

Chapitre

4

DERIVATION - PRIMITIVES

I . Dérivabilité - Rappels

II . Fonctions dérivées - Opérations sur les fonctions dérivables

III. Théorème des accroissements finis

IV . Dérivée seconde - Point d'inflexion

V . Primitives



Gottfried Wilhelm Leibniz
(Leibzig 1646-Hanovre 1716)

Newton et Leibniz font naissance du calcul différentiel et primitives

I. Dérivabilité - Rappels

Activités préliminaires

Activité 1:

On donne la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4$

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$; $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h}$

et en déduire que f est dérivable aux points 2 et -1.

Déterminer $f'(2)$ et $f'(-1)$

b) La fonction $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est elle dérivable au point 1? Justifier.

$$x \longmapsto |x^2 - 1|$$

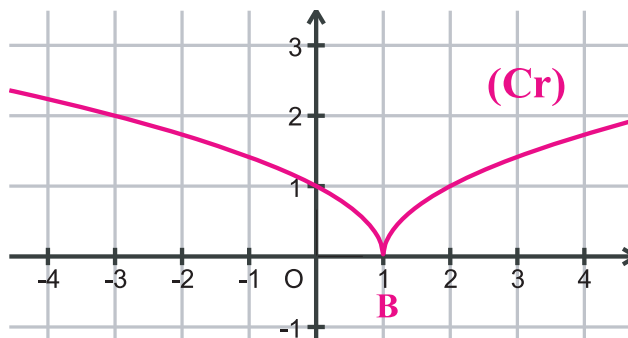
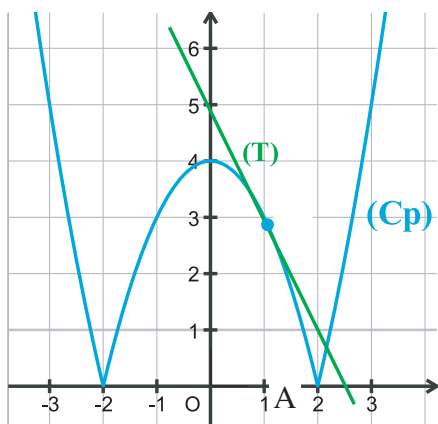
c) La fonction $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est elle dérivable au point 0? Justifier.

$$x \longmapsto \sqrt{|x|}$$

Activité 2 :

On donne les fonctions $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et leurs représentations graphiques.

$$x \longmapsto |x^2 - 4| \quad x \longmapsto \sqrt{|x - 1|}$$



1) Déterminer l'équation de la tangente T à C_p au point d'abscisse 1

2) a) Montrer que p n'est pas dérivable au point 2

b) Déterminer le nombre dérivé à droite de p au point 2 et le nombre dérivé à gauche de p au point 2

c) Trouver les équations des deux demi - tangentes à la courbe C_p au point A d'abscisse 2 et les construire

3) a) La fonction r est elle dérivable à droite au point 1? à gauche au point 1?

b) Existe-t-il une demi - tangente à la courbe C_r au point B d'abscisse 1?

A retenir

Dérivabilité en un point

• Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dite dérivable en $x_0 \in I$ si : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ (Limite finie)

• Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de f en x_0 ou dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

• Autrement dit $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Dérivabilité à droite et dérivabilité à gauche en un point

• Une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, a[$ ($x_0 < a$) est dérivable à droite en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ (Limite finie)

Cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0 et est notée : $f'_d(x_0)$

• Une fonction définie sur un intervalle du type $]a, x_0]$ ($a < x_0$) est dérivable à gauche en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ (limite finie)

Cette limite est appelée dérivée à gauche de f en x_0 et est notée : $f'_g(x_0)$

• Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite en x_0 , à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Théorème (admis)

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .

Equation cartésienne de la tangente

• Si f est dérivable au point x_0 , alors sa courbe représentative admet une tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ qui a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

• Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 , alors sa courbe représentative admet une demi - tangente à droite (resp. à gauche) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \quad (\text{resp.} \quad \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases})$$

Dérivabilité sur un intervalle

• Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle ouvert I , on dit que f est dérivable sur I .

• Lorsque f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b , on dit que f est dérivable sur $[a, b]$.

De la même manière on définit la dérivabilité d'une fonction f sur $[a, b[$; $]a, b]$; $[a, +\infty[$; $] -\infty, a]$,...

- 1 Répondre par "vrai" ou "faux" :
- Si f est dérivable en x_0 , alors elle est continue en x_0
 - Si f est continue en x_0 , alors elle est dérivable en x_0
 - Si f n'est pas continue en x_0 , alors elle n'est pas dérivable en x_0
 - Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 , alors elle est dérivable en x_0
 - Si f est dérivable en x_0 , alors elle est dérivable à droite en x_0
 - Si f admet une tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ alors, f est dérivable au point x_0
- 2 Etudier la dérivabilité à droite, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité au point 1 de la fonction f dans chacun des cas suivants:
- $$\begin{cases} f(x) = -2 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
- 3 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ est dérivable en 0
- 4 Trouver la (ou les) réponse(s) exacte(s)
- Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - Une équation de la tangente à la courbe C_f au point $A(1,1)$ est :
 $y = -x + 1$ $y = x$ $y = x + 1$
 - La pente de la tangente au point B d'abscisse -2 est :
☐ -1 ☐ 21 ☐ 16
 - Un vecteur directeur de la tangente à C_f au point C d'abscisse -1 est
☐ $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$
 - La fonction $x \mapsto |x-2|$ est dérivable sur
☐ $\mathbb{R}$ ☐ $] -\infty, 2[$ ☐ $[2, +\infty[$

II. Fonction dérivée - Opérations sur les fonctions dérivables

Activités préliminaires

Activité 1 :

En utilisant la formule $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$$f(x) = \sqrt{2x} - 1 ; \quad g(x) = -\frac{3}{x} ; \quad h(x) = \sqrt{x-3} \quad \text{et} \quad k(x) = x^2 - 3x + 1$$

Activité 2 :

En utilisant les théorèmes portant sur les dérivées de la somme, produit, quotient, ... de fonctions calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = 3x^4 - 2\sin x$; b) $f(x) = \frac{1}{x} + \cos 2x - 3$; c) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$
 d) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+5}$; e) $f(x) = \sqrt{4x+1}$; f) $f(x) = (x^2-1)^3$

Activités de découverte

Activité 1 :

On donne les fonctions suivantes:

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$$

a) Vérifier que $h = g \circ f$

b) Calculer $f'(x)$; $g'(x)$; $h'(x)$ puis $g'(f(x))$

c) Vérifier que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

d) Montrer que la dernière égalité reste vraie pour le cas suivant : $f(x) = 2x$; $g(x) = \sin x$

e) Appliquer le résultat trouvé dans c) pour $h(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I

Activité 2 :

1) Soit la fonction $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et soit $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sa bijection réciproque

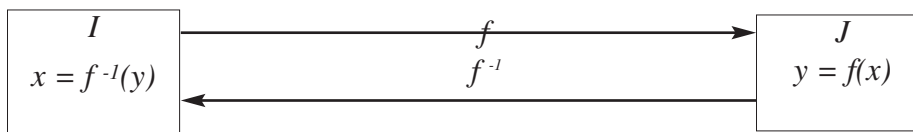
$$x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto \sqrt{x}$$

a) Calculer $f'(x)$ et $(f^{-1})'(x)$ pour $x \neq 0$

b) Calculer $f'(2) \times (f^{-1})'(4)$ et $f'(3) \times (f^{-1})'(9)$

c) Pour tout $a \neq 0$, calculer $f'(\sqrt{a}) \times (f^{-1})'(a)$. Que remarque-t-on ?

2) Soit f une bijection d'un intervalle I sur J et f^{-1} sa bijection réciproque



On suppose que f est dérivable sur I , et on admet que si au point x de I , $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point $y = f(x)$.

a) Montrer que pour tout $x \in I$, on a: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

b) En déduire que l'on a : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

c) x étant un élément de J tel que $(f^{-1})'(x)$ existe, montrer que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

A retenir

Fonction dérivée

f étant une fonction dérivable sur un intervalle I , la fonction dérivée de f notée f' est la fonction définie sur I et qui à tout réel x de I , associe $f'(x)$

Opérations sur les fonctions dérivables

• f et g étant deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel, les fonctions λf , $f + g$ et fg sont dérivables sur I et l'on a :

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x) \\ (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

• En tout point x de I tel que $g(x) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en x et l'on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

• Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x et l'on a :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

• Si $f(x)$ est strictement positif, alors $\sqrt{f}$ est dérivable en x et l'on a :

$$(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

• Si f admet une fonction réciproque f^{-1} et si $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au

point $f(x)$ et on a : $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, autrement dit, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Le tableau suivant présente quelques formules utiles pour le calcul des dérivées et les dérivées de quelques fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
$aU(x) + bV(x) \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$	$aU'(x) + bV'(x)$
$U(x)V(x)$	$U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{[V(x)]^2}$
$\frac{1}{V(x)}$	$-\frac{V'(x)}{[V(x)]^2}$
$(U \circ V)(x)$	$U'[V(x)]V'(x)$

$\sqrt{U(x)}$	$\frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$
$[U(x)]^n$	$n (U(x))^{n-1} U'(x)$
$ax+b$	a
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-\sin(ax+b)$
$\tan(ax+b)$	$a[1+\tan^2(ax+b)]$

Applications

1 Pour chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de f et celui de sa dérivée et calculer $f'(x)$:

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x-2}$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

e) $f(x) = (3x+2)^4$ f) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^3$ g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ h) $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

i) $f(x) = \sin^2(3x)$ j) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ k) $f(x) = \tan(2x)$ l) $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$

m) $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ n) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

2 On donne la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin x$$

a) Montrer que f admet une bijection réciproque.

b) Donner l'ensemble de définition de f^{-1} et de $(f^{-1})'$

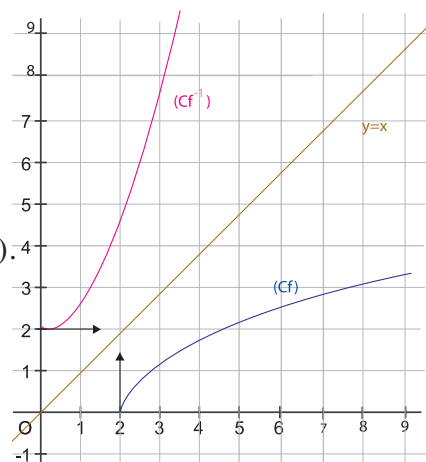
c) Calculer $f(0)$ et $f(\frac{\pi}{4})$. En déduire $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3 On considère le schéma ci-contre :

f est-elle dérivable en 2 ?

f^{-1} est-elle dérivable en $f(2)$?

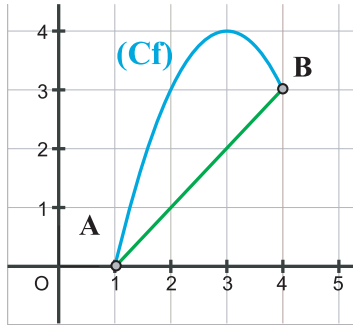
Que peut-on conclure ?



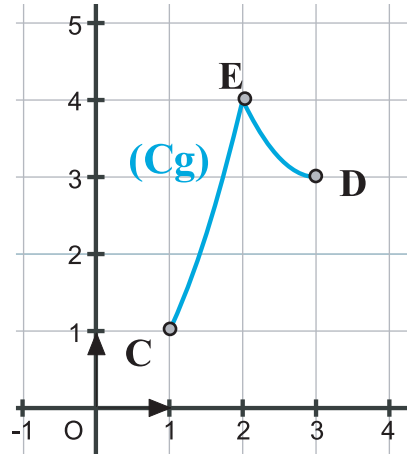
Activités préliminaires

Activité 1 :

On considère les courbes suivantes :



$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad 1 \leq x \leq 4$$



$$\begin{cases} g(x) = x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ g(x) = x^2 - 6x + 12 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- Vérifier que f est continue et dérivable sur $[1, 4]$
- La fonction g est-elle dérivable en 2 ?
- Déterminer la pente p_1 de la droite (AB) puis la pente p_2 de la droite (CD).
- Montrer qu'il existe un réel $c \in [1, 4]$ tel que $f'(c) = p_1$.
- Tracer la tangente à (Cf) au point d'abscisse c .
- Montrer que l'on a : $f(4) - f(1) = 3f'(c)$.
- Existe-t-il un réel $x \in [1, 2]$ tel que $g'(x) = p_2$?
Existe-t-il un réel $x \in [2, 3]$ tel que $g'(x) = p_2$?

Interpréter graphiquement les résultats obtenus

Plus généralement on admet que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

Activité 2:

- On donne la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \sin x$

Soient a et b deux réels de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ tels que $a < b$. montrer qu'il existe un réel

$c \in]a, b[$ tel que : $\sin b - \sin a = (b - a)\cos c$.

En déduire que : $(b - a)\cos b \leq \sin b - \sin a \leq (b - a)\cos a$.

- Montrer que pour tout réel a et tout réel b on a : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

• Plus généralement l'égalité $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ s'écrit $\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(c)$ et dans le cas où $f'(x)$ est bornée par deux réels m et M sur $]a, b[$, on a alors :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \leq M$$

De plus si, pour tout $x \in]a, b[$, on a $|f'(x)| \leq k$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

Activité 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

En utilisant l'égalité $\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(c)$; $c \in]a, b[$

• Montrer que si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

• Donner le sens de variation de f lorsque $f'(x) \geq 0$ sur $]a, b[$, lorsque $f'(x) \leq 0$ sur $]a, b[$, lorsque $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$, enfin lorsque $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$.

Activité 4 :

a) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

On suppose que f présente un maximum local au point a , c'est à dire que $f(x) \leq f(a)$ sur un voisinage de a .

Montrer que $f'_g(a) \geq 0$ et que $f'_d(a) \leq 0$. En déduire que $f'(a) = 0$.

Faire de même lorsque f présente un minimum local au point a .

b) Réciproquement, on admet que si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe, alors f présente en a un extrémum local.

A retenir

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$.

$$\text{On a alors: } m \leq \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \leq M$$

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a, b[$.

On a alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous réels a et b de I

Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée, alors :

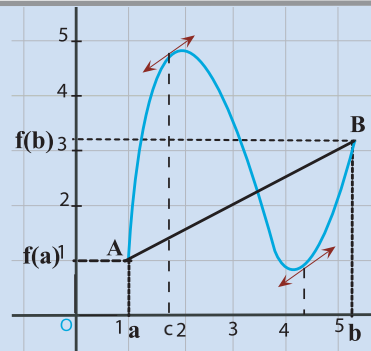
- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$)
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$).
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$

Extrémum d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$

Si f présente un extrémum local au point a , alors $f'(a) = 0$.

Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe, alors f présente en a un extrémum local.



- 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x^3$
Déterminer les réels c vérifiant $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ dans chacun des cas suivants :
 $a = 1$ et $b = -3$.
 $a = 0$ et $b = 2$.
- 2 Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f telle que $f(x) = x^4 + x^2 - 2x + 5$, $a = -1$ et $b = 1$.
 a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $-10 \leq f'(x) \leq 2$.
 b) En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a : $-10x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 11$.
- 3 En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \cos x$ sur un intervalle que l'on choisira, montrer que : $|\cos b - 1| \leq |b|$ pour tout réel b .
- 4 On donne $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.

Etudier les variations de f et donner le(s) point(s) où la fonction f présente un extrémum.

IV. Dérivée seconde - Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . On suppose que f' est dérivable sur I

On appelle dérivée seconde de f et on note f'' la fonction dérivée de f' .

Pour tout x de I $f''(x) = (f')'(x)$.

Exemples

si $f(x) = x^2 - 3x + 4$	alors $f'(x) = 2x - 3$	d'où $f''(x) = 2$.
si $f(x) = \sin(2x)$	alors $f'(x) = 2\cos(2x)$	d'où $f''(x) = -4\sin(2x)$
si $f(x) = \frac{1}{x}$	alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	d'où $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Activité :

La figure suivante donne la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

- a) Donner l'équation de la tangente Δ à (C_f) au point $A(1, 3)$.
- b) Quelle est la position de Δ et de (C_f) au voisinage du point A ?

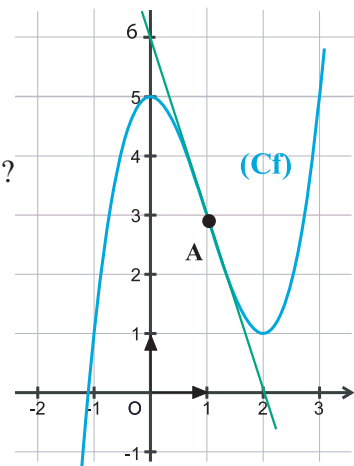
On remarque que la tangente à la courbe (C_f) au point $A(1, 3)$

traverse la courbe.

On dit que le point A est **un point d'inflexion** de (C_f)

- c) Calculer $f''(x)$ et déterminer le tableau de signe de $f''(x)$.

Que remarque-t-on ?

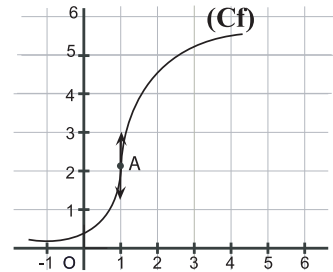
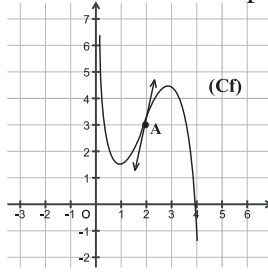
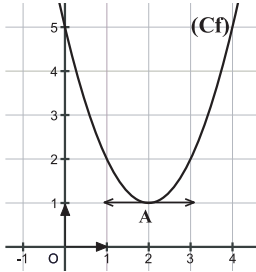


A retenir

f étant une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel appartenant à I , le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si $f''(x)$ s'annule et change de signe en x_0

Applications

1 Pour chacune des courbes suivantes dire si A est un point d'inflexion.



2 Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de (C_f) s'ils existent :

a) $f(x) = x^3 - x + 1$

b) $f(x) = (x + 1)^4$

c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

V. Primitives :

Activités préliminaires

Un mobile se déplace sur une trajectoire avec une vitesse qui vaut à l'instant t :

$$v(t) = 2t + 1.$$

Si $x(t)$ désigne la position du mobile sur la trajectoire à l'instant t et sachant que à l'instant $t = 0$ on a $x(0) = 2$, donner l'expression de $x(t)$ en fonction de t .

Activités de découverte

Activité 1 :

Une fonction F est telle que $F'(x) = x^2 - 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$,

Déterminer $F(x)$ sachant que la courbe représentative de F passe par le point A(3,0).

► La fonction $x : t \longmapsto x(t) = t^2 + t + 2$ admet la fonction $v : t \longmapsto v(t) = 2t + 1$ comme fonction dérivée.

On dit que la fonction x est une **primitive** de la fonction v .

De même, dans l'activité 1, la fonction F est une primitive de la fonction

$$f : x \longmapsto x^2 - 2x + 5$$

Activité 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On suppose que f admet sur I une primitive F .

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction G telle que : $G(x) = F(x) + \lambda$, $x \in I$ est une primitive de f .

2) Soit H une autre primitive de f . Pour tout $x \in I$ calculer $(H - F)'(x)$. Conclure.

Activité 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \cos 2x$.

a) Montrer que l'expression générale d'une primitive F de f est $F(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \lambda$.

b) Déterminer λ pour que l'on ait $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Activité 4 :

On donne deux fonctions f et g définies sur un intervalle I et admettant respectivement F et G comme primitives sur I . Soient α et β deux réels et H la fonction définie par :

$$H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x) \quad x \in I$$

Déterminer $H'(x)$. En déduire la forme générale d'une primitive de $\alpha f + \beta g$.

A retenir

Définition

f étant une fonction définie sur un intervalle I . On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$, $x \in I$

Théorème (admis)

Toute fonction définie et continue sur un intervalle I , admet une primitive sur I .

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I . Alors toute autre primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + \lambda$, où λ est une constante.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I , F et G leurs primitives respectives, alors pour tous réels α et β , la fonction

$\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Primitives de fonctions usuelles.

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2} ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]0 ; +\infty[$ ou $] -\infty ; 0 [$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$] -\infty ; 0 [$ ou $]0 ; +\infty[$

A retenir

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$f(x) = \cos(ax + b) \quad a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b) \quad a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+$

Formules pratiques pour la recherche des primitives

Lorsque u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I		
Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$\lambda \cdot u' \quad (\lambda : \text{constante})$	λu	
$u' u^n \quad (n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ dans le cas $n \leq -2$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$(u'ov).v'$	uov	

Applications

1 Déterminer une primitive F de la fonction f :

$$a) f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$$

$$b) f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$$

$$c) f(x) = x^3 + 2x - 5$$

$$d) f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$$

$$e) f(x) = (2x)(x^2+1)^3$$

$$f) f(x) = \frac{-3}{(2x+5)^2}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4$$

$$h) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-5}}$$

$$i) f(x) = (4x-6)(x^2-3x+1) \quad j) f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x$$

$$k) f(x) = (3x^2+5)(x^3+5x-2)^2$$

$$l) f(x) = \sin x \cos^2 x$$

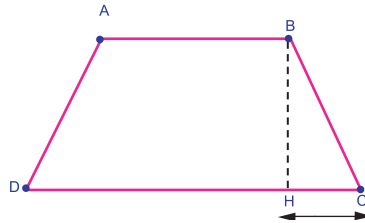
$$m) f(x) = (3x-1)^4$$

$$n) f(x) = 4x - \frac{3}{x^2}$$

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Trouver la primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

Situation 1

La figure suivante représente un trapèze ABCD où l'on a : $AB = 1$, $BC = AD = 1$ et CD est variable. On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur [CD].



- 1) Montrer que l'aire du trapèze ABCD est égale à $(1+x)\sqrt{1-x^2}$
(On pourra décomposer sa surface en un rectangle et deux triangles)
- 2) On donne la fonction f définie par : $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$
 - a) Trouver l'ensemble de définition de f .
 - b) Montrer que $f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire les variations de f sur $[0,1]$.
 - c) Déterminer le réel x pour lequel l'aire du trapèze est maximale.

Situation 2

On donne la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$

- 1) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
- 2) On donne la fonction g définie par $g(x) = f(x) - [f(0) + xf'(0)]$
 - a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x .
 - b) Montrer que $g(x) = \frac{-x^2}{2(2\sqrt{1+x} + 2 + x)}$
 - c) Montrer que pour tout réel x positif, on a : $8 \leq 2(2\sqrt{1+x} + 2 + x)$
 - d) En déduire que tout réel x positif, on a : $-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2}) \leq 0$

Application

Sans calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sqrt{1,2}$

Situation 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}{(x+2)^2}$
On veut déterminer les réels a , b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$$

- 1) En utilisant les deux expressions de $f(x)$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire la valeur de a .
- 2) Donner deux expressions de $g(x) = (x+2)^2 f(x)$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$.
En déduire la valeur de c .
- 3) Calculer de deux manières $f(0)$. En déduire la valeur de b .
- 4) Déterminer alors une primitive de f .

On souhaite évaluer $f'(x_0)$ en calculant le taux d'accroissement de f entre x_0 et x_0+h et à faire tendre h vers 0. On va l'appliquer à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

```
program Derivation;
uses wincrt;
const IterMax=20;
function f(x:real):real;
begin f:=sqrt(x) end ;
function fprime(x:real):real;
begin fprime:=1/(2*sqrt(x)) end ;
var x0,h,fp:real;
NbIter,k:integer;
begin
  repeat
    write (' Nombre d'itération compris entre 0 et 15 : ');
    readln(nbiter); writeln;
    until (nbiter>0) and (nbiter <=itermax);
    write(' valeur de x0 : '); read(x0);writeln;
    repeat
      write(' valeur initial de h > 0 : ');
      readln(h); writeln;
    until h>0;
    clrscr; writeln('          Evaluation de f'(x0) pour f(x)= racine carrée de x');writeln;
    writeln(' x0=',x0:10:10,' et f'(x0)=' ,fprime(x0):16:16); writeln;
    writeln('          f(x0+h)-f(x0) ');
    writeln('h -----> 0          -----> f'(x0)=' ,fprime(x0):16:16 );
    writeln('          h ');
    for k:=1 to nbiter do
      begin
        fp:= (f(x0+h)-f(x0))/h;
        write(h:10:10,'          ',fp:16:16);writeln; h:=h/2;
      end
    end.
end.
```

Exercices et problèmes

1 Soit f la fonction définie de la façon

$$\text{suivante } \begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1) La fonction f est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?

2) La fonction f est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

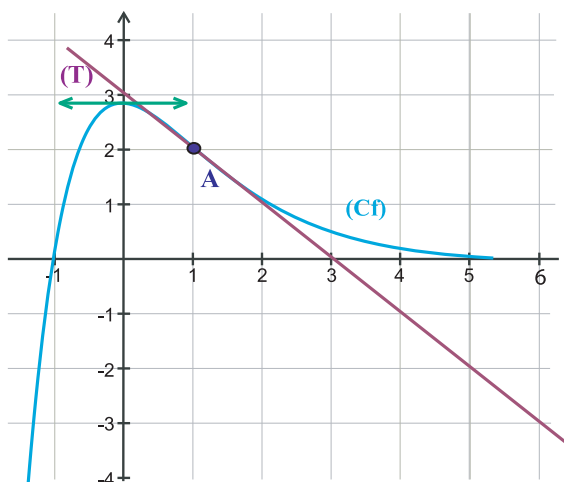
Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées. Une et une seule est exacte. On demande de l'entourer

1) D'après la courbe ci-dessous :

- a. $f(0) = 0$ b. $f'(0) = 2$
c. $f'(0) = 0$ d. $f(2) = 0$

2) D'après la courbe ci-dessous, $f'(1)$ est

- égal à
a. 0 b. 1 c. -1 d. -2



3 Répondre par oui ou non aux quatre questions suivantes : (Les réponses affirmatives seront justifiées par une démonstration, les autres le seront par un contre-exemple).

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est continue en 0, est-elle nécessairement dérivable en 0 ?

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en 0, est-elle nécessairement continue en 0 ?

3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'(0) = 0$

La fonction f admet-elle nécessairement un extremum en 0 ?

4) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et admettant un maximum en 1.

La fonction f vérifie-t-elle nécessairement la condition $f'(1) = 0$?

4 1) On donne la fonction $f : f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ et le réel $x_0 = 2$.

En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de f en x_0 . Déterminer l'équation de tangente de f en x_0

2) Mêmes questions pour :

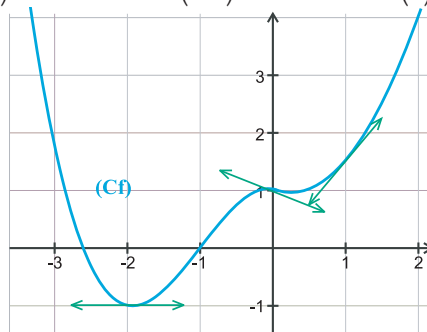
a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ et $x_0 = \frac{1}{4}$

5 La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-après.

1) En vous servant du quadrillage, compléter les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} f(0) = & f(-2) = & f(1) = \\ f'(0) = & f'(-2) = & f'(1) = \end{array}$$



2) Déterminer l'équation de la tangente en $x_0 = 1$

6 Trouver la (ou les) réponse(s) exacte(s) : Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans ce repère :

1) Une équation de la droite passant par

$A(1; 2)$ et de coefficient directeur -3 est :

a) $y = -3x + 5$ b) $6x + 2y - 10 = 0$

c) $y = 2x - 3$

2) Soit $f(x) = x^3 - x$, et A et B les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2. La pente de (AB) est

a) 5 b) 1 c) 6

3) Soit $g(x) = x^2 + 1$, M le point de C_g d'abscisse x . La pente de la tangente à C_g au point M est :

a) $x-2$ b) $2x$ c) $\frac{x}{2}$

4) La limite lorsque h tend vers 0 de

$$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \text{ est}$$

a) 0 b) $+\infty$ c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

7 1) Calculer la dérivée au point $x_0 = 1$ de la

$$\text{fonction } f(x) = \frac{1-2x^2}{1+x^2}$$

2) Calculer la dérivée au point $x_0 = 9$ de la

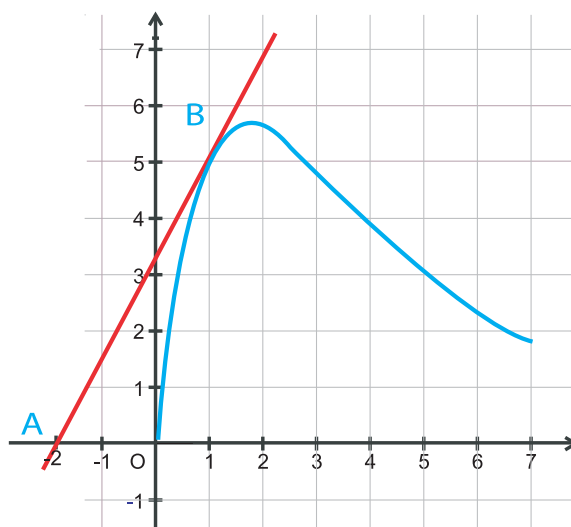
$$\text{fonction } f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

3) Calculer la dérivée au point $x_0 = 0$ de la

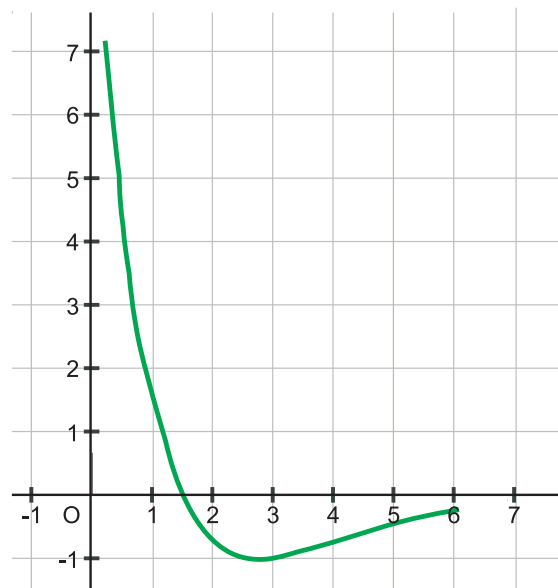
$$\text{fonction } f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

8 La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur $[0;6]$. Les points A et B ont pour coordonnées $A(-2;0)$, $B(1;5)$. B est un point de C_f , et la droite (AB) est tangente à C_f

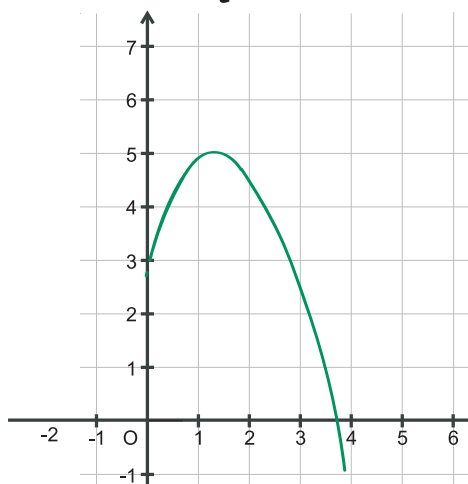
1) Déterminer $f'(1)$, où f' est la dérivée de la fonction f .



2) Une des deux courbes suivantes représente la fonction f' . Laquelle ? (justifier).



Exercices et problèmes



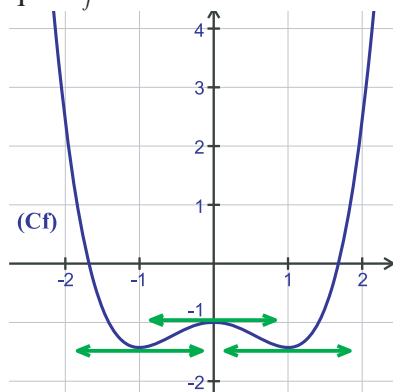
3) On appelle g la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Donner l'expression de sa dérivée g' (à l'aide de f et f'), calculer $g'(1)$.

9 Soit C la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 6x + 5$ et $A(-1, 0)$ un point de C .

- 1) Ecrire une équation de la droite D_m passant par A et de coefficient directeur m .
- 2) Soit S l'ensemble des points communs à D_m et à C . Déterminer m en sorte que S soit un singleton. On calculera les coordonnées de ce point.

3) Montrer qu'alors, D_m est tangente à C

10 Soit la fonction f dont la représentation graphique C_f est la suivante :



- a) Dresser le tableau de signe de la fonction f en justifiant la lecture.
- b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

- c) Dresser le tableau de signe de la fonction f' en justifiant la lecture.
- d) Résoudre en justifiant, l'équation : $f'(x) = 0$

11 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable. Déterminer alors la dérivée de chacune d'elles.

a) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ b) $g(x) = (2x + 3) \sqrt{3x^5}$

c) $h(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - x - 6}$ d) $k(x) = \frac{1}{(5x^2 - 3)^3}$

e) $m(x) = (2x^3 + 3x - 1)^4$

f) $n(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

g) $p(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

12 On pose : $g(x) = 2x^3 + x - 1$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α . Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- 3) Etudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x . En déduire les variations de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x^4 + (x-1)^2}$$

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

- 1) Calculer la dérivée $f'(x)$.
- 2) En déduire la dérivée de g , h , k et l définies par :

$$\begin{aligned} \text{a) } g(x) &= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} & \text{b) } h(x) &= \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \\ \text{c) } k(x) &= \frac{x^2+2}{x^2-1} & \text{d) } l(x) &= \frac{\cos x + 2}{-1 + \cos x} \end{aligned}$$

14 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f(1)$, $f(-2)$.
En déduire $(f^{-1})'(3)$, $(f^{-1})'(-9)$

15 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \tan x$

- Montrer que f admet une fonction réciproque
- Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} ainsi que son ensemble de dérivabilité.
- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

16 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$

- Montrer que

$$\frac{1}{21} \leq f'(x) \leq \frac{1}{20} \quad \text{si} \quad x \in [100, 101]$$

b) En déduire que $10,047 \leq \sqrt{101} \leq 10,05$

17 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f: x \mapsto \tan x.$$

a) Montrer que. $1 \leq f'(x) \leq 2$ pour tout

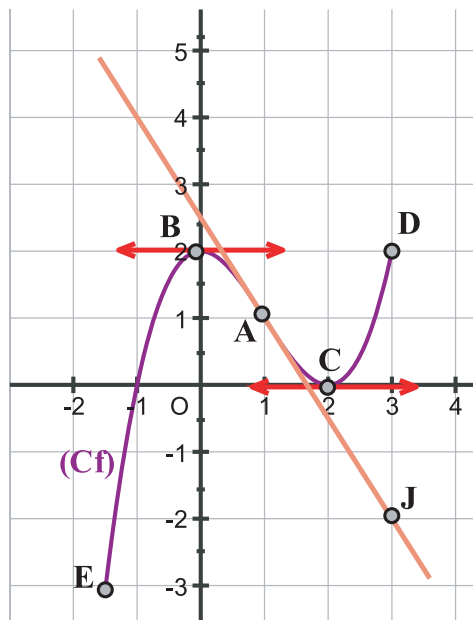
$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

b) En déduire que :

$$x \leq \tan x \leq 2x \quad \text{pour tout} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

18 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; 3\right]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$ est la courbe (C_f) ci-dessous.

Les points $A(1,1)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$, $E(-\frac{3}{2}, -3)$, et $D(3,2)$ appartiennent à (C_f) .



La courbe (C_f) admet en chacun des points B et C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite Δ est tangente à la courbe (C_f) au point A ; elle passe par le point J de coordonnées $(3; -2)$.

1) a) Donner $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

b) Déterminer une équation de la droite Δ .

2) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = 1 \quad \text{sur l'intervalle} \quad \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$$

3) f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; 3\right]$. En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F .

4) Pour tout $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$, on pose

Exercices et problèmes

$f'(x) = ax(x-2)$, a étant une constante réelle. Déterminer a à l'aide des résultats de la question 1. a).

b) Vérifier que pour tout $x \in [-\frac{3}{2}; 3]$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x \in [-\frac{3}{2}; 3]$.

19 Un artisan fabrique des objets en bois. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production en dinars de x objets est donné par $C(x) = x^2 + 60x + 121$ pour $x \in [1; 30]$. Le coût moyen de production est défini par

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

a) Calculer la dérivée C'_m de C_m . Etudier le signe de C'_m et dresser le tableau de variation de C_m .

b) En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

c) Chaque objet est vendu 110 D. Montrer que le bénéfice réalisé par la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121$$

Etudier le signe de $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B . En déduire le nombre d'objets à vendre pour obtenir un bénéfice maximal

20 Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{|x-1|+x}{x^2-1}$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de x , l'expression de $f(x)$ sans les barres de valeurs absolues.

c) i) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer, suivant les valeurs de x , l'expression de $f'(x)$

ii) Dresser le tableau de variation de f

21 1) Soit f la fonction définie par:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthogonal.

Déterminer les réels a, b, c et d sachant que la courbe (C) passe par les points $A(1,8)$, $B(0,3)$, et $D(2,9)$ et admet en B une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 5x$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$g(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$ de courbe représentative Γ dans un repère orthogonal

a) Déterminer le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

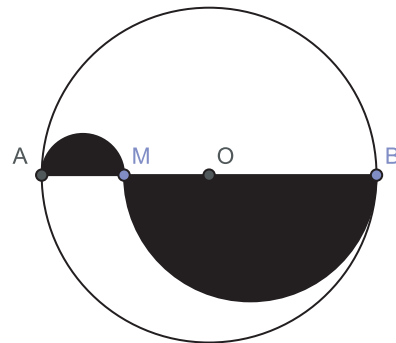
b) Montrer que pour tout réel x :

$$g(x) = (x+1)^2(3-x)$$

En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

c) Déterminer une équation de la tangente T à Γ en un point d'abscisse x_0 .

22 Détermination d'une aire maximale des lunules



La partie en noir est appelée lunule.

Le but du problème suivant est de déterminer la position du point M qui donne l'aire de la lunule maximale.

$$AB = 10; l = AM$$

L'aire A de la lunule peut-être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$A = \frac{\pi}{4} (L^2 - 10L + 50).$$

1) Calculer l'aire de la lunule pour $l = 4$.

2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = x^2 - 10x + 50$

a) Calculer f' la fonction dérivée de f .

b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f .

Déduire de l'étude précédente la position du point M pour laquelle l'aire de la lunule est maximum puis calculer cette aire.

23 Au cours d'une expérience visant à tester un vaccin, l'analyse du sang d'un sujet a montré que le nombre de microbes par millilitre, t heures après une injection est décrit par : $N(t) = 10^4(72 - 2t)^2$ où $t \geq 10$.

a) Combien de temps faut-il pour que tous les microbes soient éliminés du sang ?

b) Quel est le taux de variation du nombre de microbes par millilitre 12 heures après l'injection ?

c) Quel est le taux moyen de variation à la quinzième heure après l'injection ?

24 Pour chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f sur un intervalle I que l'on choisira.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

b) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sin x - 2 \cos x$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2)^2}$

h) $f(x) = x \cos x^2$

i) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$

j) $f(x) = x^2(x^3 + 2)^3$

k) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 + 2)^3}$

m) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}}$

n) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$

25 a) Déterminer l'ensemble de définition de f

telle que $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$

b) Déterminer a et b pour que f admette une primitive F telle que

$$F(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$$

26 Donner la primitive F de f sur un intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$

a) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ et $F(1) = 0$

b) $f(x) = -2 \sin 2x$ et $F(\frac{\pi}{4}) = 1$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $F(1) = 1$

27 Soit $f(x) = \frac{4x - 1}{(2x + 1)^3}$

a) Déterminer les réels a et b tels que :
pour tout $x \in Df$ $f(x) = \frac{a}{(2x + 1)^2} + \frac{b}{(2x + 1)^3}$

b) Déterminer toutes les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

28 Déterminer une fonction polynôme P dont la fonction dérivée est : $P'(x) = x^2 - 5x + 6$ et dont le maximum relatif est le double du minimum relatif.

Gottfried LEIBNIZ (1646-1716)

Leibniz, grand mathématicien, est aussi une des grandes figures de la civilisation européenne. Il a produit une œuvre philosophique de premier plan, il a fait diverses découvertes en physique, il a construit une machine à calculer supérieure à celle de Blaise Pascal, s'est intéressé aussi à la logique, à la numération binaire, il est l'un des deux fondateurs de l'Analyse mathématique. . . mais il a fait des études juridiques et rempli de nombreuses missions diplomatiques.

Contrairement à l'immense majorité des grands mathématiciens, Leibniz est venu très tard aux mathématiques, à l'âge de 26 ans, à l'occasion d'un séjour à Paris en 1672, et ses débuts sont difficiles. Il commet de nombreuses erreurs, dues au fait qu'il est débutant, et qu'il manque de "technique" mathématique.

Mais très rapidement, l'élève devient un maître. Dès 1675 (dans un manuscrit daté du 21 Novembre), Leibniz invente les symboles dx , $\int$ (un S, initiale du mot latin summa, somme), donne les premières règles de dérivation, d'intégration. Il a créé l'Analyse mathématique, ou calcul infinitésimal, qui tient encore de nos jours une telle place dans les programmes de nos lycées.

A partir de 1684, Leibniz publie les bases de son nouveau calcul dans le revue qu'il a fondée à Leipzig, les Acta Eriditorum, les Actes de Erudits. Les résultats sont innombrables et remarquables, avec quelques erreurs. Un des plus importants est le "Théorème fondamental de l'Analyse", à savoir que dérivation et intégration sont des opérations (sur les fonctions) en quelque sorte inverses l'une de l'autre. Le mot même de fonction est dû à Leibniz.

Dans son nouveau calcul, Leibniz a des disciples, qui bientôt le développent et le propagent, dont font partie les frères Jean et Jacques Bernoulli, de Bâle, et le Marquis de l'Hospital. Les découvertes et les notations de Leibniz se propagent ainsi sur le continent européen.

Les mêmes découvertes avaient été faites par Isaac Newton, avec un point de vue et des notations différentes, ce qui a entraîné entre les deux hommes une pénible querelle de priorité, Newton accusant Leibniz de lui avoir volé ses inventions. Il semble bien au contraire que les découvertes des deux hommes aient été indépendantes. Mais le fait que Leibniz, et surtout Newton, attendaient très longtemps pour publier leurs résultats favorisaient ce genre de controverses.

Parmi les travaux de Leibniz en dehors de son Analyse, on peut citer un Essay d'une nouvelle science des nombres sur le système binaire, sur lequel il fut l'un des premiers à travailler. Il avait aussi développé tout un travail sur les déterminants, mais il ne le publia pas de son vivant. Enfin, il fut créateur aussi dans le domaine de la Logique.