et puisque  $f$  est impaire, pour  $x \in ]-\infty, -1[$ , on a  $f(x) = -\pi$  et donc :

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1 - x^2} \right) - \pi.$$

5. Par définition

$$y = \operatorname{Arctan} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Donc en faisant jouer le rôle de  $y$  ci-dessus à  $2 \operatorname{Arctan} x$ , il suffit pour prouver sur  $] -1, 1[$

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1 - x^2} \right).$$

d'établir que, pour  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\begin{cases} \tan(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2x}{1 - x^2} \\ -\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Or

- (a) d'après la formule de la tangente de l'arc double :

$$\tan(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2 \tan(\operatorname{Arctan} x)}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

- (b) si  $-1 < x < 1$  alors, la fonction  $\operatorname{Arctan}$  étant strictement croissante,  $\operatorname{Arctan} -1 < \operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan} 1$  i.e.  $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{4}$  soit  $-\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$ .

Ceci achève la preuve demandée.

**Exercice 5 (p. 48).**

1. (a) On a

$$\int \left( x^4 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{x} - \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)' (1+x^3)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{9} (1+x^3)^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) On a

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

2. Soit  $F$  la primitive de  $\frac{\cos}{1+\sin^2}$  s'annulant en  $\pi/2$ . Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)'}{1+\sin^2 t} dt \\ &= \left[ \operatorname{Arctan}(\sin t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^x \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \operatorname{Arctan}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \operatorname{Arctan}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \operatorname{Arctan} 1 \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**22 janvier 2007****Exercice 1 (p. 49).**

1. On a

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}.$$

(b) On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right);$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 1/x = 1$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = 0.$$

2. On sait que  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1^3 - (\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{(1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}$$

si bien que la limite demandée est  $\frac{1}{3}$ .

3. (a) En 0,

$$\frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} \sim \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}}{x(2+x)} \sim \frac{1}{2+x} \sim \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} = \frac{1}{2}.$$

(b) En 0,

$$\frac{\tan^2(\sqrt{\pi}x)}{1 - \cos x} \sim \frac{(\sqrt{\pi}x)^2}{\frac{x^2}{2}} \sim 2\pi$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(\sqrt{\pi}x)}{1 - \cos x} = 2\pi.$$

4. L'ensemble de définition de  $f$  est  $[-1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ . Sur cet ensemble,  $f$  est continue. Examinons le cas du point  $x_0 = 3$ ; en multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée  $\sqrt{x+1} + 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 3$  en posant  $f(3) = 1/4$ .

### Exercice 2 (p. 49).

1. On a

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \\ &\iff x - \frac{\pi}{8} \equiv \frac{\pi}{3} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{8} \equiv -\frac{\pi}{3} \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{11\pi}{24} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{24} \left[ 2\pi \right]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{11\pi}{24} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{24} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{24} \right\}$ .

2. On a

$$\begin{aligned} \tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x \equiv x + \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \left[ \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\tan 3x = \tan(x + \frac{\pi}{3})$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right\}$ .

### Exercice 3 (p. 49).

1. On a

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin x \, dx &= \int (-\cos x)' \cos^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \, dx &= \int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} \, dx \\ &= \int \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}(x) \, dx \quad \text{où } u = 2x \\ &= \operatorname{Argsh}(2x) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### Exercice 4 (p. 50).

1. Cf. cours.

2.

(a) On a

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \\ \iff -1-x^2 &\leq 1-x^2 \leq 1+x^2 && \text{car } 1+x^2 \text{ est } > 0 \text{ pour tout } x \text{ réel} \\ \iff -2 &\leq 0 \leq 2x^2 && \text{en ajoutant } x^2 \text{ et en retranchant } 1 \\ \iff x &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) L'ensemble de définition de  $\text{Arccos}$  est  $[-1, 1]$  donc  $f(x)$  existe si et seulement si

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

i.e. si et seulement si  $x \in \mathbb{R}$ . Donc l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

3. L'ensemble de définition de  $f$  est clairement symétrique par rapport à 0 et, pour tout  $x$  réel, on a

$$f(-x) = \text{Arccos} \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \text{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$

si bien que  $f$  est paire et que son ensemble d'étude peut être ramené à  $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[ = [0, +\infty[$ .

4. On a

$$f(0) = \text{Arccos} 1 = 0$$

$$f(1) = \text{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = \text{Arccos}(-1) = \pi.$$

5. (a) On a

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \iff 1-x^2 = 1+x^2 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

et

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \iff 1-x^2 = -(1+x^2) \iff 0x^2 = -2 \iff x \in \emptyset$$

(b) On sait que l'ensemble de dérivation de  $\text{Arccos}$  est  $] -1, 1[$  donc, d'après ce qui précède,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On a, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \frac{\frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{4x}{\frac{(1+x^2)^2}{1+x^2} \sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2) \sqrt{4x^2}} \\ &= \frac{2x}{|x|(1+x^2)} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \quad \text{car } x > 0. \end{aligned}$$

- (c) Puisque  $(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , on a  $f'(x) = (2 \operatorname{Arctan} x)'$  pour  $x > 0$ . On en déduit qu'il existe une constante réelle  $C$  telle que, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + C.$$

Donc, en particulier pour  $x = 1$ , on a  $f(1) = 2 \operatorname{Arctan} 1 + C$  soit  $\frac{\pi}{2} = 2 \frac{\pi}{4} + C$  ou encore  $C = 0$ . On en conclut que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x \quad (\text{II.83})$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad 2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right).$$

Ceci est en fait vrai pour tout  $x \geq 0$  car l'égalité (II.83) est vraie aussi pour  $x = 0$  puisque :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ 2 \operatorname{Arctan} 0 &= 0. \end{cases}$$

Soit maintenant  $x < 0$ . Alors  $-x > 0$  et donc, d'après (II.83),  $f(-x) = 2 \operatorname{Arctan}(-x)$  soit, puisque  $f$  est paire et  $\operatorname{Arctan}$  est impaire,  $f(x) = -2 \operatorname{Arctan} x$ . On obtient donc

$$\forall x < 0, \quad 2 \operatorname{Arctan} x = -\operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right).$$

6. La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est donc, sur  $\mathbb{R}^+$ , celle de  $2 \operatorname{Arctan}$ . La courbe sur  $\mathbb{R}^-$  s'obtient en exploitant le caractère pair de la fonction  $f$ .

## 11 avril 2007

### Exercice 1 (p. 50).

1. On a

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} dx = \int \frac{\frac{1}{3} d(x^3 + 3x - 2)}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} = \frac{2}{3} \int \frac{d(x^3 + 3x - 2)}{2\sqrt{x^3 + 3x - 2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 3x - 2} + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2. On a :

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} dx = - \int \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

### Exercice 2 (p. 50).

1. On a

$$\begin{aligned} \int (\ln t)^2 dt &= t (\ln t)^2 - \int t \frac{2}{t} \ln t dt \\ &= t (\ln t)^2 - 2 \int \ln t dt \\ &= t (\ln t)^2 - 2 \left( t \ln t - \int t \frac{1}{t} dt \right) \\ &= t (\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= t \left( (\ln t)^2 - 2 \ln t + 2 \right) + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. En posant  $u' = \sin x$  et  $v = \ln(1 + \sin x)$ , on a  $u = -\cos x$  et  $v' = \cos x/(1 + \sin x)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \sin x) dx &= \left[ -\cos x \ln(1 + \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx \\ &= \left[ x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 50).** On a, en posant  $x = 2t$ ,

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = \int_0^1 \frac{2dt}{(2t)^2 + 4} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

**Exercice 4 (p. 50).**

1. La fonction  $x \mapsto \frac{2}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et sur  $\mathbb{R}^{-*}$ . Donc, sur chacun de ces deux intervalles :

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y &= x \iff y = \exp\left(-\int \frac{2}{x} dx\right) \int x \exp\left(\int \frac{2}{x} dx\right) dx \\ &\iff y = \exp(-2\ln|x|) \int x \exp(2\ln|x|) dx \\ &\iff y = \exp\left(\ln \frac{1}{|x|^2}\right) \int x \exp(\ln(|x|^2)) dx \\ &\iff y = \frac{1}{x^2} \int x \times x^2 dx \quad \text{puisque, pour tout } x \text{ réel, } |x|^2 = x^2 \\ &\iff y = \frac{1}{x^2} \int x^3 dx \\ &\iff y = \frac{1}{x^2} (x^4 + K), \quad K \in \mathbb{R} \\ &\iff y = x^2 + \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi la solution  $y$  de cette équation s'annulant en  $x_0 = 1$  vérifie

$$\begin{cases} y(x) = x^2 + \frac{K}{x^2}, & K \in \mathbb{R} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 + \frac{K}{x^2}, & K \in \mathbb{R} \\ 1 + K = 0 \end{cases} \iff y = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 10y = 0$  est

$$r^2 + 2r + 10 = 0 \iff (r + 1)^2 + 9 = 0 \iff (r + 1)^2 - (3i)^2 = 0 \iff r = -1 \pm 3i$$

Donc la solution générale de cette équation différentielle est

$$y = e^{-x}(\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

**Exercice 5 (p. 50).**

1. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\text{sh}^{(n)} = \begin{cases} \text{sh} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{ch} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

2. Cf. cours

3. La fonction  $\text{sh}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc est, pour tout  $x$  réel, de classe  $\mathcal{C}^4$  sur  $\left[0, x\right]$  et dérivable à l'ordre 5 sur  $]0, x[$ . Donc, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe un réel  $\theta$  de  $]0, 1[$  tel que

$$\text{sh } x = \sum_{k=0}^4 \text{sh}^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \text{sh}^{(5)}(\theta x) \frac{x^5}{5!}$$

i.e., puisque  $\text{sh } 0 = 0$  et  $\text{ch } 0 = 1$ ,

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} + \text{ch}(\theta x) \frac{x^5}{120}$$

**13 juin 2007**

**20 juin 2007**

**Exercice 1 (p. 52).**

1. On peut calculer cette dérivée à l'aide de la relation

$$\text{Argth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

mais on a aussi vu en cours que, pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$(\text{Argth } x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. En intégrant par parties,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Argth } x \, dx = \left[ x \text{Argth } x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \text{Argth } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}$$

si bien que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Argth } x \, dx = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[ \ln |1-x^2| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2.$$

**Exercice 2 (p. 52).** On a

1.

$$\int_0^1 \frac{e^s}{e^s + 1} ds = \int_0^1 \frac{d(e^s + 1)}{e^s + 1} ds = \left[ \ln |e^s + 1| \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln \frac{e + 1}{2}.$$

2. Puisque  $dx/x = d(\ln x)$ ,

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^3} = \left[ \frac{-1}{2(\ln x)^2} \right]_e^{e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

**Exercice 3 (p. 52).**

1. • On sait que la solution générale de l'équation

$$y' + (\cos x)y = 0 \tag{II.84}$$

est

$$y = C \exp \left( - \int \cos x dx \right), \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• On constate que  $y = 2$  est solution particulière de l'équation

$$y' + (\cos x)y = 2 \cos x. \tag{II.85}$$

• Il s'en suit que la solution générale de l'équation (II.85), somme de la solution générale de l'équation (II.84) et d'une solution particulière de l'équation (II.85), est

$$y = 2 + C e^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation

$$y'' + 8y' + 25y = 0 \tag{II.86}$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 + 8r + 25 = 0 \tag{II.87}$$

de discriminant  $\Delta = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$ . Donc l'équation (II.87) a pour solutions (complexes conjuguées)

$$r^{\pm} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i.$$

Donc la solution générale de l'équation (II.86) est

$$y = e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $y_0$  est solution de l'équation (II.86) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 10$  si et seulement si

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ y_0(0) &= 1 \\ y'_0(0) &= 10 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ -4\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 10 \end{cases}$$

car si  $y_0 = e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x)$  alors

$$y_0' = -4e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x) + e^{-4x} (-3\lambda_1 \sin 3x + 3\lambda_2 \cos 3x).$$

Le précédent système équivaut à

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-4x} (\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 14/3 \end{cases}$$

donc la fonction  $y_0$  solution de l'équation (II.86) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y_0'(0) = 10$  est donnée par

$$y_0 = e^{-4x} \left( \cos 3x + \frac{14}{3} \sin 3x \right).$$

#### Exercice 4 (p. 52).

1. Pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  et dérivable à l'ordre 3 sur l'intervalle ouvert correspondant, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 stipule qu'il existe un réel  $\theta$  de l'intervalle  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\theta h)}{3!}h^3.$$

2. (a) On a

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}$$

et, plus généralement, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}.$$

- (b) Pour tout  $h > -1$ , la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle d'extrémités 0 et  $h$  donc, grâce à la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3, on a

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\theta h)}{6}h^3$$

où  $0 < \theta < 1$ , soit

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + (1+\theta h)^{-3} \frac{h^3}{3}.$$

## Année 2007–2008

10 décembre 2007

Exercice 1 (p. 52).

1. On a

$$x^2 - 4 = 0 \iff (x - 2)(x + 2) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \iff x \in \{-2, 2\}.$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0 \iff \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ x \neq 2 \end{cases} \iff x = -2.$$

2. On a  $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$  d'où, grâce à un tableau de signes,

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1} \leq \frac{x + 4}{x - 1} \iff \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1} \leq 0 \iff \frac{(x + 1)(x - 4)}{x - 1} \leq 0 \iff x \in ]-\infty, -1] \cup ]1, 4].$$

Exercice 2 (p. 52).

1. On a

$$\begin{aligned} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 &\iff \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 \\ &\iff 3x - \frac{\pi}{4} \equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{4} \equiv -0[2\pi] \\ &\iff 3x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tan 2x + \tan x = 0 &\iff \tan 2x = -\tan x \\ &\iff \tan 2x = \tan(-x) \\ &\iff 2x \equiv -x[\pi] \\ &\iff 3x \equiv 0[\pi] \\ &\iff x \equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} 2\sin x \geq 1 &\iff \sin x \geq \frac{1}{2} \\ &\iff \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

et, graphiquement, on en déduit

$$2\sin x \geq 1 \iff \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right].$$

**Exercice 3 (p. 52).**

1.  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
2. Par la formule de Moivre, on a

$$\begin{aligned}
 \cos 4\theta &= \operatorname{Re}(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) \\
 &= \operatorname{Re}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^4\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\cos^4 \theta + 4\cos^3 \theta i \sin \theta + 6\cos^2 \theta (i \sin \theta)^2 + 4\cos \theta (i \sin \theta)^3 + (i \sin \theta)^4\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\cos^4 \theta + 4i\cos^3 \theta \sin \theta - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4i\cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta\right) \\
 &= \cos^4 \theta - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta
 \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 52).**

1. Les formules d'Euler sont

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 \sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
 &= \frac{1}{16} \left(e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{2} - 4\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3\right) \\
 &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4\cos 2x + 3).
 \end{aligned}$$

**Exercice 5 (p. 52).**

$$\begin{aligned}
 z^2 - 6z + 13 = 0 &\iff z^2 - 6z + 9 + 4 = 0 \\
 &\iff (z-3)^2 + 4 = 0 \\
 &\iff (z-3)^2 - (2i)^2 = 0 \\
 &\iff (z-3-2i)(z-3+2i) = 0 \\
 &\iff z \in \{3-2i, 3+2i\} = 0
 \end{aligned}$$

**15 janvier 2008****Exercice 1 (p. 53).** On a

- 1.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2} = +\infty$$

3. par factorisation à la volée,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

4. d'après le cours,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x} = \ln 1 = 0$$

**Exercice 2 (p. 53).**

1. Cf. cours.

2. (a) On a  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{\sin 3t} = \frac{2}{3}$  car, en 0,

$$\frac{\sin 2t}{\sin 3t} \sim \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3}.$$

(b) On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\tan x} = \frac{1}{2}$  car, en 0,  $\frac{x}{2} \rightarrow 0$  et

$$\frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\tan x} \sim \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}.$$

3. On note que, si  $t = x - 1$  (i.e.  $x = t + 1$ ), alors  $x \rightarrow 1$  si et seulement si  $t \rightarrow 0$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e}{\sqrt{1 - \cos(x-1)}} &= \frac{e^{1+t} - e}{\sqrt{1 - \cos t}} \\ &= \frac{e e^t - e}{\sqrt{1 - \cos t}} \\ &= e \frac{e^t - 1}{\sqrt{1 - \cos t}} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} e \frac{t}{\sqrt{\frac{t^2}{2}}} \\ &= \sqrt{2} e \frac{t}{|t|} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} e & \text{si } t > 0 \text{ i.e. si } x > 1 \\ -\sqrt{2} e & \text{si } t < 0 \text{ i.e. si } x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{e^x - e}{\sqrt{1 - \cos(x-1)}} = \pm \sqrt{2} e.$$

**Exercice 3 (p. 53).**

1. L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathcal{D}_f = [-\frac{5}{2}, 2[ \cup ]2, +\infty[$ . Donc  $f$ , définie de manière « naturelle », est continue sur  $\mathcal{D}_f$ . Mais

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{2x+5})(3 + \sqrt{2x+5})}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{9 - (2x+5)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{4-2x}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= -2 \frac{x-2}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}} \quad \text{si } x \neq 2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} f = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}} = -\frac{1}{3}$$

si bien que la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en 2, en posant  $f(2) = -\frac{1}{3}$ . La fonction ainsi prolongée est continue sur  $[-\frac{5}{2}, +\infty[$ .

2. Pour  $n$  pair, la fonction  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  est définie sur, et seulement sur,  $\mathbb{R}^+$ . Il s'ensuit que l'ensemble de définition de  $g$  est  $\mathcal{D}_g = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Donc  $g$ , définie de manière « naturelle », est continue sur  $\mathcal{D}_g$ . Mais si, pour  $x$  dans  $\mathcal{D}_g$ , on pose  $t = \sqrt[4]{x}$  (i.e.  $x = t^4$  puisque  $x \geq 0$ ), on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - t}{1 - t^4} \\ &= \frac{1 - t}{(1 - t^2)(1 + t^2)} \\ &= \frac{1 - t}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)} \\ &= \frac{1}{(1 + t)(1 + t^2)} \quad \text{car } t \neq 1 \text{ puisque } x \neq 1 \\ &= \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt[4]{x^2})} \\ &= \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt{x})} = \frac{1}{4}$$

si bien que la fonction  $g$  peut être prolongée par continuité en 1, en posant  $g(1) = \frac{1}{4}$ . La fonction ainsi prolongée est continue sur  $[0, +\infty[$ .

3. La fonction  $h$  a pour ensemble de définition  $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$  mais, n'étant pas définie de manière « naturelle », elle n'est pas nécessairement continue sur  $\mathcal{D}_h$ . Le seul point de discontinuité éventuel est manifestement le point 0.

Or, du fait que  $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ , on a  $|\cos(\mathbb{R})| = [0, 1]$ . Donc

$$|f(x)| = \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|.$$

Mais  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 h = 0$  c'est-à-dire  $\lim_0 h = h(0)$ , compte-tenu de la définition de  $h$ . Il s'ensuit que la fonction  $h$  est continue en 0, donc sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 4 (p. 53).

1. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc aussi sur l'intervalle  $]0, 1[$ ; par ailleurs,  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 1 - e^{-1} = e^0 - e^{-1} > 0$  (car la fonction  $x \mapsto e^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ). Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  s'annule au moins une fois sur  $]0, 1[$ . Puisqu'en outre  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle, elle ne s'y annule qu'une seule fois. Il s'ensuit que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
2. Mettons en œuvre la méthode de dichotomie.

**Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 5 = ]0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 6 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

**Étape n° 2 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 7 = ]x_0, 1[$  est  $x_0$  et un calcul montre que  $f(x_0) \times f(x_0) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]x_0, 1[$ .

L'intervalle  $I_1 7$  est de diamètre  $\frac{1}{8}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{9}{16}$  de  $I_1 7$  d'au plus le rayon de  $I_1 7$  qui vaut  $\frac{1}{16}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{9}{16} \right| \leq \frac{1}{16} \leq 10^{-1}$$

si bien que  $\frac{9}{16}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,6| &= \left| x_0 - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} - 0,6 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{9}{16} \right| + \left| \frac{9}{16} - 0,6 \right| \\ &\leq \frac{1}{16} + \left| \frac{9}{16} - 0,6 \right| \\ &\leq \frac{1}{16} - \frac{9}{16} + 0,6 \\ &\leq 0,6 - \frac{1}{2} \\ &\leq 10^{-1} \end{aligned}$$

si bien que 0,6 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

**Exercice 5 (p. 53).**

1. Par définition,

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

2. On sait que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  est  $[-1, 1]$ .

3. La courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est représentée figure II.3.

FIGURE II.3 – Représentation graphique de la fonction  $\operatorname{Arccos}$

4. On a  $\operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\operatorname{Arccos} 1 = 0$ ,  $\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\operatorname{Arccos}(-1) = \pi$ . Le nombre  $\operatorname{Arccos}(\sqrt{3})$  n'existe pas.

5. Soit  $x$  dans  $\mathcal{D}_{\operatorname{Arccos}}$ . On doit prouver que

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi \quad \text{i.e.} \quad \pi - \operatorname{Arccos}(-x) = \operatorname{Arccos} x$$

ce qui, en vertu de l'équivalence (II.88), revient à prouver

$$\begin{cases} \cos(\pi - \operatorname{Arccos}(-x)) = x \\ 0 \leq \pi - \operatorname{Arccos}(-x) \leq \pi. \end{cases}$$

Or

(a) on sait que, pour tout réel  $\theta$ ,  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  et, pour tout  $t$  de  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\operatorname{Arccos} t) = t$  donc

$$\cos(\pi - \operatorname{Arccos}(-x)) = -\cos(\operatorname{Arccos}(-x)) = -(-x) = x$$

(b) comme tout  $\operatorname{Arccos}$ ,  $\operatorname{Arccos}(-x)$  appartient à  $[0, \pi]$  donc  $-\pi \leq -\operatorname{Arccos}(-x) \leq 0$  i.e.  $0 \leq \pi - \operatorname{Arccos}(-x) \leq \pi$ .

On a donc prouvé que  $\pi - \operatorname{Arccos}(-x) = \operatorname{Arccos} x$  i.e.  $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ .

6. Soit  $x$  dans  $[-1, 1]$  et  $M$  le point de coordonnées  $(x, y)$  appartenant à  $\mathcal{C}$ ; on a alors  $y = \operatorname{Arccos} x$ . Soit  $M'$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x' = -x$ ; son ordonnée  $y'$  vaut alors  $\operatorname{Arccos}(-x)$  et vérifie donc  $y + y' = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ . On en déduit que le milieu du segment  $[M, M']$ , de coordonnées

$$\left( \frac{x + (-x)}{2}, \frac{y + y'}{2} \right) = \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$$

est un point constant. Il s'ensuit que la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est symétrique par rapport au point de coordonnées  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

# 18 janvier 2008

**Exercice 1 (p. 54).**

**Exercice 2 (p. 54).** 1. On a

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \\ &\iff x - \frac{\pi}{8} \equiv \frac{\pi}{3} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{8} \equiv -\frac{\pi}{3} \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \left[ 2\pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{11\pi}{24} \left[ 2\pi \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{24} \left[ 2\pi \right].\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{11\pi}{24} + k 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{24} + k 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{24} \right\}$ .

2. On a

$$\begin{aligned}\tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x \equiv x + \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \pi \right] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \left[ \frac{\pi}{2} \right].\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $\tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  est donc, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et, dans  $] -\pi, \pi]$ , l'ensemble  $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right\}$ .

**Exercice 3 (p. 54).**

**Exercice 4 (p. 54).** 1.

(a) On a

$$\begin{aligned}-1 &\leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \\ \iff -1-x^2 &\leq 1-x^2 \leq 1+x^2 && \text{car } 1+x^2 \text{ est } > 0 \text{ pour tout } x \text{ réel} \\ \iff -2 &\leq 0 \leq 2x^2 && \text{en ajoutant } x^2 \text{ et en retranchant } 1 \\ \iff x &\in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \leq 1 &\iff \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2 \leq 1 \\ &\iff \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

(c) L'ensemble de définition de Arccos est  $[-1, 1]$  donc  $f(x)$  existe si et seulement si

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

*i.e.* si et seulement si  $x \in \mathbb{R}$ . Donc l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

2. L'ensemble de définition de  $f$  est clairement symétrique par rapport à 0 et, pour tout  $x$  réel, on a

$$f(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$

si bien que  $f$  est paire et que son ensemble d'étude peut être ramené à  $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[ = [0, +\infty[$ .

3. On a

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} 1 = 0 \\ f(1) &= \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} 0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \\ \lim_{+\infty} f &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos}(-1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Par définition,

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{II.89})$$

Donc, pour  $x \geq 0$ ,

$$2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \iff \begin{cases} \cos(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ 0 \leq 2 \operatorname{Arctan} x \leq \pi. \end{cases}$$

Or

(a) on sait que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  donc

$$\begin{aligned} \cos(2 \operatorname{Arctan} x) &= 2 \cos^2(\operatorname{Arctan} x) - 1 \\ &= 2 \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} - 1 \\ &= 2 \frac{1}{1 + x^2} - 1 \\ &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

- (b) comme tout  $\operatorname{Arctan} x$  appartient à  $] -\pi/2, \pi/2[$  donc  $2 \operatorname{Arctan} x < \pi$  donc  $2 \operatorname{Arctan} x \leq \pi$ . En outre, puisque la fonction  $\operatorname{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$  entraîne  $\operatorname{Arctan} x \geq 0$  d'où  $2 \operatorname{Arctan} x \geq 0$ . En résumé,  $0 \leq 2 \operatorname{Arctan} x \leq \pi$ .

On a donc prouvé que, pour  $x \geq 0$ ,  $2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ .

Soit maintenant  $x < 0$ . Alors  $-x > 0$  et donc, d'après ce qui précède,

$$2 \operatorname{Arctan}(-x) = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} \right) = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)$$

et, puisque  $\operatorname{Arctan}$  est impaire,

$$-2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccos} \left( \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right).$$

On obtient donc, pour tout  $x < 0$ ,

$$2 \operatorname{Arctan} x = -\operatorname{Arccos} \left( \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right).$$

5. La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est donc, sur  $\mathbb{R}^+$ , celle de  $\operatorname{Arctan}$ . La courbe sur  $\mathbb{R}^-$  s'obtient en exploitant le caractère pair de la fonction  $f$ .

## 25 avril 2008

### Exercice 1 (p. 54).

1. En posant  $u(x) = 1 + \ln x$ , on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{1 + \ln x} \, dx &= \int u'(x) \sqrt{u(x)} \, dx \\ &= \int u'(x) u^{\frac{1}{2}}(x) \, dx \\ &= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}(x)}{\frac{1}{2}+1} + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{e^z}{\sqrt{1 - e^{2z}}} \, dz &= \int \frac{e^z}{\sqrt{1 - (e^z)^2}} \, dz \\ &= \operatorname{Arcsin} e^z + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Exercice 2 (p. 55).

1. En posant  $u' = s$  et  $v = \operatorname{Arctan} s$ , on a  $u = s^2/2$  et  $v' = 1/(1+s^2)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int s \operatorname{Arctan} s \, ds &= \frac{s^2}{2} \operatorname{Arctan} s - \frac{1}{2} \int \frac{s^2}{1+s^2} \, ds \\ &= \frac{s^2}{2} \operatorname{Arctan} s - \frac{1}{2} \left( \int \frac{1+s^2}{1+s^2} \, ds - \int \frac{1}{1+s^2} \, ds \right) \\ &= \frac{s^2}{2} \operatorname{Arctan} s - \frac{1}{2} (s - \operatorname{Arctan} s) + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \left( (s^2 + 1) \operatorname{Arctan} s - s \right) + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. En posant  $u' = \cos x$  et  $v = \ln(1 + \cos x)$ , on a  $u = \sin x$  et  $v' = -\sin x/(1 + \cos x)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) \ln(1 + \cos x) \, dx &= \left[ \sin x \ln(1 + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 x}{1 + \cos x} \, dx \\ &= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \, dx \\ &= \left[ x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 55).**

1. On pose  $t = x/4$  i.e.  $x = 4t$ ; alors

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16} = \int \frac{4 \, dt}{16t^2 + 16} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{Arctan} t + K = \frac{1}{4} \operatorname{Arctan} \frac{x}{4} + K$$

où  $K \in \mathbb{R}$ .

2. On note que

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\frac{9x^2}{16} + 1} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + 1}.$$

On pose donc  $t = 3x/4$  i.e.  $x = 4t/3$ ; alors

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + 1} = \frac{4}{3 \times 16} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{12} \operatorname{Arctan} t + K = \frac{1}{12} \operatorname{Arctan} \frac{3x}{4} + K$$

où  $K \in \mathbb{R}$ .

3. On a

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{(2x + 1)^2}.$$

Donc, en posant  $t = 2x + 1$  i.e.  $x = (t - 1)/2$ , on a

$$\begin{cases} dx = dt/2 \\ x \in [0, 1] \iff t \in [1, 3] \end{cases}$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1} = \int_1^3 \frac{dt}{2t^2} = \left[ -\frac{1}{2t} \right]_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Exercice 4 (p. 55).**

1. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et  $h$  ( $h \in \mathbb{R}^*$ ) et dérivable à l'ordre  $n + 1$  sur le même intervalle ouvert. Alors il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(h) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{h^k}{k!} + f^{(n+1)}(\theta h) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (\text{II.90})$$

2. On pose  $f(x) = (1 + x)^4$ .

(a) Grâce au triangle de Pascal, on a

$$f(x) = (1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

(b) La fonction polynomiale  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc elle satisfait les hypothèses de la formule de Taylor-Lagrange sur tout intervalle d'extrémités 0 et  $x$  ( $x \in \mathbb{R}^*$ ) et ce, à tout ordre  $n$ .

i. Donc, en particulier pour  $n = 2$ , il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^2 f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(3)}(\theta x) \frac{x^3}{3!} = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(\theta x)\frac{x^3}{6}.$$

Or

- $f^{(0)}(x) = (1 + x)^4$  d'où  $f^{(0)}(0) = 1$
- $f^{(1)}(x) = 4(1 + x)^3$  d'où  $f^{(1)}(0) = 4$
- $f^{(2)}(x) = 12(1 + x)^2$  d'où  $f^{(2)}(0) = 12$
- $f^{(3)}(x) = 24(1 + x)$

donc il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 24(1 + \theta x)\frac{x^3}{6}$$

si bien que il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4(1 + \theta x)x^3.$$

Ceci est le développement de Taylor-Lagrange de  $f$  en 0 à l'ordre 2.

ii. De même pour  $n = 3$  : il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^3 f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(3+1)}(\theta x) \frac{x^{3+1}}{(3+1)!} \\ &= f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0) \frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0) \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(\theta x) \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

Or

- $f^{(3)}(x) = 24(1+x)$  d'où  $f^{(3)}(0) = 24$
- $f^{(4)}(x) = 24$

donc il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 24 \frac{x^3}{6} + 24 \frac{x^4}{24}$$

si bien que il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Ceci est le développement de Taylor-Lagrange de  $f$  en 0 à l'ordre 3.

iii. De même pour  $n = 4$  : il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^4 f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(4+1)}(\theta x) \frac{x^{4+1}}{(4+1)!} \\ &= f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0) \frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0) \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(0) \frac{x^4}{24} + f^{(5)}(\theta x) \frac{x^5}{120}. \end{aligned}$$

Or

- $f^{(4)}(x) = 24$  d'où  $f^{(4)}(0) = 24$
- $f^{(5)}(x) = 0$

donc il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 24 \frac{x^3}{6} + 24 \frac{x^4}{24} + 0 \frac{x^5}{120}$$

si bien que il existe  $\theta$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Ceci est le développement de Taylor-Lagrange de  $f$  en 0 à l'ordre 4.

## 12 juin 2008

**Exercice 1 (p. 55).**

**Exercice 2 (p. 55).**

**Exercice 3 (p. 55).**

**Exercice 4 (p. 55).**

**Exercice 5 (p. 56).**

## Année 2008–2009

24 novembre 2008

Exercice 1 (p. 57).

1. On a

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 9 = 0 &\iff (2x - 3)(2x + 3) = 0 \\
 &\iff 2x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 3 = 0 \\
 &\iff x \in \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{4x^2 - 9}{x - \frac{3}{2}} = 0 &\iff \begin{cases} 4x^2 - 9 = 0 \\ x - \frac{3}{2} \neq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases} \\
 &\iff x = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

2. On a

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

et, un produit de facteur étant nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul,

$$\begin{aligned}
 t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0 &\iff (t - 2)^3 = 0 \\
 &\iff t - 2 = 0 \\
 &\iff t = 2
 \end{aligned}$$

3. On a  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$  d'où, grâce à un tableau de signes,

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 + 3x}{x + 2} \leq \frac{x + 3}{x + 2} &\iff \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2} \leq 0 \\
 &\iff \frac{(x - 1)(x + 3)}{x + 2} \leq 0 \\
 &\iff x \in ]-\infty, -3] \cup ]-2, 1].
 \end{aligned}$$

Exercice 2 (p. 57).

1. On a vu en cours que  $\tan x$  existe si et seulement si  $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 |x| - \frac{\pi}{4} = 0 &\iff |x| = \frac{\pi}{4} \\
 &\iff x = \pm \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est donné par :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} - \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$$

2. L'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, les fonctions  $\tan$  et valeur absolue sont respectivement impaire et paire donc, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\tan(-x)}{|-x| - \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{-\tan x}{|x| - \frac{\pi}{4}} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la fonction  $f$  est impaire.

**Exercice 3 (p. 57).**

1. On a  $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$  donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi + \pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 57).** On a

$$\begin{aligned}\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \\ &\iff 2x - \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} [2\pi] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{8} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{24} [\pi].\end{aligned}$$

**Exercice 5 (p. 57).** On constate que 1 est racine évidente de l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$$

et par factorisation à la volée, on a :

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$$

Donc

$$\begin{aligned}z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0 &\iff (z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0 \\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z - 1)^2 + 1 = 0 \\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z - 1)^2 - i^2 = 0 \\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z - 1 - i)(z - 1 + i) = 0 \\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad z - 1 - i = 0 \quad \text{ou} \quad z - 1 + i = 0 \\ &\iff z = 1 \quad \text{ou} \quad z = 1 + i \quad \text{ou} \quad z = 1 - i\end{aligned}$$

## 9 janvier 2009

**Exercice 1 (p. 57).**

1. On remarque que  $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$  donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$ , on a  $\lim_0 f = +\infty$ . Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{+\infty} f = 0$ .
2. On remarque que, pour  $x \neq 4$ ,  $f(x) = \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$  donc  $\lim_4 f = \frac{1}{7}$ .
3. On remarque que, pour  $x \neq 3$ ,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

donc  $\lim_3 f = \frac{1}{4}$ .

4. On sait que « la puissance l'emporte sur le logarithme » donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ , on a  $\lim_0 f = 0$ .

5. On remarque que

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2 - (x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

donc  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

6. On a, si  $x \geq 1$ ,

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x} = \frac{(\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x})(\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x})}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x}} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x}}.$$

Or

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln \frac{x+1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0$$

et

$$\lim_{+\infty} \ln = +\infty \quad \text{donc} \quad \sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

si bien que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x} = 0.$$

### Exercice 2 (p. 58).

1. Consulter le cours !

2.

(a) La limite demandée est 0 car, en 0,

$$\frac{1 - \cos x}{e^x - 1} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x} \sim \frac{x}{2}.$$

(b) La limite demandée est  $\frac{4}{5}$  car

$$\frac{\sin 84x}{\sin 105x} \underset{0}{\sim} \frac{84x}{105x} \underset{0}{\sim} \frac{84}{105} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{84}{105} = \frac{4}{5}.$$

(c) La limite demandée est  $2/3$  car, en 0,

$$\frac{\ln(1+2x)}{\tan 3x} \sim \frac{2x}{3x} \sim \frac{2}{3}.$$

3. La limite demandée est  $\frac{2}{21}$  car

$$\frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})} \underset{0}{\sim} \frac{2u^2 \sqrt{u}}{(7+u)u^2 \times 3\sqrt{u}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{21}.$$

4. Posons  $x = 2 + h$ . Alors

$$\frac{e^x - e^2}{\sin(x-2)} = \frac{e^{2+h} - e^2}{\sin h} = \frac{e^2(e^h - 1)}{\sin h}$$

ce qui, en 0, est équivalent à  $\frac{e^2 \times h}{h} = e^2$  donc la limite demandée est  $e^2$ .

### Exercice 3 (p. 58).

1. Pour tout  $x$  non nul, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - |x|} = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 - |x|} \\ &= \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| - 1)} = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = -1$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = -1$ .

2. Pour tout  $x \neq 2$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} = \frac{(3 - \sqrt{2x+5})(3 + \sqrt{2x+5})}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{9 - (2x+5)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \frac{4 - 2x}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\ &= \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}} = -\frac{1}{3}$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 2 en posant  $f(2) = -\frac{1}{3}$ .

3. Pour tout  $x \not\equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin x) \tan^2 x = \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{(1 + \sin x) \sin^2 x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1}{2}$$

si bien que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en  $\frac{3\pi}{2}$  en posant  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 4 (p. 58).**

1. Il est clair que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}^{+*}$ . Puisque  $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$  et  $\lim_0 \ln = -\infty$ , on a

$$\lim_0 f = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

La fonction  $f$ , définie de manière « naturelle », est continue sur son ensemble de définition  $\mathbb{R}^{+*}$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Donc  $f' > 0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  si bien que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On aurait aussi pu remarquer que  $f$  est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur  $\mathbb{R}^{+*}$  :  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto x - 2$ .

2. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f$  est continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\lim_0 f < 0 < \lim_{+\infty} f$ , l'équation  $f(x) = 0$ , équivalente à l'équation (1), admet une unique solution réelle  $\alpha$ . Puisque de plus  $f(1) = -1 < 0$  et  $f(2) = \ln 2 = \ln 2 - \ln 1 > 0$  (car  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ), on sait que  $\alpha$  appartient à  $]1, 2[$ .
- 3.

**Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 8 = ]1, 2[$  est  $\frac{3}{2}$  et un calcul montre que  $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{3}{2}, 2[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_1 9 = ]\frac{3}{2}, 2[$  est  $\frac{7}{4}$  et un calcul montre que  $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f\left(\frac{7}{4}\right) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{3}{2}, \frac{7}{4}[$ .

**Étape n° 2 :** Le milieu de l'intervalle  $I_2 0 = ]\frac{3}{2}, \frac{7}{4}[$  est  $\frac{13}{8}$  et un calcul montre que  $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f\left(\frac{13}{8}\right) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $]\frac{3}{2}, \frac{13}{8}[$ .

L'intervalle  $I_2 0$  est de diamètre  $\frac{1}{8}$  donc  $\alpha$  est distant du centre  $\frac{25}{16}$  de  $I_2 0$  d'au plus le rayon de  $I_2 0$  qui vaut  $\frac{1}{16}$ . Par conséquent

$$\left| \alpha - \frac{25}{16} \right| \leq \frac{1}{16} \leq 10^{-1}$$

si bien que  $\frac{25}{16}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ . Par l'inégalité

triangulaire,

$$\begin{aligned}
 |\alpha - 1,6| &= \left| \alpha - \frac{25}{16} + \frac{25}{16} - 1,6 \right| \\
 &\leq \left| \alpha - \frac{25}{16} \right| + \left| \frac{25}{16} - 1,6 \right| \\
 &\leq \frac{1}{16} + \left| \frac{25}{16} - 1,6 \right| \\
 &\leq \frac{1}{16} + \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{16} - 1,6 \right| \\
 &\leq \frac{1}{16} + 0,1 - \frac{1}{16} \\
 &\leq 10^{-1}
 \end{aligned}$$

si bien que 1,6 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ .

**Exercice 5 (p. 58).**

1. Un réel  $x$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_f$  si et seulement si

$$\begin{aligned}
 1 - \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\
 \text{i.e. } \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\
 \text{i.e. } \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos 0 \\
 \text{i.e. } 3x - \frac{\pi}{4} &\equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{4} \equiv -0[2\pi] \\
 \text{i.e. } 3x &\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\
 \text{i.e. } x &\equiv \frac{\pi}{12} \left[ \frac{2\pi}{3} \right].
 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. La fonction  $f$  est construite de manière naturelle. Elle est donc continue sur son ensemble de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus, pour  $\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$  et  $k = 0$  i.e. pour  $\frac{\pi}{12}$ , on a, en posant  $t = 3x - \frac{\pi}{4}$ ,

$$x \rightarrow \frac{\pi}{12} \quad \text{si et seulement si} \quad t \rightarrow 0.$$

Or

$$\frac{\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{1 - \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{t^2}{1 - \cos t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{\frac{t^2}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} f(x) = 2$$

si bien que  $f$  est prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{12}$  en posant  $f(\frac{\pi}{12}) = 2$ . Il s'ensuit que  $f$  peut être prolongée par continuité sur l'ensemble

$$\left( \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cup \left\{ \frac{\pi}{12} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

**22 janvier 2009**

**Exercice 1 (p. 58).**

1. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \iff 3x - \frac{\pi}{6} \equiv x + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\text{ou } 3x - \frac{\pi}{6} \equiv \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\text{ou } 4x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{5\pi}{24} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{11\pi}{48} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

donc les solutions de l'équation  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  appartenant à  $] -\pi, \pi]$  sont

$$\frac{5\pi}{24} - \pi, \frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{48} - \pi, \frac{11\pi}{48} - \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{48}, \frac{11\pi}{48} + \frac{\pi}{2}$$

soit

$$-\frac{19\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, -\frac{37\pi}{48}, -\frac{13\pi}{48}, \frac{11\pi}{48}, \frac{35\pi}{48}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \tan x &= \cotan x \iff \tan x = \frac{1}{\tan x} \\ &\iff \tan x = \frac{1}{\tan x} \\ &\iff \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ \tan x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \tan x = 1 \quad \text{ou} \quad \tan x = -1 \\ &\iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

donc les solutions de l'équation  $\tan x = \cotan x$  appartenant à  $] -\pi, \pi]$  sont

$$\frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{\pi}{2}$$

soit  $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{4}$ .

**Exercice 2 (p. 59).**

1. On note que  $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$  donc  $|j| = 1$  et  $\text{Arg } j \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .
2. On sait que  $|j^2| = |j|^2$  et que  $\text{Arg}(j^2) \equiv 2 \text{Arg } j [2\pi]$  donc  $|j^2| = 1$  et que  $\text{Arg}(j^2) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$ .

**Exercice 3 (p. 59).**

1. L'équation  $P(z) = p$  équivaut à

$$\begin{aligned} P_0 \left( \frac{R}{R+z} \right)^2 &= p \\ \text{i.e. } \left| \frac{R+z}{R} \right| &= \sqrt{\frac{P_0}{p}} \quad (\text{car } P_0 > 0 \text{ et } p > 0) \\ \text{i.e. } z &= R \sqrt{\frac{P_0}{p}} - R \quad (\text{car } R > 0 \text{ et } z \geq 0) \\ \text{i.e. } z &= R \left( \sqrt{\frac{P_0}{p}} - 1 \right). \end{aligned} \tag{II.91}$$

2. L'astronaute ne pèsera plus que le quart de son poids initial si et seulement si

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0/4 \\ \text{i.e. } z &= R \left( \sqrt{\frac{P_0}{P_0/4}} - 1 \right) \\ \text{i.e. } z &= R(\sqrt{4} - 1) \\ \text{i.e. } z &= R. \end{aligned}$$

Donc, c'est à l'altitude 6400 km que l'astronaute ne pèsera plus que le quart de son poids initial.

3. D'après la question 1, l'astronaute, pesant 63 kg à la surface de la terre, ne pèsera plus que 7 kg si et seulement si

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(z) &= 7 \\ P_0 &= 63 \end{cases} \\ \text{i.e. } z &= R \left( \sqrt{\frac{63}{7}} - 1 \right) \\ \text{i.e. } z &= R(\sqrt{9} - 1) \\ \text{i.e. } z &= 2R. \end{aligned}$$

Donc, c'est à l'altitude 12800 km que l'astronaute ne pèsera plus que 7 kg.

4. L'astronaute en état d'apesanteur complet si et seulement si son poids  $p$  est nul ce qui correspond, d'après (II.91) à  $z = +\infty$ . Bien sûr, ce résultat est d'autant moins valable d'un point de vue physique, qu'à grande altitude (*i.e.* loin de la terre), l'astronaute risquerait de s'approcher d'autres astres et d'être donc soumis à l'attraction que ceux-ci opéreraient, ce qui créerait de la pesanteur. Il est à noter que la relation donnant  $P(z)$  n'est autre que la loi de la gravitation universelle de Newton.

**Exercice 4 (p. 59).**

1. On a

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+2} - x \geq 0 &\iff \sqrt{x+2} \geq x \\
 &\iff \begin{cases} \sqrt{x+2} \geq x \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sqrt{x+2} \geq x \\ x < 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x+2 \geq x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad -2 \leq x < 0 \\
 &\iff \begin{cases} (x+1)(x-2) \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad -2 \leq x < 0 \\
 &\iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad -2 \leq x < 0 \\
 &\iff 0 \leq x \leq 2 \quad \text{ou} \quad -2 \leq x < 0 \\
 &\iff -2 \leq x \leq 2
 \end{aligned}$$

2. Il s'ensuit que

$$|\sqrt{x+2} - x| = \begin{cases} \sqrt{x+2} - x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{x+2} + x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**22 mai 2009**

**Exercice 1 (p. 59).**

1. Par définition,

$$y = \operatorname{Arcsin} x \iff \begin{cases} \sin y = x \\ |y| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. La fonction Arcsin a pour ensemble de

- (a) définition  $[-1, 1]$ ;
- (b) dérivabilité  $] -1, 1[$ .

3. Pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Soit  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |\cos(\operatorname{Arcsin} x)| &= \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arcsin} x)} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x)} \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

Or, par définition,  $|\operatorname{Arcsin} x| \leq \frac{\pi}{2}$  i.e.  $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2}$  donc, puisque  $\cos \geq 0$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \geq 0$  si bien que  $|\cos(\operatorname{Arcsin} x)| = \cos(\operatorname{Arcsin} x)$ . Alors, l'égalité (II.92) permet d'affirmer que  $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ .

En utilisant le fait que

$$(a) \operatorname{Arccos}([-1, 1]) = [0, \pi]$$

$$(b) \sin \geq 0 \text{ sur } [0, \pi]$$

on prouverait de façon analogue que, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$ .

On a donc, pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \tan(\operatorname{Arcsin} x) &= \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

### Exercice 2 (p. 59).

1. On a

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u'(x) u(x)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{où } u(x) = 1+x^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{u(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx &= - \int \frac{d \cos x}{1+\cos^2 x} \\ &= - \int \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{où } t = \cos x \\ &= - \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= - \operatorname{Arctan} t + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= - \operatorname{Arctan}(\cos x) + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \cos^2(\ln x)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx \quad \text{où } u(x) = \ln x \\ &= \tan(\cos(u(x))) + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \tan(\cos(\ln x)) + K, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 59).**

1. La fonction  $f$  est continue en 0 car

- elle est définie en ce point ;
- on a

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= |x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x|\end{aligned}$$

et  $|x|$  tend vers 0 en 0 donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 f = 0 = f(0)$ .

2. Pour  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

3. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 car

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0.

**Exercice 4 (p. 60).**

1. Puisque l'ensemble de départ de la fonction  $v$  est  $[0, +\infty[$  et puisque  $\sqrt{3-t}$  n'existe que pour  $t \leq 3$ , l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $v$  est  $[0, 3]$ .

2. La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0, 3[$  et pour  $0 \leq t < 3$ , on a

$$\begin{aligned}v'(t) &= \sqrt{3-t} + \frac{-t}{2\sqrt{3-t}} \\ &= \frac{2(3-t) - t}{2\sqrt{3-t}} \\ &= \frac{3(2-t)}{2\sqrt{3-t}}\end{aligned}$$

Il est clair que  $v'$  est strictement positive sur  $[0, 2[$ , nulle en 2 et strictement négative sur  $[2, 3]$ ; donc  $v$  est maximale en  $t = 2$  et vaut alors  $v(2) = 2(\sqrt{3-2}) = 2$ .

3. (a) La fonction  $v$  est intégrable sur  $[0, 3]$  car elle est continue sur cet intervalle.

(b) On procède à une intégration par parties pour calculer  $\int_0^3 v(t) dt$ .

$$\begin{aligned} \int_0^3 v(t) dt &= \int_0^3 t \sqrt{3-t} dt \\ &= \left[ -\frac{2}{3} t(3-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{2}{3} (3-t)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^3 (3-t)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{2}{3} \left[ -\frac{2}{5} (3-t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^3 \\ &= \frac{4}{15} \times 3^{\frac{5}{2}} \\ \int_0^3 v(t) dt &= \frac{12}{5} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(c) On sait que la valeur moyenne  $V$  de  $v$  sur  $[0, 3]$  est donnée par

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 v(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} \sqrt{3} \\ &= \frac{4}{5} \sqrt{3} \end{aligned}$$

### Exercice 5 (p. 60).

1. Soit  $x$  un réel. On a :

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 1} &> x + \sqrt{x^2} \\ &> x + |x| \\ &> \begin{cases} x + x & \text{si } x \geq 0 \\ x - x & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ &> \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x$  réel,  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$  si bien que  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  existe. Il s'ensuit que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

2. Soit  $x$  un réel. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

3. On sait que, pour tout  $x$  réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

donc  $\operatorname{Argsh}$  et  $f$  ont, sur  $\mathbb{R}$ , même dérivée si bien qu'elles sont égales à une constante près :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Argsh} x = f(x) + K$$

En particulier,  $\operatorname{Argsh} 0 = f(0) + K$  ; mais  $\operatorname{Argsh} 0 = 0$  et  $f(0) = \ln(0 + \sqrt{0^2+1}) = 0$  donc  $K = 0$ . Il s'ensuit que, sur  $\mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Argsh}$  et  $f$  sont égales :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

## 15 juin 2009

### Exercice 1 (p. 60).

1. (a) L'équation

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \iff y = C e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \iff y = C e^{-\frac{x^3}{3}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + (\sin x) y = 2 \sin x \iff y = 2 + C e^{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

3. (a) L'équation

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} x = \frac{1}{t^2 - 1} \tag{II.93}$$

est définie sur les intervalles  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 0[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

(b) Sur  $]1, +\infty[$ ,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} x = \frac{1}{t^2 - 1} \iff x = \frac{C}{t} + \frac{1}{2t} \ln(t^2 - 1) \quad C \in \mathbb{R}$$

(c) i. Sur  $]1, +\infty[$ , on a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2-1} \\ x(2) = 0 \end{cases} \iff x = \frac{\ln(x^2-1) - \ln 3}{2t}$$

ii. Toutes les solutions de l'équation (II.93) tendent vers 0 en  $+\infty$ .

**Exercice 2 (p. 60).**

**Exercice 3 (p. 60).**

**Exercice 4 (p. 61).**

**Exercice 5 (p. 61).**

## 17 juin 2009

**Exercice 1 (p. 61).**

**Exercice 2 (p. 62).**

1. On a

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \\ \iff -1-x^2 &\leq 1-x^2 \leq 1+x^2 && \text{car } 1+x^2 \text{ est } > 0 \text{ pour tout } x \text{ réel} \\ \iff -2 &\leq 0 \leq 2x^2 && \text{en ajoutant } x^2 \text{ et en retranchant } 1 \\ \iff x &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'ensemble de définition de Arcsin est  $[-1, 1]$  donc  $f(x)$  existe si et seulement si

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

i.e. si et seulement si  $x \in \mathbb{R}$ . Donc l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

2. L'ensemble de continuité  $\mathcal{C}$  de  $f$  est égal à  $\mathcal{D}$ .

3. L'ensemble de définition de  $f$  est clairement symétrique par rapport à 0 et, pour tout  $x$  réel, on a

$$f(-x) = \operatorname{Arcsin} \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \operatorname{Arcsin} \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$

si bien que  $f$  est paire et que son ensemble d'étude peut être ramené à  $\mathcal{D} \cap [0, +\infty[ = [0, +\infty[$ .

4. On a

$$\begin{aligned} f(0) &= \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{+\infty} f &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arcsin} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On note également que  $f(1) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$ .

5. On sait que l'ensemble de dérivation de Arcsin est  $] -1, 1[$ . Or

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \iff 1-x^2 = 1+x^2 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

et

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \iff 1-x^2 = -(1+x^2) \iff 0x^2 = -2 \iff x \in \emptyset$$

donc  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$  donc sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

6. On a, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{4x}{\frac{(1+x^2)^2}{1+x^2} \sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= -\frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} \\ &= -\frac{2x}{|x|(1+x^2)} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 0; \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

7. Clairement, sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $f'$  est  $< 0$  et donc  $f$  y est décroissante. Par ailleurs, sachant que  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ , que  $\lim_{+\infty} f = -\frac{\pi}{2}$  et que  $f$  est paire, on peut esquisser la courbe représentative de  $f$ .

8. Puisque  $(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , on a  $f'(x) = (-2\text{Arctan } x)'$  pour  $x > 0$ . On en déduit qu'il existe une constante réelle  $C$  telle que, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = -2\text{Arctan } x + C.$$

Donc, en particulier pour  $x = 1$ , on a  $f(1) = -2\text{Arctan } 1 + C$  soit  $0 = -2\frac{\pi}{4} + C$  ou encore  $C = \frac{\pi}{2}$ . On en conclut que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\text{Arctan } x \quad (\text{II.94})$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \text{Arcsin}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\text{Arctan } x.$$

Ceci est en fait vrai pour tout  $x \geq 0$  car l'égalité (II.94) est vraie aussi pour  $x = 0$  puisque :

$$\begin{cases} f(0) &= \frac{\pi}{2} \\ 2\text{Arctan } 0 &= 0. \end{cases}$$

Soit maintenant  $x < 0$ . Alors  $-x > 0$  et donc, d'après (II.94),  $f(-x) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arctan}(-x)$  soit, puisque  $f$  est paire et  $\operatorname{Arctan}$  est impaire,  $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{Arctan} x$ . On obtient donc

$$\forall x < 0, \quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{Arctan} x$$

9. La courbe représentative de la fonction  $f$  est donc, sur  $\mathbb{R}^+$ , celle de  $\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arctan}$ . La courbe sur  $\mathbb{R}^-$  s'obtient en exploitant le caractère pair de la fonction  $f$ .

**Exercice 3 (p. 62).**

**Exercice 4 (p. 62).**

**Exercice 5 (p. 62).**

## Année 2009–2010

### 26 novembre 2009

**Exercice 1 (p. 62).**

1. On a

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\iff x^2 - 1^2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x+1) = 0 \\ &\iff x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} = 0 &\iff \begin{cases} x^2-1 = 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ x \neq 1 \end{cases} \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} x^3 - 1 = 0 &\iff x^3 - 1^3 = 0 \\ &\iff (x-1)(x^2+x+1) = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x^2+x+1 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

Or, pour tout  $x$  réel,  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$  donc  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x^3 - 1 = 0 &\iff x = 1 \text{ ou } x \in \emptyset \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

4. D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \\ \iff x \in \emptyset$$

**Exercice 2 (p. 62).**

1. On sait que  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  et que  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ . Donc

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2\cos \alpha \sin^2 \alpha \\ &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \iff 3x - \frac{\pi}{6} \equiv x + \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{6} \equiv \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{5\pi}{24} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{11\pi}{48} \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 63).**

1. On a

$$\begin{aligned} |j| &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

et, si  $\theta$  désigne un argument de  $j$  :

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{\operatorname{Re} j}{|j|} \\ \sin \theta &= \frac{\operatorname{Im} j}{|j|} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \cos \theta &= -\frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \theta \equiv \frac{2\pi}{3} \left[2\pi\right], \text{ c'est-à-dire } \operatorname{Arg}(j) \equiv \frac{2\pi}{3} \left[2\pi\right].$$

2. On a  $|j^2| = |j|^2 = 1^2 = 1$  et  $\operatorname{Arg}(j^2) \equiv 2\operatorname{Arg}(j) \left[2\pi\right]$  donc  $\operatorname{Arg}(j^2) \equiv \frac{4\pi}{3} \left[2\pi\right]$ .

3. On a  $|j^3| = |j|^3 = 1^3 = 1$  et  $\text{Arg}(j^3) \equiv 3\text{Arg}(j) \left[ 2\pi \right]$  donc  $\text{Arg}(j^3) \equiv \frac{6\pi}{3} \left[ 2\pi \right]$  donc  $\text{Arg}(j^3) \equiv 0 \left[ 2\pi \right]$ . Il s'ensuit que  $j^3 = 1$ .

**Exercice 4 (p. 63).**

1. On a

(a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ +\infty}} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} =$

- (b) On a

$$\frac{-2x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{-2x^3 + 1}{(x-1)(x+1)}$$

Donc, puisque  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^3 + 1}{x+1} = -\frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} x - 1 = 0^\pm$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{-2x^3 + 1}{x^2 - 1} = \mp \infty$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 2x + 4}{1 - x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{-x} = 0$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 12$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+4)} = -4$

2. (a) On a, puisque  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} &= x \left( \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \right) \\ &= x \left( \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \right) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \end{aligned}$$

si bien que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = -\infty$

3. (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$  car, en 0,  $\tan x \sim x$  et  $\ln(1+x) \sim x$   
 (b) en posant  $h = x - 2$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e}{\ln(x-1)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{h+2}{2}} - e}{\ln(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+\frac{h}{2}} - e}{\ln(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e \left( e^{\frac{h}{2}} - 1 \right)}{\ln(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e \times \frac{h}{2}}{h} \\ &= \frac{e}{2} \end{aligned}$$

car, quand  $h \rightarrow 0$ , on a  $\ln(h+1) \sim h$  et  $\frac{h}{2} \rightarrow 0$  donc  $e^{\frac{h}{2}} - 1 \sim \frac{h}{2}$

**Exercice 5 (p. 63).**

1. Puisque les fonctions sin et cos sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x \notin \mathcal{D} &\iff \sin^2 x = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \\ &\iff x \equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - 0[2\pi] \\ &\iff x \equiv 0[\pi] \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. (a) L'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est symétrique par rapport à 0 et, si  $x \in \mathcal{D}$ ,

$$f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 \sin^2(-x)} = \frac{1 - \cos x}{2 (-\sin x)^2} = \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} = f(x)$$

car les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire. Donc  $f$  est paire.

(b) Les fonctions sin et cos étant  $2\pi$ -périodiques, il en est de même de  $f$ .

3. Quand  $x \rightarrow \pi$ ,  $\cos x \rightarrow -1$  donc  $1 - \cos x \rightarrow 2$  et  $\sin x \rightarrow 0$  donc  $\sin^2 x \rightarrow 0^+$  si bien que  $\lim_{\pi} f = +\infty$ .  
 4. Puisque  $0 \notin \mathcal{D}$ , la fonction  $f$  n'est pas continue en 0 mais, en 0, on a  $1 - \cos x \sim x^2/2$  et  $\sin x \sim x$  donc

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim \frac{1}{4}$$

si bien que  $f$  admet, en 0, la limite finie  $\frac{1}{4}$ . On peut donc prolonger  $f$  par continuité en 0, en posant  $f(0) = \frac{1}{4}$ .

5. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos^2 x)} \\ &= \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos x)} \quad \text{si } 1 - \cos x \neq 0 \text{ i.e. si } x \neq 0[2\pi] \end{aligned}$$

## 8 janvier 2010

### Exercice 1 (p. 63).

- La fonction  $f$  n'est pas continue en 0 car, quand  $x \rightarrow 0^\pm$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty$  et  $\sin X$  n'admet pas de limite quand  $X \rightarrow \pm\infty$  donc  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite lorsque  $x$  tend vers  $0^\pm$ .
- La fonction  $g$  est continue en 0 car
  - elle est définie en ce point ;
  - on a

$$|g(x)| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

et  $|x|$  tend vers 0 en 0 donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 g = 0 = g(0)$ .

### Exercice 2 (p. 63).

- L'ensemble de définition de Arcsin est  $[-1, 1]$  donc  $f(x)$  existe si et seulement si

$$\begin{aligned} -1 &\leq x^2 - 3 \leq 1 \\ \text{i.e. } 2 &\leq x^2 \leq 4 \\ \text{i.e. } \sqrt{2} &\leq |x| \leq 2 \\ \text{i.e. } \sqrt{2} &\leq x \leq 2 \text{ ou } -2 \leq x \leq -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est  $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$ .

- Puisque, pour tout  $t$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\sin(\text{Arcsin } t) = t$ , on a

$$\begin{aligned} \tan\left(\text{Arcsin}\left(x^2 - 3\right)\right) &= \frac{\sin\left(\text{Arcsin}\left(x^2 - 3\right)\right)}{\cos\left(\text{Arcsin}\left(x^2 - 3\right)\right)} \\ &= \frac{x^2 - 3}{\sqrt{1 - (x^2 - 3)^2}} \end{aligned}$$

### Exercice 3 (p. 64).

1. La fonction  $x \mapsto \ln x$ 

- (a) a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}^{+*}$
- (b) est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$
- (c) tend vers  $-\infty$  en  $0^+$  et vers  $+\infty$  en  $+\infty$
- (d) est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$
- (e) est représentée graphiquement II.4.

FIGURE II.4 – Courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$ 2. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ 

- (a) a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}^+$
- (b) est continue sur  $\mathbb{R}^+$
- (c) tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$
- (d) est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$
- (e) est représentée graphiquement II.4.

3. Puisque, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x < \sqrt{x}$ , on a, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ . En outre, pour  $x > 1$ ,  $\ln x > 0$  donc  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

4. Pour  $x > 0$ , posons  $X = x^\alpha$ . Alors  $x = X^{\frac{1}{\alpha}}$  et donc

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln \left( X^{\frac{1}{\alpha}} \right)}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X}$$

Or, si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $X \rightarrow +\infty$ ; donc, en vertu de la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} \quad i.e. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

**Exercice 4 (p. 64).**

1. Il est clair que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$  et  $\lim_{-\infty} \exp = 0$ , on a  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ . La fonction  $f$  est, sur  $\mathbb{R}$ , continue. Elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  car elle est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$  :  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto -e^{-x}$  (cette dernière l'étant car la fonction  $\exp$  l'est).
2. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f$  est continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{-\infty} f < 0 < \lim_{+\infty} f$ , l'équation  $f(x) = 0$ , équivalente à l'équation (1), admet une unique solution réelle  $x_0$ . Puisque de plus  $f(0) = -1 < 0$  et  $f(1) = 1 - e^{-1} = e^0 - e^{-1} > 0$  (car  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ), on sait que  $x_0$  appartient à  $]0, 1[$ .

3. (a) Puisque  $|e^{-\frac{1}{2}} - 0,6| < 10^{-2}$ , on a  $-0,61 < -e^{-\frac{1}{2}} < -0,59$  donc  $\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}} < 0$  si bien que  $f(\frac{1}{2}) < 0$ . Or  $f(0) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, 1[$ .
- (b) De plus, puisque  $|e^{-\frac{3}{4}} - 0,47| < 10^{-2}$  on a  $-0,48 < -e^{-\frac{3}{4}} < -0,46$  donc  $\frac{3}{4} - e^{-\frac{3}{4}} > 0$  si bien que  $f(\frac{3}{4}) > 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ .
- (c) Enfin,  $\frac{5}{8} = 0,625$  donc, puisque  $|e^{-\frac{5}{8}} - 0,54| < 10^{-2}$ , on a  $-0,55 < -e^{-\frac{5}{8}} < -0,53$  donc  $\frac{5}{8} - e^{-\frac{5}{8}} > 0$  si bien que  $f(\frac{5}{8}) > 0$ . Or  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4})$  donc  $f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{5}{8})$  et donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$ .
- (d) Le diamètre de l'intervalle  $] \frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$  est  $0,125$  donc  $x_0$  est distant de son centre  $\frac{9}{16}$  d'au plus son rayon qui vaut  $\frac{0,125}{2}$  soit  $0,0625$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{9}{16} \right| < 0,0625 < 10^{-1}$$

donc  $\frac{9}{16}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

4. De plus,  $\frac{9}{16} = \frac{1}{2} + 0,0625 = 0,5625$  donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,6| &= |x_0 - 0,5625 + 0,5625 - 0,6| \\ &\leq |x_0 - 0,5625| + |0,5625 - 0,6| \\ &< 0,0625 + 0,0375 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

si bien que  $0,6$  est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $x_0$ .

#### Exercice 5 (p. 64).

1. L'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  car :
- (a) l'ensemble de définition de la fonction Arctan est  $\mathbb{R}$
  - (b) la quantité  $\frac{2x}{1-x^2}$  existe si et seulement si  $1 - x^2 \neq 0$  et
 
$$1 - x^2 = 0 \iff (1 - x)(1 + x) = 0 \iff x \in \{-1, 1\}$$
2. (a) La fonction Arctan est impaire. Elle est représentée graphiquement figure II.5.

FIGURE II.5 – Courbe représentative de la fonction Arctan

- (b) La fonction  $f$  est impaire car
- i. l'ensemble  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  est symétrique par rapport à 0
  - ii. si  $x \in \mathcal{D}_f$ , la fonction Arctan étant impaire, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \operatorname{Arctan}(-x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2(-x)}{1 - (-x)^2}\right) \\ &= -2 \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

3. (a) Par définition

$$y = \operatorname{Arctan} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(b) Il suffit donc, pour prouver que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad 2 \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

de faire jouer le rôle de  $y$  ci-dessus à  $2 \operatorname{Arctan} x$  *i.e.* d'établir que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\begin{cases} \tan(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2x}{1-x^2} \\ -\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Alors,

i. d'après la formule de la tangente de l'arc double :

$$\begin{aligned} \tan(2 \operatorname{Arctan} x) &= \frac{2 \tan(\operatorname{Arctan} x)}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \end{aligned}$$

ii. si  $-1 < x < 1$  alors, la fonction  $\operatorname{Arctan}$  étant strictement croissante,  $\operatorname{Arctan} -1 < \operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan} 1$  *i.e.*  $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{4}$  soit  $-\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$ .

Ceci achève la preuve demandée.

(c) i. Soit  $x$  dans  $]1, +\infty[$ . Alors  $\frac{1}{x} \in ]0, 1[$ . Donc, d'après la question précédente,

$$2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{Arctan} \left( \frac{\frac{2}{x}}{1 - (\frac{1}{x})^2} \right)$$

*i.e.*, puisque pour tout  $x > 0$ ,  $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} (\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ ,

$$2 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \right) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right)$$

$$\text{i.e.} \quad \pi - 2 \operatorname{Arctan} x = -\operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$\text{i.e.} \quad 2 \operatorname{Arctan} x = \pi + \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

ii. Soit  $x$  dans  $]-\infty, -1[$ . Alors  $-x \in ]1, +\infty[$  donc, d'après le résultat précédent,

$$2 \operatorname{Arctan}(-x) = \pi + \operatorname{Arctan} \left( \frac{2(-x)}{1 - (-x)^2} \right)$$

$$\text{i.e.} \quad -2 \operatorname{Arctan} x = \pi - \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$\text{i.e.} \quad 2 \operatorname{Arctan} x = -\pi + \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

4. (a) Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 < xy < 1$ . Pour prouver que

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy}$$

il suffit d'établir :

$$\begin{cases} \tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \frac{x+y}{1-xy} \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Prouvons-le.

- i. D'après la formule :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

on a

$$\begin{aligned} \tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) &= \frac{\tan(\operatorname{Arctan} x) + \tan(\operatorname{Arctan} y)}{1 - \tan(\operatorname{Arctan} x) \tan(\operatorname{Arctan} y)} \\ &= \frac{x+y}{1-xy} \end{aligned}$$

- ii. Ici  $0 < xy < 1$ . Mais  $y > 0$  d'après les hypothèses de l'énoncé donc  $0 < x < 1/y$ .  
Puisque la fonction  $\operatorname{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\operatorname{Arctan} 0 < \operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan}(1/y)$$

$$i.e. \quad 0 < \operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan}(1/y) \quad (\text{II.95})$$

Or, pour tout  $y > 0$ ,  $\operatorname{Arctan} y + \operatorname{Arctan}(1/y) = \frac{\pi}{2}$  ; donc l'encadrement (II.95) donne

$$0 < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y$$

soit, en ajoutant  $\operatorname{Arctan} y$  aux 3 membres,

$$\operatorname{Arctan} y < \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2}$$

Enfin, par définition de l'arc tangente,  $\operatorname{Arctan} y$  est strictement supérieur à  $-\frac{\pi}{2}$ .  
Donc

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2}$$

Ceci achève la preuve demandée.

- (b) Si  $x$  et  $y$  positifs sont tels que  $xy > 1$  alors  $0 < \frac{1}{xy} < 1$  i.e.  $0 < \frac{1}{x} \frac{1}{y} < 1$  donc, d'après la question précédente

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{x} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} = \operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{x} \frac{1}{y}}$$

$$i.e. \quad \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{xy-1}$$

$$i.e. \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \pi + \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} \quad (\text{II.96})$$

- (c) Posons  $x = 1$  et  $y = 2$ . Alors  $x$  et  $y$  sont positifs et tels que  $xy = 2 > 1$  si bien que, d'après l'égalité (II.96),

$$\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 2 = \pi + \operatorname{Arctan} \frac{1+2}{1-2}$$

$$\text{i.e.} \quad \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 2 = \pi - \operatorname{Arctan} 3$$

$$\text{i.e.} \quad \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = \pi$$

## 25 mars 2010

### Exercice 1 (p. 65).

1. L'ensemble de définition de  $f$  est  $]0, +\infty[ \cup \{0\} = \mathbb{R}^+$  car

(a) la quantité  $x^3 \ln x$  existe si et seulement si  $x \in ]0, +\infty[$ ;

(b) la fonction  $f$  est définie en 0 par  $f(0) = 0$ .

2. La fonction  $f$  est, en 0,

(a) continue (à droite) car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0 = f(0)$  (puisque « la puissance l'emporte sur le logarithme »);

(b) dérivable (à droite) car, pour  $h > 0$ ,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = h^2 \ln h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

si bien que  $f'(0) = 0$ .

3. (a) Si  $x > 0$  alors

$$f'(x) = (x^3 \ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} = x^2 (3 \ln x + 1)$$

et, comme on l'a vu,  $f'(0) = 0$ .

- (b) Si  $x > 0$  alors

$$f''(x) = (x^2 (3 \ln x + 1))' = 2x (3 \ln x + 1) + x^2 \times \frac{3}{x} = x (6 \ln x + 5)$$

et, pour  $h > 0$ ,

$$\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{h^2 (3 \ln h + 1) - 0}{h} = h (3 \ln h + 1) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

si bien que  $f$  est dérivable deux fois (à droite) en 0, avec  $f''(0) = 0$ . Mais la fonction  $f''$  n'est pas dérivable (à droite) en 0 car le taux de variation de  $f''$  en 0 n'admet pas de limite finie en 0 :

$$\frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \frac{h (6 \ln h + 5) - 0}{h} = 6 \ln h + 5 \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} -\infty$$

4. Si  $x > 0$ , on a

$$f'(x) > 0 \iff x^2(3\ln x + 1) > 0 \iff 3\ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{3}}$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, e^{-\frac{1}{3}}]$  et strictement croissante sur  $]e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$ .  
En outre,

$$f(x) = x^3 \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et  $f(0) = 0$ .

5. La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  sur  $[0, 2]$  comporte trois points caractéristiques :

- le point de coordonnées  $(0, 0)$  en lequel  $\mathcal{C}_f$  admet une demi-tangente parallèle à l'axe  $(O, x)$ ;
- le point de coordonnées  $(e^{-\frac{1}{3}}, \frac{1}{3e})$  en lequel  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente parallèle à l'axe  $(O, x)$ ;
- le point de coordonnées  $(1, 0)$  en lequel  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente de pente 1 puisque

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1^2(3\ln 1 + 1) = 1 \end{cases}$$

### Exercice 2 (p. 65).

1. La fonction Arccos a pour ensemble de définition  $[-1, 1]$ . Donc

$$x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \iff \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \iff \frac{1}{|x|} \leq 1 \iff |x| \geq 1 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$

Donc  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

2. La fonction Arccos est a pour ensemble de dérivation  $] -1, 1[$ . Donc, par un raisonnement analogue au précédent, on obtient  $\mathcal{D}'_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

3. Si  $u$  est une fonction dérivable, la fonction  $\text{Arccos } u$  a pour dérivée  $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$  là où  $-1 < u < 1$ . Donc, pour tout  $x$  dans  $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{x^2}{|x|} \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \text{ (car } x^2 = |x|^2)$$

4. On a  $df(2) = f'(2)dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}dx$  donc

$$\begin{aligned} df(2): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{3}}h \end{aligned}$$

### Exercice 3 (p. 65).

1. (a) On a

$$\int \left( x^4 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{x} - \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)' (1+x^3)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{9} (1+x^3)^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) On a

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

2. Soit  $F$  la primitive de  $\frac{\cos}{1+\sin^2}$  s'annulant en  $\pi/2$ . Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)'}{1+\sin^2 t} dt \\ &= \left[ \operatorname{Arctan}(\sin t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^x \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \operatorname{Arctan}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \operatorname{Arctan}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \operatorname{Arctan} 1 \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin x) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 65).**

1. On a

$$\begin{aligned} \int (\ln t)^2 dt &= t (\ln t)^2 - \int t \frac{2}{t} \ln t dt \\ &= t (\ln t)^2 - 2 \int \ln t dt \\ &= t (\ln t)^2 - 2 \left( t \ln t - \int t \frac{1}{t} dt \right) \\ &= t (\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= t \left( (\ln t)^2 - 2 \ln t + 2 \right) + K, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. En posant  $u' = \sin x$  et  $v = \ln(1 + \sin x)$ , on a  $u = -\cos x$  et  $v' = \cos x/(1 + \sin x)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \sin x) dx &= \left[ -\cos x \ln(1 + \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx \\ &= \left[ x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

**Exercice 5 (p. 65).** On a, en posant  $x = 2t$ ,

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = \int_0^1 \frac{2dt}{(2t)^2 + 4} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

## 4 juin 2010

**Exercice 1 (p. 65).** Résolvons les équations demandées.

1. On sait que

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. On résout d'abord l'équation sans second membre associée. Sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , la fonction  $\ln$  est continue donc

$$\begin{aligned} y' + (\ln x)y &= 0 \iff y = Ce^{-\int \ln x dx}, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\iff y = Ce^{-(x \ln x - x)}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{par intégration par parties} \\ &\iff y = Ce^{x(1 - \ln x)}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. On remarque que l'équation avec second membre admet comme solution particulière la fonction  $y = 2$ . Donc la solution générale de l'équation complète est

$$y = 2 + Ce^{x(1 - \ln x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Exercice 2 (p. 65).**

1. L'équation caractéristique associée à l'équation

$$y'' + 4y' + 6y = 0 \tag{II.97}$$

est  $r^2 + 4r + 6 = 0$ . Or

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 6 = 0 &\iff (r+2)^2 + 2 = 0 \\ &\iff (r+2)^2 - (i\sqrt{2})^2 = 0 \\ &\iff (r+2-i\sqrt{2})(r+2+i\sqrt{2}) = 0 \\ &\iff r = -2 \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique admettant deux racines complexes conjuguées de partie réelle  $(-2)$  et de parties imaginaires  $\pm\sqrt{2}$ , la solution générale de l'équation (II.97) est

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. La fonction  $y_0$  est solution de l'équation (II.97) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 0$  si et seulement si

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-2x} (\lambda_1 \cos \sqrt{2}x + \lambda_2 \sin \sqrt{2}x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ y_0(0) &= 1 \\ y'_0(0) &= 0 \end{cases}$$

*i.e.*

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-2x} (\lambda_1 \cos \sqrt{2}x + \lambda_2 \sin \sqrt{2}x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ -2\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

car si  $y_0 = e^{-2x} (\lambda_1 \cos \sqrt{2}x + \lambda_2 \sin \sqrt{2}x)$  alors

$$y'_0 = -2e^{-2x} (\lambda_1 \cos \sqrt{2}x + \lambda_2 \sin \sqrt{2}x) + e^{-2x} (-\sqrt{2}\lambda_1 \sin \sqrt{2}x + \sqrt{2}\lambda_2 \cos \sqrt{2}x).$$

Le précédent système équivaut à

$$\begin{cases} y_0 &= e^{-2x} (\lambda_1 \cos \sqrt{2}x + \lambda_2 \sin \sqrt{2}x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \sqrt{2} \end{cases}$$

donc la fonction  $y_0$  solution de l'équation (II.97) vérifiant  $y_0(0) = 1$  et  $y'_0(0) = 0$  est donnée par

$$y_0 = e^{-2x} (\cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x).$$

### Exercice 3 (p. 66).

1. Cf. cours

2. On a

$$(a) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$(b) \ln(1+x) \cos x = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(c) \ln x \cos(x-1) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3)$$

**Exercice 4 (p. 66).**

1. On a

$$(a) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$(b) \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$2. \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

$$3. \text{ On a } \sin(\operatorname{th} x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{37x^5}{120} + o(x^5)$$

4. On a

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\operatorname{th} x) - x}{\sin x - x} &= \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{-x^3 \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{-x^3 \left(\frac{1}{6} + o(1)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} \\ &= 3 + o(1) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{th} x) - x}{\sin x - x} = 3$$

**Exercice 5 (p. 66).**

1. La relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

- La fonction  $\operatorname{ch}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , paire, de dérivée première  $\operatorname{sh}$  et de dérivée seconde  $\operatorname{ch}$ ; par ailleurs,  $\operatorname{ch} 0 = 1$  et  $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$ . On se reportera au cours pour sa représentation graphique.
- La fonction  $\operatorname{sh}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, de dérivée première  $\operatorname{ch}$  et de dérivée seconde  $\operatorname{sh}$ ; par ailleurs,  $\operatorname{sh} 0 = 0$  et  $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$ . Cette fonction, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . On se reportera au cours pour sa représentation graphique.

2. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

3. Pour tout  $x$  réel,

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Argsh} x &= \operatorname{Argsh} 0 + \int \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4) \right) dx + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\end{aligned}$$

4. Puisque

$$\operatorname{Argsh} x = 0 + 1 \times x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \quad (\text{II.98})$$

- (a) la limite de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  en 0 est 0 ;
- (b) la dérivée de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  en 0 est 1 ;
- (c) l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\operatorname{Argsh}$  en 0 est  $y = x$  ;
- (d) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Argsh} x - x &= -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x^3 \left( -\frac{1}{6} + o(1) \right)\end{aligned}$$

Or

- i.  $x^3$  est positif sur  $\mathbb{R}^+$  et négatif sur  $\mathbb{R}^-$
- ii.  $-\frac{1}{6} + o(1)$  est localement négatif en 0

donc  $\operatorname{Argsh} x - x$  est localement positif en  $0^-$  et localement négatif en  $0^+$ . Il s'ensuit que la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{T}$  localement en  $0^-$  et au-dessous de  $\mathcal{T}$  localement en  $0^+$ .

## Année 2010–2011

10 décembre 2010

Exercice 1 (p. 66).

1. On a

$$\begin{aligned}x^2 - 9 = 0 &\iff (x-3)(x+3) = 0 \iff x-3 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \iff x \in \{-3, 3\} \\ \frac{x^2-9}{x-3} = 0 &\iff \begin{cases} x^2-9 = 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ x \neq 3 \end{cases} \iff x = -3.\end{aligned}$$

2. On a  $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$  d'où, grâce à un tableau de signes,

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 1} \leq \frac{x + 3}{x + 1} \iff \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} \leq 0 \iff \frac{(x + 3)(x - 1)}{x + 1} \leq 0 \iff x \in ]-\infty, -3] \cup ]-1, 1]$$

**Exercice 2 (p. 67).** On a

$$\begin{aligned} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 &\iff \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 \\ &\iff 4x - \frac{\pi}{4} \equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x - \frac{\pi}{4} \equiv -0[2\pi] \\ &\iff 4x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{16} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

**Exercice 3 (p. 67).** On constate que 1 racine évidente du polynôme  $z^3 - 7z^2 + 19z - 13$  donc que celui-ci est factorisable par  $z - 1$ . On a :

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z - 1)(z^2 - 6z + 13)$$

$$\begin{aligned} z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = 0 &\iff (z - 1)(z^2 - 6z + 13) \\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 6z + 9 + 4 = 0 \\ &\iff z = 1 \quad \text{ou} \quad (z - 3)^2 + 4 = 0 \\ &\iff z = 1 \quad \text{ou} \quad (z - 3)^2 - (2i)^2 = 0 \\ &\iff z = 1 \quad \text{ou} \quad (z - 3 - 2i)(z - 3 + 2i) = 0 \\ &\iff z \in \{1, 3 - 2i, 3 + 2i\} = 0 \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 67).**

1. On a

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + x}{x^2} = +\infty$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$$

2. On a

$$\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 2)}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \frac{1}{4}$$

3. On a

$$\frac{x^2 - 16}{x^3 - 64} = \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(x^2 + 4x + 16)} = \frac{x+4}{x^2 + 4x + 16}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^3 - 64} = \frac{1}{6}$$

4. (a) D'après le cours,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(b) On en déduit, en posant  $x = 2t$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{\sin(2t)}{2t} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2$$

5. Par croissances comparées (« l'exponentielle l'emportant sur la puissance ») :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

6. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - \ln(2x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{2x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

7. (a) D'après le cours,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(b) On sait que  $-1 \leq \cos x \leq 1$  donc  $-1 \leq -\cos x \leq 1$  donc  $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$ ; or, pour tout  $x$  réel,  $x^2 \geq 0$  donc, pour tout  $x$  non nul :

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

En outre,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  donc, par le corollaire du théorème « des gendarmes »,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$$

### Exercice 5 (p. 67).

1.  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2. Par la formule de Moivre, on a

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= \operatorname{Re}(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) \\ &= \operatorname{Re}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^4\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\cos^4 \theta + 4\cos^3 \theta i \sin \theta + 6\cos^2 \theta (i \sin \theta)^2 + 4\cos \theta (i \sin \theta)^3 + (i \sin \theta)^4\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\cos^4 \theta + 4i \cos^3 \theta \sin \theta - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4i \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta\right) \\ &= \cos^4 \theta - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \end{aligned}$$

## 19 janvier 2011

## Exercice 1 (p. 68).

1. Cf. cours.

2. Calculer

(a) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

car, en 0,  $\tan x \sim x$  et  $\ln(1+x) \sim x$ .

(b) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotan x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

(c) La limite demandée est  $\frac{1}{7}$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} 7x = \lim_{x \rightarrow 0} 49x = 0$  et

$$\frac{\sin 7x}{\sin 49x} \underset{0}{\sim} \frac{7x}{49x} \underset{0}{\sim} \frac{7}{49} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

(d) La limite demandée est  $\frac{1}{7}$  car

$$\frac{\sin 7x}{\tan 49x} \underset{0}{\sim} \frac{7x}{49x} \underset{0}{\sim} \frac{7}{49} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

(e) La limite demandée est  $\frac{1}{7}$  car

$$\frac{\ln(1+7x)}{\tan 49x} \underset{0}{\sim} \frac{7x}{49x} \underset{0}{\sim} \frac{7}{49} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

(f) La limite demandée est  $\frac{2}{21}$  car, en 0,  $e^t - 1 \sim t$ , car  $\lim_{u \rightarrow 0} 2u^2 = \lim_{u \rightarrow 0} \sqrt{u} = \lim_{u \rightarrow 0} 3\sqrt{u} = 0$  et car

$$\frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7+u)(\tan u)^2 \ln(1+3\sqrt{u})} \underset{0}{\sim} \frac{2u^2 \sqrt{u}}{(7+u)u^2 \times 3\sqrt{u}} = \frac{2}{3 \times (7+u)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{2}{21}$$

(g) La limite demandée est  $-\frac{1}{2}$  car, en 0i.  $\ln(1+t) \sim t$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x - 1 = 0$ ii.  $\cos x - 1 = -(1 - \cos x) \sim -\frac{x^2}{2}$ ,

et car

$$\frac{\ln(\cos x)}{(\tan x)^2} = \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{(\tan x)^2} \underset{0}{\sim} \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

(h) Si  $t = x - 2$  alors  $x = 2 + t$  et, lorsque  $x \rightarrow 2$ ,  $t \rightarrow 0$ . Alors

$$\frac{e^x - e^2}{\ln \frac{x}{2}} = \frac{e^{2+t} - e^2}{\ln \frac{2+t}{2}} = \frac{e^2 (e^t - 1)}{\ln(1 + \frac{t}{2})}$$

Or  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$  donc

$$\frac{e^2 (e^t - 1)}{\ln(1 + \frac{t}{2})} \underset{0}{\sim} e^2 \frac{t}{\frac{t}{2}} = 2e^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2e^2$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{\ln \frac{x}{2}} = 2e^2$$

**Exercice 2 (p. 68).**

1. On a, si  $x \neq 0$ ,

$$|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc, par un corollaire du théorème « des gendarmes »,  $\lim_0 f = 0$ . Donc  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .

2. En  $x_0 = 4$ , la fonction  $f$  peut être prolongée par continuité en posant  $f(4) = \frac{1}{12}$  car

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1) = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x - 1)$$

donc, si  $x \neq 4$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x - 1)} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)(x - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{1}{12}$$

**Exercice 3 (p. 68).**

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc

$$x \notin \mathcal{D}_f \iff 1 - \cos x = 0 \iff \cos x = 1 \iff x \equiv 0 \left[ 2\pi \right]$$

Il s'en suit que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. La fonction  $f$  est paire car

(a) son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 ;

(b) puisque les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}_f$ ,

$$f(-x) = \frac{(-x)(-\sin x)}{1 - \cos x} = f(x)$$

3. En 0, la fonction  $f$  n'est pas continue mais

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^2/2} \sim 2$$

Donc  $f$  peut-être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = 2$ .

**Exercice 4 (p. 68).**

1. Par définition,

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \quad (\text{II.99})$$

2. On sait que l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  est  $[-1, 1]$ .

3. La courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction Arccos est représentée figure II.6.

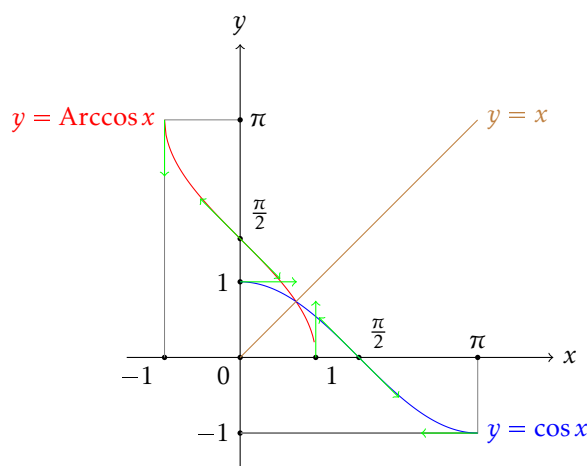


FIGURE II.6 – Représentation graphique de la fonction Arccos

4. On a  $\operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\operatorname{Arccos} 1 = 0$ ,  $\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\operatorname{Arccos}(-1) = \pi$ .  
Puisque  $\sqrt{3} \notin [-1, 1]$ , le nombre  $\operatorname{Arccos}(\sqrt{3})$  n'existe pas.

5. Soit  $x$  dans  $\mathcal{D}_{\operatorname{Arccos}}$ . On doit prouver que

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi \quad \text{i.e.} \quad \pi - \operatorname{Arccos}(-x) = \operatorname{Arccos} x$$

ce qui, en vertu de l'équivalence (II.99), revient à prouver :

$$\begin{cases} \cos(\pi - \operatorname{Arccos}(-x)) = x \\ 0 \leq \pi - \operatorname{Arccos}(-x) \leq \pi \end{cases}$$

Or,

- (a) on sait que, pour tout réel  $\theta$ ,  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  et, pour tout  $t$  de  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\operatorname{Arccos} t) = t$  donc

$$\cos(\pi - \operatorname{Arccos}(-x)) = -\cos(\operatorname{Arccos}(-x)) = -(-x) = x$$

- (b) comme tout arc cosinus,  $\operatorname{Arccos}(-x)$  appartient à  $[0, \pi]$  donc  $-\pi \leq -\operatorname{Arccos}(-x) \leq 0$  i.e.  $0 \leq \pi - \operatorname{Arccos}(-x) \leq \pi$ .

On a donc prouvé que  $\pi - \operatorname{Arccos}(-x) = \operatorname{Arccos} x$  i.e.  $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ .

6. Soit  $x$  dans  $[-1, 1]$  et  $M$  le point de coordonnées  $(x, y)$  appartenant à  $\mathcal{C}$ ; on a alors  $y = \operatorname{Arccos} x$ . Soit  $M'$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x' = -x$ ; son ordonnée  $y'$  vaut alors  $\operatorname{Arccos}(-x)$  et vérifie donc  $y + y' = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ . On en déduit que le milieu du segment  $[M, M']$ , de coordonnées

$$\left( \frac{x + (-x)}{2}, \frac{y + y'}{2} \right) = \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$$

est un point constant. Il s'ensuit que la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\operatorname{Arccos}$  est symétrique par rapport au point de coordonnées  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

### Exercice 5 (p. 68).

1. On a

$$b^5 - a^5 = (b - a)(b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4)$$

Donc le taux  $\tau_{\{a,b\}}$  de variation de  $f$  entre deux réels quelconques distincts  $a$  et  $b$ , défini par

$$\tau_{\{a,b\}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

vérifie

$$\begin{aligned} \tau_{\{a,b\}} &= \frac{(b^5 + b^2 - 1) - (a^5 + a^2 - 1)}{b - a} \\ &= \frac{b^5 - a^5 + b^2 - a^2}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4) + (b - a)(b + a)}{b - a} \\ &= b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4 + b + a \end{aligned}$$

Si  $a$  et  $b$  sont distincts dans  $[0, +\infty[$ , ce taux est alors strictement positif puisque  $a$  et  $b$  sont positifs ou nuls et puisque l'un au moins d'entre eux est strictement positif. Ceci prouve, par définition, que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. La fonction  $f$ , polynômiale, est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, 1]$ ; elle est de plus strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  donc sur  $[0, 1]$ . En outre,  $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$ . Donc, grâce à un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .
3. (a) On met en œuvre la méthode de dichotomie.

**Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_21 = ]0, 1[$  est  $\frac{1}{2}$  et un calcul montre que  $f(0) \times f(\frac{1}{2}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, 1[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_22 = ] \frac{1}{2}, 1[$  est  $\frac{3}{4}$  et un calcul montre que  $f(\frac{1}{2}) \times f(\frac{3}{4}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, 1[$ .

**Étape n° 2 :** Le milieu de l'intervalle  $I_23 = ] \frac{3}{4}, 1[$  est  $\frac{7}{8}$  et un calcul montre que  $f(\frac{3}{4}) \times f(\frac{7}{8}) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$ .

**Étape n° 3 :** Le milieu de l'intervalle  $I_24 = ] \frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$  est  $\frac{13}{16}$  et un calcul montre que  $f(\frac{3}{4}) \times f(\frac{13}{16}) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{3}{4}, \frac{13}{16}[$ .

**Étape n° 4 :** Le milieu de l'intervalle  $I_25 = ] \frac{3}{4}, \frac{13}{16}[$  est  $\frac{25}{32}$  et un calcul montre que  $f(\frac{3}{4}) \times f(\frac{25}{32}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{25}{32}, \frac{13}{16}[$ .

**Étape n° 5 :** Le milieu de l'intervalle  $I_26 = ] \frac{25}{32}, \frac{13}{16}[$  est  $\frac{51}{64}$  et un calcul montre que  $f(\frac{25}{32}) \times f(\frac{51}{64}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{51}{64}, \frac{13}{16}[$ .

L'intervalle  $I_26$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{103}{128}$  de  $I_26$  d'au plus le rayon de  $I_26$  qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{103}{128} \right| \leq \frac{1}{128} \leq 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{103}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x_0 - 0,805| &= \left| x_0 - \frac{103}{128} + \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &\leq \left| x_0 - \frac{103}{128} \right| + \left| \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &\leq \frac{1}{128} + \left| \frac{103}{128} - 0,805 \right| \\ &\leq 10^{-2} \end{aligned}$$

si bien que 0,805 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

## 6 mai 2011

### Exercice 1 (p. 68).

1. La fonction Arcsin a pour ensemble de définition  $[-1, 1]$ .
2. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \\ &\iff \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \iff \frac{1}{|x|} \leq 1 \\ &\iff |x| \geq 1 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{D} = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

3. La fonction Arcsin est a pour ensemble de dérivation  $] -1, 1[$ . Donc, par un raisonnement analogue au précédent, on obtient  $\mathcal{D}' = ] -\infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[$ .
4. Si  $u$  est une fonction dérivable, la fonction Arcsin  $u$  a pour dérivée  $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$  là où  $-1 < u < 1$ . Donc, pour tout  $x$  dans  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \\ &= -\frac{1}{\frac{x^2}{|x|} \sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

et donc, puisque  $x^2 = |x|^2$

$$f'(x) = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$$

5. On a  $df(2) = f'(2)dx = -\frac{1}{2\sqrt{3}}dx$  donc

$$\begin{aligned} df(2): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto -\frac{1}{2\sqrt{3}}h \end{aligned}$$

### Exercice 2 (p. 69).

1. Si  $x \neq 0$  alors  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( -\sin \frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x} \\ &= x \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Or

$$\left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

si bien que, par un corollaire du théorème « des gendarmes »,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ . Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

3. La fonction  $f'$  n'est pas continue (donc pas dérivable) en 0 car, pour  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

n'admet pas de limite en 0 ; en effet, si  $x \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  et la fonction  $\sin$  n'admettant pas de limite en  $\infty$ ,  $\sin \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite en 0<sup>1</sup>.

**Exercice 3 (p. 69).**

1. (a) On a

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3} d(x^3 + 3x - 2)}{\sqrt{x^3 + 3x - 2}} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{d(x^3 + 3x - 2)}{2\sqrt{x^3 + 3x - 2}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 3x - 2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \int \cos x \sin^2 x dx &= \int (\sin x)' \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx &= \int \frac{(\operatorname{ch} x)'}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx \\ &= \operatorname{Arctan} \operatorname{ch} x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. On a vu en cours que

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 69).**

1. Il se trouve que  $2x \cos \frac{1}{x} \rightarrow 0$  (cf. question précédente) mais ce qui précède suffit à affirmer que  $f'$  n'admet pas de limite en 0.

1. (a) En posant  $u' = e^{-\rho}$  et  $v = \rho$ , on a  $u = -e^{-\rho}$  et  $v' = 1$ . Donc

$$\begin{aligned}\int \rho e^{-\rho} d\rho &= -\rho e^{-\rho} - \int -e^{-\rho} d\rho \\ &= -\rho e^{-\rho} - e^{-\rho} + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- (b) En posant  $u' = s$  et  $v = \operatorname{Arctan} s$ , on a  $u = s^2/2$  et  $v' = 1/(1+s^2)$ . Donc

$$\begin{aligned}\int s \operatorname{Arctan} s ds &= \frac{s^2}{2} \operatorname{Arctan} s - \frac{1}{2} \int \frac{s^2}{1+s^2} ds \\ &= \frac{s^2}{2} \operatorname{Arctan} s - \frac{1}{2} \left( \int \frac{1+s^2}{1+s^2} ds - \int \frac{1}{1+s^2} ds \right) \\ &= \frac{s^2}{2} \operatorname{Arctan} s - \frac{1}{2} (s - \operatorname{Arctan} s) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \left( (s^2 + 1) \operatorname{Arctan} s - s \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2. (a) En posant  $x = 5t$ , on a

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{dx}{x^2 + 25} &= \int_0^1 \frac{5 dt}{(5t)^2 + 25} \\ &= \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{5} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{20}\end{aligned}$$

- (b) En posant  $x = at$ , on a

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \int_0^1 \frac{a dt}{(at)^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4a}\end{aligned}$$

**Exercice 5 (p. 69).**

1. On a

$$\begin{aligned} (\operatorname{Argth} x)' &= \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2}{1-x}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

2. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx &= \left[ x \operatorname{Argth} x \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Argth} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{3/2}{1/2} + \frac{1}{2} \left[ \ln |1-x^2| \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser :

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \operatorname{Argth} x \, dx &= \int_0^{1/2} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{1/2} \ln(1+x) \, dx - \int_0^{1/2} \ln(1-x) \, dx \right) \end{aligned}$$

ce qui, par intégration par parties des deux intégrales, conduit au même résultat.

## 17 juin 2011

### Exercice 1 (p. 69).

1. On a

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \iff y = C e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. On a

$$\frac{dy}{dx} + y = -x \iff y = \frac{1-2x}{4} + C e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Exercice 2 (p. 69).**

**Exercice 3 (p. 70).**

**Exercice 4 (p. 70).**

1. Le premier terme non nul dans le développement limité en 0

- de  $\sin t$  étant celui d'ordre 1
- de  $\cos t$  étant celui d'ordre 0,

le développement limité en 0 de  $\sin t \cos t$  à l'ordre 4 sera obtenu par produit des développements limités en 0 de  $\sin t$  à l'ordre 4 et de  $\cos t$  à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\sin t \cos t &= \left[ t - \frac{t^3}{3} + o(t^4) \right] \left[ 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \right] \\ &= t - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) t^3 + o(t^4) \\ \sin t \cos t &= t - \frac{2}{3} t^3 + o(t^4)\end{aligned}$$

(On pouvait aussi utiliser l'identité  $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$ .)

2. On a

$$\begin{aligned}\frac{e^t - 1}{\ln(1+t)} &= \frac{t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)} \\ \frac{e^t - 1}{\ln(1+t)} &= \frac{t \left[ 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2) \right]}{t \left[ 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \right]}\end{aligned}$$

Le quotient selon les puissances croissantes de  $1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}$  par  $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}$  à l'ordre 2 vaut  $1 + t + \frac{t^2}{3}$ . Donc

$$\frac{e^t - 1}{\ln(1+t)} = 1 + t + \frac{t^2}{3} + o(t^2)$$

3.

(a) En posant,  $x = e + h$  où  $h \rightarrow 0$  (i.e.  $h = x - e$ ), on a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(e + h) \\
 &= \ln\left(e\left(1 + \frac{h}{e}\right)\right) \\
 &= \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \\
 &= 1 + \frac{h}{e} - \frac{\left(\frac{h}{e}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{h}{e}\right)^2\right) \\
 &= 1 + \frac{h}{e} - \frac{1}{2e^2}h^2 + o(h^2) \\
 &= 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 + o((x - e)^2)
 \end{aligned}$$

(b) Dédurre de la question précédente l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = e$  ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$ .

**Exercice 5 (p. 70).**

1. On a

$$(a) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$(b) \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$2. \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

$$3. \text{ Par composition de développements limités, on obtient } \cos(\operatorname{th} x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

4. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(\operatorname{th} x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} &= \frac{\frac{3x^4}{8} + o(x^4)}{\frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
 &= \frac{x^4\left(\frac{3}{8} + o(1)\right)}{x^4\left(\frac{1}{24} + o(1)\right)} \\
 &= \frac{\frac{3}{8} + o(1)}{\frac{1}{24} + o(1)} \\
 &= 9 + o(1)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{th} x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} = 9$$

## Année 2011–2012

25 novembre 2011

**Exercice 1 (p. 71).**

1. On a

$$\begin{aligned} 16x^2 - 25 = 0 &\iff (4x - 5)(4x + 5) = 0 \\ &\iff 4x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x + 5 = 0 \\ &\iff x \in \left\{ -\frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{16x^2 - 25}{x - \frac{5}{4}} = 0 &\iff \begin{cases} 16x^2 - 25 = 0 \\ x - \frac{5}{4} \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{4} \\ x \neq \frac{5}{4} \end{cases} \\ &\iff x = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

2. On a  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$  donc

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{x + 2} \leq \frac{x + 3}{x + 2} &\iff \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2} \leq 0 \\ &\iff \frac{(x - 1)(x + 3)}{x + 2} \leq 0 \end{aligned}$$

d'où, grâce au tableau de signes II.1 page suivante :

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 2} \leq \frac{x + 3}{x + 2} \iff x \in ]-\infty, -3] \cup ]-2, 1].$$

**Exercice 2 (p. 71).**

1. Le tableau II.2 page suivante permet d'exprimer  $f(x)$  sans valeur absolue :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \\ 2 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 2x & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

2. La courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  est représentée à la figure II.7 page 255.

| $x$                      | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |     |
|--------------------------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|
| $x - 1$                  | $-$       | $-$  | $-$  | $0$ | $+$       |     |
| $x + 3$                  | $-$       | $0$  | $+$  | $+$ | $+$       |     |
| $x + 2$                  | $-$       | $-$  | $0$  | $+$ | $+$       |     |
| $\frac{(x-1)(x+3)}{x+2}$ | $-$       | $0$  | $+$  | $-$ | $0$       | $+$ |

TABLE II.1 – Tableau de signe de  $\frac{(x-1)(x+3)}{x+2}$ 

| $x$       | $-\infty$ | $-1$     | $1$     | $+\infty$ |
|-----------|-----------|----------|---------|-----------|
| $ x - 1 $ | $-x + 1$  | $-x + 1$ | 0       | $x - 1$   |
| $ x + 1 $ | $-x - 1$  | 0        | $x + 1$ | $x + 1$   |
| $f(x)$    | $-2x$     | 2        | $2x$    |           |

TABLE II.2 – Expression de  $f(x)$  sans valeur absolue

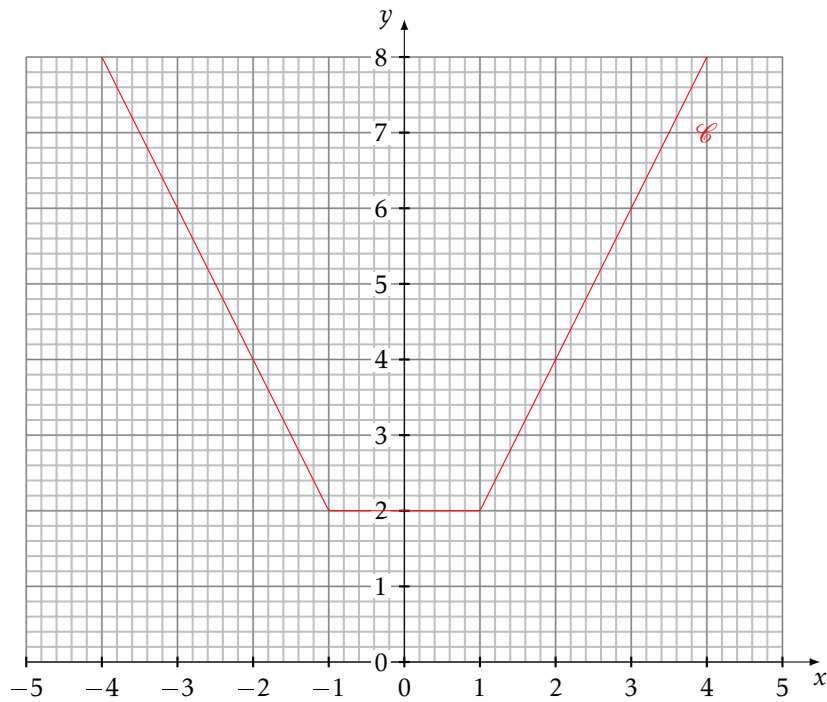
**Exercice 3 (p. 71).** On a

$$\begin{aligned}
 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \iff 3x - \frac{\pi}{6} \equiv 2x + \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{6} \equiv -\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) [2\pi] \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} [2\pi] \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x \equiv -\frac{\pi}{6} \left[2\pi\right] \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{30} \left[\frac{2\pi}{5}\right]
 \end{aligned}$$

**Exercice 4 (p. 71).**

1. (a) Les formules d'Euler sont

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

FIGURE II.7 – Courbe de la fonction  $f$ 

(b) On a

$$\begin{aligned}
 \cos^3 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{8} \left( e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)
 \end{aligned}$$

2. On constate que 1 est racine évidente de l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$$

et par factorisation à la volée, on a :

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$$

Donc

$$\begin{aligned}
 z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0 &\iff (z-1)(z^2 - 2z + 2) = 0 \\
 &\iff z-1 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \\
 &\iff z-1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z-1)^2 + 1 = 0 \\
 &\iff z-1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z-1)^2 - i^2 = 0 \\
 &\iff z-1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z-1-i)(z-1+i) = 0 \\
 &\iff z-1 = 0 \quad \text{ou} \quad z-1-i = 0 \quad \text{ou} \quad z-1+i = 0 \\
 &\iff z = 1 \quad \text{ou} \quad z = 1+i \quad \text{ou} \quad z = 1-i
 \end{aligned}$$

**Exercice 5 (p. 71).**

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{1 - 2x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3}{-2x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{-2} \\
 &= -\frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(c) D'après le cours,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(d) D'après le cours,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

2. Cf. cours.

**12 janvier 2012**

**Exercice 1 (p. 72).**

1. Cf. cours.

2. (a) La limite demandée est  $\frac{1}{2}$  car, en 0,

$$\frac{1 - \cos x}{e^x - 1} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim \frac{1}{2}$$

- (b) La limite demandée est  $\frac{2}{3}$  car, en 0,

$$\frac{\sin 2t}{\sin 3t} \sim \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3}$$

- (c) La limite demandée est  $\frac{1}{2}$  car, en 0,  $\frac{x}{2} \rightarrow 0$  et

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\tan x} \sim \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

- (d) La limite demandée est  $\frac{2}{21}$  car

$$\frac{(e^{2u^2} - 1) \sin \sqrt{u}}{(7 + u)(\tan u)^2 \ln(1 + 3\sqrt{u})} \underset{0}{\sim} \frac{2u^2 \sqrt{u}}{(7 + u)u^2 \times 3\sqrt{u}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{21}$$

**Exercice 2 (p. 72).**

1. Cf. notes personnelles. On note que, si  $t = x - 1$  (i.e.  $x = 1 + t$ ), alors  $x \rightarrow 1$  si et seulement si  $t \rightarrow 0$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} &= \frac{\ln(1+t)}{\sin t} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} = 1$$

2. On note que, lorsque  $x \rightarrow 2$ ,

(a)  $e^x - e \rightarrow e^2 - e$ , nombre  $> 0$  ;

(b)  $1 - \cos(x-2) \rightarrow 0^+$  donc  $\sqrt{1 - \cos(x-2)} \rightarrow 0^+$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e}{\sqrt{1 - \cos(x-2)}} = +\infty$$

**Exercice 3 (p. 72).** La limite demandée égale 1. En effet, posons  $h = x - \frac{\pi}{4}$  i.e.  $x = h + \frac{\pi}{4}$  ; alors

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x} &= \frac{1 - \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\left(h + \frac{\pi}{4}\right)\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \tan \frac{\pi}{4}}}{\cos 2h \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2h \sin \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}}{-\sin 2h} \\ &= \frac{-2 \tan h}{-\sin 2h (1 - \tan h)} \\ &= \frac{2 \tan h}{\sin 2h (1 - \tan h)} \end{aligned}$$

donc, quand  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  (i.e. quand  $h \rightarrow 0$ )

$$\frac{1 - \tan x}{\cos 2x} = \frac{2 \tan h}{\sin 2h (1 - \tan h)} \sim \frac{2h}{2h (1 - \tan h)} = \frac{1}{(1 - \tan h)} \rightarrow 1$$

**Exercice 4 (p. 72).**

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc

$$x \notin \mathcal{D}_f \iff 1 - \cos x = 0 \iff \cos x = 1 \iff x \equiv 0 [2\pi]$$

Il s'en suit que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{k 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. La fonction  $f$  est paire car

- (a) son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 ;
- (b) puisque les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}_f$ ,

$$f(-x) = \frac{(-x)(-\sin x)}{1 - \cos x} = f(x)$$

3. En 0, la fonction  $f$  n'est pas continue mais

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^2/2} \sim 2$$

Donc  $f$  peut-être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = 2$ .

**Exercice 5 (p. 72).**

1. On a

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Donc

$$\begin{aligned}\tau_{\{b,a\}} &= \frac{(a^3 + a - 1) - (b^3 + b - 1)}{a - b} \\ &= \frac{a^3 - b^3 + a - b}{a - b} \\ &= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)}{a - b} \\ &= a^2 + ab + b^2 + 1\end{aligned}$$

Si  $a$  et  $b$  sont distincts dans  $[0, +\infty[$ , ce taux est alors strictement positif puisque  $a$  et  $b$  sont positifs ou nuls et puisque l'un au moins d'entre eux est strictement positif. Ceci prouve, par définition, que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. La fonction  $f$ , polynômiale, est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, 1]$  ; elle est de plus strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  donc sur  $[0, 1]$ . En outre,  $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$ . Donc, grâce à un corollaire du théorème du des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  sur  $]0, 1[$ .

3. (a) On met en œuvre la méthode de dichotomie.

**Étape n° 0 :** Le milieu de l'intervalle  $I_2 7 = ]0, 1[$  est  $\frac{1}{2}$  et un calcul montre que  $f(0) \times f(\frac{1}{2}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, 1[$ .

**Étape n° 1 :** Le milieu de l'intervalle  $I_2 8 = ] \frac{1}{2}, 1[$  est  $\frac{3}{4}$  et un calcul montre que  $f(\frac{1}{2}) \times f(\frac{3}{4}) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ .

**Étape n° 2 :** Le milieu de l'intervalle  $I_2 9 = ] \frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$  est  $\frac{5}{8}$  et un calcul montre que  $f(\frac{1}{2}) \times f(\frac{5}{8}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{5}{8}, \frac{3}{4}[$ .

**Étape n° 3 :** Le milieu de l'intervalle  $I_3 0 = ] \frac{5}{8}, \frac{3}{4}[$  est  $\frac{11}{16}$  et un calcul montre que  $f(\frac{5}{8}) \times f(\frac{11}{16}) < 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{5}{8}, \frac{11}{16}[$ .

**Étape n° 4 :** Le milieu de l'intervalle  $I_3 1 = ] \frac{5}{8}, \frac{11}{16}[$  est  $\frac{21}{32}$  et un calcul montre que  $f(\frac{5}{8}) \times f(\frac{21}{32}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{21}{32}, \frac{11}{16}[$ .

**Étape n° 5 :** Le milieu de l'intervalle  $I_3 2 = ] \frac{21}{32}, \frac{11}{16}[$  est  $\frac{43}{64}$  et un calcul montre que  $f(\frac{21}{32}) \times f(\frac{43}{64}) > 0$  donc  $x_0$  appartient à  $] \frac{43}{64}, \frac{11}{16}[$ .

L'intervalle  $I_3 2$  est de diamètre  $\frac{1}{64}$  donc  $x_0$  est distant du centre  $\frac{87}{128}$  de  $I_3 2$  d'au plus le rayon de  $I_3 2$  qui vaut  $\frac{1}{128}$ . Par conséquent

$$\left| x_0 - \frac{87}{128} \right| \leq \frac{1}{128} \leq 10^{-2}$$

si bien que  $\frac{87}{128}$  est une valeur approchée fractionnaire à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ . Par l'inéga-

lité triangulaire,

$$\begin{aligned}
 |x_0 - 0,68| &= \left| x_0 - \frac{87}{128} + \frac{87}{128} - 0,68 \right| \\
 &\leq \left| x_0 - \frac{87}{128} \right| + \left| \frac{87}{128} - 0,68 \right| \\
 &\leq \frac{1}{128} + \left| \frac{87}{128} - 0,68 \right| \\
 &\leq \frac{1}{128} + 0,0004 \\
 &\leq 10^{-2}
 \end{aligned}$$

si bien que 0,68 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $x_0$ .

## 20 avril 2012

### Exercice 1 (p. 72).

1. La fonction  $f$  est continue en 0 car

- elle est définie en ce point ;
- on a

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &= \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\
 &= |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\
 &\leq |x|
 \end{aligned}$$

et  $|x|$  tend vers 0 en 0 donc, par un corollaire du théorème des gendarmes,  $\lim_0 f = 0 = f(0)$ .

2. Pour  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

3. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 car

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

n'admet pas de limite lorsque  $h$  tend vers 0 puisque la fonction  $\sin$  n'admet pas de limite en  $\pm\infty$ .

### Exercice 2 (p. 72).

1. On a

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u'(x) u(x)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{où } u(x) = 1+x^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{u(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sh}(x^3) dx &= \frac{1}{3} \int u'(x) \operatorname{sh}(u(x)) dx \quad \text{où } u(x) = x^3 \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{ch}(u(x)) + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{ch}(x^3) + K, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt &= \int \frac{(\sin t)'}{1+\sin^2 t} dt \\ &= \operatorname{Arctan}(\sin t) + K, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

### Exercice 3 (p. 72).

On a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cotan t dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{\sin t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)'}{\sin t} dt \\ &= \left[ \ln |\sin t| \right]_{\frac{\pi}{2}}^x \\ &= \ln |\sin x| - \ln \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \\ &= \ln |\sin x|\end{aligned}$$

### Exercice 4 (p. 73).

1. Soit  $x$  dans  $]1, +\infty[$ . Alors

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

2. On sait que, pour tout  $x > 1$ ,

$$(\operatorname{Argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

donc  $\operatorname{Argch}$  et  $f$  ont, sur  $]1, +\infty[$ , même dérivée si bien qu'elles sont égales à une constante près :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in ]1, +\infty[, \quad \operatorname{Argch} x = f(x) + K$$

Il s'ensuit en particulier que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Argch} x = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + K \quad (\text{II.100})$$

Or ces fonctions sont continues sur leurs ensembles de définition ( $\mathcal{D}_{\operatorname{Argch}} = [1, +\infty[$  et, clairement,  $\mathcal{D}_f$  contient  $[1, +\infty[$ ) donc

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Argch} x &= \operatorname{Argch} 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + K &= f(1) + K \end{cases}$$

donc, d'après (II.100),  $\operatorname{Argch} 1 = f(1) + K$  ; mais  $\operatorname{Argch} 1 = 0$  et  $f(1) = \ln(1 + \sqrt{1^2 - 1}) = 0$  donc  $K = 0$ . Il s'ensuit que, sur  $[1, +\infty[$ ,  $\operatorname{Argch}$  et  $f$  sont égales :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

### Exercice 5 (p. 73).

1. La fonction  $\operatorname{Argch}$  a pour ensemble de définition  $[1, +\infty[$ . Donc

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \frac{1}{x} \geq 1 \iff 0 < x \leq 1$$

Donc  $\mathcal{D}_f = ]0, 1]$ .

2. La fonction  $\operatorname{Argch}$  est a pour ensemble de dérivation  $]1, +\infty[$ . Donc, par un raisonnement analogue au précédent, on obtient  $\mathcal{D}'_f = ]0, 1[$ .

3. Si  $u$  est une fonction dérivable, la fonction  $\operatorname{Argch} u$  a pour dérivée  $\frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$  là où  $u > 1$ . Donc, pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \\ &= -\frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}} \\ &= -\frac{1}{\frac{x^2}{|x|} \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

donc, puisque  $x^2 = |x|^2$ ,

$$= -\frac{1}{|x| \sqrt{1-x^2}}$$

4. On a  $df\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)dx = -\frac{4}{\sqrt{3}}dx$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} df\left(\frac{1}{2}\right) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto -\frac{4}{\sqrt{3}}h \end{aligned}$$

**21 juin 2012**

**Exercice 1 (p. 73).**

1. (a) On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta &= \theta \tan \theta - \int \tan \theta d\theta \\ &= \theta \tan \theta - \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \theta \tan \theta - \int \frac{(-\cos \theta)'}{\cos \theta} d\theta \\ &= \theta \tan \theta + \ln |\cos \theta| + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x dx &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} &= \int_0^3 \frac{dx}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{d\frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} \quad \text{où } t = \frac{x}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \left[ \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

**Exercice 2 (p. 73).**

1. La solution générale de l'équation  $y' + 2y = 0$  est

$$y = C e^{-\int 2 dx}, C \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad y = C e^{-2x}, C \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors  $y(0) = 1$  si et seulement si  $C = 1$  si bien que la solution valant 1 en 0 est  $y = e^{-2x}$ .

2. Les fonctions  $a : x \mapsto 1$  et  $b : x \mapsto -x$  étant continues sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} + y &= -x \iff y = e^{-\int dx} \int (-x) e^{\int dx} dx \\
 &\iff y = e^{-x} \int (-x) e^x dx \\
 &\iff y = -e^{-x} \left( x e^x - \int e^x dx \right) \\
 &\iff y = -e^{-x} (x e^x - e^x + C), C \in \mathbb{R} \\
 &\iff y = -x + 1 - C e^{-x}, C \in \mathbb{R} \\
 &\iff y = -x + 1 + C e^{-x}, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu remarquer que  $y = -x + 1$  est solution de particulière de  $\frac{dy}{dx} + y = -x$  et que  $y = C e^{-x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  est solution générale de l'équation sans second membre associée  $\frac{dy}{dx} + y = 0$ , si bien que  $y = -x + 1 + C e^{-x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  est solution générale de  $\frac{dy}{dx} + y = -x$ .

On obtient alors  $y(0) = 1$  si et seulement si  $C = 0$  si bien que la solution valant 1 en 0 est  $y = -x + 1$ .

3. L'ensemble de continuité commun aux fonctions  $a : t \mapsto 1/t$  et  $b : t \mapsto 1/(t^2 + 1)$  étant  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ , la résolution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} x = \frac{1}{t^2 + 1} \tag{II.101}$$

est à effectuer sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . Cependant, tant que la distinction n'est pas nécessaire, on mène une résolution commune aux deux cas : sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x &= \frac{1}{t^2+1} \iff x = e^{-\int \frac{dt}{t}} \int \frac{1}{t^2+1} e^{\int \frac{dt}{t}} dt \\ &\iff x = e^{-\ln|t|} \int \frac{1}{t^2+1} e^{\ln|t|} dt \\ &\iff x = e^{\ln \frac{1}{|t|}} \int \frac{|t|}{t^2+1} dt \\ &\iff x = \frac{1}{|t|} \int \frac{|t|}{t^2+1} dt \\ &\iff x = \frac{1}{t} \int \frac{t}{t^2+1} dt \quad \text{quel que soit le signe de } t \\ &\iff x = \frac{1}{2t} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} \\ &\iff x = \frac{1}{2t} (\ln|t^2+1| + C), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'équation (II.101) n'étant pas définie en  $t = 0$ , aucune de ses solutions ne vaut 1 en 0.

### Exercice 3 (p. 73).

1.

- (a) L'équation  $y'' - 5y' + 6y = 0$  a pour équation caractéristique  $r^2 - 5r + 6 = 0$  qui admet deux solutions réelles distinctes  $r = 2$  et  $r = 3$  car

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \iff (r-2)(r-3) = 0 \iff r = 2 \text{ ou } r = 3$$

Donc la solution générale de l'équation  $y'' - 5y' + 6y = 0$  est

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- (b) L'équation  $4y'' - 4y' + y = 0$  a pour équation caractéristique  $4r^2 - 4r + 1 = 0$  qui admet une solution réelle double  $r = \frac{1}{2}$  car

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \iff (2r-1)^2 = 0 \iff r = \frac{1}{2}$$

Donc la solution générale de l'équation  $4y'' - 4y' + y = 0$  est

$$y = e^{\frac{1}{2}x} (C_1 x + C_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- (c) L'équation  $y'' - 4y' + 5y = 0$  a pour équation caractéristique  $r^2 - 4r + 5 = 0$  qui admet deux solutions complexes conjuguées  $r = 2 + i$  et  $r = 2 - i$  car

$$\begin{aligned} r^2 - 4r + 5 = 0 &\iff (r-2)^2 + 1 = 0 \\ &\iff (r-2)^2 - i^2 = 0 \\ &\iff (r-2-i)(r-2+i) = 0 \\ &\iff r = 2+i \text{ ou } r = 2-i \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation  $y'' - 4y' + 5y = 0$  est

$$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, du fait que  $(e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x))' = e^{2x} ((2C_1 + C_2) \cos x + (2C_2 - C_1) \sin x)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ e^{2 \times 0} (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 0 \\ e^{2 \times 0} ((2C_1 + C_2) \cos 0 + (2C_2 - C_1) \sin 0) = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ C_1 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases} \\ &\iff y = e^{2x} \sin x \end{aligned}$$

2. On remarque que l'équation  $y'' - 4y' + 5y = e^x$  a pour solution particulière  $y = \frac{1}{2}e^x$ . Or d'après la question précédente, son équation sans second membre associée,  $y'' - 4y' + 5y = 0$ , a pour solution générale

$$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Donc, le théorème fondamental permet de conclure que

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \iff y = \frac{1}{2}e^x + e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

#### Exercice 4 (p. 73).

1. Cf. cours.
2. (a) On a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \cos x &= \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^3 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) x^4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

- (b) Si  $t = x - 1$ , c-à-d si  $x = 1 + t$ , alors  $x \rightarrow 1 \iff t \rightarrow 0$ . Donc

$$\begin{aligned} \ln x \cos(x-1) &= \ln(1+t) \cos t \\ &= t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \text{ d'après la question précédente} \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^4) \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - 1}{\sin x} \\ &= \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} \\ &= \frac{x \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \right)}{x \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)} \end{aligned}$$

ce qui, par division euclidienne selon les puissances croissantes, donne :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

**Exercice 5 (p. 74).**

1. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln(1+x^2)} &= \left( \ln(1+x^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |x| \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{car } x > 0 \\ &= x \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= x - \frac{1}{4} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left( -\frac{1}{2} \right) (-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2} (-x^2)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

(b) On sait que, si  $|x| < 1$ ,

$$\operatorname{Arcsin} x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} x &= \operatorname{Arcsin} 0 + \int \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 \right) dx + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\end{aligned}$$

# Index

## B

Bijection, 18, 29, 33, 51

## C

Continuité, 11, 16, 19, 26, 30, 33, 38, 43–45, 48, 49, 58, 59, 65, 68, 72

## D

Dérivabilité, 30, 44, 45, 47, 48, 59, 65, 68, 72  
Dérivée, 6, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 28, 30, 32, 34, 40, 44, 45, 47, 48, 51, 59, 65, 66, 68, 72

Développement limité, 50, 65, 66, 70  
branches infinies, 50

Développements limités, 4, 6, 11, 15, 18, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 42  
ailleurs qu'en zéro, 4, 11, 21, 41, 50, 70  
branches infinies, 15, 19, 22, 25, 29, 32, 37, 42, 51  
calculs de limites, 46  
composée, 50, 66, 70  
étude locale d'une courbe, 4, 11, 15, 18, 25, 26, 29, 33, 37, 42, 46, 50, 51, 66, 70  
généralisé, 25  
quotient, 50, 66, 70

Dichotomie,

Différentielle, 47, 48, 65, 68, 72

## E

Ensemble de définition, 5, 12, 19, 20, 32, 34, 40, 47–49, 54, 59, 60, 65, 68, 72

Équation, 15, 42, 52, 57, 59, 66, 71

Équation différentielle

du premier ordre, 9, 10, 13, 17, 21, 24, 31, 35, 39, 40, 45, 52

du second ordre, 9, 10, 21, 35, 39, 40, 45, 52

Équation trigonométrique, 43, 44

Équivalents, 6, 11

Extrema, 5, 20, 40, 59

## F

Factorisation, 66

Fonction exponentielle, 16, 38, 68

Fonction logarithme, 8, 16, 38, 43, 63, 67, 68

Fonctions de plusieurs variables,

dérivées partielles, 15, 18, 26, 29, 36, 42

différentielles, 7, 22, 37

ensemble de définition, 25, 36, 37

extrema, 15

point critique, 7, 22, 26

Fonctions hyperboliques

directes, 10, 15

réciroques, 10

Fonctions réciroques

dérivée, 10

Fonctions trigonométriques

directes,

réciroques, 4, 6, 7, 9

Forme différentielle, 7

Formule de Taylor-Lagrange, 4, 6, 9, 10, 13, 17, 18, 21, 24

Formule de Taylor-Young,

Formules d'Euler, 39

## I

Inéquation, 42, 52, 57, 66, 71

Intégrale, 8, 10, 13, 35

changement de variable, 6, 7, 9, 12, 14, 16, 21, 24, 25, 31, 35, 39, 40, 51

généralisée,

intégration par parties, 5, 9, 10, 12, 16, 20, 21, 24, 25, 31, 35, 39, 40, 45, 51, 59, 61, 69

valeur moyenne, 5, 20, 40, 60

## L

Limites, 11, 12, 15, 16, 19, 33, 34, 37, 38

**N**

Nombres complexes, 11, 19, 42, 57, 58

**P**

Parité, 26, 39, 57, 63

Périodicité, 26, 63

Polynômes

division, 9

factorisation, 15, 32

Primitives, 5, 21, 28, 30, 31, 38, 41, 49, 62

**R**

Représentation graphique, 48, 65

**T**

Tableau de variation, 48, 65

Théorème des accroissements finis, 8

**V**

Valeur absolue, 30, 47, 71