

Calcul Intégral

1. Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a et b deux éléments de I . On appelle intégral de a à b de la fonction f , le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I .

An note : $\int_a^b f(x) dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

$\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégral (ou somme) de a à b de $f(x) dx$ ».

Remarque :

- $\int_a^b f(x) dx$ ne dépend que de a , b et f ; car $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$ car $F(a) - F(a) = 0$.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ car $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$

Activité :

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (2x+4) dx ; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t dt ; \int_{-1}^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(3x) dx$$

2. Fonction intégrale :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors pour tout réel $a \in I$, la fonction

$g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule au point a .

Exemple :

Calculer la primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ qui s'annule au point $\frac{\pi}{4}$.

3. Propriétés :

- Relation Chasles :

Si f est une fonction continue sur intervalle I , alors pour tous réel a , b et c

de I on a : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I .

On a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$$

$$\text{Donc : } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Exemple : Calculer $\int_{-2}^2 |x^2 - x| dx$.

Posons $x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

x	-2	0	1	2
$x^2 - x$	+	0	-	0
$ x^2 - x $	$x^2 - x$		$-x^2 + x$	$x^2 - x$

$$\int_{-2}^2 |x^2 - x| dx = \int_{-2}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{17}{3}$$

- Linéarité de l'intégrale :

Si f et g sont deux continues sur un intervalle I , a et b deux éléments de I , alors pour tous réels α et β :

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\pi + 2}{8}$$

- Positivité :

- Si f est une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I .

Si $\forall x \in I$ $f(x) \geq 0$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (si $\forall x \in I$ $f(x) \leq 0$ et $a \leq b$

alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$).

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I .

Si f est positive sur $[a; b]$, alors F est croissante sur $[a; b]$ et on a :

$F(b) - F(a) \geq 0$; donc $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- Par conséquence si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq g(x) \text{ et si } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

- Inégalité de la moyenne ; Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. S'il existe deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a; b] \quad m \leq f(x) \leq M \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Cette propriété s'écrit aussi :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. S'il existe un réels M tel que : $\forall x \in [a; b] , f(x) \leq M$ alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$

Définition :

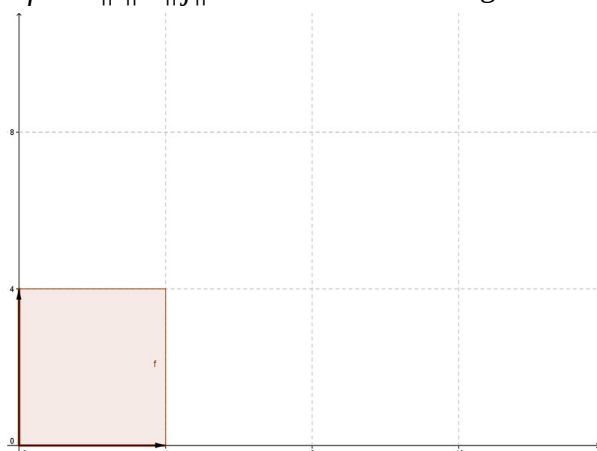
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$). On appelle

Valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Exemple : calculer la valeur moyenne de la fonction $f: x \mapsto x\sqrt{x^2+5}$ sur l'intervalle $[0; 2]$

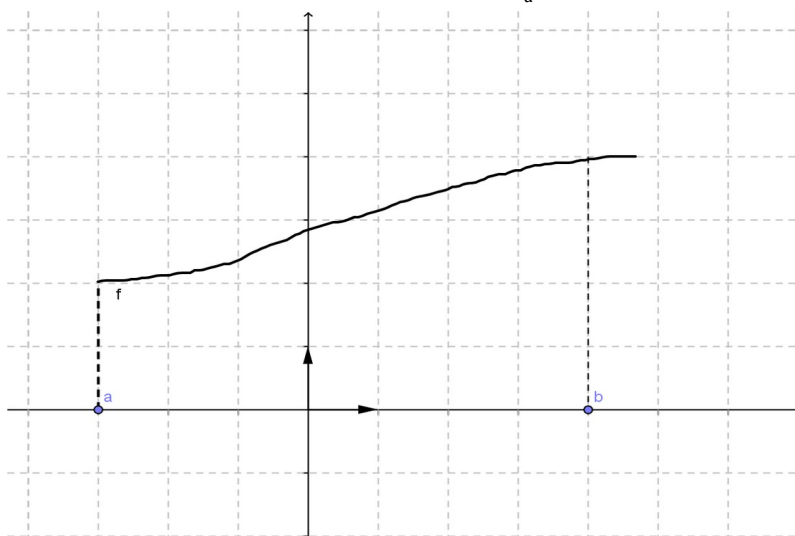
4. Calcul d'aires :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité d'aire notée $\mu \cdot a$ est $1 \mu \cdot a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ c'est l'aire du rectangle hachure sur la figure :



Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) et si $\forall x \in [a; b] , f(x) \geq 0$ alors l'aire du domaine (Δ) limité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx \quad \mu \cdot a$$

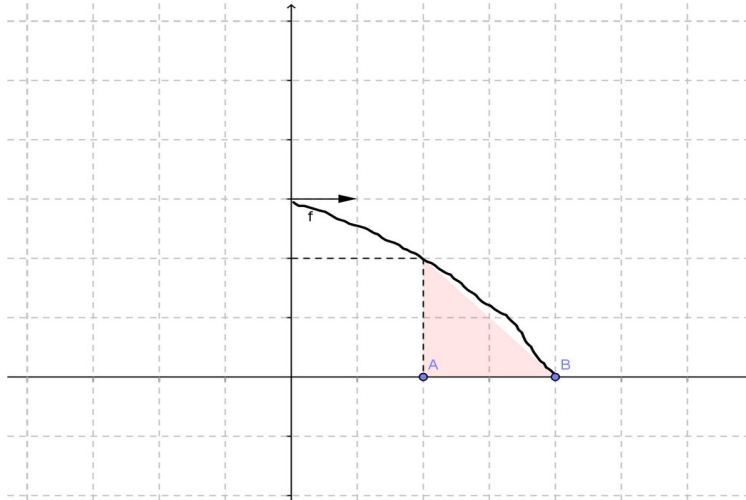


On a : $\Delta = \{M(x, y) / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$

Exemple : Soit $f: x \mapsto \cos x$

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f l'axe des abscisses et les droites $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1,5 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

Solution



L'aire du domaine est :

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \cdot \mu a = \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mu a = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mu a = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) 1,5 \times 2 \text{ cm}^2 = 0,87 \text{ cm}^2$$

Remarque : si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $\forall x \in [a; b], f(x) \leq 0$, alors l'aire du domaine (Δ) compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est :

$$A(\Delta) = - \int_a^b f(x) \, dx \mu a$$

$$\Delta = \{ M(x, y) / a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq 0 \}$$

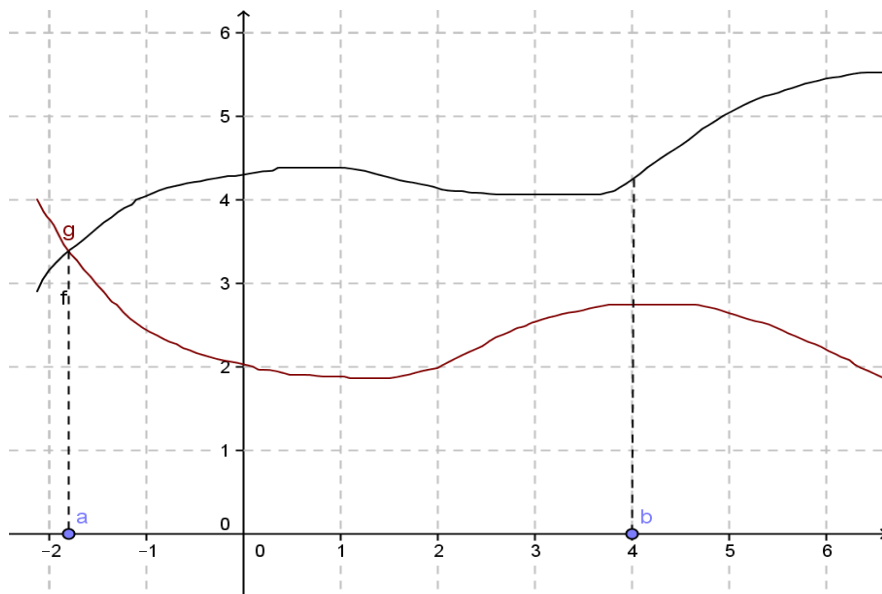
Exemple : Soit $f: x \mapsto x^2 - 2x$

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

Aire compris entre 2 courbes :

Si f et g sont deux fonctions continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $\forall x \in [a; b], f(x) \geq g(x)$ alors l'aire du domaine compris entre les courbes de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

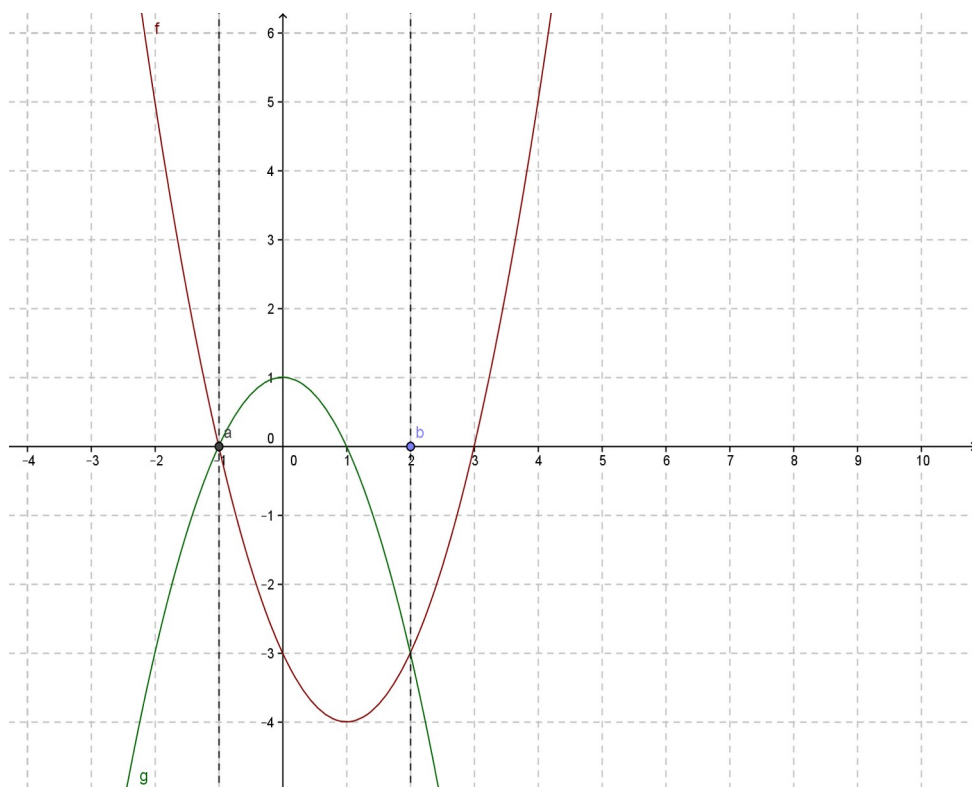
$$A(\Delta) = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \mu a$$



Exemple :soient $f(x)=x^2-2x-3$ et $g(x)=-x^2+1$

Calculer l'aire du domaine borné entre C_f et C_g .

Solution :



Calculons l'aire du domaine borné entre C_f et C_g .

En regardant les deux courbes sur $[-1, 2]$, on remarque que $\forall x \in [-1, 2], g(x) \geq f(x)$

Donc on a : $A = \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx \mu a = \int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x - 4) dx \mu a = 9 \mu a$

5. Intégration par parties :

Soit U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que les fonctions dérivées U' et V' sont continues sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b U(x) V'(x) dx = [U(x) V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x) V(x) dx$$

Démonstration :

En effet $[U(x) V(x)]' = U'(x) V(x) + U(x) V'(x)$

$$\Rightarrow U(x) V'(x) = [U(x) V(x)]' - U'(x) V(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b U(x) V'(x) dx = [U(x) V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x) V(x) dx$$

Exemple : calculer les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx ; \int_0^{\pi} t \sin t dx ; \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx ; \int_0^{\pi} (2x+3) \sin^2 x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

6. changement de variable affine :

7.