
ACADÉMIE D'ENSEIGNEMENT DE BOUGOUNI

LYCÉE PRIVÉ DE SÉLINGUÉ



COMMUNE DE BAYA, CERCLE DE YANFOLILA
RÉGION DE SIKASSO

Tél. : 76 19 49 09 / 78 79 22 92 / 69 65 29 34 / 63 64 55 71

Professeur : Mountaga N'GUETTE

Tél. : 76 19 49 09 / 69 65 29 34

Matière : Mathématiques

Classe : T.S.E

COURS ET EXERCICES CORRIGÉS SUR LES PRIMITIVES

1. Définitions et propriétés :

1.1. Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que, pour tout élément x de I , $F'(x) = f(x)$.

Activité 1 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

a) $F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 7$; $f(x) = 6(2x - 1)^2$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -2 \cos(3x + 2)$; $f(x) = 6 \sin(3x + 2)$; $I = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^2$; $f(x) = \frac{(x\sqrt{x} - 1)(2 + x\sqrt{x})}{x^3}$; $I =]0; +\infty[$.

1.2. Propriétés :

- Propriété 1 :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet une primitive sur I .

Remarques :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Si f n'est pas continue sur I , elle peut admettre ou ne pas admettre de primitive sur I .
- Si f est continue sur I , elle admet une primitive sur I mais on ne sait pas toujours en donner une formule explicite.

- Propriété 2 :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I .

- Pour tout nombre réel c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur I .
- Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

- Propriété 3 :

Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I , y_0 un nombre réel et x_0 un élément de I .

Il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

2. Calcul de primitives :

2.1. Primitives de fonctions élémentaires :

La connaissance des dérivées des fonctions élémentaires permet de dresser le tableau suivant, où c désigne un nombre réel.

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$] 0; +\infty[$
$x \mapsto x^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$] 0; +\infty[$, si $r \geq 0$ $] 0; +\infty[$, si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[\ (k \in \mathbb{Z})$

2.2. Primitives de la somme de deux fonctions :

Soit u et v deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle I les fonctions U et V .

La fonction $u+v$ admet pour primitive sur I la fonction $U+V$.

2.3. Primitives du produit d'une fonction par un nombre réel :

Soit u une fonction admettant pour primitive sur un intervalle I la fonction U et k un nombre réel.

La fonction ku admet pour primitive sur I la fonction kU .

Activité 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1; I = \mathbb{R}.$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}; I =]-\infty; 0[.$

c) $f(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}}; I =]0; +\infty[.$

d) $f(x) = \cos x - 2 \sin x; I = \mathbb{R}.$

2.4. Primitives de $u' \times (v' \cdot u)$:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$.

La fonction $u' \times (v' \cdot u)$ admet pour primitive sur I la fonction $v \cdot u$.

En effet, $v \cdot u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times (v' \cdot u)$.

On en déduit le tableau suivant :

Fonction f	Une primitive F de f	Sur tout intervalle où
$u' u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	u est dérivable.
$\frac{u'}{u^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\frac{-1}{(n-1)} u^{n-1}$	u est dérivable et ne s'annule pas.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u est dérivable et strictement positive.
$u' u^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	u est dérivable et positive si $r \geq 0$ (strictement positive si $r < 0$).
$u' \cos u$	$\sin u$	u est dérivable
$u' \sin u$	$-\cos u$	u est dérivable

Activité 3 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 10x(5x^2 - 7)^4$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^3}$

- c) $f(x) = \frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
d) $f(x) = 3 \sin(3x-2)$
e) $f(x) = 2 \cos x \sin^4 x$
f) $f(x) = x \cos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$

Activité 4 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I , qui vérifie les conditions indiquées.

- a) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2}$; $I =]0; +\infty[$ et $F(2) = 0$
b) $f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x$; $I = \mathbb{R}$ et $F(\pi) = -1$
c) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0; +\infty[$ et $F(1) = 1$
d) $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $F(0) = 1$.

Remarque :

Pour déterminer les primitives des fonctions du type $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$), on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Si m et n sont de même parité, linéariser $\cos^n x \sin^m x$.
- Si m et n sont de parités différentes, utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et écrire $\cos^n x \sin^m x$ sous la forme $\cos x P(\sin x)$ si n est impair ou $\sin x P(\cos x)$ si m est impair, P désignant un polynôme.

Activité 5 :

- a) Soit la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

- b) Soit la fonction $g : x \mapsto 2 \cos^4 x \sin^5 x$.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g .