

# Exercices

## Primitives

### Primitives directes

- 1** En utilisant les formules de primitives directes, calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1- f(x) = 4x^3 + x^2 - 4 \quad ; \quad 2- f(x) = (x^2 - 3)^3 \quad ; \quad 3- f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$$

$$4- f(x) = \sqrt{-3x + 2} \quad ; \quad 5- f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad 6- f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2$$

$$7- f(x) = \cos(-6x + 5) \quad ; \quad 8- f(x) = 3\sin(1 - 4x) \quad ; \quad 9- f(x) = \frac{1}{3\cos^2 3x}$$

$$10- f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3} \quad ; \quad 11- f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2 \quad ; \quad 12- f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$$

$$13- f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} \quad ; \quad 14- f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2 \quad ; \quad 15- f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$$

$$16- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$$

### Primitives et linéarisation

- 2** En utilisant les formules de primitives directes, linéarise puis calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sin^3 x \quad ; \quad 2) f(x) = \cos^5 \frac{x}{2} \quad ; \quad 3) f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^3 x \quad ; \quad 4) f(x) = \sin^3(-x + 3)$$

### Primitives vérifiant une condition

- 3** Détermine la primitive  $F$  de la fonction  $f$  vérifiant les conditions indiquées :

$$1- f(x) = x^3 - x^2 - 1 \quad \text{et} \quad F(0) = 7 \quad ; \quad 2- f(x) = (x - 3)^6 \quad \text{et} \quad F(3) = 0$$

$$3- f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3} \quad \text{et} \quad F(0) = 0 \quad ; \quad 5- f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} \quad \text{et} \quad F(0) = \sqrt{5}$$

$$6- f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad ; \quad 7- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x} \quad \text{et} \quad F(\pi) = 1$$

- 4** Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$$

1) Détermine l'ensemble de définition

2) Détermine les réels  $a$  ;  $b$  et  $c$  tel que :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

3) En déduis la primitive de  $f$  qui s'annule en 0

**5** Soit les fonctions  $f$  et  $F$  définies par :  $f(x) = x\sqrt{3-2x}$  et  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Détermine les réels  $a$  ;  $b$  et  $c$  tel que  $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$ ,  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

## Intégrales

### Intégrations à l'aide d'une primitive

**6** En utilisant les formules des primitives, calcule les intégrales suivantes :

1)  $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx$  ; 7)  $I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$

2)  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi)dx$  ; 8)  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$

3)  $I = \int_0^4 \sqrt{4x+9}dx$  ; 9)  $I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$

4)  $I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2} dx$  ; 10)  $I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx$

5)  $I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2}dx$  ; 11)  $I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2|dx$

6)  $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  ; 12)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos(2x - \pi)|dx$

### Intégrations par parties

**7** En utilisant la formule de l'intégration par partie, calcule les intégrales suivantes :

1)  $I = \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$  ; 4)  $I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx$

2)  $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$  ; 5)  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos(x + \pi) dx$

3)  $I = \int_0^4 x\sqrt{4x+9} dx$

**8** Soient les intégrales I et J définies par :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x dx$

- 1) Calcule :  $I + J$ .
- 2) Calcule :  $I - J$  en utilisant la technique de l'intégration par parties.
- 3) Déduisez – en les valeurs de I et J.

### Intégrations par changement de variable

**9** En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad ; \quad 2) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

**10** Soit le polynôme p définie par :  $p(x) = x^3 - 12x - 16$ .

- 1) Montre que  $-2$  est un zéro double de p.
- 2) En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calcule l'intégrale :  $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx$

### Intégrales et suites

**11** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

- 1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-2}$  (On posera :  $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ ).
- 2) On donne  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ . Calcule :  $I_2$  et  $I_4$

**12** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$  ( $n \geq 0$ )

- 1) Calcule  $I_0$
- 2) En intégrant par parties, Montre que  $\forall n \geq 1$  on a :  $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$ .
- 3) En déduis la valeur de  $I_1$  ;  $I_2$  et  $I_3$ .

**13** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

- 1) Démontre que  $I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$  puis calcule  $I_0$
- 2) Démontre que  $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

**14** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

- 1) Détermine le seul réel  $a$  tel que :  $\forall x \left[ 0 ; \frac{\pi}{4} \right]$  on a :  $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}$ .
- 2) Calcule la valeur de  $I_0$ .
- 3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  
 $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$  (On pourra poser :  $\frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$ )

**15** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Calcule  $I_1$ .
- 2) En intégrant par parties, Montre que  $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$  (on posera  $x^n = x \cdot x^{n-1}$ )

**16** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}} dx$  avec  $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $I_n$  est croissante et majorée.
- 2) Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ; on a :  $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ . En déduis la limite de la suite  $I_n$ .

**17** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t dx$  ( $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$  et  $x > 0$ )

- 1) En utilisant une intégration par parties ; calcule  $I_n(x)$
- 2) En déduis le calcul de  $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$
- 3) a) Calcule  $I_n(e) - J_n(e)$ .  
 b) Détermine la limite de  $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Intégrales linéaires

**18** Soient les intégrales  $I$  et  $J$  définies par :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

- 1) Calcule  $I$
- 2) Soit la fonction définie sur  $\left[ 0 ; \frac{\pi}{4} \right]$  par :  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ .  
 a) Montre que  $\forall x \in \left[ 0 ; \frac{\pi}{4} \right]$  on a :  $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ .  
 b) En déduis une relation entre  $I$  et  $J$ .  
 c) Calcule  $J$ .

**19** Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \text{ et } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

- 1) Calcule  $I - J$  et  $I + J + K$
- 2) En déduis la valeur de :  $I + J - 3K$  puis celles de  $I$  ;  $J$  et  $K$ .

**20** Soient les intégrales  $I$  et  $J$  définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Calcule  $I + J$  et  $I - J$  puis en déduis les valeurs de  $I$  et  $J$ .

**21** On se propose de calculer l'intégrale  $J$  définie par  $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1 + e^x)^3} dx$

- 1) Calcule les deux intégrales  $A$  et  $B$  tel que  $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$  et  $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx$
- 2) Détermine les réels  $a$  ;  $b$  et  $c$  tel que :  $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$  **(1)**
- 3) En posant  $t = e^x$  dans l'égalité **(1)**, calcule  $I = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^x)^2} dx$
- 4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimer  $J$  en fonction de  $I$ .  
b- En déduis la valeur de  $J$ .

**22** On considère les intégrales  $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$  et  $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$ .

- 1) a- Montre que l'intégrale  $I$  peut s'écrire  $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$   
b- A l'aide d'une intégration par parties, Montre que  $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J$   
c- Montre de même que  $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$
- 2) a- Montre que  $I + J = \frac{3\pi}{4}$ .  
b- Montre que  $J - I = 0$   
c- En déduis les intégrales  $I$  et  $J$ .

## Calculs de valeurs moyennes

**23** L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps  $t$ , a été modélisée par la fonction  $i$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ;  $i(t) = 5\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- 1) Détermine la période de cette fonction.
- 2) Calcule la valeur moyenne de l'intensité  $i$  du courant sur cette période.

**24** La variation de la température de la larve d'un volcan, a été modélisée par la fonction  $f$  telle que pour tout  $t \in [10 ; 30]$ ,  $f(t) = 3t^2 + 2t$  où  $t$  est exprimé en degré Celsius.

- Si la larve est à la température de  $10^\circ\text{C}$  alors le volcan est au repos.
- Si la larve est à la température de  $30^\circ\text{C}$  alors le volcan rentre en éruption.

Qu'elle est la température moyenne de la larve ?

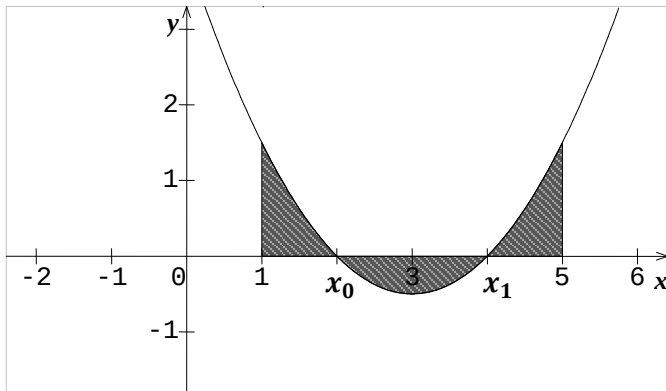
**25** Suite à un début de contamination de la maladie à **Virus Ebola** dans notre pays, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie  $t$  jours après l'apparition des premiers cas est donné par :  $f(t) = 45t^2 - t^3$  Avec  $t \in [0 ; 25]$ .

Calcule le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

## Calculs d'aires

**26** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

- 1) Détermine la valeur de l'intégrale  $\int_1^5 f(x)dx$
- 2) Ci-dessous est donnée la courbe  $C_f$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé( $o ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).



On souhaite Détermine la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

a- Détermine les zéros  $x_0$  et  $x_1$  de la fonction  $f$  (avec  $x_0 < x_1$ ).

b- Détermine la valeur de l'intégrale  $\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx$ .

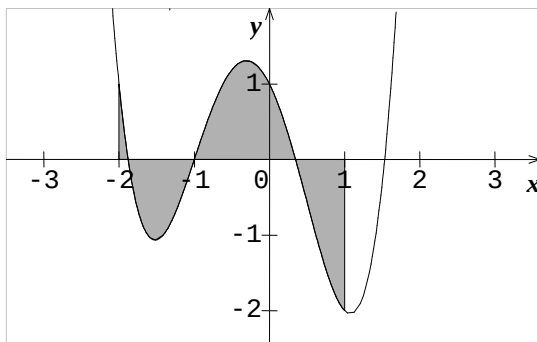
c- Détermine la valeur de l'intégrale  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ .

d- En déduis l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique :  $2cm$ )

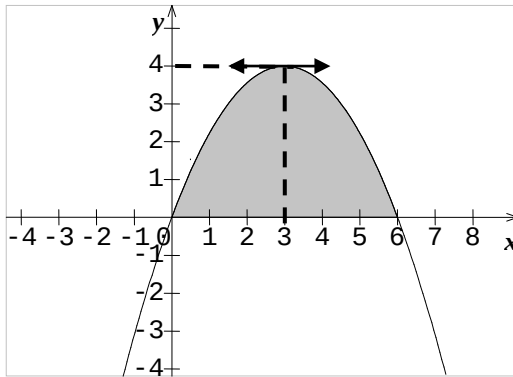
**27** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ .

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  dont les unités graphiques sont :  $6cm$  sur l'axe des abscisses et  $2cm$  sur l'axe des ordonnées

Calcule l'aire du domaine hachuré en  $cm^2$



**28** On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction polynôme  $f$  de degré 2 dans un repère orthonormé  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique :  $2cm$ .



On rappelle que  $f(x) = ax^2 + bx + c$

1) En utilisant le graphique, déterminer les réels  $a$  ;  $b$  et  $c$ .

2) En déduire en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie Hachurée sur le graphique.

**29**

Soient  $f: \mapsto 2x^2 - 2x + 1$  et  $g: \mapsto x^3 - 3x + 3$  deux fonctions de courbes respectives  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique :  $2\text{cm}$ .

- 1) Tracer  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère.
- 2) Calcule en  $\text{cm}^2$  l'aire  $\mathcal{A}$  de l'ensemble des points  $M$  compris entre les courbes  $(C_f)$  ;  $(C_g)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 2$ .

**30**

On donne la figure suivante dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique  $1\text{cm}$ .

