

I- Primitives :

1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I ; F'(x) = f(x)$

2) Propriétés

P₁ : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

P₂ : L'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par $x \rightarrow F(x) + k$ où k est un nombre réel.

3) Tableaux des primitives :

a) Primitives des fonctions usuelles

Fonctions	Primitives
a avec $a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
ax^n avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{a}{x^n}$ avec $x \neq 0 ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$	$2a\sqrt{x} + k$
$\sqrt{x}$ avec $x > 0$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$
$\sqrt{ax+b}$ avec $ax+b > 0$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$
$\cos x$ avec $x \in [-\pi ; \pi]$	$\sin x + k$
$\sin x$ avec $x \in [-\pi ; \pi]$	$-\cos x + k$
$\tan x$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$\cos x + k$
$\cos(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$
$\sin(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$
$\tan(ax+b)$ avec $(ax+b) \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ avec $x \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$-\cot x + k$

b) Opérations sur les Primitives :

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$u + v + k$
$u'v + v'u$	$u \times v + k$
$au' \ (a \in \mathbb{R})$	$au + k$
$u' \times u^n$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{u'}{(u)^n}$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\sin(u)$	$-\frac{1}{u} \cos(u) + k$
$\cos(u)$	$\frac{1}{u} \sin(u) + k$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$	$\sin x + k$
$\frac{u'}{\sin^2 u} = 1 + \cot^2 u$	$-\cot g(u) + k$

II- Intégrale d'une fonction**1) Définition :**

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle $I = [a ; b]$ et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre réel A tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2) Propriétés :

Propriété 1 : (linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a ; b]$ on a :

- $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$
- $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R} ; \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

- Si $f \geq 0$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $|f|$ est continue sur I, alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Propriété 2 : (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soient trois réels a ; b ; c éléments de l'intervalle I

D'après Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Conséquences :

- si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 3 : (Inégalité et valeur de la moyenne)

a) Inégalité de la moyenne :

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors on a : $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

b) Valeur moyenne :

On appelle valeur moyenne de f , le réel $\bar{M}$ tel que :

$$\bar{M} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ et il existe un réel } c \in [a ; b] \text{ tel que : } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

III- Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine

1) Intégration par Parties

Théorème :

Si u et v sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle $I = [a ; b]$, tel que :

$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) .$$

On appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \int_a^b (u \times v)'(x) dx &= \int_a^b [u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)] dx \\ &= \int_a^b u'(x) \times v(x) dx + \int_a^b u(x) \times v'(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_a^b (u \times v)'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b$$

$$\Rightarrow [u(x) \times v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x) \times v(x) dx + \int_a^b u(x) \times v'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx.$$

Intégration par substitution ou par changement de variable

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable x une autre variable qui est fonction de x .

Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$ ($\alpha \neq 0$) ; on utilise la méthode suivante :

- Faire le changement de variable en posant : $u = \alpha t + \beta$ et on obtient $du = \alpha dt$
- Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) du$

IV- Calculs de valeurs approchées d'une intégrale :

Méthode de rectangles :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a ; b]$, tel que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.

Lorsque l'on partage $[a ; b]$ en n intervalles de même amplitude et d'extrémités

$a = x_0 ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots x_n = b$; On a :

Une suite (S_n) $n \in \mathbb{N}^*$ de termes général S_n tel que : $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ qui converge vers $A = \int_a^b f(t) dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |A - S_n| \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2$

V- Calcul d'aires :

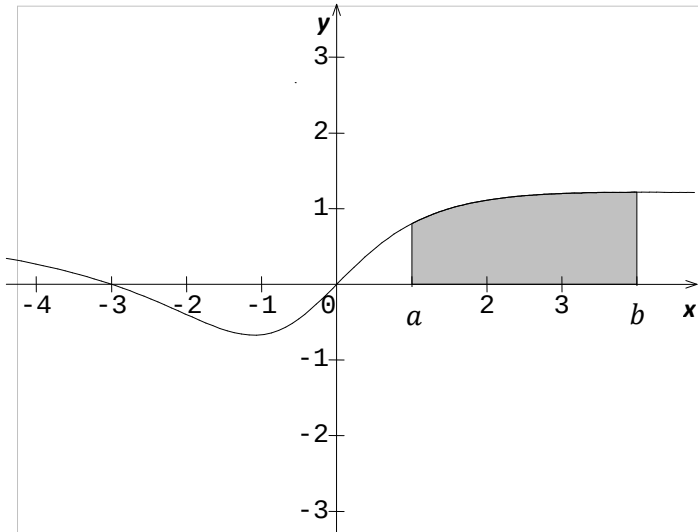
De façon générale nous admettons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à $F(b) - F(a)$ ou F est une primitive de f sur $[a; b]$; (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle $OIAJ$).

Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions f et g ($f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque x va de a vers b ($a < b$).

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (Unité d'aire) ou } S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \text{ (Unité d'aire).}$$

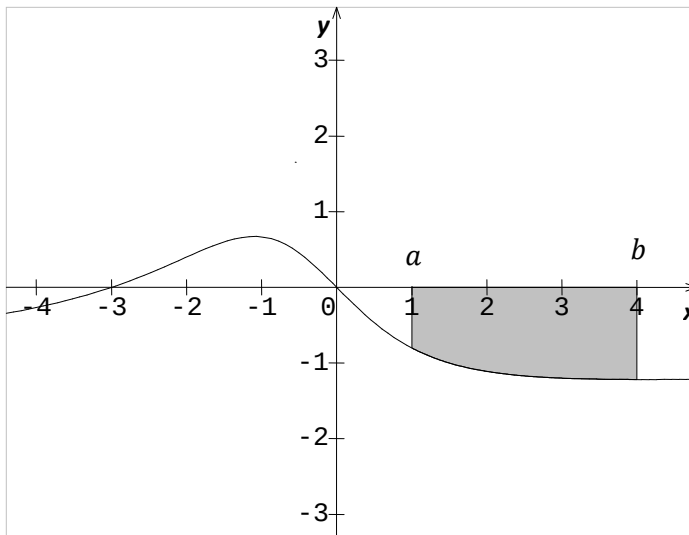
NB : Dans cette intégration, les portions de surfaces au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative. Voici quelques cas de calculs de surfaces :

1^{er} Cas de figure :



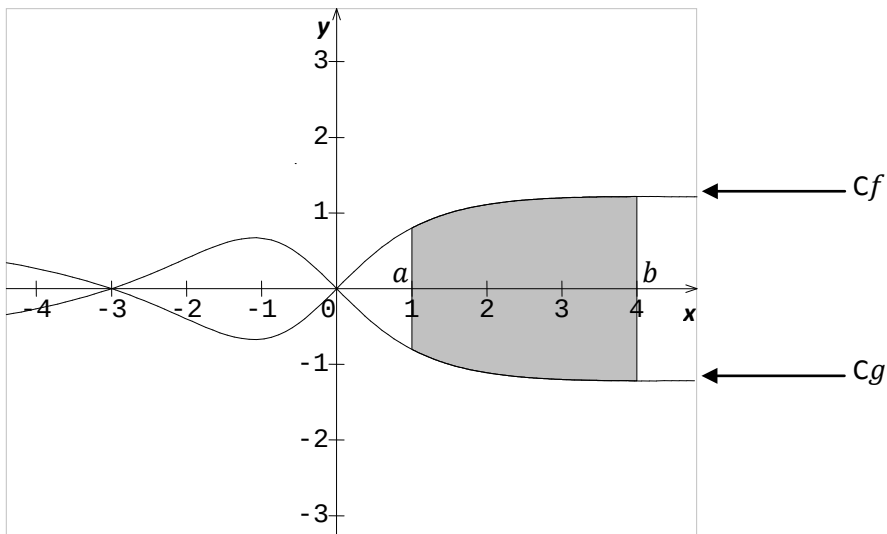
L'aire du domaine plan hachuré par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = \int_a^b f(x)dx$ (Unité d'aire)

2^{ème} Cas de figure :

L'aire du domaine plan hachuré par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

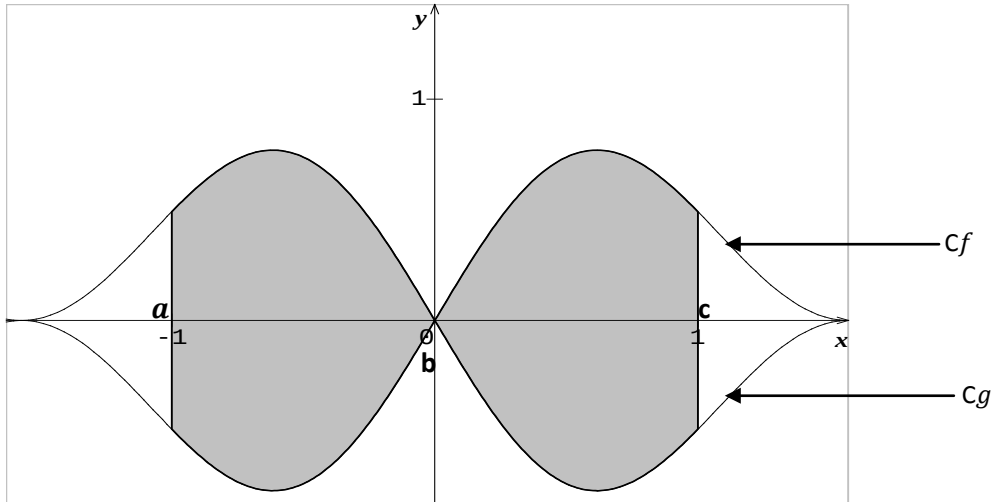
d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = - \int_a^b f(x) dx$ (Unité d'aire)

3^{ème} Cas de figure :

L'aire du domaine plan hachuré par les courbes (Cf) , (Cg) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ (Unité d'aire)

NB : la différence $f(x) - g(x)$ est très importante car la courbe (Cf) est au dessus de la courbe (Cg) dans l'intervalle $[a ; b]$

4^{ème} Cas de figure :



L'aire du domaine plan hachuré par les courbes (Cf) , (Cg) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$; $x = b$ et $x = c$ est :

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx + \int_b^c [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{Unité d'aire})$$

NB : On a la différence $g(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[a ; b]$ car la courbe (Cf) est au dessus de la courbe (Cg) et la différence $f(x) - g(x)$ dans l'intervalle $[b ; c]$