

I– Primitives d'une fonction numérique :

1- Activité : Soit la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$; trouver une fonction F telle que pour tout x élément de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, $F'(x) = f(x)$.

--- 0 ---

$$F : x \mapsto F(x) = x^2 + 3x + 1.$$

On dit que F est une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$.

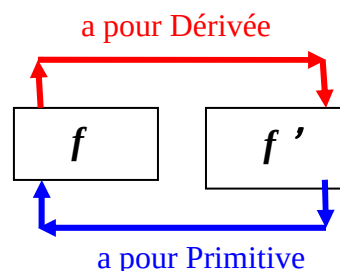
2- Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie non vide $[a ; b]$ de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction primitive** de f sur $[a ; b]$, toute **fonction F** telle que :

$$\forall x \in [a ; b], F'(x) = f(x).$$

3- Notations: $\text{Prim}_{[a;b]} f = F$ ou $\int f(x)dx = F(x)$; .

$$[\text{Prim } f = F] \Leftrightarrow [\forall x \in [a ; b], F'(x) = f(x)]$$



4- Remarques :

- Si f est continue sur $[a ; b]$ alors sa primitive F est continue sur $[a ; b]$ (car F est dérivable sur $[a ; b]$).
- Les fonctions qui à $x \mapsto F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) sont appelées **les primitives de f** sur $[a ; b]$

5- Théorème (admis) :

- Si F est une primitive de f sur $[a ; b]$, toute autre primitive G de f sur $[a ; b]$ est de la forme : $G(x) = F(x) + C$.
- Si f admet de primitives sur $[a ; b]$, il en existe une et une seule prenant au point x_0 donné une valeur y_0 donnée.

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos x$. Trouver la primitive F de f qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{4}$ et celle qui prend la valeur 2 pour $x = \frac{3\pi}{4}$.

6- Propriétés :

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a ; b]$; F et G leurs primitives respectives sur $[a ; b]$.

- $\text{Prim}(f+g) = \text{Prim}(f) + \text{Prim}(g) = F + G + C^{\text{ste}}$.
- Soit α un réel, $\text{Prim}(\alpha f) = \alpha \text{Prim}(f)$.
- $\text{Prim}(f' \times g) = [f \times g] - \text{Prim}(f \times g')$ (*appelée Formule de primitivation par parties*).

Exemple : Trouver les primitives de f définie par $f(x) = x \sin x$.

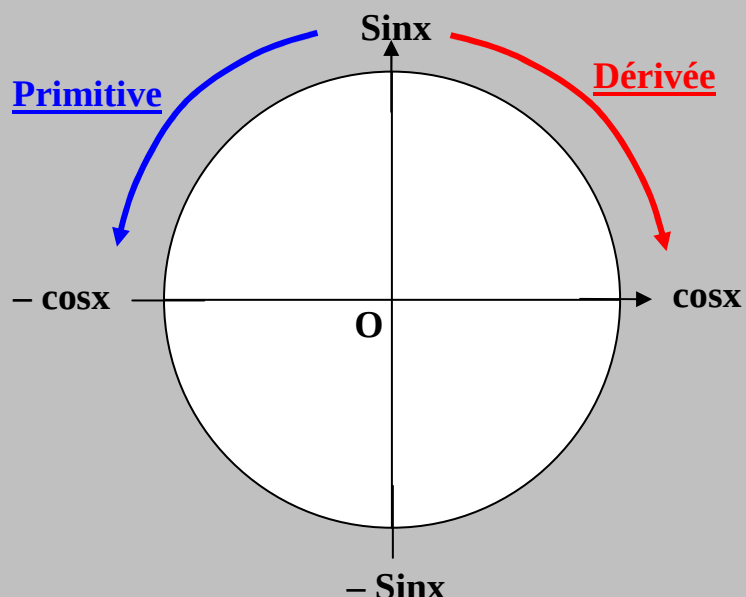
7- Calcul de Primitives :

a) **Primitives de fonctions usuelles:** Soient f ; u et v des fonctions numériques.

Fonctions f définies par	Fonctions Primitives F
$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$f(x) = a$	$F(x) = a x + c$
$f(x) = a x^n$	$F(x) = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + c$
$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = (x-a)^m ; m \neq -1$	$F(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + c$
$F(x) = (k x - a)^m ; m \neq -1$	$F(x) = \frac{(k x - a)^{m+1}}{k(m+1)} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln u(x) + c ; u(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)} + c ; u(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2}$	$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + c ; v(x) \neq 0$
$f(x) = u'(x) \cdot u^n(x)$	$F(x) = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c ; n \neq 1$

b) Primitives de fonction circulaires :

N.B : Cette nouvelle technique que je mets à votre disposition vous permettra de retenir le plus simplement possible la dérivée et la primitive des fonctions Sinus et Cosinus



Fonction f définies par	Fonctions Primitives F
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax + b)}$	$F(x) = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$F(x) = -\cot x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2(ax + b)}$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$

c) Cas divers :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos 2x \sin 3x ; \quad h(x) = \cos^4 x ; \quad f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}.$$

(Méthodes utilisées: linéarisation, transformations trigonométriques)

$$f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \times \tan^2 x \quad \text{d'où}$$

$$F(x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + c$$

d) Primitives de $\sin^n x \times \cos^p x$ où n et p sont des entiers naturels non nuls :

- Si n ou p est impaire : $f(x) = \cos^5 x \sin^8 x$.

(prendre la puissance impaire $\cos^5 x = \cos x \cos^4 x$) ;
d'où $f(x) = \cos x \sin^8 x - 2 \cos x \sin^{10} x + \cos x \sin^{12} x$ et on a

$$F(x) = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{13} \sin^{13} x + c.$$

- Si n et p sont paires : (utiliser les relations suivantes)

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} ; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} ; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Exemples : $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$; $h(x) = \sin^2 x \cos^2 x$.

II – Calcul Intégral :

1- Définition : Soit F une primitive d'une fonction f sur $[a ; b]$.
On appelle **intégrale définie** de f sur $[a ; b]$ le réel noté :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a) .$$

2- Théorèmes : on admettra les théorèmes suivants

- a) Théorème 1: Toute fonction continue sur $[a ; b]$ est intégrable sur $[a ; b]$.
- b) Théorème 2: Toute fonction monotone et bornée sur $[a ; b]$ est intégrable sur $[a ; b]$.

3- Propriétés :

- a) $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt ;$
- b) $\int_a^a f(t)dt = 0 ;$
- c) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt ;$
- d) $\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt ;$
- e) $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt ;$
- f) Si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$; alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0 ;$
- g) Si $f \geq g$ sur $[a ; b]$; alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt ;$
- h) $\int_a^b f'(t)dt = \left[f(t) \right]_a^b = f(b) - f(a) .$

4- Définition :

On appelle **moyenne de l'intégrale sur $[a ; b]$** le nombre :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt .$$

5- Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables donc continues sur $[a ; b]$.

$(u v)' = u'v + v'u \Leftrightarrow \text{Prim}(u'v) = [uv] - \text{Prim}(uv')$ donc pour tout $x \in [a ; b]$,
on a :

La formule d'intégration par parties

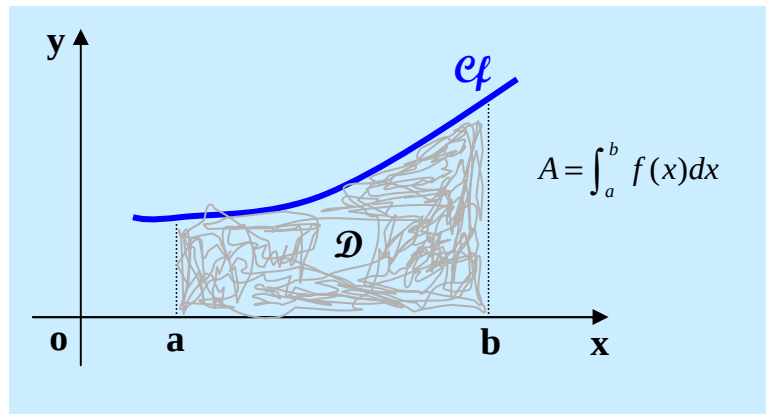
$$\int_a^b U(x) \times V'(x) dx = \left[U(x) \times V(x) \right]_a^b - \int_a^b U'(x) \times V(x) dx .$$

Exemples : Soient $I = \int_0^x t \cos t dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

III – Applications du Calcul Intégral :

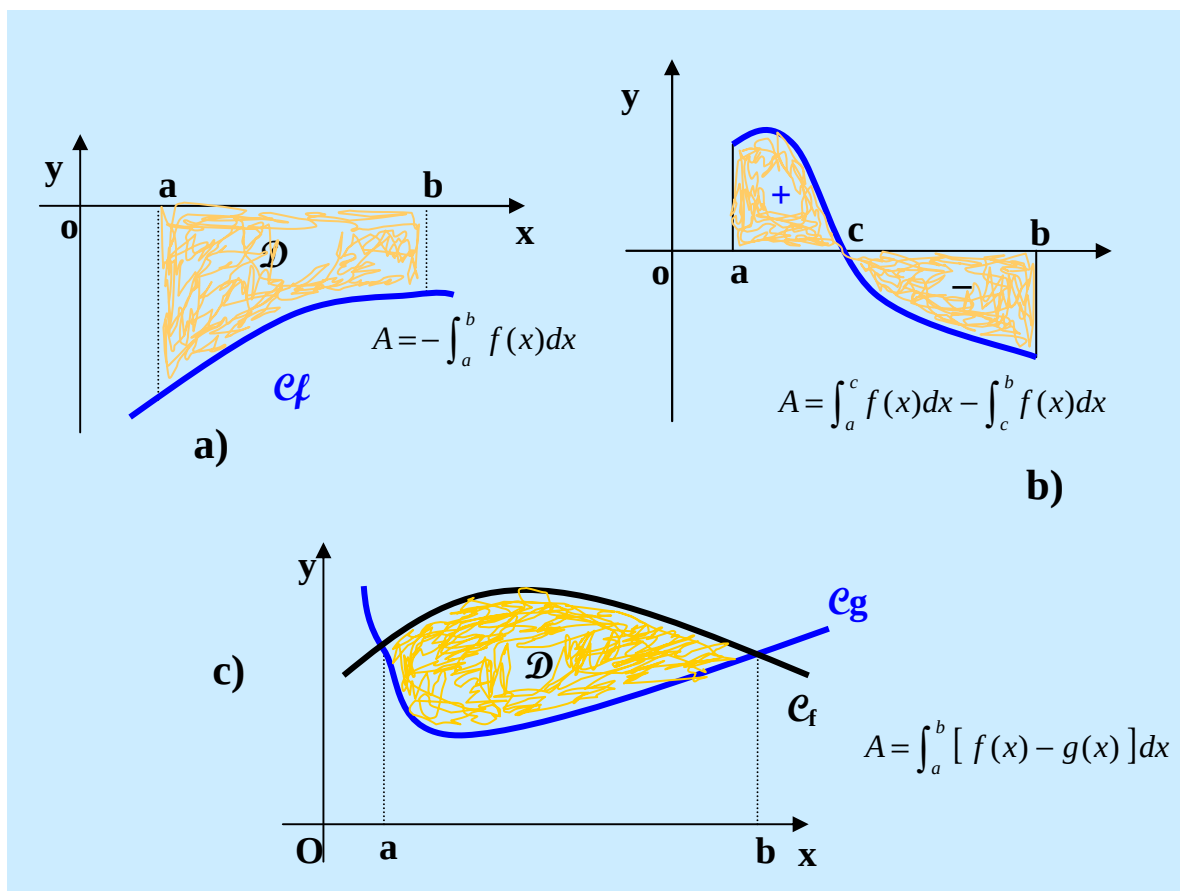
1. Calcul d'aires :

Si f est intégrable et positive sur $[a ; b]$, $\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$; $x = b$ et la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f sur $[a ; b]$.



2- Conséquences :

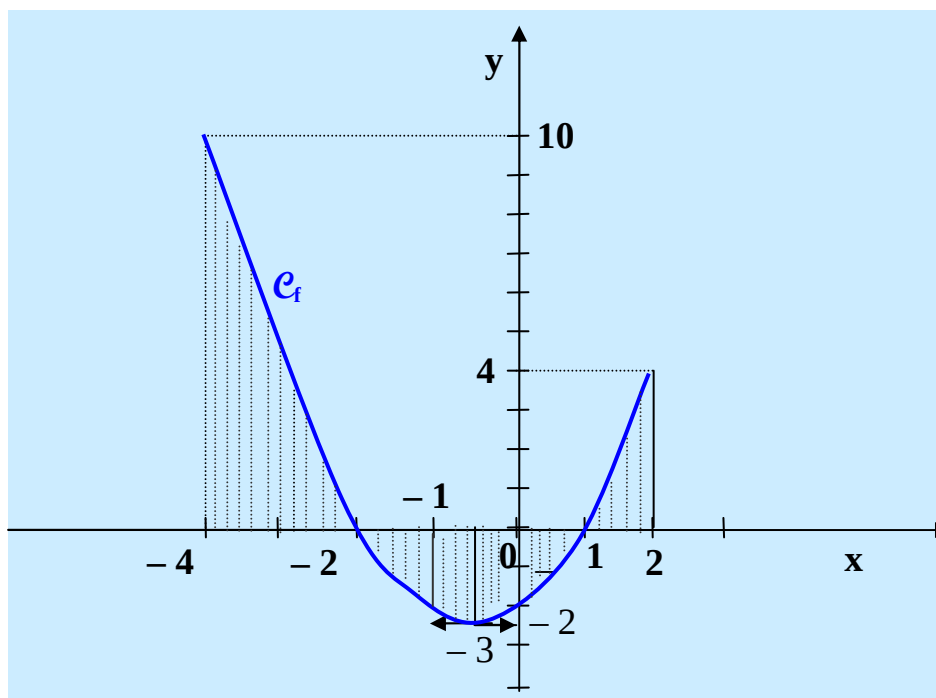
Les configurations ci-dessous nous donnent les aires des domaines $\mathcal{D}$.



Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[-4 ; 2]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

Déterminer l'aire A du domaine limité par l'axe des abscisses les droites d'équations $x = -4$; $x = 2$ et par la courbe (C_f) de f .

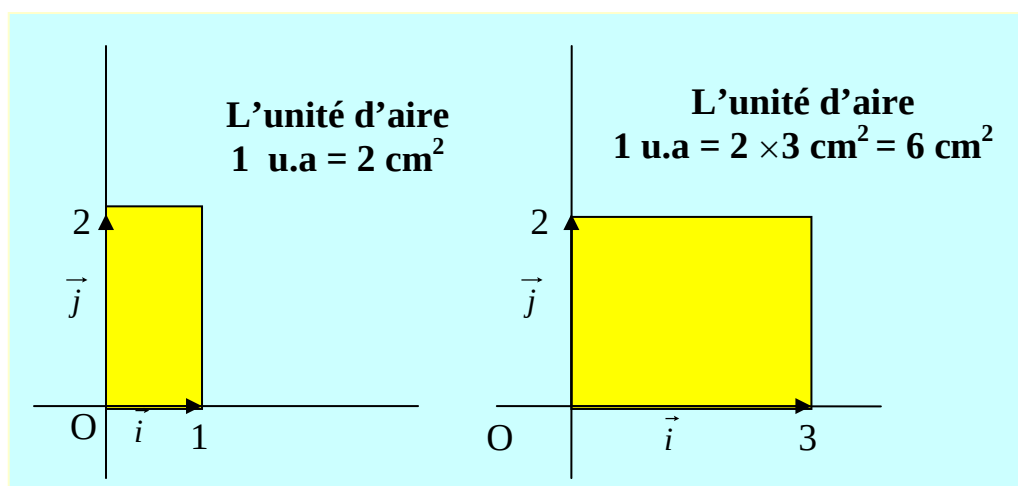


f est positive sur $[-4 ; 2]$ et sur $[1 ; 2]$; f est négative sur $[-2 ; 1]$; On a :

$$A = \int_{-4}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 15 \text{ u.a.}$$

3- Unité d'aire :

L'aire d'un domaine est mesurée en **unité d'aire (U.a)**.

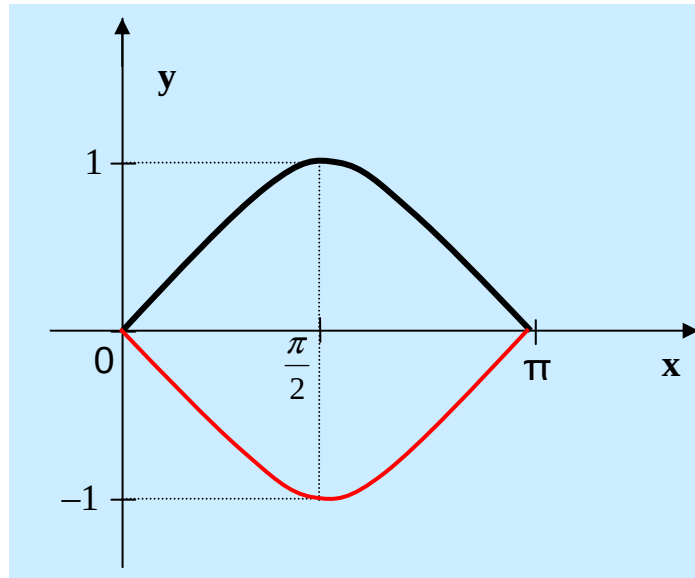


4- Volume d'un solide de révolution :

a) **Théorème 3** : Le volume engendré par une aire plane limitée par l'axe $(x'ox)$, les droites d'équations $x = a$; $x = b$ ($a < b$) et l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ est donné la formule :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

b) **Exemple** : Le volume limité par l'arc de sinuséide d'équation $y = \sin x$, $x \in [0 ; \pi]$ tournant autour de l'axe (ox) .



$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

IV – Changement de variable affine :

Soient f et g deux fonctions où g est une fonction affine définie par $g(x) = ax + b$.

L'intégrale de la forme : $\int_m^n f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{am+b}^{an+b} f(u) du$

En effet en posant : $u = ax + b$ alors $du = a dx$ et $dx = \frac{1}{a} du$.

Cherchons les nouvelles bornes

$$u = ax + b \quad \begin{cases} \text{Si } x = m & \text{alors } u = am + b \\ \text{Si } x = n & \text{alors } u = an + b \end{cases}$$

Exemple :

Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$. On pose $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx$ et $dx = \frac{1}{2} du$.

$2x = u - 1 \Rightarrow x = \frac{u-1}{2}$. Donc cherchons les nouvelles bornes :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 & \text{alors } u = 1 \\ \text{Si } x = 1 & \text{alors } u = 3 \end{cases} \quad \text{par suite on obtient } I = \frac{1}{3}$$

V – Valeur approchée d'une intégrale (méthode des rectangles) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $[a ; b] \subset I$.

Supposons que f ne possède pas de primitives connues.

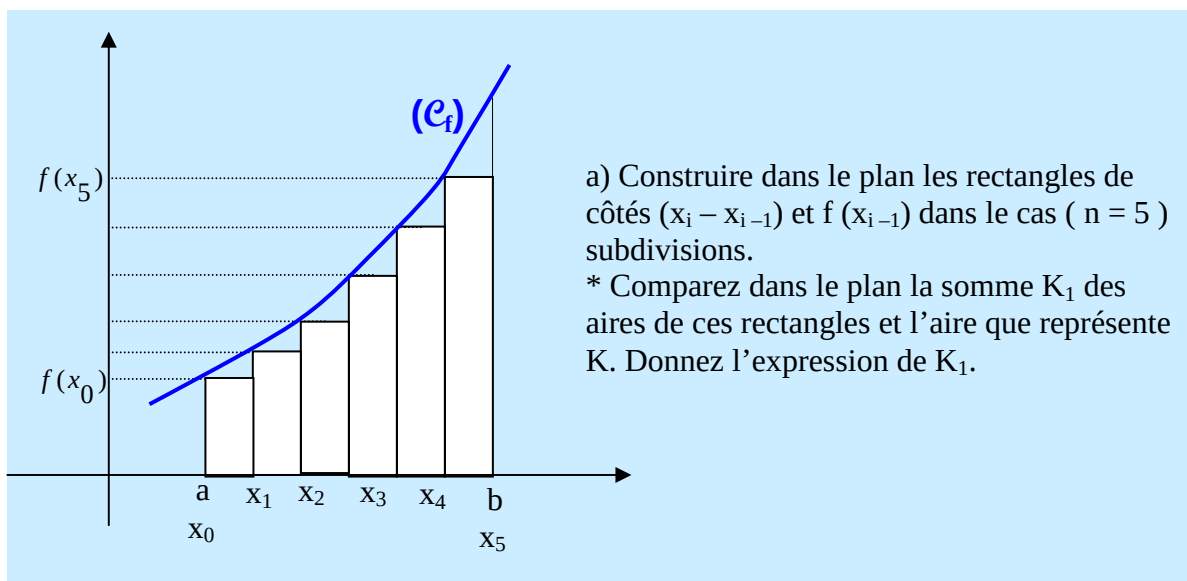
Cherchons une valeur approchée de $K = \int_a^b f(t)dt$.

Activité 1 : Partageons $[a ; b]$ en n intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$ (ou n subdivisions égales). Déterminer les bornes : $x_0 ; x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ de ces intervalles.

Réponses:

$$x_0 = a ; x_1 = a + \frac{b-a}{n} ; x_2 = a + 2\frac{(b-a)}{n} ; \dots ; x_i = a + i \frac{(b-a)}{n} ; x_n = a + n \frac{(b-a)}{n} = b .$$

Activité 2 : f est donnée par sa représentation graphique ci-dessous.

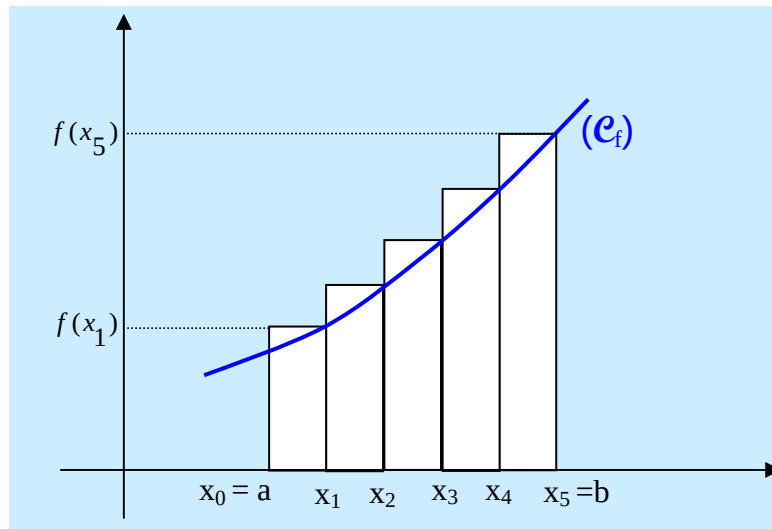


Réponses : $K_1 \leq K$ et $K_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_{i-1})$.

Posons $j = i - 1$

$$\begin{cases} \text{pour } i=1, & j=0 \\ \text{pour } i=n, & j=n-1 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Leftrightarrow K_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \text{ car } i \text{ et } j \text{ sont des variables muettes.}$$

b) même questions pour les rectangles de côtés $(x_i - x_{i-1})$ et $f(x_i)$.



$$K \leq K_2 ;$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i) \Leftrightarrow K_2 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) .$$

c) Donner un encadrement de K .

$$K_1 \leq K \leq K_2 \quad \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) .$$

On dit que K_1 et K_2 sont deux valeurs approchées de K obtenues par la méthode des rectangles.

Remarque :

Si f est monotone sur $[a ; b]$ ces deux valeurs approchées réalisent un encadrement de K . Par contre si f n'est pas monotone ce n'est plus le cas. (on ne pas préciser laquelle des deux valeurs K_1 ou K_2 est la meilleur valeur approchée de K). Ceci nous amène à étudier l'erreur commise en remplaçant K par l'une de ces valeurs approchées.

L'erreur e commise est telle que : $|e| \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}$, où M est un majorant de $|f'(x)|$ sur $[a ; b]$ et n le nombre de subdivisions.

Exemple : Soit à calculer $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Donner un encadrement de K puis une valeur approchée de K en utilisant la méthode des rectangles pour $n = 10$ subdivisions.

---- 0 ----

Posons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $0 \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(1)$ donc f est décroissante sur $[0 ; 1]$ et on a :

$$K_2 \leq K \leq K_1. \text{ Pour } n = 10 \text{ on a : } \frac{1}{10} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Posons $d_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $f(x_i)$.

Et $e_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par excès de $f(x_i)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totaux
x_i	0	1/10	2/10	3/10	4/10	5/10	6/10	7/10	8/10	9/10	1	
$d_2(f(x_i))$		0,99	0,96	0,91	0,86	0,80	0,73	0,67	0,60	0,55	0,50	7,57
$e_2(f(x_i))$	1	1	0,97	0,92	0,87	0,81	0,74	0,68	0,61	0,56		8,16

$$K_2 = \frac{1}{10} \times 7,57 = 0,757 ; \quad K_1 = \frac{1}{10} \times 8,16 = 0,816.$$

D'où l'encadrement de K est : $0,757 \leq K \leq 0,816$.

Donc une valeur approchée de K est :

$$K = \frac{K_2 + K_1}{2} = 0,7865 ; \quad K \approx 0,79 \text{ à } 10^{-2} \text{ près (arrondi d'ordre 2).}$$

---- 0 ----

$$K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx ; \text{ posons } x = \tan \alpha \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha.$$

$$x^2 = \tan^2 \alpha \Rightarrow 1 + x^2 = 1 + \tan^2 \alpha.$$

$$\text{Nouvelles bornes : } x = \tan \alpha \begin{cases} \text{si } x=0 \text{ alors } \tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \text{Si } x=1 \text{ alors } \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où } K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha = [\alpha]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} = 0,785 \approx 0,79.$$

VI – Majoration de l'intégrale d'une fonction continue :

1) Théorème : Supposons $a < b$ et f une fonction continue sur $[a ; b]$.

$$\text{Alors on a : } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Preuve

En effet nous avons : $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ d'où par croissance de l'intégrale $\int_a^b -|f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$ or $\int_a^b -|f(t)| dt = -\int_a^b |f(t)| dt$ donc $-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$ d'où $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$

2) Inégalité de la moyenne :

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , m et M des nombres réels, a et b des éléments de I .

- Si $m \leq f \leq M$ sur I et si $a \leq b$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) ;$

- Si $|f'| \leq M$ sur I alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b-a).$