

Primitives et Calcul intégral

Séquence 1

Primitive d'une fonction continue

I) Pré-évaluation

Activité

On considère les fonctions numériques suivantes :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & G : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -3x^4 + 2x^3 - 7x + 2 & x &\mapsto -3x^4 + 2x^3 - 7x + 25 \\ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -12x^3 + 2x^2 - 7. \end{aligned}$$

Consigne :

- 1) a) Déterminer les domaines de définition des fonctions F , G et f notés respectivement D_F , D_G et D_f .
b) Etudier la continuité des fonctions F , G et f sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Déterminer les fonctions dérivées F' et G' .
b) Comment sont les fonctions f , F et G ? Que peux-tu conclure ?

Synthèse Partielle

Dans notre approche, la fonction f est la dérivée des fonctions F et G .

Réciproquement, on dit que F et G sont des primitives de f .

Définition

Soit F une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I .

On dit que F est une primitive de f si et seulement si

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

II) Situation Problème

Activité 1

Soit les fonctions numériques suivantes :

$$F : x \mapsto -3ax^4 + 26x^3 - cx^2 + 5x \text{ et } f : x \mapsto 6x^3 + 6x^2 - 12x + 5.$$

- 1) a) Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les réels a , b et c tels que F soit une primitive de f .
- 2) Soit m une constante réelle et on considère la fonction numérique G définie par :
$$G(x) = F(x) + m$$
 - a) Comparer les fonctions G' et f pour m prenant les valeurs : 2 ; $\sqrt{5}$.
 - b) Que représente la fonction G pour f pour m parcourant $\mathbb{R}$?
 - c) En déduire la primitive H de f qui s'annule en -2 .

Synthèse Partielle

Soit F une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I .

On retient :

Propriétés

P_1) Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une primitive sur I .

P₂) Si f est continue sur I alors elle admet une primitive qui est aussi continue sur I.

P₃) Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme

$$\mathbf{F(x) = C \text{ où } C = \text{constante.}}$$

P₄) Si f admet des primitives sur I alors il en existe une et une seule prenant la valeur de a en b.

Activité 2

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F sa primitive sur I.

On retient :

Fonction f	Primitive F, $c = \text{constante}$	Ensemble I
$a, a \in \mathbb{R}$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$ax^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{a}{x^n}, \ (n \in \mathbb{N} - \{0; 1\})$	$-\frac{a}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$(ax+b)^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{ax+b}, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + c$	$\{x \in \mathbb{R} / ax+b \geq 0\}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b), a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b), a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Propriété 2

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle de dérivées u' et v' , a et k des constantes réelles et $n \in \mathbb{N}$.

On retient :

Fonction f	Primitive $F, c = \text{constante}$	Ensemble I
$k \times u'$	$k \times u + c$	I
$u' + v'$	$u + v + c$	I
$u'v + uv'$	$u \times v + c$	I
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$	$\{x \in I / v(x) \neq 0\}$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	I
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	$\{x \in \mathbb{R} / u(x) \neq 0\}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$\{x \in I / u(x) > 0\}$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$	I
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$	I
$u'v'ou$	$vou + c$	I

Consigne :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur I en utilisant les propriétés ci-dessus :

1) $f(x) = -4x^3 + 3x - 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 5 ; I =]0 ; +\infty[$.

2) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x^2} ; I = \mathbb{R}^*$

3) $f(x) = \sqrt{2x+1} ; I =]-1/2 ; +\infty[$

4) $f(x) = (2x+4)(x^2+4x+5)^3 ; I = \mathbb{R}$.

5) $f(x) = \frac{-x+3/2}{(-x^2+3x-7)^3} ; I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} ; I =]-1 ; +\infty[$

7) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} ; I = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Synthèse Partielle

Les propriétés cidessus sont admises.

Activité 3

On considère la fonction f définie dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sin^4 x ; I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \cos^5 x \times \sin^{12} x ; I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \cos^3 x$ sur $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \cos 2x \times \sin 5x$ sur $I = \mathbb{R}$

Consigne :

Déterminer les primitives de la fonction f dans chacun des cas ci-dessus.

Synthèse Partielle

Soit $f : x \mapsto \sin^n x \times \cos^p x$ où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Et $g : x \mapsto \sin ax \times \cos bx$ où $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On retient :

- 1) Pour déterminer une primitive de f , on peut procéder comme suit :
 - a) si n et p sont tous pairs alors on linéarise $f(x)$.
 - b) si au moins l'un des exposants n ou p est impair (s) alors on décompose l'exposant impair utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- 2) Pour déterminer une primitive de g , on peut procéder comme suit :
 - a) si $a = b$ alors l'un des facteurs de $g(x)$ est la dérivée de l'autre.
 - b) si $a \neq b$ alors on linéarise $g(x)$.

Synthèse Générale

1°) Définition

Soit F une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I .
On dit que F est une primitive de f si et seulement si

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

2°) Propriétés

Soit F une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I .

P_1) Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une primitive sur I .

P_2) Si f est continue sur I alors elle admet une primitive qui est aussi continue sur I .

P_3) Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme

$$F(x) = C \text{ où } C = \text{constante.}$$

P_4) Si f admet des primitives sur I alors il en existe une et une seule prenant la valeur de a en b .

3°) Primitives des fonctions élémentaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F sa primitive sur I .

On retient :

Fonction f	Primitive $F, c = \text{constante}$	Ensemble I
$a, a \in \mathbb{R}$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$ax^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{a}{x^n}, (n \in \mathbb{N} - \{0; 1\})$	$-\frac{a}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$(ax+b)^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{ax+b}, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + c$	$\{x \in \mathbb{R} / ax+b \geq 0\}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b), a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b), a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
-------------------------------------	--------------	--

4°) Primitives des fonctions composées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle de dérivées u' et v' , a et k des constantes réelles et $n \in \mathbb{N}$.

On retient :

Fonction f	Primitive $F, c = \text{constante}$	Ensemble I
$k \times u'$	$k \times u + c$	I
$u' + v'$	$u + v + c$	I
$u'v + uv'$	$u \times v + c$	I
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$	$\{x \in I / v(x) \neq 0\}$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	I
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	$\{x \in \mathbb{R} / u(x) \neq 0\}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$\{x \in I / u(x) > 0\}$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$	I
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$	I
$u'v'ou$	$vou + c$	I

5°) Cas particulier

Soit $f : x \mapsto \sin^n x \times \cos^p x$ où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Et $g : x \mapsto \sin ax \times \cos bx$ où $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1) Pour déterminer une primitive de f , on peut procéder comme suit :

a) si n et p sont tous pairs alors on linéarise $f(x)$.

b) si au moins l'un des exposants n ou p est impair(s) alors on décompose l'exposant impair utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

2) Pour déterminer une primitive de g , on peut procéder comme suit :

a) si $a = b$ alors l'un des facteurs de $g(x)$ est la dérivée de l'autre.

b) si $a \neq b$ alors on linéarise $g(x)$.

IV) Evaluation

Exercice 1

On considère les fonctions numériques f et F définies par :

$$f(x) = x\sqrt{3-2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x} \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- 1) Déterminer les réels a , b et c pour que F soit une primitive de f sur $] -\infty ; 3/2]$.
- 2) En déduire la primitive G de f qui s'annule en -3 .

Exercice 2

Une culture de bactéries a un rythme de croissance (*exprimé en mm/jour*) et modélisé

par la fonction $C : t \mapsto C(t) = \frac{3000}{(1 + 0,25t)^2}$ où $t \in [0 ; +\infty[$ est le temps écoulé en

jours.

On admet que le rythme de croissance est la dérivée de la fonction population

$P : t \mapsto P(t)$ et au temps $t=0$, la culture compte 1000 bactéries.

- 1) a) Montrer que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $P(t) = \frac{-12000}{1 + 0,25t} + 13000$.

b) Déterminer le nombre de bactéries ainsi que le rythme de croissance au bout de 3 jours.

- 2) déterminer le jour au bout duquel le nombre de bactéries atteindra :

- a) 9 000 individus,
- b) 10 600 individus.

- 3) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$ puis donner une interprétation concrète de ce résultat.

Séquence 2

- Calcul Intégral
- Calcul d'aire

I) Pré-évaluation

Activité

Soit les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = 4x^3 - 2x \text{ et } g(x) = \sqrt{2x+1}.$$

Consigne :

- 1) a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
c) Calculer le réel $F(2) - F(1)$ puis conclure.
- 2) a) Montrer que f est définie et continue sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

b) Déterminer une primitive G de g sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

c) Calculer le réel $G(4) - G(1)$ puis conclure.

Synthèse partielle

a) Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I .

On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f le nombre réel : $F(b) - F(a)$.

b) Notation :

L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Dans cette notation : a et b sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de l'intégrale; x est la variable et peut être remplacée par toute autre lettre sauf a et b .

II) Situation Problème

Activité 1

On considère les fonctions numériques f , g et h définies par :

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}, g(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^3} \text{ et } h(x) = |8x^2 - 4x - 8| \text{ et on pose :}$$

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx, I_2 = \int_0^1 g(x) dx, I_3 = \int_{-3}^0 h(x) dx$$

$$\text{puis le réel } \mu = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(x) dx$$

Consigne :

1) a) Calculer : I_1 et μ .

b) Calculer $I_1 + I_2$

c) En déduire la valeur exacte de I_2 .

2) a) Montrer que $I_3 = 4 \times \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx$.

b) Écrire sur $\mathbb{R}$, l'expression $|x^2 - x - 2|$ sans le symbole de valeur absolue.

c) En déduire la valeur de I_3 .

Synthèse Partielle

On retient :

a) Propriétés de convergence :

✧ Si $\forall x \in I : f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

✧ Si $\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

b) Théorème de la moyenne :

S'il existe $(M, m) \in \mathbb{R}^2 /$

Si $\forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$D'où $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.$$

Le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé la moyenne de f sur $[a, b]$.

c) Relation de Chasles :

$\forall a \leq b \leq c$, on a :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

d) Linéarité de l'intégrale :

$\forall a \leq b$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a :

✧ $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$,

✧ $\int_a^b \alpha \times f(x) dx = \alpha \times \int_a^b f(x) dx$

Activité 2

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$f(x) = x^3 - x$ et $g(x) = 2x \sin 3x$ respectivement sur $[-2, 2]$ et $[-\pi, \pi]$ et on définit

les intégrales

$$I = \int_{-2}^2 (x^3 - x) dx, J = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 3x dx \text{ et } J' = \int_0^{\pi} 2x \sin 3x dx.$$

Technique d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I de dérivées respectives u' et v' .

On a :

$$\begin{aligned} \int (u'v + uv')(x) dx &= [u \times v](x) \Leftrightarrow \int (u'v)(x) dx + \int (uv')(x) dx = [u \times v](x) \\ &\Leftrightarrow \int (u'v)(x) dx = [u \times v](x) - \int (uv')(x) dx \end{aligned}$$

Consigne :

- 1) a) Montrer que f est impaire.
b) Calculer I
- 2) a) Montrer que g est paire.
b) En utilisant la technique d'intégration par parties, calculer J et J' .
(On posera $u(x) = 2x$ et $v'(x) = \sin 3x$).
c) Vérifier que $J = 2J'$

Synthèse Partielle

1) Propriétés

Dans cette partie f et g sont deux fonctions définies et continues sur I ,

$(a, b, c) \in I^3$ et $a < b < c$.

On retient :

$$\mathbf{P_1)} \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ et } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = 0$$

$$\mathbf{P_2)} \text{ Si } f \text{ est paire alors : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$\mathbf{P_3)} \text{ Si } f \text{ est impaire alors : } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

2) Technique d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I de dérivées respectives u' et v' .

On a :

$$\begin{aligned} \int (u'v + uv')(x) dx &= [u \times v](x) \Leftrightarrow \int (u'v)(x) dx + \int (uv')(x) dx = [u \times v](x) \\ &\Leftrightarrow \int (u'v)(x) dx = [u \times v](x) - \int (uv')(x) dx \end{aligned}$$

Activité 3

$$\text{On donne : } I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx \text{ et } J = \int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx.$$

Consigne

- 1) a) En posant $t = 4x + 1$, exprimer x en fonction de t puis dx en fonction de dt .
b) Trouver les valeurs de t pour $x = 0$ et $x = 2$.
c) En déduire la valeur de I .
- 2) a) En posant $s = x + 1$, exprimer x en fonction de s , dx en fonction de ds puis

$x + 2$ en fonction de s .

b) Trouver les valeurs de s pour $x = 0$ et $x = 3$.

c) En déduire la valeur de J .

Synthèse Partielle

Dans notre approche, on a calculé I et J en effectuant un changement de variable affine.

Soit f et g deux fonctions numériques où g est une fonction affine définie par $g(x) = ax + b$.

L'intégrale de la forme : $\int_m^n f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \times \int_{am+b}^{an+b} f(t) dt$ avec $t = ax + b$.

Activité 4

Soit f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $g(x) = x^2 - x + 2$ de courbes respectives C_f et C_g dans un repère

orthogonal d'unité graphique : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm suivant l'axe des ordonnées.

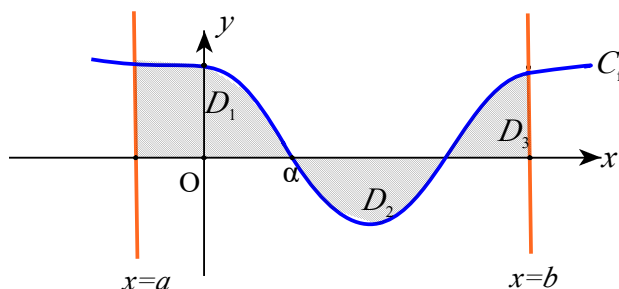
Consigne :

- 1) a) Dresser les tableaux de variation de f et de g .
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de C_f et C_g avec les deux axes du repère.
c) Étudier les positions relatives de C_f et C_g .
- 2) Construire C_f et C_g dans le même repère.
- 3) Déterminer l'aire :
 - a) du domaine D_1 du plan délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$ notée $A(D_1)$.
 - b) du domaine D_2 du plan délimité par C_f, C_g et les droites d'équations $x = 2$ et $x = -1$ notée $A(D_2)$.

Synthèse Partielle

Dans cette partie, $u(A)$ désigne l'unité d'aire du repère, (C_f) et (C_g) sont les courbes respectives des fonctions f et g intégrables sur l'intervalle $[a, b]$.

a) L'aire du domaine limité par une courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:



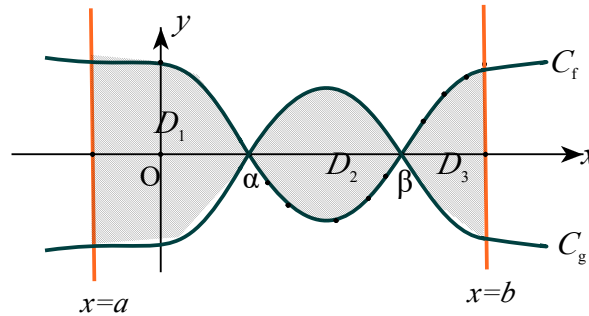
Posons $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Donc $A(D) = A(D_1) + A(D_2) + A(D_3)$.

D'où l'aire du domaine hachuré est :

$$A(D) = \left(\int_a^\alpha f(x) dx - \int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \right) \times u(A).$$

b) L'aire du domaine limité par deux courbes et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

Considérons la figure suivante :



Posons $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Donc $A(D) = A(D_1) + A(D_2) + A(D_3)$.

D'où l'aire du domaine hachuré est :

$$A(D) = \left(\int_a^\alpha [f(x) - g(x)] dx + \int_\alpha^\beta [g(x) - f(x)] dx + \int_\beta^b [f(x) - g(x)] dx \right) \times u(A).$$

Activité 5

Soit $K = \int_0^1 \frac{1}{4+x^2} dx$.

1) Etudier les variations de la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{4+x^2}.$$

2) En posant $a=0$ et $b=1$, en voulant partager l'intervalle $[0; 1]$ en cinq intervalles de même amplitude :

Calculer la largeur de chaque intervalle $\alpha = \frac{b-a}{5}$ et les extrémités respectives $x_0 = a$,

$$x_1 = x_0 + \alpha, x_2 = x_1 + \alpha, \dots, x_5 = x_4 + \alpha = b.$$

3) On pose

$$K_1 = \frac{b-a}{5} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_4)] \text{ et } k_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_5)]$$

a) Sans calculer K_1 et K_2 comparer-les.

b) Calculer K_1 et K_2 puis en déduire une valeur approchée de K .

Synthèse Partielle

Propriétés :

P_1) Lorsqu'on partage l'intervalle en n intervalles de même amplitudes $\alpha = \frac{b-a}{n}$ et dont les

extrémités sont : $x_0 = a, x_1 = x_0 + \alpha, x_2 = x_1 + \alpha, \dots, x_n = b$.

Les valeurs approchées de k sont :

$$k_1 = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \text{ et } k_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

P_2) L'erreur e commise sur le calcul de k est telle que :

$$e \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2 \text{ où}$$

n est le nombre de rectangles et M un majorant de $|f'(x)|$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M.$$

Remarque :

- ◆ Si f est croissante sur $[a, b]$ alors $k_1 \leq k \leq k_2$.
- ◆ Si f est décroissante sur $[a, b]$ alors $k_2 \leq k \leq k_1$.
- ◆ Si f n'est pas monotone sur $[a, b]$ alors on ne peut trouver un encadrement de k .

III) Synthèse Générale

1) Intégrale d'une fonction continue

a) Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I .

On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f le nombre réel : $F(b) - F(a)$.

b) Notation :

L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Dans cette notation : a et b sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de l'intégrale; x est la variable et peut être remplacée par toute autre lettre sauf a et b .

N.B :

- ✓ La fonction définie sur I par $\int_a^x f(t) dt$ désigne la primitive de la fonction f sur I et qui s'annule en a .
- ✓ La fonction définie sur I par $\int f(t) dt$ désigne l'ensemble des primitives de f sur I .

2) Propriétés

a) Dans cette partie f et g sont deux fonctions définies et continues sur I , $(a, b, c) \in I^3$ et $a < b < c$.

On retient :

$$\mathbf{P_1)} \int_a^x f(x) dx = 0 \text{ et } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = 0$$

$$\mathbf{P_2)} \text{ Si } f \text{ est paire alors : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$\mathbf{P_3)} \text{ Si } f \text{ est impaire alors : } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\mathbf{P_4)} \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$$

b) Propriétés de convergence :

- ✧ Si $\forall x \in I : f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.
- ✧ Si $\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

c) Théorème de la moyenne :

S'il existe $(M, m) \in \mathbb{R}^2 /$

$$\text{Si } \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$D'où m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé la moyenne de f sur $[a, b]$.

d) Relation de Chasles :

$\forall a \leq b \leq c$, on a :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

e) Linéarité de l'intégrale :

$\forall a \leq b$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\diamond \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ,$$

$$\diamond \int_a^b \alpha \times f(x) dx = \alpha \times \int_a^b f(x) dx$$

3) Technique d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I de dérivées respectives u' et v' .

On a :

$$\int (u'v + uv')(x) dx = [u \times v](x) \Leftrightarrow \int (u'v)(x) dx + \int (uv')(x) dx = [u \times v](x)$$

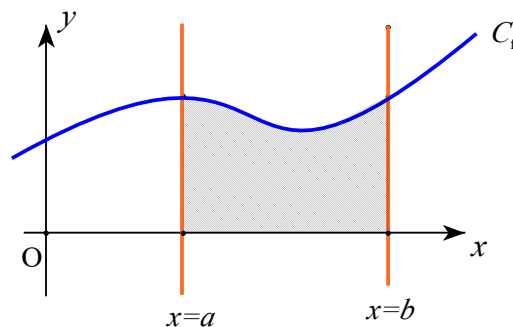
$$\Leftrightarrow \int (u'v)(x) dx = [u \times v](x) - \int (uv')(x) dx$$

Calcul d'aire

Dans cette partie, $u(A)$ désigne l'unité d'aire du repère, (C_f) et (C_g) sont les courbes respectives des fonctions f et g intégrables sur l'intervalle $[a, b]$.

a) L'aire du domaine limité par une courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

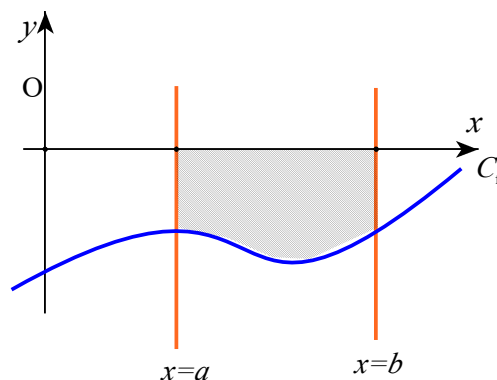
1^{er} cas :



L'aire du domaine D hachurée est :

$$A(D) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \times u(A).$$

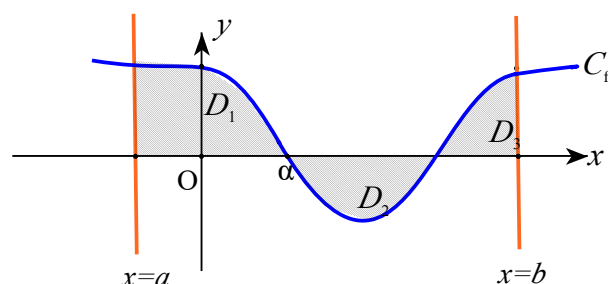
2^{ème} cas :



L'aire du domaine D hachuré est :

$$A(D) = \left(- \int_a^b f(x) dx \right) \times u(A).$$

3^{ème} cas :



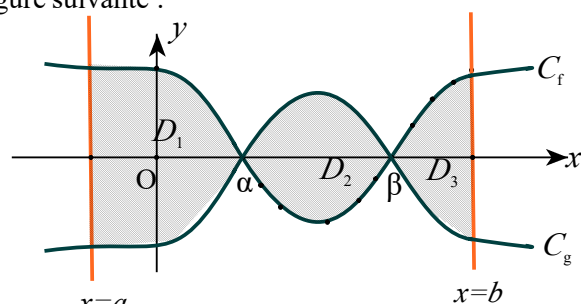
Posons $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Donc $A(D) = A(D_1) + A(D_2) + A(D_3)$.

D'où l'aire du domaine hachuré est :

$$A(D) = \left(\int_a^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \right) \times u(A).$$

b) L'aire du domaine limité par deux courbes et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

Considérons la figure suivante :



Posons $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Donc $A(D) = A(D_1) + A(D_2) + A(D_3)$.

D'où l'aire du domaine hachuré est :

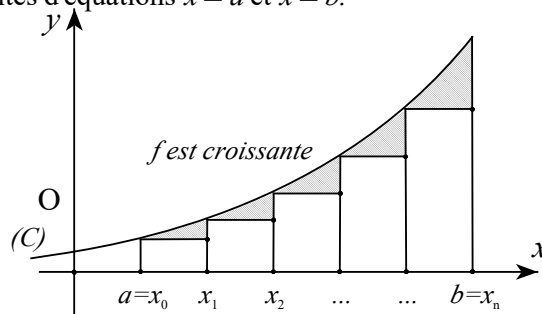
$$A(D) = \left(\int_a^\alpha [f(x) - g(x)] dx + \int_\alpha^\beta [g(x) - f(x)] dx + \int_\beta^b [f(x) - g(x)] dx \right) \times u(A).$$

4°) Valeur approchée d'une intégrale : Méthode des rectangles

a) Généralités :

Soit f une fonction intégrable et dérivable sur $[a; b]$, de courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On rappelle que $k = \int_a^b f(x) dx$ désigne l'aire du domaine du plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Lorsque f ne possède pas de primitive connue sur $[a; b]$ alors, on détermine une valeur approchée de k .

b) Propriétés :

P₁) Lorsqu'on partage l'intervalle en n intervalles de même amplitudes $\alpha = \frac{b-a}{n}$ et dont les extrémités sont : $x_0 = a, x_1 = x_0 + \alpha, x_2 = x_1 + \alpha, \dots, x_n = b$.

Les valeurs approchées de k sont :

$$k_1 = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \text{ et } k_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

P₂) L'erreur e commise sur le calcul de k est telle que :

$$e \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2 \text{ où}$$

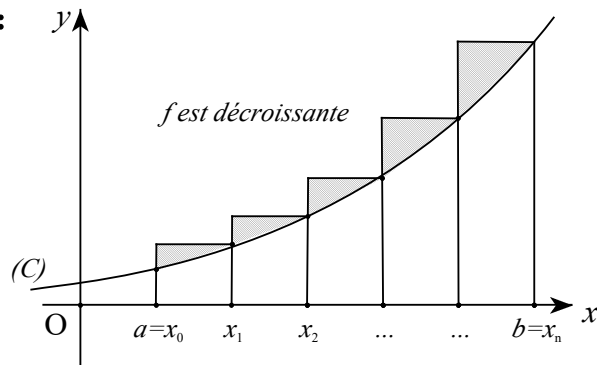
n est le nombre de rectangles et M un majorant de $|f'(x)|$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M.$$

Remarque :

- ◆ Si f est croissante sur $[a, b]$ alors $k_1 \leq k \leq k_2$.
- ◆ Si f est décroissante sur $[a, b]$ alors $k_2 \leq k \leq k_1$.
- ◆ Si f n'est pas monotone sur $[a, b]$ alors on ne peut trouver un encadrement de k .

Illustrations graphiques :



$$k_1 = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \text{ et } k_1 \leq k \text{ avec } k = \int_a^b f(x) dx.$$

$$k_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \text{ et } k \leq k_2 \text{ avec } k = \int_a^b f(x) dx.$$

IV) Evaluation

Exercice 1

En utilisant la technique d'intégration par parties, déterminer l'ensemble des primitives de f

et g définies par : $f(x) = x \cos 2x$ et $g(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}$.

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx ; I_2 = \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx ; I_3 = \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 3x) dx ; I_4 = \int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx .$$

Exercice 3

On pose $I = \int_0^{\pi/2} (2x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} (2x+1) \sin^2 x dx$.

- 1) Calculer : $I + J$ puis $I - J$.
- 2) En déduire les valeurs de I et de J .

Exercice 4

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

- 1) Calculer I_0 .
- 2) a) En utilisant la technique d'intégration par parties, établir que :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+3) I_n = (2n) I_{n-1}$.
- b) En déduire I_1 et I_2 .

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dx$ et $J'_n = \int_0^1 (t^2 - 1)^n dx$

- 1°) Sans calculer J_n , montrer l'existence de J_n .
- 2°) a) Discuter suivant les valeurs de n le signe du nombre réel J_n .
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : J_n = 2.J'_n$

3°) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^* : J_n = \frac{-2n}{1+2n} \times J_{n-1}$.

- 4°) a) Calculer J_1 .
- b) En déduire J_2 .

Exercice 6

Soit $f : [-3 ; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ et $(D) : y = x + 2$
 $x \mapsto x^2 + x - 2$

On désigne par C_f la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité graphique : 2cm sur (Ox) et 1cm sur (Oy) .

- 1) Dresser le tableau de variation de f sur $[-3 ; 2]$.
- 2) a) Préciser les points d'intersections de C_f avec les axes du repère sur $[-3 ; 2]$.
- b) Etudier les positions relatives de C_f et (D) sur $[-3 ; 2]$.
- 3) Construire C_f et (D) dans le même repère.
- 4) Calculer l'aire en cm^2 , domaine :

- a) D_1 du plan limité par C_f , l'axe des abscisses et les équations $x = -3$ et $x = 2$.
- b) D_2 du plan limité par C_f , la droite (D) les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

Exercice 7

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} \, dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{3+x} \, dx$.

- 1) a) Calculer I_0 .
- b) En utilisant la technique d'intégration par parties, calculer I_1 .
- 2) a) $\forall x \in [0; 1]$, comparer x^{n+1} et x^n .
- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.
- c) Établir que $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

Exercice 8

Soit les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$.

- 1) Calculer I.
- 2) Soit la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.
- a) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.
- b) En déduire une relation entre I et J.
- c) Calculer J.