

Chapitre 9

Calcul intégral

Du niveau de base au niveau concours

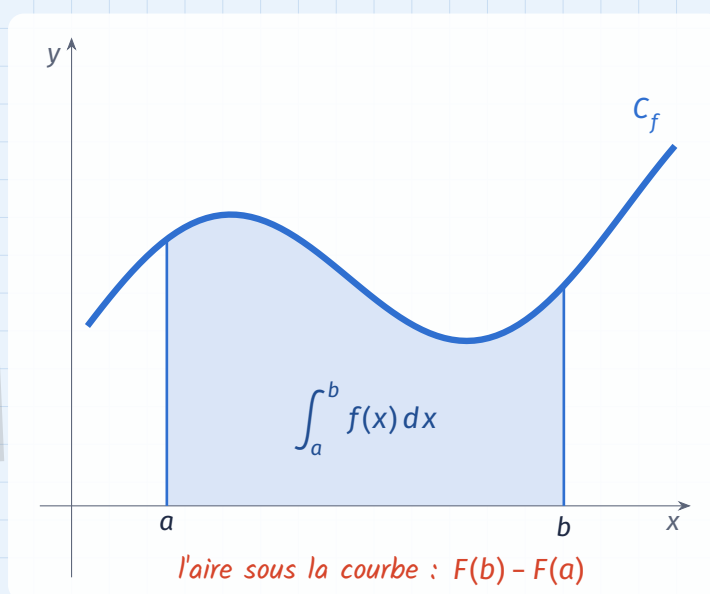
À connaître par cœur

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Défi de concours

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1	Intégrale d'une fonction continue	5
2	Interprétation géométrique	6
3	Propriétés de l'intégrale	7
4	Encadrements et valeur moyenne	8
5	La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$	10
6	Intégration par parties	11
7	Changement de variable	12
8	Calcul d'aires	13
9	Volumes de révolution	15
10	Sommes de Riemann	16
11	Suites d'intégrales	17
12	Les pièges classiques	19
13	Les astuces des concours	19
14	L'essentiel du chapitre en une page	22
15	Niveau 1 · Bases	23
16	Niveau 2 · Bac	24
17	Niveau 3 · Approfondissement	26
18	Niveau 4 · Concours	27
19	Techniques de calcul	29
20	Propriétés et encadrements	31
21	Aires et volumes	33
22	Fonctions définies par intégrale	35
23	Suites et sommes de Riemann	37

24 Défis de concours	39
25 Corrigés du niveau 1	42
26 Corrigés du niveau 2	44
27 Corrigés du niveau 3	48
28 Corrigés du niveau 4	50
29 Corrigés : techniques de calcul	53
30 Corrigés : propr. et encadrements	57
31 Corrigés : aires et volumes	61
32 Corrigés : fonctions définies par intégrale	64
33 Corrigés : suites et sommes de Riemann	67
34 Corrigés : défis de concours	70

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

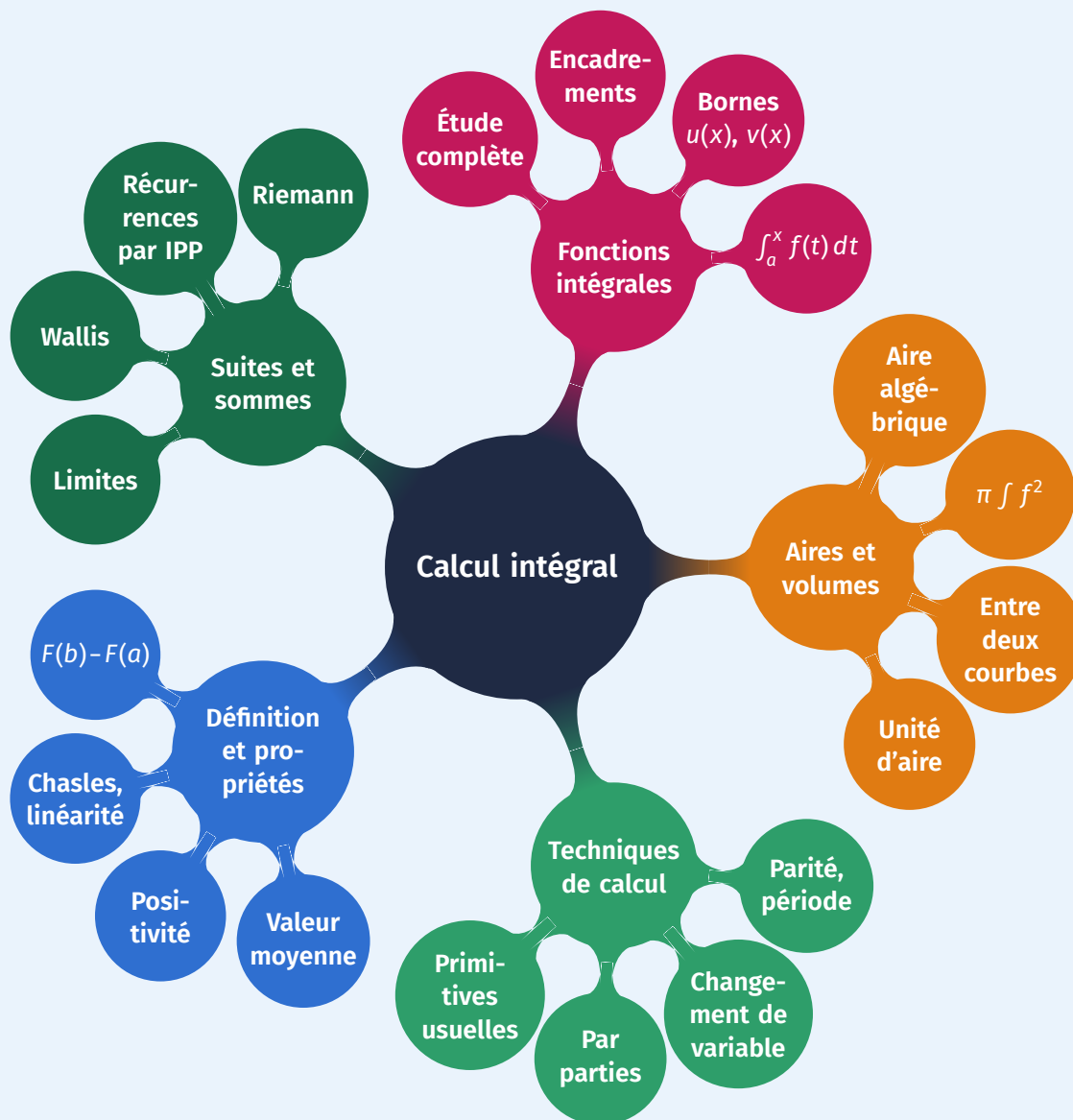
■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Techniques de calcul, Propriétés et encadrements, Aires et volumes, Fonctions définies par intégrale, Suites et sommes de Riemann, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|--|
| ☐ calculer $\int_a^b f$ avec une primitive ; | ☐ intégrer par parties ; |
| ☐ interpréter une intégrale comme une aire ; | ☐ faire un changement de variable ; |
| ☐ utiliser Chasles et la positivité ; | ☐ exploiter parité, période et $a + b - x$; |
| ☐ encadrer une intégrale ; | ☐ calculer aires (en cm^2) et volumes ; |
| ☐ appliquer le théorème de la moyenne ; | ☐ reconnaître une somme de Riemann ; |
| ☐ dériver $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$; | ☐ étudier une suite d'intégrales (Wallis) ; |
| ☐ étudier une fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$; | ☐ comparer une somme et une intégrale. |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Intégrale d'une fonction continue

Définition : intégrale de a à b

Soit f une fonction **continue** sur un **intervalle** I , et a, b deux éléments de I . On sait (chapitre 5) que f admet des primitives sur I . Si F est l'une d'elles, le réel $F(b) - F(a)$ s'appelle l'**intégrale de a à b de f** ; on le note

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Premières conséquences

1. Ce nombre **ne dépend pas de la primitive choisie**, et **la variable est muette** : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.
2. $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b k dx = k(b - a)$ (k constante).
3. Si g est dérivable sur I et si g' est continue sur I : $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$.

Démonstration. 1. Si G est une autre primitive de f sur l'**intervalle** I , il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + C$ (chapitre 5), donc $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. 2. $F(a) - F(a) = 0$, $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$, et $x \mapsto kx$ est une primitive de k . 3. g est une primitive de la fonction continue g' .

Attention, piège !

La continuité sur un intervalle **contenant a et b** est indispensable. Le « calcul » $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = [\ln |x|]_{-1}^1 = 0$ n'a **aucun sens** : $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0, et $\ln |x|$ n'est une primitive de $\frac{1}{x}$ que sur $] -\infty, 0[$ ou sur $] 0, +\infty[$.

Exemple : huit calculs : reconnaître une primitive

1. $\int_{-1}^2 (x^3 - 3x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_{-1}^2 = 0 - \left(-\frac{9}{4} \right) = \frac{9}{4}$ (polynôme).

2. Forme $u' u^2$ avec $u = \sin x$: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{8}.$
3. $\frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$ (forme $\frac{u'}{1+u^2}$) : $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$
4. Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln x > 0$ sur $[e, e^2]$: $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln x) \right]_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$
5. Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^x > 0$: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} \, dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^{\ln 2} = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$
6. Forme $u' u^{\frac{1}{2}}$ avec $u = 1 + 3x^2$: $\int_0^1 x \sqrt{1+3x^2} \, dx = \left[\frac{(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^1 = \frac{8-1}{9} = \frac{7}{9}.$
7. $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$
8. $\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ (division) : $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x+1) \right]_0^1 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$

2

Interprétation géométrique

Définition : unité d'aire

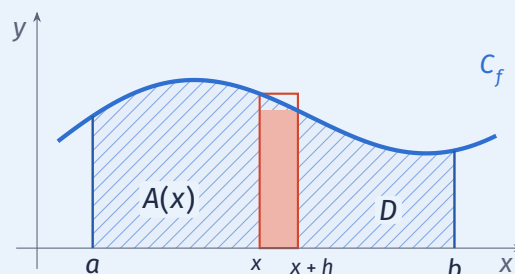
Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = p$ cm et $\|\vec{j}\| = q$ cm, l'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$: 1 u.a. = pq cm².

Théorème : l'aire sous une courbe

Si f est continue et **positive** sur $[a, b]$ ($a < b$), l'aire du domaine

$$D = \{M(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

vaut $\int_a^b f(x) \, dx$ u.a.



la bande $[x, x+h]$ est coincée entre deux rectangles

Justification (on admet qu'une aire est additive et croissante pour l'inclusion). Notons $A(x)$ l'aire de la partie de D comprise entre les droites d'abscisses a et x . Pour $h > 0$, soient m_h et M_h le minimum et le maximum de f sur le segment $[x, x+h]$: la bande d'abscisses $[x, x+h]$ contient le rectangle de hauteur m_h et est contenue dans celui de hauteur M_h , donc

$$h m_h \leq A(x+h) - A(x) \leq h M_h.$$

Or $m_h = f(c_h)$ et $M_h = f(d_h)$ avec $c_h, d_h \in [x, x+h]$: par continuité, $m_h \rightarrow f(x)$ et $M_h \rightarrow f(x)$ quand $h \rightarrow 0^+$. Donc $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \rightarrow f(x)$, et de même à gauche : $A' = f$ et $A(a) = 0$. Ainsi $A(x) = F(x) - F(a)$, et l'aire de D est $A(b) = \int_a^b f(x) \, dx$.

Aire algébrique

Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$, le domaine compris entre C_f et (Ox) est le symétrique par rapport à (Ox) de celui de $-f \geq 0$: son aire est $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$. En général, $\int_a^b f(x) dx$ est la somme des aires situées **au-dessus** de (Ox) **moins** la somme des aires situées **au-dessous**.

Exemple : contrôle et compensation : $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$, $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$, donc $1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2$

Contrôle. $\int_1^3 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$: c'est bien l'aire du trapèze de bases 2 et 4 et de hauteur 2, $\frac{2+4}{2} \times 2 = 6 \text{ u.a.}$ ✓

Compensation. Pour $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ sur $[0, 3]$:

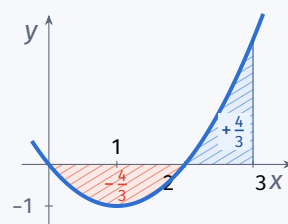
$$\int_0^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^3 = 9 - 9 = 0.$$

Pourtant l'aire n'est pas nulle : $f \leq 0$ sur $[0, 2]$ et $f \geq 0$ sur $[2, 3]$, avec

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3} = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx :$$

les deux parties se **compensent**. L'aire vaut $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$,

soit $\frac{16}{3} \text{ cm}^2$.



3

Propriétés de l'intégrale

Règles de calcul (f, g continues sur l'intervalle I ; $a, b, c \in I$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

Chasles : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Linéarité : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration. $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$; et $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Intégrales et ordre (f, g continues sur $[a, b]$, avec $a \leq b$)

1. **Positivité :** si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2. **Cas d'égalité :** si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est **nulle** sur $[a, b]$. Donc, si $a < b$, $f \geq 0$ et f non identiquement nulle : $\int_a^b f(x) dx > 0$.

3. **Croissance :** si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

4. Valeur absolue : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

Démonstration. 1. Une primitive F de f vérifie $F' = f \geq 0$: F est croissante sur $[a, b]$ et $F(b) \geq F(a)$.
 2. F est croissante et $F(a) = F(b)$: pour tout $x \in [a, b]$, $F(a) \leq F(x) \leq F(b) = F(a)$, donc F est constante sur $[a, b]$ et $f = F' = 0$. 3. On applique 1 à $g - f \geq 0$, puis la linéarité. 4. On applique 3 à $-|f| \leq f \leq |f|$: $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$.

Remarque. La continuité est essentielle dans 2 ; la réciproque de 1 est fausse : $\int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2} \geq 0$ alors que $x < 0$ sur $[-1, 0[$.

Exemple : découper avec Chasles

- $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ est positif sur $[0, 1]$, négatif sur $[1, 2]$, positif sur $[2, 3]$. Avec $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$:

$$\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx = (P(1) - P(0)) - (P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}.$$

- La fonction continue $x \mapsto \min(1, x^2)$ vaut x^2 sur $[-1, 1]$ et 1 sur $[1, 2]$: $\int_{-1}^2 \min(1, x^2) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_1^2 1 dx = \frac{5}{3}.$

Exemple : intégrer des inégalités en cascade

Soit $x \geq 0$. On intègre chaque inégalité sur $[0, x]$ pour obtenir la suivante :

$$\begin{aligned} \cos t \leq 1 &\implies \sin x \leq x \implies 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \implies x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} \implies \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) \leq \frac{x^4}{24} \\ &\implies \frac{x^3}{6} - (x - \sin x) \leq \frac{x^5}{120}. \end{aligned}$$

(Par exemple, la 2^e vient de $\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt$.) On obtient, pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x} \quad \boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} \quad \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6} \quad (x > 0).$$

Par les gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$, et la fonction est paire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$, sans aucun développement limité !

4

Encadrements et valeur moyenne

Inégalités de la moyenne

Soit f continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.

1. Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.
2. Si $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b-a|$ (vrai aussi pour $\int_b^a$).

Démonstration. On intègre $m \leq f \leq M$ (croissance) et $\int_a^b m dx = m(b-a)$; puis $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b-a)$.

Définition : valeur moyenne

La **valeur moyenne** de f , continue sur $[a, b]$ ($a < b$), est le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Théorème de la moyenne

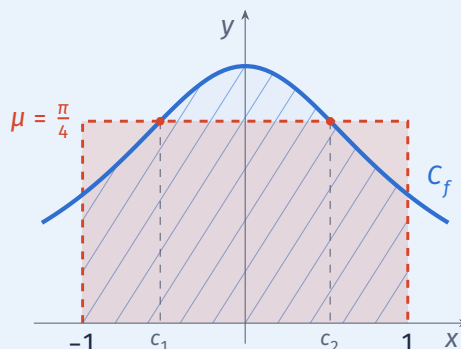
Il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \mu$, c'est-à-dire $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$.

Démonstration 1 (TAF). Une primitive F de f est dérivable sur $[a, b]$: il existe $c \in]a, b[$ tel que $F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c)$.

Démonstration 2 (TVI). f continue sur le segment $[a, b]$ y atteint un minimum m et un maximum M ; d'après 1, $m \leq \mu \leq M$, et le TVI donne $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Interprétation ($f \geq 0$) : le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous C_f .

Exemple : sur $[-1, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a pour valeur moyenne $\mu = \frac{1}{2} [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4}$, atteinte en **deux** points : $c = \pm \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \approx \pm 0,52$ (c n'est pas unique).



les parties hachurées au-dessus de μ compensent exactement le rectangle vide sous μ

Méthode : encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

On encadre l'intégrande $f(x)$ pour tout x du segment par des fonctions dont on connaît une primitive, puis on intègre (bornes dans l'ordre). Pour une limite, on conclut par les gendarmes, ou par le théorème de la moyenne.

Exemple : deux applications

• $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$. Pour $u \geq 0$: $\frac{1}{1+u} - (1-u) = \frac{u^2}{1+u} \geq 0$ et $(1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u} \geq 0$. Avec $u = x^4$, puis en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (1-x^4) dx \leq I \leq \int_0^1 (1-x^4+x^8) dx, \quad \text{soit} \quad \frac{4}{5} \leq I \leq \frac{41}{45} \quad (0,8 \leq I \leq 0,912).$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$. $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$; d'après le théorème de la moyenne, il existe $c_x \in]x, 2x[$ tel que $\int_x^{2x} g(t) dt = x g(c_x)$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $c_x \rightarrow 0$ (gendarmes) et $\frac{\sin c_x}{c_x} \rightarrow 1$: la limite vaut $\boxed{1}$.

5

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

Théorème fondamental

Soit f continue sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a** : F est dérivable sur I , $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Démonstration. Si G est une primitive de f sur I , alors $F(x) = G(x) - G(a)$: donc $F' = G' = f$ et $F(a) = 0$. Deux primitives nulles en a diffèrent d'une constante nulle : elles sont égales.

Bornes variables

Soit f continue sur un intervalle I , et u, v dérivables sur un intervalle J , à valeurs dans I . Alors

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \text{ est dérivable sur } J \text{ et } \boxed{G'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))}.$$

Démonstration. Avec $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$: $G(x) = \Phi(v(x)) - \Phi(u(x))$, et l'on dérive les composées ($\Phi' = f$).

Attention, piège !

Si x figure aussi **dans** l'intégrande, on le sort d'abord de l'intégrale (pour t , c'est une constante) :

$$G(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt, \quad G'(x) = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x),$$

soit $G'(x) = \int_0^x f(t) dt$, et non « $(x-x)f(x) = 0$ ».

Exemple : deux identités obtenues en dérivant

- $L(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ ($x > 0$) : $L'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{x^2+1} = 0$. Donc L est constante, égale à $L(1) = 0$: par exemple $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.

- $K(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $K'(x) = \cos x \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x |\cos x| = \cos^2 x$ et $K(0) = 0$, donc $K(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$, l'aire d'un quart de disque de rayon 1. ✓

Exemple : étude complète de $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1. Dérivée. $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; avec $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, on a $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$: F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} (2e^{-3x^2} - 1).$$

2. Parité. $\varphi(x) = \Phi(x) + \Phi(-x)$ vérifie $\varphi'(x) = e^{-x^2} - e^{-x^2} = 0$ et $\varphi(0) = 0$: Φ est impaire, donc F aussi. On l'étudie sur $[0, +\infty[$.

3. Variations. Pour $x \geq 0$: $F'(x) > 0 \iff e^{3x^2} < 2 \iff x < \alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \approx 0,48$: F croît sur $[0, \alpha]$ et décroît sur $[\alpha, +\infty[$.

4. Encadrement. Pour $x \geq 0$ et $t \in [x, 2x]$: $e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$; en intégrant sur $[x, 2x]$, de longueur x :

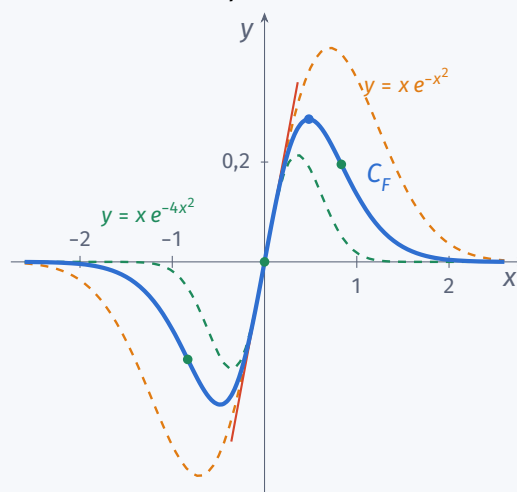
$$x e^{-4x^2} \leq F(x) \leq x e^{-x^2}.$$

Comme $x e^{-x^2} = \frac{1}{x} \times x^2 e^{-x^2} \rightarrow 0$ en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, la droite $y = 0$ est asymptote, et $F > 0$ sur $]0, +\infty[$.

5. Tangente et inflexions. $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$: tangente $y = x$ en O . $F''(x) = 2x e^{-x^2} (1 - 8e^{-3x^2})$ s'annule en changeant de signe en 0 et en $\pm\sqrt{\ln 2} \approx \pm 0,83$: trois points d'inflexion.

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$	
$F'(x)$		-	0	+	0	-
$F(x)$	0		$-F(\alpha)$	0	$F(\alpha)$	0

$F(\alpha) \approx 0,286$ (calcul numérique)



en rouge : la tangente $y = x$ en O

6

Intégration par parties

Formule d'intégration par parties (IPP)

Si u et v sont dérivables sur $[a, b]$, de dérivées u' et v' continues sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Démonstration. uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$ est continue : d'après la section 1, $\int_a^b (u'v + uv')(x) dx = [uv]_a^b$, et l'on conclut par linéarité.

Méthode : choisir u et v'

On **dérive** ce qui se simplifie en dérivant ($\ln x$, $\arctan x$, un polynôme) et l'on **primitive** ce dont on connaît une primitive (e^{ax} , $\cos$, $\sin$, x^r). Si l'intégrande est seul ($\ln$, $\arctan$...), on prend $v' = 1$. Chaque IPP sur $P(x)e^{ax}$ ou $P(x)\sin(ax)$ fait baisser d'une unité le degré de P .

Exemple : cinq calculs

- **Polynôme $\times$ exponentielle.** $u(x) = x + 1$, $v'(x) = e^{2x}$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \left(e^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 - 1}{4} = \boxed{\frac{3e^2 - 1}{4}}.$$

- **Logarithme.** $u(x) = \ln x$, $v'(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$:

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x \right]_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}e\sqrt{e} - \frac{4}{9}(e\sqrt{e} - 1) = \boxed{\frac{2e\sqrt{e} + 4}{9}}.$$

- **Logarithme et arctangente.** $u(x) = \ln(1+x^2)$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $v(x) = x$, et $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$:

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \ln 2 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}.$$

De même, avec $v' = 1$: $\int_0^1 \arctan x dx = \left[x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$

- **Deux IPP successives.** $u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin x$, puis $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin x dx &= \left[-x^2 \cos x \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x dx = \pi^2 + 2 \left(\left[x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \right) \\ &= \pi^2 + 2(0 - 2) = \boxed{\pi^2 - 4}. \end{aligned}$$

7**Changement de variable****Théorème**

Soit φ dérivable sur $[\alpha, \beta]$, de dérivée continue, et f continue sur un intervalle I contenant $\varphi([\alpha, \beta])$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Cas affine ($p \neq 0$) : $\int_a^b f(px+q) dx = \frac{1}{p} \int_{pa+q}^{pb+q} f(u) du.$

Démonstration. Si F est une primitive de f sur I , alors $F \circ \varphi$ est dérivable et $(F \circ \varphi)' = \varphi' \times (f \circ \varphi)$ est continue : les deux membres valent $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Le cas affine est $\varphi(x) = px + q$, lu de droite à gauche.

En pratique : on pose $x = \varphi(t)$ (ou $t = \psi(x)$), on remplace dx par $\varphi'(t) dt$, et l'on **change les bornes**.

Exemple : trois changements de variable

- **Affine.** $t = 1 + x$, $dx = dt$: $\int_{-1}^0 x(1+x)^{2026} dx = \int_0^1 (t-1)t^{2026} dt = \frac{1}{2028} - \frac{1}{2027} =$

$$\boxed{-\frac{1}{2027 \times 2028}} \text{ (sans développer !).}$$

- **Une racine.** Pour $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$, on pose $t = \sqrt{2x-1}$, soit $x = \varphi(t) = \frac{1+t^2}{2}$ avec $t \in [1, 3]$: $dx = t dt$, et

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^3 \frac{1+t^2}{2} \times \frac{1}{t} \times t dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left(12 - \frac{4}{3} \right) = \boxed{\frac{16}{3}}.$$

- **Une tangente.** Pour $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$, on pose $x = \tan t$, $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$: $dx = (1 + \tan^2 t) dt = \frac{dt}{\cos^2 t}$ et $(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{\cos^3 t}$ ($\cos t > 0$) :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \times \frac{1}{\cos^2 t} dt = \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Parité et périodicité (f continue)

- Sur $[-a, a]$: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$; donc $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$ si f est **paire**, et $\int_{-a}^a f = 0$ si f est **impaire**.
- Si f est **T -périodique** sur $\mathbb{R}$: $\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ pour tous réels a, b .

Démonstration. Avec $x = -t$: $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt$, puis Chasles. Avec $x = t + T$: $\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(t+T) dt = \int_a^b f(t) dt$; enfin $\int_a^{a+T} f = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$, et $\int_T^{a+T} f = \int_0^a f = - \int_a^0 f$.

Exemple : parité et périodicité

- $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx = \boxed{\frac{1}{3}}.$
- $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2 \sin^2 x} = \sqrt{2} |\sin x|$ est π -périodique ; par Chasles, pour $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = n \int_0^\pi \sqrt{2} \sin x dx = \boxed{2\sqrt{2} n}.$

8

Calcul d'aires

Aire entre deux courbes

Soient f et g continues sur $[a, b]$ ($a < b$). L'aire du domaine limité par C_f , C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ u.a.,} \quad \text{soit} \quad A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u.a. si } f \geq g \text{ sur } [a, b].$$

Justification. Si $f \geq g$: g est minorée sur le segment $[a, b]$ par un réel $-k$; la translation de vecteur $k\vec{j}$ conserve les aires et amène le domaine entre C_{g+k} et C_{f+k} , au-dessus de (Ox) ; son aire est $\int_a^b (f+k) - \int_a^b (g+k) = \int_a^b (f-g)$. Sinon, on découpe $[a, b]$ aux points où $f - g$ change de signe.

Méthode : calculer une aire

1. Résoudre $f(x) = g(x)$ (points d'intersection) et étudier le **signe de $f - g$** . 2. Découper avec Chasles pour n'intégrer que des fonctions positives. 3. Calculer en u.a., puis **convertir** : 1 u.a. = $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ cm}^2$.

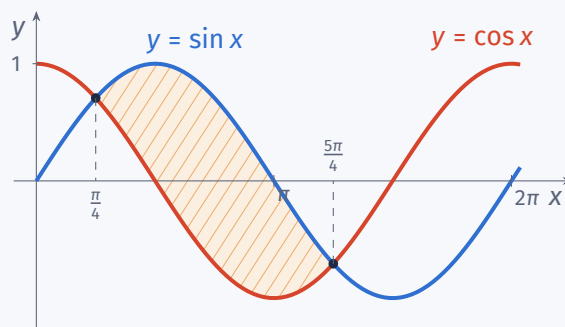
Exemple : la lentille entre sin et cos

Intersections. Sur $[0, 2\pi]$, $\sin x = \cos x \iff \tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$.

Position. $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$: la sinusoïde est au-dessus.

Aire.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \boxed{2\sqrt{2} \text{ u.a.}} \end{aligned}$$



La partie située sous (Ox) ne pose aucun problème : seule compte la différence $f - g$.

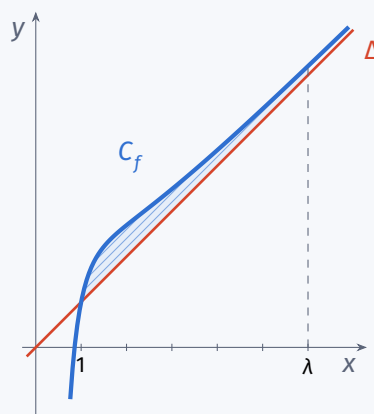
Exemple : type examen : l'aire entre une courbe et son asymptote

Soit $f(x) = x + \frac{4 \ln x}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ (repère orthonormé d'unité 1 cm). Comme $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$ en $+\infty$, la droite $\Delta : y = x$ est asymptote à C_f ; et $f(x) - x = \frac{4 \ln x}{x^2} \geq 0$ sur $[1, +\infty[$: C_f est au-dessus de Δ .

Pour $\lambda > 1$, l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par C_f , Δ et les droites $x = 1$, $x = \lambda$ s'obtient par une IPP ($u = \ln x$, $v' = \frac{1}{x^2}$, $v = -\frac{1}{x}$) :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 4 \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = 4 \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} \right) \\ &= 4 \left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda} + 1 - \frac{1}{\lambda} \right) = 4 - \frac{4(1 + \ln \lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \boxed{4 \text{ cm}^2}$: le domaine est infini, mais son aire « tend » vers 4 cm^2 .



9 Volumes de révolution

Volume d'un solide de révolution

L'espace est rapporté à un repère orthonormé d'unité $p \text{ cm}$; l'unité de volume est $1 \text{ u.v.} = p^3 \text{ cm}^3$. Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$), la rotation autour de (Ox) de l'arc $\{M(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ engendre un solide de volume

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \text{ u.v.}$$

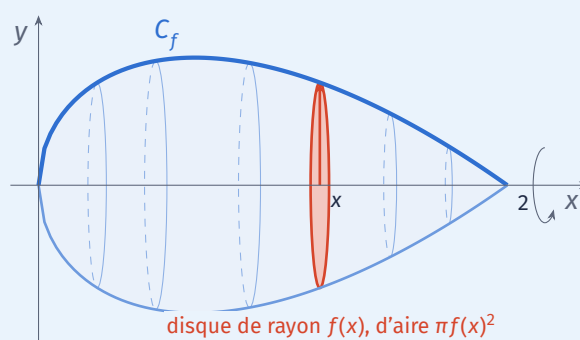
Si $0 \leq g \leq f$ sur $[a, b]$, le domaine compris entre C_g et C_f engendre un solide « percé » (un anneau) de volume $V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$.

Pourquoi ? Le plan perpendiculaire à (Ox) en x coupe le solide suivant un **disque** de rayon $|f(x)|$, d'aire $S(x) = \pi f(x)^2$. Comme pour les aires (section 2), on admet que le volume $V(x)$ de la partie située entre a et x vérifie $V'(x) = S(x)$, d'où $V = \int_a^b S(x) dx$.

Le fuseau de la figure : $f(x) = \sqrt{x}(2-x)$ sur $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 x(2-x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= \pi \left(4 - \frac{32}{3} + 8 \right) = \boxed{\frac{4\pi}{3} \text{ u.v.}}, \end{aligned}$$

le volume d'une boule de rayon 1 ! Avec $p = 2$: $V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3 \approx 33,5 \text{ cm}^3$.



Exemple : les formules de la géométrie, et un anneau

- **Boule** de rayon R (demi-cercle $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$) et **cône** de rayon r et de hauteur

h (segment $f(x) = \frac{r}{h}x, x \in [0, h]$) :

$$V_{\text{boule}} = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{\text{cône}} = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

- **Anneau.** Les paraboles $y = x^2$ et $y = 2 - x^2$ se coupent en $x = \pm 1$, et $0 \leq x^2 \leq 2 - x^2$ sur $[-1, 1]$. Le domaine qu'elles limitent engendre un solide « percé » de volume

$$V = \pi \int_{-1}^1 ((2 - x^2)^2 - x^4) dx = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4x^2) dx = \pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \boxed{\frac{16\pi}{3} \text{ u.v.}}$$

10

Sommes de Riemann

Définition : méthode des rectangles

Soit f continue sur $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On découpe $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$, de bornes $x_k = a + kh$ ($0 \leq k \leq n$), et l'on pose

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

R_n (rectangles « à gauche ») et S_n (rectangles « à droite ») sont des **sommes de Riemann**.

Théorème (démontré pour f monotone, admis dans le cas général)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx \quad \text{en particulier} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Si } f \text{ est monotone : } \left| \int_a^b f(x) dx - R_n \right| \leq \frac{(b-a) |f(b) - f(a)|}{n} \quad (\text{de même pour } S_n).$$

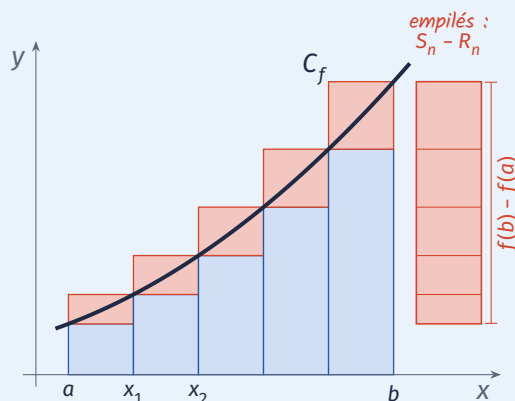
Démonstration (f croissante). Pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$: $f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})$. En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, de longueur h :

$$h f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq h f(x_{k+1}).$$

On somme pour $k = 0, \dots, n-1$ (Chasles) : $R_n \leq I \leq S_n$, avec $I = \int_a^b f$. Or la somme est télescopique :

$$S_n - R_n = h(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

Donc $0 \leq I - R_n \leq S_n - R_n \rightarrow 0$ et $0 \leq S_n - I \leq S_n - R_n \rightarrow 0$. Si f est décroissante, on applique ce résultat à $-f$.



$n = 5$: R_n (bleu) $\leq I \leq S_n$ (bleu + rouge)

Méthode : reconnaître une somme de Riemann

On met $\frac{1}{n}$ en facteur et l'on fait apparaître $f\left(\frac{k}{n}\right)$; on vérifie que k va de 1 à n (ou de 0 à $n-1$), sinon l'intervalle d'intégration change. Pour un **produit**, on passe au logarithme.

Exemple : trois limites

• **Le post-it de la couverture.** $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$

• $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \boxed{\sqrt{3}-1}.$

• $w_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$: on passe au logarithme,

$$\ln w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+x) dx = \left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1,$$

donc, par continuité de exp, $w_n \rightarrow e^{2\ln 2 - 1} = \boxed{\frac{4}{e}}.$

11

Suites d'intégrales**Méthode : étudier $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ (avec $a < b$)**

Signe et monotonie : on compare les **intégrandes** ($f_n \geq 0$, $f_{n+1} \leq f_n \dots$) puis on intègre.

Récurrence : une IPP relie I_{n+1} à I_n . **Limite** : on **encadre** f_n puis I_n (gendarmes); une suite monotone et bornée converge, mais il faut encore trouver sa limite.

Exemple : $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}, n \in \mathbb{N}^*$

1. Monotonie. Pour $x \in [0, 1]$, $(1+x^2)^{n+1} \geq (1+x^2)^n > 0$, donc $0 < I_{n+1} \leq I_n$: (I_n) est décroissante et minorée par

0, donc convergente. $I_1 = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2. Récurrence. IPP avec $u(x) = (1+x^2)^{-n}$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$, $v(x) = x$, puis $x^2 = (1+x^2) - 1$:

$$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

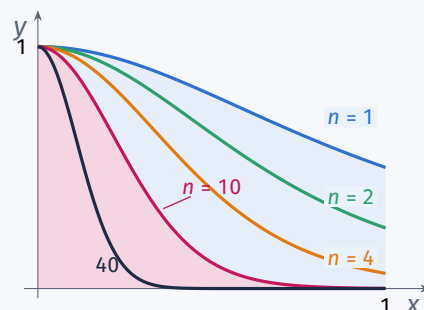
$$= \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1}),$$

soit $2n I_{n+1} = (2n-1) I_n + \frac{1}{2^n}$

d'où $I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.

3. Limite. D'après l'inégalité de Bernoulli, $(1+x^2)^n \geq 1+nx^2$, donc

$$0 < I_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+nx^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\arctan(\sqrt{n}x) \right]_0^1 = \frac{\arctan \sqrt{n}}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$



l'aire sous $y = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ se concentre près de 0

Les intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, n \in \mathbb{N}$

1. $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$; (W_n) est strictement positive et décroissante.

2. $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où $W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$.

3. $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4. **Formule de Wallis :** $\frac{\pi}{2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^p \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \dots \times \frac{2p \times 2p}{(2p-1)(2p+1)}$.

Démonstration. 1. Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange $\cos$ et $\sin$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos x \leq 1$, donc $\cos^{n+1} x \leq \cos^n x$; et $\cos^n$ est continue, positive, non nulle, donc $W_n > 0$ (section 3).

2. IPP avec $u(x) = \cos^{n+1} x$, $v'(x) = \cos x$, $u'(x) = -(n+1)\cos^n x \sin x$, $v(x) = \sin x$, puis $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$W_{n+2} = \left[\cos^{n+1} x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^2 x dx = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

Les deux formules s'en déduisent par récurrence sur p (pour $W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p}$, on multiplie numérateur et dénominateur par $2p+2$).

3. $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ vérifie $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n$: elle est constante, égale

à $u_0 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$. Par décroissance, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$, et en divisant par $W_n > 0$:

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \quad (\text{gendarmes}), \quad \text{puis} \quad nW_n^2 = \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{W_n}{W_{n+1}} \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

4. Avec 2, $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{16^p (p!)^4}{(2p)!(2p+1)!} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^p \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$ (on regroupe pairs et impairs), et ce rapport tend vers 1.

12

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_{-1}^1 = 0$	$\frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $[-1, 1]$: cette intégrale n'est pas définie
$\int_a^b f(x) dx = 0$, donc $f = 0$ sur $[a, b]$	vrai seulement si f est continue et de signe constant : $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$
$\int_a^b f \leq \int_a^b g$, donc $f \leq g$ sur $[a, b]$	réciproque fausse : $\int_0^2 x dx = 2 \leq \int_0^2 \frac{3}{2} dx = 3$, mais $x > \frac{3}{2}$ sur $]\frac{3}{2}, 2]$
$f \leq g$, donc $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (sans condition)	seulement si $a \leq b$: $1 \leq 2$ mais $\int_1^0 dx = -1 > \int_1^0 2 dx = -2$
$ \int_a^b f = \int_a^b f $	seulement $\leq$; $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ mais $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 4$
$\left(\int_0^{x^2} f(t) dt\right)' = f(x^2)$	$\left(\int_0^{x^2} f(t) dt\right)' = 2x f(x^2)$ (dérivée d'une composée)
$\left(\int_0^x x f(t) dt\right)' = x f(x)$	x sort de l'intégrale : $\left(x \int_0^x f(t) dt\right)' = \int_0^x f(t) dt + x f(x)$
avec $t = \frac{1}{x}$: $dt = dx$, et les bornes restent les mêmes	$dt = -\frac{dx}{x^2}$, et les bornes $\frac{1}{2}$ et 2 deviennent 2 et $\frac{1}{2}$
avec $x = \sin t$: $\sqrt{1-x^2} = \cos t$	$\sqrt{1-x^2} = \cos t $; c'est $\cos t$ si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
f paire, donc $\int_0^{2a} f = 2 \int_0^a f$	il faut un intervalle symétrique : $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$
$V = \pi \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2$ ou $V = \pi \int_a^b f(x) dx$	$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ u.v., et 1 u.v. = $p^3 \text{ cm}^3$
$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$	ici $\frac{k}{n}$ parcourt $]0, 2]$: la limite est $\int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \ln 3$
la valeur moyenne est atteinte en $c = \frac{a+b}{2}$	c existe mais n'est pas connu : pour $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[-1, 1]$, $c = \pm 0,52$
(I_n) est décroissante et positive, donc $I_n \rightarrow 0$	elle converge, mais sa limite peut être > 0 : $\int_0^1 (1+x^n) dx \rightarrow 1$

13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : la symétrie $x \mapsto a + b - x$

Si f est continue sur $[a, b]$: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$ (changement de variable $t = a + b - x$, qui échange a et b). En particulier, si f est positive et ne s'annule pas en même temps que $x \mapsto f(a + b - x)$:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(a + b - x)} dx = \frac{b - a}{2} \quad (\text{la somme des deux intégrales « jumelles » vaut } b - a).$$

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2026} x}{\cos^{2026} x + \sin^{2026} x} dx = \frac{\pi}{4}, \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

$$\bullet I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (\sin(\pi - x) = \sin x, \cos^2(\pi - x) = \cos^2 x), \text{ donc}$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \left[-\arctan(\cos x) \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}.$$

★ Astuce de concours : l'inégalité de Cauchy--Schwarz

Pour f, g continues sur $[a, b]$ ($a < b$) : $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \times \int_a^b g(x)^2 dx$.

Preuve. Pour tout réel λ , $P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geq 0$ (positivité). Si $\int_a^b f^2 > 0$, ce trinôme de signe constant a un discriminant ≤ 0 : c'est l'inégalité. Si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f = 0$ (section 3) et l'inégalité est évidente.

$$\bullet \text{ Avec } f(x) = \sqrt{x} \text{ et } g(x) = \sqrt{\sin x} : \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx \right)^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi^2}{8}, \text{ donc}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111 \quad (\text{valeur : } 1,108).$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, 1] \text{ avec } f(0) = 0 : f(x)^2 = \left(\int_0^x 1 \times f'(t) dt \right)^2 \leq x \int_0^x f'^2 \leq x \int_0^1 f'^2 ;$$

on intègre sur $[0, 1]$: $\boxed{\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2}.$

★ Astuce de concours : $\pi < \frac{22}{7}$: une intégrale positive mesure un écart

La division de $x^4(1 - x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$ par $1 + x^2$ donne

$$\frac{x^4(1 - x)^4}{1 + x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1 + x^2}, \quad \text{d'où} \quad \int_0^1 \frac{x^4(1 - x)^4}{1 + x^2} dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi = \frac{22}{7} - \pi.$$

L'intégrande est continu, positif et non nul, donc $\pi < \frac{22}{7}$. Mieux : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 x^4(1 - x)^4 dx = \frac{1}{630}$, d'où $\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}$, soit $\boxed{3,1412 < \pi < 3,1421}$.

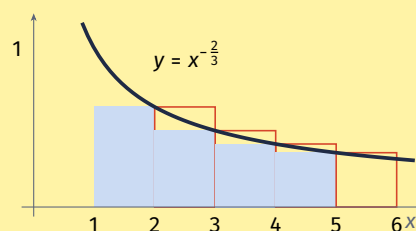
★ **Astuce de concours : encadrer une somme par des intégrales**

Si f est décroissante sur $[1, +\infty[$, alors pour tout entier $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \quad (\text{figure}).$$

En sommant (Chasles) :

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx.$$



$f(k)$: sous la courbe sur $[k-1, k]$ (bleu), au-dessus sur $[k, k+1]$ (rouge)

Exemple : $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, de primitive $3\sqrt[3]{x}$, est strictement décroissante. Pour $S = \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$:

$$297 < 3 \left(\sqrt[3]{10^6 + 1} - 1 \right) \leq S < 1 + 3 \left(\sqrt[3]{10^6} - 1 \right) = 298, \quad \text{donc} \quad \boxed{E(S) = 297}.$$

De même, en divisant par $\sqrt[3]{n}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} = 3.$

★ **Astuce de concours : le lemme de Riemann--Lebesgue (f de classe C^1 sur $[a, b]$)**

Avec $M = \max_{[a,b]} |f'|$, une IPP ($u = f$, $v' = \sin(nx)$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$) donne

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| = \left| \left[-\frac{f(x) \cos(nx)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + M(b-a)}{n},$$

qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et de même avec $\cos(nx)$. **Application :** $\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$,

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dx}{1+x} = \frac{\ln(1+\pi)}{2}.$$

★ **Astuce de concours : la limite de $n \int_0^1 x^n f(x) dx$ (f de classe C^1 sur $[0, 1]$)**

Avec $M = \max_{[0,1]} |f'|$, une IPP ($u = f$, $v' = x^n$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$) donne

$$(n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \right| \leq \frac{M}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) \quad \text{par exemple} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

L'aire sous $y = x^n f(x)$ se concentre près de $x = 1$, et vaut environ $\frac{f(1)}{n}$.

14

L'essentiel du chapitre en une page

Définition (f continue sur un intervalle $I \ni a, b$)

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, F primitive de f .

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \int_a^b g' = g(b) - g(a).$$

Aire (1 u.a. = $\|i\| \times \|j\|$ cm²)

$f \geq 0$ sur $[a, b]$: $\int_a^b f$ = aire sous C_f (u.a.).

Entre deux courbes : $A = \int_a^b |f - g|$ (découper aux zéros de $f - g$).

Propriétés

Chasles : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$; linéarité.

Si $a \leq b$: $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$; $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$;

$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$; $f \geq 0$ continue et

$$\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Moyenne ($a < b$)

$$m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f ; \text{ il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = \mu.$$

Fonctions définies par une intégrale

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$: primitive de f nulle en a , $F' = f$.

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

Intégration par parties (u', v' continues)

$$\int_a^b u v' = [u v]_a^b - \int_a^b u' v : \text{dériver } \ln, \arctan, P(x).$$

Changement de variable (φ' continue)

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt : \text{changer } dx \text{ et les bornes.}$$

$$\int_a^b f(px+q) dx = \frac{1}{p} \int_{pa+q}^{pb+q} f(u) du.$$

Parité, périodicité

f paire : $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$; f impaire : $\int_{-a}^a f = 0$.

f T -périodique : $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

Volumes (1 u.v. = p^3 cm³)

Rotation autour de (Ox) : $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ u.v.

Boule : $\frac{4}{3}\pi R^3$; cône : $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; anneau :

$$\pi \int_a^b (f^2 - g^2).$$

Sommes de Riemann (f continue)

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b f ;$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f.$$

$$f \text{ monotone : erreur } \leq \frac{(b-a)|f(b) - f(a)|}{n}.$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \rightarrow \frac{\pi}{4}.$$

Suites d'intégrales

Monotonie : comparer les intégrandes ;

réurrence : IPP ; limite : encadrer.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} < \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \text{ (Bernoulli).}$$

$$\text{Wallis : } W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n,$$

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{n}W_n \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Astuces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

$$f \text{ décroissante : } \int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f.$$

$$\text{Cauchy-Schwarz : } \left(\int_a^b f g \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi > 0.$$

$$f \text{ de classe } C^1 : \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \rightarrow 0 ;$$

$$n \int_0^1 x^n f \rightarrow f(1).$$

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

15 Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Calculs directs ★

corrigé p. 42

Calculer, avec les primitives usuelles (formes $u' u^r$, $\frac{u'}{1+u^2}$, $a^x = e^{x \ln a}$, ...):

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx & \text{b) } \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} & \text{c) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} & \text{d) } \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} \\ \text{e) } \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx & \text{f) } \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt[3]{e^x-1} dx & \text{g) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx & \text{h) } \int_0^1 2^x 3^x dx \end{array}$$

Exercice 2 Propriétés de l'intégrale ★

corrigé p. 42

1. Calculer $\int_0^\pi \max(\sin x, \cos x) dx$.
2. Si f est continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f^2 = 2 \int_0^1 x f(x) dx - \frac{1}{3}$, calculer $\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx$; que vaut f ?
3. Si f est continue sur $[0, 1]$, $|f| \leq 1$ et $\int_0^1 f = 0$, montrer que $\left| \int_0^1 x f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}$ (penser à $x - \frac{1}{2}$).

Exercice 3 Valeur moyenne, encadrement ★

corrigé p. 42

1. Valeur moyenne μ de $\ln$ sur $[1, e]$, et $c \in [1, e]$ tel que $\ln c = \mu$? Même question pour $x \mapsto 2^x$ sur $[0, 1]$.
2. Justifier que $1 + u \leq e^u \leq 1 + (e-1)u$ sur $[0, 1]$ (tangente, corde), puis que $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \frac{e+2}{3}$.

Exercice 4 Intégrations par parties ★

corrigé p. 43

Calculer par une (ou deux) intégration(s) par parties (pour d), poser d'abord $t = \sqrt{x}$:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_0^1 x^3 \arctan x dx & \text{b) } \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx & \text{c) } \int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx & \text{d) } \int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx \end{array}$$

e) Déterminer la primitive F de $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 5 Changements de variable ★

corrigé p. 43

Calculer à l'aide du changement de variable indiqué:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} \quad (t = \sqrt[3]{x}) & \text{b) } \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} \quad (t = \sqrt{e^x + 1}) & \text{c) } \int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (x = 2 \tan t) \\ \text{d) } \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx \quad (x = \sin t) & \text{e) } \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{2x}} \quad (t = e^x) \end{array}$$

Exercice 6 Dériver une intégrale ★

corrigé p. 43

1. Dériver $A(x) = \int_0^{x^2} \ln(1 + e^t) dt$ et $B(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t}{1+t^2} dt$. Si $C(x) = \int_0^x (x-t) \sin(t^2) dt$, montrer que $C''(x) = \sin(x^2)$.
2. Soit $G(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{1+t^2}$. Sans calculer $G(x)$: variations, limites en $\pm\infty$, $G(-1-x) = G(x)$, maximum. Vérifier que $G(x) = \arctan \frac{1}{x^2+x+1}$.

Exercice 7 Calculs d'aires ★

corrigé p. 44

Repère orthonormé d'unité 2 cm. Calculer, en u.a. puis en cm^2 , l'aire du domaine limité par : 1. la courbe de $\exp$ et la droite passant par ses points d'abscisses 0 et 1 ; 2. les courbes $C : y = \frac{1}{1+x^2}$ et $P : y = \frac{x^2}{2}$; 3. la courbe de $\ln$, l'axe (Ox) et la tangente à la courbe de $\ln$ passant par O .

Exercice 8 Volumes de révolution ★

corrigé p. 44

Volume (u.v.) du solide engendré par la rotation autour de (Ox) : 1. de la courbe de f sur I : a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $I = [0, 1]$; b) $f(x) = \sin x \sqrt{\cos x}$, $I = [0, \frac{\pi}{2}]$; c) $f(x) = 2 + \sin x$, $I = [0, 2\pi]$ (un « vase ») ; 2. du domaine compris entre $y = x$ et $y = x^2$ (volume $\pi \int_a^b (g^2 - h^2) dx$ si $0 \leq h \leq g$).

16

Niveau 2 • Bac**Exercice 9 Parité, périodicité** ★★

corrigé p. 44

1. Soit f continue de période $T > 0$ et $F(x) = \int_0^x f$. Montrer que $F(x+T) = F(x) + F(T)$ (dériver), puis que F est T -périodique si et seulement si $\int_0^T f = 0$. Calculer $\int_0^x \sin^3 t dt$ et $\int_0^x \sin^2 t dt$: périodiques ?
2. Montrer que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x |\sin x| dx = (2k+1)\pi$ (poser $x = t + k\pi$), puis que $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx = n^2\pi$.
3. À l'aide du changement de variable $x = 2\pi - t$, calculer $\int_0^{2\pi} x \sin^2 x dx$.

Exercice 10 Problème : la fonction $x(1 - \ln x)^2$ ★★

corrigé p. 45

Soit $f(x) = x(1 - \ln x)^2$ si $x > 0$, $f(0) = 0$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Continuité et dérivabilité de f à droite en 0 ? Limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$? Interpréter.
2. Montrer que $f'(x) = (\ln x)^2 - 1$; dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que C_f a un unique point d'inflexion I ; donner la tangente T en I . Tracer T et C_f .
4. Calculer $\int_1^e f(x) dx$ (deux intégrations par parties) ; en déduire l'aire (en cm^2) du domaine limité par C_f , (Ox) et les droites $x = 1$, $x = e$.

Exercice 11 Problème : les intégrales $\int \cos^n x \cos(nx)$ ★★

corrigé p. 45

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx) dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx) dx$.

1. Calculer I_0, I_1, J_0, J_1 . Soit $n \geq 1$. Par parties (et avec $\sin x \sin(nx) = \cos((n-1)x) - \cos x \cos(nx)$), montrer que $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$; en déduire I_n .
2. Soit $n \geq 1$. Montrer de même que $2J_n = J_{n-1} + \frac{1}{n}$, puis que $2^{n+1} J_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$.
3. Montrer que $\frac{1}{2n} \leq J_n \leq \frac{2}{n}$ pour $n \geq 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$.

Exercice 12 Problème : la fonction $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$ ★★

corrigé p. 46

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$ ($x \in \mathbb{R}$), et C_F sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Dérivabilité, F' , F'' ; parité (poser $t = -u$) ; variations ; point d'inflexion et tangente en O .
2. Montrer que $1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2+t^4} \leq \frac{1}{1+t^2}$ ($t \geq 0$), puis que $x - \frac{x^3}{3} \leq F(x) \leq \arctan x$ ($x \geq 0$). En déduire que F a une limite finie ℓ en $+\infty$, et $\frac{2}{3} \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$.
3. Avec $t = \frac{1}{u}$, montrer que $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2+t^4} = \int_{1/x}^1 \frac{u^2 du}{1+u^2+u^4}$ ($x > 0$), puis que $\ell = \int_0^1 \frac{1+u^2}{1+u^2+u^4} du$.
4. Soit $\varphi(u) = u - \frac{1}{u}$ sur $]0, 1]$. Vérifier que $\frac{1+u^2}{1+u^2+u^4} = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)^2+3}$; en déduire que $\ell = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Tracer C_F .

Exercice 13 Sommes de Riemann ★★

corrigé p. 46

Si f est continue et monotone sur $[a, b]$, on sait (cours) que $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b f$. Limites de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos^2 \frac{k\pi}{4n}}, \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan \frac{k\pi}{4n}, \quad P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n^2}} ?$$

(pour u_n , dériver $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; pour P_n , passer au logarithme.)

Exercice 14 Formules d'Euler et intégrales ★★

corrigé p. 46

1. Montrer que $\cos^4 x \sin^2 x = \frac{2+\cos 2x-2\cos 4x-\cos 6x}{32}$ (formules d'Euler) ; calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x dx$.
2. Linéariser $\sin^5 x$; en déduire $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $\sum_{k=-n}^n e^{2ikx}$, montrer que $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}$ ($0 < x < \pi$), puis que $\int_0^{\pi} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx = \pi$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$ (prolongement par continuité).

Exercice 15 Le logarithme et e comme des aires ★★

corrigé p. 47

On n'utilise pas ici la fonction $\ln$: on pose $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour $x > 0$.

1. Dérivabilité de L , L' , $L(1)$, sens de variation et signe de L .
2. Soit $a > 0$. Avec $t = au$, montrer que $\int_a^{ax} \frac{dt}{t} = L(x)$, puis $L(ax) = L(a) + L(x)$; en déduire $L\left(\frac{1}{x}\right)$, $L(x^n)$.
3. Montrer que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{3-t}{2}$ sur $[1, 2]$ et $\frac{1}{t} \geq 1 - \frac{t}{4}$ sur $]0, +\infty[$; en déduire $\frac{1}{2} \leq L(2) \leq \frac{3}{4}$ et $L(3) > 1$, puis l'existence d'un unique e tel que $L(e) = 1$, et $2 < e < 3$.
4. Limites de L en $+\infty$ (voir $L(2^n)$) et en 0^+ ? Montrer que $L(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$ ($x \geq 1$) ; limite de $\frac{L(x)}{x}$ en $+\infty$?

Exercice 16 Problème : les courbes de $x^n \ln x$ ★★

corrigé p. 47

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = x^n \ln x$ si $x > 0$, $f_n(0) = 0$, et C_n sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Continuité de f_n à droite en 0 ? Dérivabilité à droite en 0 (distinguer $n = 1$ et $n \geq 2$) ? Limites de $f_n(x)$ et de $\frac{f_n(x)}{x}$ en $+\infty$?
2. Variations de f_n ; montrer que son minimum vaut $-\frac{1}{ne}$.
3. Position relative de C_n et C_{n+1} ? Tracer C_1, C_2, C_3 sur $[0; 1, 4]$.
4. Soit A_n l'aire (u.a.) du domaine limité par C_n et (Ox) entre 0 et 1 . Par parties sur $[\varepsilon, 1]$, montrer que $A_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Aire entre C_n et C_{n+1} sur $[0, 1]$? Montrer que $A_1 + \dots + A_n \leq 1$, puis que cette somme a une limite.

17

Niveau 3 • Approfondissement

Exercice 17 Changements de variable (suite) ★★★

corrigé p. 48

Calculer à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (t = \tan \frac{x}{2}) & \text{b) } \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x}{3-x}} dx \quad (x = 3 \sin^2 t) \\ \text{c) } \int_{\ln \sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \quad (t = \sqrt{e^{2x} - 1}) & \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} \quad (t = \tan x) \end{array}$$

Exercice 18 Prolonger les nombres harmoniques ★★★

corrigé p. 48

Pour $x \geq 0$, on pose $H(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ (la fonction intégrée est prolongée par continuité en 0 et en 1), et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $H(x+1) = H(x) + \frac{1}{x+1}$, puis que $H(n) = H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que H est croissante.
2. Calculer $H\left(\frac{1}{2}\right)$ (poser $t = u^2$).
3. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $H(x+n) = H(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$ et $H_n \leq H(x+n) \leq H_{n+1}$; en déduire que $H(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{k(k+x)}$, puis la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k+1)}$.

Exercice 19 La méthode de Laplace ★★★

corrigé p. 48

Soit f continue et positive sur $[a, b]$ ($a < b$), M son maximum, et $I_n = \int_a^b f(x)^n dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $\sqrt[n]{I_n} \leq M \sqrt[n]{b-a}$. Soit $\varepsilon \in]0, M[$: justifier l'existence d'un segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ ($\alpha < \beta$) sur lequel $f \geq M - \varepsilon$, puis montrer que $\lim \sqrt[n]{I_n} = M$.
2. Applications : limites de $\sqrt[n]{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^n dx}$ et de $\sqrt[n]{\int_0^2 (x(2-x)e^x)^n dx}$.

Exercice 20 Équations intégrales ★★★

corrigé p. 49

Déterminer les fonctions f continues :

1. sur $[0, 1]$, telles que $f(x) = 1 + \lambda x \int_0^1 t f(t) dt$ pour tout $x \in [0, 1]$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ donné ; discuter) ;
2. sur $\mathbb{R}$, telles que $f(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ pour tout réel x (pour $x \neq 0$, poser $u = xt$) ;
3. sur $[0, 1]$, telles que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2 dx$ (poser $x = t^2$ dans la première intégrale).

Exercice 21 L'astroïde et la trompette de Torricelli ★★★

corrigé p. 49

1. L'astroïde Γ a pour équation $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$; pour $x, y \geq 0$, c'est la courbe de $g(x) = \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^{3/2}$, $x \in [0, 1]$. Avec $x = \cos^3 t$ et l'exercice 14, calculer l'aire du domaine limité par Γ , puis le volume du solide engendré par sa rotation autour de (Ox) .
2. Soit $\alpha > 0$, $A_\alpha(A)$ l'aire sous la courbe de $x \mapsto x^{-\alpha}$ entre 1 et $A > 1$, et $V_\alpha(A)$ le volume engendré par sa rotation autour de (Ox) : pour quels α ont-ils une limite finie en $+\infty$? Cas $\alpha = 1$ (« trompette de Torricelli ») ?

Exercice 22 La formule de Taylor avec reste intégral ★★★

corrigé p. 49

Soit $n \in \mathbb{N}$, f $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I , avec $f^{(n+1)}$ continue, et $a, b \in I$.

1. Montrer par récurrence (intégrations par parties) que $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.
2. (Taylor-Lagrange) Si $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I , en déduire $\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. Montrer que $\left| \cos x - \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2p+2}}{(2p+2)!}$; limite de la somme quand $p \rightarrow +\infty$? $\cos 1$ à $3 \cdot 10^{-5}$ près?
4. Montrer que $0 \leq \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) \leq \frac{x^3}{16}$ ($x \geq 0$); valeur approchée de $\sqrt{1,1}$?

Exercice 23 L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} dx$ ★★★

corrigé p. 50

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} dx$ (fonction prolongée par continuité en 0), et $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$.

1. Vérifier que $\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x) = \sin x \sin((2n-1)x)$; en déduire que $J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$. Avec $\ln(m+1) \leq H_m \leq 1 + \ln m$, en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{\ln n}$.
2. Avec $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ et $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que $0 \leq \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \leq \frac{\pi x}{12}$, puis que $0 \leq J_n - \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u} du \leq \frac{\pi^3}{96}$ (poser $u = nx$).
3. En déduire la limite de $\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u} du$, puis celle de $\int_0^x \frac{|\sin u|}{u} du$ quand $x \rightarrow +\infty$ (à comparer avec l'exercice 25).

18

Niveau 4 • Concours**Exercice 24** $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (méthode de Matsuoka) ★★★★★

corrigé p. 50

Soit $A_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx$, $B_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx$ ($n \in \mathbb{N}$), $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. On admet (Wallis) que $A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1}$.

1. Calculer A_0, B_0 . Pour $n \geq 1$, montrer que $A_n = 2n \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2n-1} x dx = n(2n-1)B_{n-1} - 2n^2B_n$.
2. En déduire que $\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n} \right)$, puis que $S_n = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{B_n}{A_n}$.
3. Montrer que $0 \leq B_n \leq \frac{\pi^2}{4} (A_n - A_{n+1}) = \frac{\pi^2 A_n}{8(n+1)}$ (utiliser $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$). Conclure : $\lim S_n = \frac{\pi^2}{6}$.
4. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{12}$, puis (intégrer $\frac{1}{1+t} = \sum_{j=0}^{n-1} (-t)^j + \frac{(-t)^n}{1+t}$) que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 25 L'intégrale de Dirichlet ★★★★★

corrigé p. 51

Soit $s(t) = \frac{\sin t}{t}$ ($t \neq 0$), $s(0) = 1$, et $\text{Si}(x) = \int_0^x s(t) dt$.

1. Montrer que $\int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos x}{x} - \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ ($x \geq \pi$); avec $\int_{\pi}^x \frac{1+\cos t}{t^2} dt$, en déduire que Si a une limite ℓ en $+\infty$.
2. Soit $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $g(0) = 0$; $0 \leq g(t) \leq \frac{\pi t}{12}$ (exercice 23). Avec $t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$ et $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$ ($t \geq 0$), montrer que $0 \leq g'(t) \leq \frac{\pi^2}{8}$.
3. Montrer que $\left| \int_0^{\pi/2} g(t) \sin(mt) dt \right| \leq \frac{1}{m} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi^3}{16} \right)$ ($m \in \mathbb{N}^*$; parties sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$).
4. Avec l'exercice 14, montrer que $\frac{\pi}{2} - \text{Si}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt$; conclure : $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 26 L'inégalité de Wirtinger ★★★★★

corrigé p. 51

Soit f dérivable sur $[0, \pi]$, f' continue, $f(0) = f(\pi) = 0$, $M = \max |f'|$; on note $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

1. Montrer que $|f(x)| \leq Mx$ et $|f(x)| \leq M(\pi - x)$, puis que $f(x)^2 \cot x$ tend vers 0 en 0^+ et en π^- .
2. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $h = f' - f \cot$. Montrer que $\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} h^2 = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (f'^2 - f^2) - \left[f^2 \cot \right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}$, puis que $\int_0^{\pi} f^2 \leq \int_0^{\pi} f'^2$.
3. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $f = \lambda \sin$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) (dériver $\frac{f}{\sin}$).
4. Si g' est continue sur $[0, 1]$ et $g(0) = g(1) = 0$, montrer que $\int_0^1 g^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 g'^2$; cas de $x(1-x)$?

Exercice 27 Le « rêve du bachelier » ★★★★★

corrigé p. 52

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}$, soit $J_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$ (prolongement par 0 en 0 si $q \geq 1$). Par parties sur $[\varepsilon, 1]$, montrer que $J_{p,q} = -\frac{q}{p+1} J_{p,q-1}$ ($q \geq 1$), puis que $\int_0^1 x^k (\ln x)^k dx = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ ($k \geq 1$).
2. Montrer que $0 \leq -x \ln x \leq \frac{1}{e}$ sur $]0, 1]$, et (exercice 22) que $\left| e^u - \sum_{k=0}^N \frac{u^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{1/e}}{e^{N+1}(N+1)!}$ si $|u| \leq \frac{1}{e}$.
3. En déduire $\int_0^1 x^{-x} dx = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k}$ et $\int_0^1 x^x dx = \lim \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^k}$; valeurs à 10^{-4} près.

Exercice 28 Les intégrales de Frullani ★★★★★

corrigé p. 52

Soit f continue sur $[0, +\infty[$, de limite finie L en $+\infty$, et $0 < a < b$.

1. Pour $0 < \varepsilon < A$, montrer que $\int_{\varepsilon}^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du - \int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u} du$.
2. En encadrant f sur $[a\varepsilon, b\varepsilon]$ et sur $[aA, bA]$, montrer que $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow f(0) \ln \frac{b}{a}$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) et $\int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow L \ln \frac{b}{a}$ ($A \rightarrow +\infty$).
3. Si de plus f est dérivable en 0, montrer que $\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 et que $\int_0^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} (f(0) - L) \ln \frac{b}{a}$.
4. Limites en $+\infty$ de $\int_0^A \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} dx$ et de $\int_0^A \frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x} dx$? Vérifier 3. pour $\frac{1}{1+x}$.

Exercice 29 Un noyau qui se concentre ★★★★★

corrigé p. 52

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, soit $K_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$. Soit f continue sur $[0, 1]$ et $M = \max |f|$.

1. Calculer $\int_0^1 K_n(x) dx$. Montrer que $\int_0^1 K_n(x) f(x) dx = \int_0^n \frac{f(u/n)}{1+u^2} du$.
2. Soit $A > 0$ et $n \geq A$. Montrer que $\left| \int_0^n \frac{f(u/n)-f(0)}{1+u^2} du \right| \leq \frac{\pi}{2} \max_{[0, A/n]} |f - f(0)| + 2M \left(\frac{\pi}{2} - \arctan A \right)$, puis que $\int_0^1 K_n f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} f(0)$.
3. Limites de $\int_0^1 \frac{n \ln(1+x)}{x(1+n^2x^2)} dx$ et de $n \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+n^2x^2}$?

Exercice 30 Les polynômes de Bernoulli ★★★★★

corrigé p. 53

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes (B_n) telle que $B_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n = 0$. Calculer $B_1, \dots, B_4$.
2. Montrer que $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geq 2$, puis (récurrence) que $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{N-1} k^p = \frac{B_{p+1}(N) - B_{p+1}(0)}{p+1}$ ($p, N \in \mathbb{N}^*$), puis une forme factorisée de $1^3 + 2^3 + \dots + N^3$.
4. Montrer que $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ vérifie les mêmes conditions que B_n ; en déduire $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ et $B_{2m+1}(0) = 0$ ($m \geq 1$).

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Techniques de calcul

Avant d'intégrer, on cherche la bonne écriture : forme usuelle ($u'u^r$, $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{1+u^2}$, $u'a^u \dots$), décomposition, linéarisation ; sinon, intégration par parties ou changement de variable. Les symétries (parité, périodicité) évitent souvent tout calcul.

Exercice 31 Reconnaître une forme usuelle ★

corrigé p. 53

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx & \text{b) } \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} & \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx & \text{d) } \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx \\ \text{e) } \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx & \text{f) } \int_1^3 \frac{dx}{x^2-2x+5} & \text{g) } \int_0^1 \frac{3^x}{1+3^x} dx & \text{h) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \end{array}$$

Exercice 32 Décomposer, linéariser ★

corrigé p. 54

- a) Vérifier que $x^2 + x + 1 = (x-1)(x+2) + 3$, puis calculer $A = \int_2^3 \frac{x^2 + x + 1}{x-1} dx$.
b) Déterminer les réels a, b, c tels que $\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ pour tout $x \geq 0$, puis calculer $B = \int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$.
- a) Montrer que $\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 5x - \frac{1}{4} \sin x$ pour tout réel x .
En déduire $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin 3x dx$.
b) Après avoir simplifié la fonction à intégrer, calculer $D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} dx$.

Exercice 33 Intégrations par parties bien choisies ★★

corrigé p. 54

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx \quad \text{b) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx \quad \text{c) } \int_0^1 (2x+1)5^x dx \quad \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx \quad \text{e) } \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Indications : a) prendre $v(x) = \frac{x}{1+x}$, puis décomposer $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}$; d) une primitive de $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ est $\frac{1}{2 \cos^2 x}$; e) écrire $x^3 = x^2 \times x$.

2. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$.

Exercice 34 Changements de variable ★★

corrigé p. 55

1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \quad (t = \sqrt{x}) \quad & \text{b) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx \quad (t = \sqrt{e^x - 1}) \quad & \text{c) } \int_0^1 x^5 \sqrt{1 + x^3} \, dx \quad (t = 1 + x^3) \\ \text{d) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \quad (x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{6}]) \quad & \text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad (x = 2 \arctan t, t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

Pour e), exprimer $\cos x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.

2. On pose $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\arctan x}{x} \, dx$. a) Montrer que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

b) À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u} \arctan \frac{1}{u} \, du$, puis en déduire que $I = \frac{\pi}{2} \ln 2$.

Exercice 35 Parité, périodicité, symétries ★★★

corrigé p. 56

1. Soient $a > 0$ et f continue sur $[-a, a]$. À l'aide du changement de variable $x = -t$, montrer que

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) \, dx.$$

2. Calculer $A = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + \arctan x}{1 + x^2} \, dx$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$. a) Montrer que $u(x) > 0$ et que $u(x)u(-x) = 1$.

b) En déduire $B = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x + \sqrt{1 + x^2})}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{1}{1 + 2^{\cos x}}$. a) Vérifier que $g(x) + g(x + \pi) = 1$, puis montrer que

$$\int_0^{2\pi} g(x) \, dx = \pi.$$

b) En utilisant la périodicité de g , en déduire que $\int_a^{a+2\pi} g(x) \, dx = \pi$ pour tout réel a , puis calculer $\int_0^{2026\pi} g(x) \, dx$.

Exercice 36 Minimiser une intégrale ★★★

corrigé p. 56

1. Pour tout réel a , on pose $F(a) = \int_0^1 |e^x - a| \, dx$.

a) Calculer $F(a)$ lorsque $a \leq 1$, puis lorsque $a \geq e$. b) Montrer que, pour $1 < a < e$: $F(a) = 2a \ln a - 3a + e + 1$.

c) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$. En déduire que F admet un minimum égal à $(\sqrt{e} - 1)^2$, atteint pour une seule valeur de a que l'on précisera. Interpréter graphiquement.

2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $G(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

a) Montrer que $G(a, b) = b^2 + (a - \frac{2}{3})b + \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}$, puis que $G(a, b) = (b + \frac{a}{2} - \frac{1}{3})^2 + \frac{(a-1)^2}{12} + \frac{1}{180}$.

b) En déduire le minimum de G sur $\mathbb{R}^2$ et le couple (a, b) qui le réalise. Quelle droite « approche le mieux » la parabole $y = x^2$ sur $[0, 1]$ au sens de ce critère ?

20 Propriétés et encadrements

Chasles, linéarité, positivité (et son cas d'égalité), croissance, $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ ($a \leq b$), inégalité de la moyenne : pour encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer, on **intègre un encadrement** de la fonction.

Exercice 37 Chasles, valeurs absolues, linéarité ★

corrigé p. 57

1. Calculer : $A = \int_{-1}^2 |2^x - 2| dx$ $B = \int_0^\pi \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$ $C = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

2. a) Déterminer le polynôme $P(x) = ax + b$ tel que $\int_0^1 P(x) dx = 1$ et $\int_0^1 x P(x) dx = 0$.

b) Montrer que $\int_0^1 P(x)(\alpha x + \beta) dx = \beta$ pour tous réels α, β . En déduire $\int_0^1 (4 - 6x)(2026x + 7) dx$ sans calcul.

Exercice 38 Raisonner sans calculer ★

corrigé p. 57

1. Sans calcul, donner le signe de $\int_2^1 \frac{\arctan x}{x} dx$ et de $\int_0^1 \ln \frac{1+x^2}{2} dx$.

2. Sans calcul, comparer $\int_1^e \ln x dx$ et $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx$, puis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx$ et 1.

3. Montrer que, pour tout réel λ : $\left| \int_0^1 \frac{\cos(\lambda x)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Vrai ou faux ? Justifier. a) Si f est continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f(x) dx = 0$, alors f s'annule sur $[0, 1]$.

b) Si f est continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$, alors il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

c) Si g est continue sur $[-1, 1]$ et $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$, alors g est impaire.

5. À l'aide de Chasles et du changement de variable $x = t + \pi$, montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx = \int_0^\pi \sin t \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+\pi+t} \right) dt$, et en déduire le signe de cette intégrale.

Exercice 39 Encadrer Arctan, puis intégrer ★★

corrigé p. 58

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 - t^2 + t^4$. En déduire que, pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

2. En déduire une valeur approchée de $\arctan \frac{1}{10}$ à 10^{-5} près.

3. On pose $K = \int_0^1 \arctan(x^3) dx$ (on ne cherchera pas de primitive). Montrer que $\frac{13}{60} \leq K \leq \frac{11}{48}$, puis donner une valeur approchée de K à 10^{-2} près.

Exercice 40 Valeur moyenne et formule de Simpson ★★

corrigé p. 58

1. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On veut montrer que, pour tout polynôme P de degré au plus 3 :

$$\int_{m-h}^{m+h} P(x) dx = \frac{h}{3} (P(m-h) + 4P(m) + P(m+h)). \quad (S)$$

- a) Vérifier (S) pour $P(x) = 1$ et $P(x) = (x-m)^2$, puis, avec le changement de variable $t = x - m$, pour $P(x) = x - m$ et $P(x) = (x-m)^3$.
- b) En déduire (S) pour tout polynôme de degré ≤ 3 (écrire $P(x) = \alpha + \beta(x-m) + \gamma(x-m)^2 + \delta(x-m)^3$). Traduire (S) en termes de valeur moyenne de P sur $[a, b]$, et l'appliquer à $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ sur $[0, 2]$ (vérifier par un calcul direct).
2. **Méthode de Simpson.** Appliquer (S) à $x \mapsto \frac{4}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$: quelle valeur approchée de π obtient-on ? Erreur commise ?
3. Soient $0 \leq a < b$. À l'aide de l'inégalité de la moyenne, montrer que $\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$, puis que $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan \frac{4}{3} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

Exercice 41 Le logarithme d'une moyenne ★★★

corrigé p. 59

1. Montrer que $\ln t \leq t - 1$ pour tout $t > 0$, avec égalité si et seulement si $t = 1$.
2. Soient f une fonction continue et strictement positive sur $[0, 1]$, et $m = \int_0^1 f(x) dx$.
- a) Justifier que $m > 0$. En appliquant 1. à $t = \frac{f(x)}{m}$, montrer que $\int_0^1 \ln f(x) dx \leq \ln \left(\int_0^1 f(x) dx \right)$.
- b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si f est constante sur $[0, 1]$.
3. Applications. a) Calculer $\int_0^1 \ln(1+x) dx$, puis en déduire que $e > \frac{8}{3}$.
- b) En utilisant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, puis $f(x) = 2^x$, montrer que $\frac{e}{4} < \ln 2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 42 Fonctions convexes : milieu et trapèze ★★★

corrigé p. 60

Soient $a < b$, $m = \frac{a+b}{2}$, et f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$, avec $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.

1. a) Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$: $f(x) \geq f(m) + f'(m)(x-m)$ (la courbe est au-dessus de sa tangente en m).
- b) Soit $\psi(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x)$. Montrer que $\psi \geq 0$ sur $[a, b]$ (appliquer le théorème de Rolle à ψ , puis étudier le sens de variation de ψ').
2. En déduire l'**inégalité d'Hermite-Hadamard** $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$, et l'interpréter géométriquement.

3. Applications. a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{2}{2k+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{2k+1}{2k(k+1)}$; avec $k = 2$ et $k = 3$, en déduire que $\frac{24}{35} \leq \ln 2 \leq \frac{17}{24}$.
- b) Vérifier que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ et que $\tan$ est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. En déduire que $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1) \leq \ln 2 \leq \frac{\pi}{4}$.

21

Aires et volumes

Aire entre C_f et C_g sur $[a, b]$: $\int_a^b |f - g|$ u.a. (étudier d'abord la position relative) ; volume engendré par la rotation autour de (Ox) du domaine compris entre C_g et C_f ($0 \leq g \leq f$) : $\pi \int_a^b (f^2 - g^2)$ u.v.

Exercice 43 Premières aires ★

corrigé p. 61

Le repère est orthonormé, d'unité 2 cm. Calculer, en unités d'aire puis en cm^2 , l'aire du domaine limité par :

- les courbes des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ et la droite d'équation $x = \ln 3$;
- l'hyperbole d'équation $y = \frac{4}{x}$ et la droite d'équation $x + y = 5$;
- la courbe d'équation $y = x^3$ et sa tangente au point $A(1, 1)$ (vérifier que $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$).

Exercice 44 Volumes de révolution ★

corrigé p. 61

- Repère orthonormé d'unité 1 cm. Volume, en cm^3 , du solide engendré par la rotation autour de (Ox) de la courbe de f sur I : a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $I = [0, 1]$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, $I = [0, 1]$; c) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$; d) $f(x) = \sin x + \cos x$, $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Calotte sphérique.** Soient $R > 0$ et $h \in]0, 2R]$. La rotation autour de (Ox) de l'arc d'équation $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [R - h, R]$, engendre une calotte de hauteur h d'une boule de rayon R . Montrer que son volume est $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$; retrouver le volume de la boule. Un bol hémisphérique de rayon 10 cm est rempli d'eau sur 5 cm de hauteur : volume d'eau ? fraction du bol remplie ?

Exercice 45 Problème : une courbe entre deux asymptotes ★★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

- Montrer que f est impaire. Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et que C_f est au-dessus de D . En déduire une asymptote D' en $-\infty$ et la position de C_f par rapport à D' .
- Montrer que $f'(x) = \frac{1 + e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$ et en déduire le sens de variation de f . Montrer que O est un point d'inflexion de C_f et donner la tangente T en O .
- a) Vérifier que $\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$. Pour $\lambda > 0$, calculer l'aire $A(\lambda)$, en cm^2 , du domaine limité par C_f , D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$. Quelle est l'aire totale du domaine compris entre C_f et ses deux asymptotes ?

Exercice 46 Une courbe et sa réciproque ★★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = 2^x - 1$ sur $\mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, on note C la courbe de f , C' celle de sa réciproque, Δ la droite $y = x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +\infty[$ et que $f^{-1}(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} = \log_2(1+x)$.
2. Soit $g(x) = 2^x - 1 - x$. Étudier les variations de g' , puis de g , et montrer que $g \leq 0$ sur $[0, 1]$. En déduire les positions relatives de C , Δ et C' sur $[0, 1]$.
3. Calculer l'aire A du domaine limité par C et Δ . Par symétrie, en déduire l'aire du domaine limité par C et C' , puis, **sans primitive**, la valeur de $\int_0^1 \log_2(1+x) dx$; vérifier par parties.
4. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de (Ox) du domaine limité par C et Δ .

Exercice 47 Le tore et le rond de serviette ★★★

corrigé p. 63

1. **Le tore.** Soient $0 < r < R$. Dans un repère orthonormé, on fait tourner autour de (Ox) le disque de centre $\Omega(0, R)$ et de rayon r .
 - a) Montrer que ce disque est le domaine compris entre les courbes de $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ et de $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$.
 - b) Montrer que le volume du tore est $V = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$. Interpréter cette intégrale comme une aire et en déduire que $V = 2\pi^2 R r^2$.
 - c) Vérifier que V est le produit de l'aire du disque par la longueur du cercle décrit par Ω . Volume d'une bouée pour $R = 20$ cm et $r = 5$ cm ?
2. **Le rond de serviette.** On perce une boule de rayon R d'un trou cylindrique dont l'axe passe par son centre ; il reste un anneau de hauteur $h \in]0, 2R[$, engendré par la rotation autour de (Ox) du domaine compris entre le cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et la droite $y = \rho$, où $\rho = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$ et $x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.
 - a) Justifier que $\sqrt{R^2 - x^2} \geq \rho$ pour $x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, puis montrer que le volume de l'anneau est $V = \frac{\pi h^3}{6}$.
 - b) Commenter (anneau de hauteur 6 cm taillé dans une orange ou dans la Terre).

Exercice 48 La tangente qui épouse le mieux la courbe ★★★

corrigé p. 64

1. Pour $t \in [0, 1]$, on note T_t la tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse t , et $A(t)$ l'aire du domaine limité par cette courbe, T_t et les droites $x = 0$ et $x = 1$.
 - a) Justifier que la courbe de $\exp$ est au-dessus de T_t , puis que $A(t) = e - 1 - e^t\left(\frac{3}{2} - t\right)$.
 - b) Étudier les variations de A sur $[0, 1]$. Pour quelle tangente l'aire est-elle minimale ? Que vaut-elle ?
2. **Généralisation.** Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$ avec $f'' > 0$, et $m = \frac{a+b}{2}$. Pour $t \in [a, b]$, on pose $A(t) = \int_a^b (f(x) - f(t) - f'(t)(x - t)) dx$.
 - a) Montrer que $A(t) = \int_a^b f(x) dx - (b - a)(f(t) + (m - t)f'(t))$, puis que $A'(t) = (b - a)f''(t)(t - m)$.

b) En déduire que A est minimale pour $t = m$. Application : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, 3]$; donner la tangente optimale et l'aire minimale.

22 Fonctions définies par intégrale

$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f nulle en a : on l'étudie par sa dérivée, ses symétries et des encadrements, même sans la calculer.

Exercice 49 La fonction $x \mapsto \int_0^x |t^2 - 1| dt$ ★

corrigé p. 64

Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_0^x |t^2 - 1| dt$; on note C_F sa courbe dans un repère orthonormé.

- Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $F'(x)$; en déduire que F est strictement croissante. À l'aide du changement de variable $t = -u$, montrer que F est impaire.
- Calculer $F(x)$ pour $x \in [0, 1]$, puis pour $x \geq 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$; interpréter, et montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- F' est-elle dérivable en 1 ? Étudier la concavité de C_F sur $[0, +\infty[$; montrer que $A(1, \frac{2}{3})$ est un point d'inflexion à tangente horizontale. Préciser les autres points d'inflexion, puis tracer C_F .

Exercice 50 Une intégrale à paramètre ★

corrigé p. 65

Pour tout réel $x > -1$, on pose $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt}$ (x est un paramètre, t la variable d'intégration).

- Justifier que $\varphi(x)$ est bien défini. Calculer $\varphi(0)$, puis montrer que $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$.
- Sans utiliser cette expression, montrer que φ est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$ et que $\frac{1}{1+x} \leq \varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$.
- Soit $x \in] -1, 1[$. Vérifier que $\frac{1}{1+xt} = 1 - xt + \frac{x^2 t^2}{1+xt}$ et que $1+xt \geq 1 - |x|$ pour $t \in [0, 1]$. En déduire que $|\varphi(x) - 1 + \frac{x}{2}| \leq \frac{x^2}{3(1-|x|)}$, puis que φ est continue et dérivable en 0. Retrouver ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Exercice 51 La projection de Mercator ★★

corrigé p. 65

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t}$.

- Justifier que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$. Montrer que F est impaire, que $F(x) \geq x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et étudier la convexité de la courbe de F .
- Montrer que $F(x) = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in I$, puis calculer les limites de F en $\frac{\pi}{2}$ et en $-\frac{\pi}{2}$.
- Montrer que F est une bijection de I sur $\mathbb{R}$, que sa réciproque est $G(y) = 2 \arctan(e^y) - \frac{\pi}{2}$, et calculer $G'(y)$ de deux façons.
- Cartes de Mercator.** Sur une carte de Mercator, le parallèle de latitude x (en radians) est tracé à $10 F(x)$ cm de l'équateur. À quelle distance sont les parallèles 45° et 60° ? Quelle latitude est tracée à 20 cm ?

Exercice 52 Une fonction intégrale symétrique ★★

corrigé p. 66

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$, et on note C_F sa courbe.

1. Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$. Dresser le tableau de variations de F (sans les limites) ; en déduire le signe de F .
2. À l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$, montrer que $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Vérifier que $v(t) = \frac{t}{1+t}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$; par une intégration par parties, en déduire que $F(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln \frac{1+x}{2}$.
4. Calculer les limites de F en $+\infty$ et en 0^+ . On prolonge F par $F(0) = \ln 2$: étudier sa dérivabilité à droite en 0 et interpréter. Tracer C_F .

Exercice 53 Le logarithme intégral ★★★

corrigé p. 66

Pour $x \geq 2$, on pose $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ (le « logarithme intégral »).

1. Étudier le sens de variation et la concavité de li . Montrer que $\text{li}(x) \geq \frac{x-2}{\ln x}$ pour tout $x \geq 2$; en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{li}(x)}{x}$.
2. Par une intégration par parties, montrer que $\text{li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + K(x)$, où $K(x) = \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$.
3. Soit $x \geq 4$. En coupant l'intégrale en $\sqrt{x}$, montrer que $0 \leq K(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{(\ln 2)^2} + \frac{4x}{(\ln x)^2}$.
4. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{li}(x) \ln x}{x} = 1$, puis que la courbe de li admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox) .

Culture. Le nombre $N(x)$ de nombres premiers $\leq x$ vérifie $\frac{N(x)}{\text{li}(x)} \rightarrow 1$ (théorème des nombres premiers ; voir l'exercice 65).

Exercice 54 La fonction de Dawson ★★★

corrigé p. 66

Pour tout réel x , on pose $D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale).

1. Montrer que D est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $D'(x) = 1 - 2xD(x)$, et que D est impaire (changement de variable $t = -u$). Donner la tangente à la courbe de D en O .
2. Soit $x > 0$. **a)** Montrer que $0 < D(x) < x$. **b)** En remarquant que $e^{t^2} \geq \frac{t}{x} e^{t^2}$ pour $t \in [0, x]$, montrer que $2xD(x) \geq 1 - e^{-x^2}$.
3. Soient $a \geq 1$ et $c_a = \frac{2a^2}{2a^2-1}$. **a)** Montrer que $e^{t^2} \leq c_a \left(\frac{e^{t^2}}{2t}\right)'$ pour tout $t \geq a$. **b)** En déduire que, pour tout $x \geq a$: $2xD(x) \leq 2xe^{-x^2} \int_0^a e^{t^2} dt + c_a$.
c) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. En choisissant a tel que $c_a \leq 1 + \varepsilon$, montrer que $1 - \varepsilon \leq 2xD(x) \leq 1 + 2\varepsilon$ pour x assez grand. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} xD(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x)$.
4. Montrer que D admet sur $[0, +\infty[$ un maximum, atteint en un réel $c > 0$ tel que $D(c) = \frac{1}{2c}$ (on trouve $c \approx 0,924$).

23

Suites et sommes de Riemann

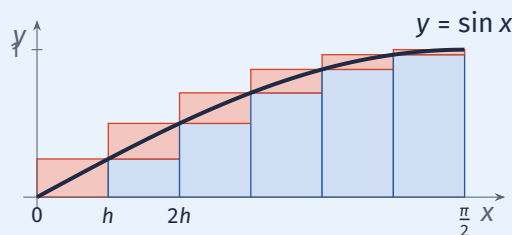
Encadrer, intégrer par parties, passer à la limite ; reconnaître $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ (f continue).

Exercice 55 Des rectangles sous la sinusoïde ★

corrigé p. 67

Soit $n \geq 1$ et $h = \frac{\pi}{2n}$. On pose $R_n = h \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kh)$ et $S_n = h \sum_{k=1}^n \sin(kh)$ (rectangles à gauche et à droite pour $\sin$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

1. Montrer que, pour $0 \leq k \leq n-1$: $h \sin(kh) \leq \int_{kh}^{(k+1)h} \sin x dx \leq h \sin((k+1)h)$, puis que $R_n \leq 1 \leq S_n$.
2. Calculer $S_n - R_n$. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, R_n soit une valeur approchée de 1 à 10^{-2} près.



R_n : bleu S_n : bleu + rouge

3. À l'aide des nombres complexes e^{ikh} , montrer que $\sum_{k=1}^n \sin(kh) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$, puis que $S_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{h}{\sin \frac{h}{2}} \times \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right)$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, et retrouver ainsi, sans primitive, que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

Exercice 56 Reconnaître des sommes de Riemann ★

corrigé p. 68

Écrire chacune des sommes suivantes sous la forme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec f continue sur $[0, 1]$, puis calculer sa limite.

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}} \quad \text{b) } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(2n+k)}$$

$$\text{c) } w_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 2kn + 2k^2} \quad \left(\text{écrire } 1 + 2x + 2x^2 = \frac{1}{2} [1 + (2x+1)^2]\right) \quad \text{d) } z_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n\sqrt{n^2 + k^2}}$$

Exercice 57 La somme $\sum \frac{1}{1+k^2}$ ★★

corrigé p. 68

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2}$, et l'on note $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

1. Montrer que $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ pour tout entier $k \geq 1$; illustrer par une figure.
2. En déduire que $\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4} \leq S_n \leq \arctan n$, puis que (S_n) converge vers un réel $L \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. **a)** Rappeler pourquoi $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$. **b)** Pour $N > n \geq 1$, encadrer $S_N - S_n$ à l'aide de la question 1 ; en déduire que $\arctan \frac{1}{n+1} \leq L - S_n \leq \arctan \frac{1}{n}$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(L - S_n)$, puis, avec $n = 3$, que $1,04 < L < 1,13$.

Exercice 58 Les intégrales $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ ★★

corrigé p. 68

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $B(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. À l'aide du changement de variable $x = 1 - t$, montrer que $B(p, q) = B(q, p)$. Calculer $B(p, 0)$.
2. Pour $q \geq 1$, montrer par une intégration par parties que $B(p, q) = \frac{q}{p+1} B(p+1, q-1)$. En déduire, par récurrence sur q , que $B(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
3. En développant $(1-x)^q$ par la formule du binôme, en déduire que $\sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} \binom{q}{k} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Vérifier pour $p = q = 2$.
4. Montrer que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ sur $[0, 1]$. En déduire que $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (résultat utilisé à l'exercice 65).

Exercice 59 Deux séries de période 3 ★★★

corrigé p. 69

On pose $A = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$ et $B = \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2} dx$.

1. Calculer B . En écrivant $1+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et en dérivant $x \mapsto \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, montrer que $A = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$: $\sum_{k=0}^{n-1} (x^{3k} - x^{3k+1}) = \frac{1-x^{3n}}{1+x+x^2}$.
3. En déduire que $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2}\right)$ vérifie $u_n = A - r_n$, avec $r_n = \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x+x^2} dx$, puis que $\frac{1}{3(3n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{3n+1}$. Conclure : les sommes partielles de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$ tendent vers $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
4. De même, montrer que $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} - \frac{2}{3k+3}\right)$ tend vers $\ln 3$ (on pourra factoriser $1+x-2x^2$).

Exercice 60 Une intégrale qui vaut $\sum \frac{1}{k^2}$ ★★★

corrigé p. 69

Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{t}{e^t-1}$ si $t > 0$ et $\varphi(0) = 1$; pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \text{ et pour } n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$, que $0 < \varphi \leq 1$, et donner le sens de variation de F .
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\varphi(t) = \sum_{k=1}^n t e^{-kt} + r_n(t)$ pour tout $t \geq 0$, où $r_n(t) = \varphi(t) e^{-nt}$, et que $0 \leq r_n(t) \leq e^{-nt}$.
3. Pour $k \geq 1$ et $x \geq 0$, calculer $\int_0^x t e^{-kt} dt$ par parties ; montrer que cette intégrale est inférieure à $\frac{1}{k^2}$ et tend vers $\frac{1}{k^2}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Montrer que $F(x) \leq H_n + \frac{1}{n}$ pour tous $x \geq 0$ et $n \geq 1$. En déduire que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, puis que $H_n \leq \ell \leq H_n + \frac{1}{n}$, et que $\lim H_n = \ell$ (Euler : $\ell = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$).

Défis de concours

Six problèmes : le calcul intégral y rencontre polynômes, nombres complexes et arithmétique.

Exercice 61 Moments nuls et changements de signe ★★★★★

corrigé p. 70

Partie A. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f continue sur $[0, 1]$, non identiquement nulle, telle que $\int_0^1 x^k f(x) dx = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

1. Montrer que $\int_0^1 P(x)f(x) dx = 0$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n .
2. On suppose que f s'annule au plus n fois sur $]0, 1[$, en $c_1 < \dots < c_m$ ($0 \leq m \leq n$). Soit P le produit des facteurs $x - c_i$ pour les seuls points c_i où f change de signe ($P = 1$ s'il n'y en a pas). Montrer que Pf garde un signe constant sur $[0, 1]$, puis aboutir à une contradiction.
3. Conclure : f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]0, 1[$. Vérifier sur $f(x) = 6x^2 - 6x + 1$, avec $n = 1$.

Partie B. Soit g continue sur $[0, \pi]$, non identiquement nulle, telle que $\int_0^\pi g(x) \sin x dx = 0$ et $\int_0^\pi g(x) \cos x dx = 0$.

4. Montrer que $\int_0^\pi g(x) \sin(x-c) dx = 0$ pour tout réel c . En raisonnant comme dans la partie A avec $x \mapsto \sin(x - c)$, montrer que g s'annule au moins deux fois sur $]0, \pi[$. Exemple : $g(x) = \sin 3x$.

Exercice 62 L'égalité de Parseval pour les polynômes ★★★★★

corrigé p. 70

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un polynôme à coefficients réels. Pour $t \in \mathbb{R}$, on écrit $P(e^{it}) = A(t) + i B(t)$, avec $A(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt)$ et $B(t) = \sum_{k=0}^n a_k \sin(kt)$, et l'on note M le maximum de $t \mapsto |P(e^{it})|$ sur $[0, 2\pi]$.

1. Pour $j, k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} \cos(jt) \cos(kt) dt$ et $\int_0^{2\pi} \sin(jt) \sin(kt) dt$ (distinguer $j \neq k$, $j = k \geq 1$ et $j = k = 0$).
2. En déduire l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^n a_k^2$.
3. Montrer que $|a_k| \leq M$ pour tout k . On suppose P unitaire de degré $n \geq 1$ ($a_n = 1$) : montrer que $M \geq 1$, avec égalité si et seulement si $P(z) = z^n$.
4. On prend $P(z) = (1 + z)^n$. Montrer que $|P(e^{it})|^2 = 4^n \cos^{2n} \frac{t}{2}$. Avec la formule de Wallis du cours, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$, en déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 63 L'intégrale de Gauss ★★★★★

corrigé p. 71

Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. On utilisera le résultat du cours sur les intégrales de Wallis

$$W_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta d\theta : \sqrt{m} W_m \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ quand } m \rightarrow +\infty.$$

1. Montrer que $t^2 \geq 2t - 1$ pour tout réel t , puis que $G(x) \leq \frac{e}{2}$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que G admet une limite finie G en $+\infty$.
2. Soit $n \geq 1$. À l'aide de l'inégalité $\ln(1+y) \leq y$ ($y > -1$), montrer que $(1 - u^2)^n \leq e^{-nu^2} \leq \frac{1}{(1+u^2)^n}$ pour tout $u \in [0, 1]$.
3. Avec le changement de variable $t = \sqrt{n} u$, montrer que $\sqrt{n} \int_0^1 (1 - u^2)^n du \leq G(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n}$.
4. Montrer, avec $u = \sin \theta$, que $\int_0^1 (1 - u^2)^n du = W_{2n+1}$ et, avec $u = \tan \theta$, que $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq W_{2n-2}$.

5. En déduire que $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis que la suite $I_n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n}$ du cours vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 64 L'inégalité de Hardy ★★★★★

corrigé p. 71

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x \in]0, 1]$, et $g(0) = f(0)$.

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1]$, avec $x g'(x) = f(x) - g(x)$.
2. Montrer que $(x g(x)^2)' = 2f(x)g(x) - g(x)^2$ sur $]0, 1]$. En intégrant sur $[\varepsilon, 1]$ ($0 < \varepsilon < 1$), puis en faisant tendre ε vers 0, montrer que $\int_0^1 g(x)^2 dx = 2 \int_0^1 f(x)g(x) dx - g(1)^2$.
3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cours), en déduire l'**inégalité de Hardy** :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^2 dx \leq 4 \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

4. **La constante 4 est optimale.** Pour $a > 0$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+a}}$, calculer $g(x)$, $\int_0^1 f(x)^2 dx$ et, avec $s = \sqrt{x+a}$, $\int_0^1 g(x)^2 dx$. Montrer que le quotient $\int_0^1 g^2 / \int_0^1 f^2$ tend vers 4 quand $a \rightarrow 0^+$, et conclure.

Exercice 65 Intégrales et nombres premiers ★★★★★

corrigé p. 71

Pour $n \geq 1$, on note d_n le ppcm des entiers $1, 2, \dots, n$ (ainsi $d_6 = 60$), et $N(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n .

1. Soit P un polynôme à coefficients entiers, de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Montrer que $d_n \int_0^1 P(x) dx$ est un entier.
2. Soient $1 \leq m \leq n$. À l'aide de l'exercice 58, montrer que $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m} dx = \frac{1}{m \binom{n}{m}}$, puis que $m \binom{n}{m}$ divise d_n .
3. Soit $k \geq 1$. Montrer que $k \binom{2k}{k}$ et $(2k+1) \binom{2k}{k}$ divisent d_{2k+1} (vérifier que $(2k+1) \binom{2k}{k} = (k+1) \binom{2k+1}{k+1}$), puis que $k(2k+1) \binom{2k}{k}$ divise d_{2k+1} .
4. En déduire, avec l'exercice 58, que $d_{2k+1} \geq k 4^k$, puis que $d_n \geq 2^n$ pour tout $n \geq 7$ (traiter à part le cas $n = 8$).
5. Montrer que $d_n \leq n^{N(n)}$ (décomposer d_n en produit de facteurs premiers). En déduire que $N(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$ pour tout $n \geq 7$; comparer avec l'exercice 53.

Exercice 66 Le principe d'incertitude ★★★★★

corrigé p. 72

Soient $a > 0$ et f une fonction dérivable sur $[-a, a]$, de dérivée continue, telle que $f(-a) = f(a) = 0$.

1. Par une intégration par parties, montrer que $\int_{-a}^a f(x)^2 dx = -2 \int_{-a}^a x f(x) f'(x) dx$.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cours), en déduire l'**inégalité de Heisenberg** :

$$\left(\int_{-a}^a f(x)^2 dx \right)^2 \leq 4 \int_{-a}^a x^2 f(x)^2 dx \times \int_{-a}^a f'(x)^2 dx.$$

3. Vérifier cette inégalité pour $f(x) = 1 - x^2$ sur $[-1, 1]$.

4. **La constante 4 est optimale.** On prend $f_a(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}$. À l'aide de l'exercice 63 (qui donne $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \rightarrow \sqrt{\pi}$) et d'une intégration par parties, déterminer les limites, quand $a \rightarrow +\infty$, de $\int_{-a}^a f_a^2$, $\int_{-a}^a x^2 f_a^2$ et $\int_{-a}^a f_a'^2$. Conclure.

Culture. En mécanique quantique, cette inégalité exprime qu'une particule ne peut avoir à la fois une position et une vitesse précises.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

- a) $\frac{x-2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} : \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} \right]_1^4 = \left(\frac{16}{3} - 8 \right) - \left(\frac{2}{3} - 4 \right) = \frac{2}{3}$. b) $(x+1)^{-2/3}$ a pour primitive $3\sqrt[3]{x+1} : 3(2-1) = 3$. c) $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 : \left[\arctan(x+1) \right]_{-1}^0 = \frac{\pi}{4}$. d) $\frac{x}{1+x^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+(x^2)^2} : \left[\frac{1}{2} \arctan x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$. e) $u'u$ avec $u = \arctan : \left[\frac{\arctan^2 x}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$. f) $u'u^{1/3}$ avec $u = e^x - 1 : \left[\frac{3}{4} (e^x - 1)^{4/3} \right]_0^{\ln 2} = \frac{3}{4}$. g) $u'u$ avec $u = \tan : \left[\frac{\tan^2 x}{2} \right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{2}$. h) $2^x 3^x = 6^x = e^{x \ln 6} : \left[\frac{6^x}{\ln 6} \right]_0^1 = \frac{5}{\ln 6}$.

■ Corrigé de l'exercice 2

- $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ est négatif sur $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$, positif sur $\left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$. Par Chasles : $\int_0^{\pi/4} \cos x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + \sqrt{2}$.
- $\int_0^1 (f-x)^2 = \int_0^1 f^2 - 2 \int_0^1 x f(x) \, dx + \int_0^1 x^2 \, dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$. La fonction $(f-x)^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle : elle est nulle (cours), donc $f(x) = x$, qui convient bien ($\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$).
- Par linéarité, et comme $\int_0^1 f = 0 : \int_0^1 x f(x) \, dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f(x) \, dx$.
Donc

$$\left| \int_0^1 x f(x) \, dx \right| \leq \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| |f(x)| \, dx \leq \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| \, dx = 2 \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \, dx = \frac{1}{4}.$$

■ Corrigé de l'exercice 3

- $\mu = \frac{1}{e-1} [x \ln x - x]_1^e = \frac{1}{e-1}$ et $\ln c = \mu \iff c = e^{1/(e-1)} \approx 1,79 \in [1, e]$ (car $0 < \frac{1}{e-1} < 1$). Pour 2^x : $\mu = \int_0^1 2^x \, dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$ et $2^c = \frac{1}{\ln 2} \iff c = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0,53$.
- $e^u \geq 1 + u$ (tangente en 0, exp convexe). $\varphi(u) = 1 + (e-1)u - e^u$ est concave ($\varphi'' = -e^u$) et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0 : \varphi \geq 0$ sur $[0, 1]$ (courbe au-dessous de la corde). Avec $u = x^2 \in [0, 1]$ et en intégrant sur $[0, 1] : \int_0^1 (1+x^2) \, dx = \frac{4}{3} \leq I \leq \int_0^1 (1+(e-1)x^2) \, dx = \frac{e+2}{3}$ ($I \approx 1,463$).

■ Corrigé de l'exercice 4

a) $u = \arctan x$, $v' = x^3$ et la primitive *habile* $v = \frac{x^4-1}{4} : \left[\frac{x^4-1}{4} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4-1}{1+x^2} dx = 0 - \frac{1}{4} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \boxed{\frac{1}{6}}$.

b) $u = \ln(1+x)$, $v = -\frac{1}{x} : \left[-\frac{\ln(1+x)}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)} = -\frac{\ln 3}{2} + \ln 2 + \left[\ln \frac{x}{1+x} \right]_1^2 = \boxed{3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3}$.

c) Deux IPP : $\int x^2 e^x = x^2 e^x - 2 \int x e^x$ et $\int x e^x = (x-1)e^x$, d'où $\left[(x^2 - 2x + 2) e^x \right]_0^{\ln 2} = 2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2 = \boxed{2(1 - \ln 2)^2}$.

d) $x = t^2$, $dx = 2t dt : \int_0^1 2t \arctan t dt = \left[t^2 \arctan t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$.

e) $F(x) = \int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt$; $u = \ln(1+t) - \ln t$, $u' = -\frac{1}{t(t+1)}$, $v = t : F(x) = \left[t \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t+1}$, soit $\boxed{F(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \ln(1+x) - 2 \ln 2}$.

■ Corrigé de l'exercice 5

a) $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$, $t \in [1, 2] : \int_1^2 \frac{3t^2}{t^3+t} dt = \int_1^2 \frac{3t}{1+t^2} dt = \frac{3}{2} \left[\ln(1+t^2) \right]_1^2 = \boxed{\frac{3}{2} \ln \frac{5}{2}}$.

b) $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2t dt}{t^2-1}$, $t \in [\sqrt{2}, 2] : \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t}{t^2-1} dt = \left[\ln \frac{t-1}{t+1} \right]_{\sqrt{2}}^2 = -\ln 3 - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \boxed{2 \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 3}$
 $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 \right)$.

c) $dx = 2(1+\tan^2 t) dt$, $4+x^2 = 4(1+\tan^2 t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] : \int_0^{\pi/4} \frac{2 dt}{16(1+\tan^2 t)} = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{64} + \frac{1}{32}}$.

d) $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right] : \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \boxed{\frac{\pi}{16}}$.

e) $dx = \frac{dt}{t}$, $t \in [1, e] : \int_1^e \frac{dt}{t^2(1+t)}$, et $\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t} : \left[-\frac{1}{t} - \ln t + \ln(1+t) \right]_1^e = \boxed{\ln \frac{1+e}{2} - \frac{1}{e}}$.

■ Corrigé de l'exercice 6

1. Les fonctions intégrées sont continues sur $\mathbb{R}$; si Φ est une primitive de $\ln(1+e^t)$, $A(x) = \Phi(x^2) - \Phi(0)$, d'où $A'(x) = 2x \ln(1+e^{x^2})$. De même $B(x) = \Psi(x) - \Psi(-x) : B'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{1+x^2}$. Enfin $C(x) = x \int_0^x \sin t^2 dt - \int_0^x t \sin t^2 dt$, d'où $C'(x) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2 - x \sin x^2 = \int_0^x \sin t^2 dt$ et $C''(x) = \sin(x^2)$.

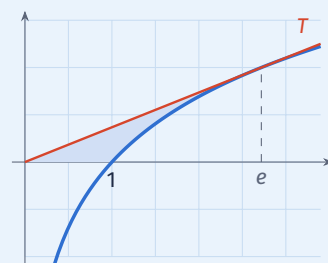
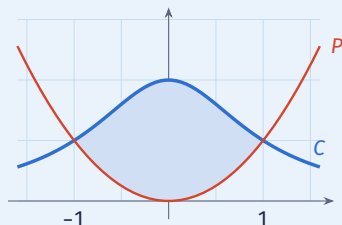
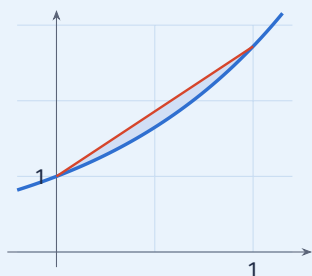
2. $G'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-(2x+1)}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)} : G$ croît sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, décroît sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$; maximum $G(-\frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{1+t^2} = \boxed{2 \arctan \frac{1}{2}}$. Pour $x \geq 0 : 0 \leq G(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ (intervalle de longueur 1), donc $G \rightarrow 0$ en $+\infty$. Avec $t = -u : G(-1-x) = \int_x^{x+1} \frac{du}{1+u^2} = G(x)$ (symétrie par rapport à $x = -\frac{1}{2}$), d'où aussi $G \rightarrow 0$ en $-\infty$. Vérification : $G(x) = \arctan(x+1) - \arctan x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (car $0 < G \leq 1$) et

$$\tan G(x) = \frac{(x+1)-x}{1+x(x+1)} : G(x) = \arctan \frac{1}{x^2+x+1}, \text{ maximal pour } x = -\frac{1}{2} : \arctan \frac{4}{3} = 2 \arctan \frac{1}{2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 7

L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$.

- La corde a pour équation $y = 1 + (e-1)x$ et exp (convexe) est au-dessous sur $[0, 1]$: $A = \int_0^1 (1 + (e-1)x - e^x) dx = 1 + \frac{e-1}{2} - (e-1) = \frac{3-e}{2} \text{ u.a.} = 2(3-e) \text{ cm}^2 \approx 0,56 \text{ cm}^2$.
- $\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} = \frac{-(x^2-1)(x^2+2)}{2(1+x^2)}$: points communs d'abscisses ± 1 , et C est au-dessus de P sur $[-1, 1]$.
 $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \text{ u.a.} = 2\pi - \frac{4}{3} \text{ cm}^2 \approx 4,95 \text{ cm}^2$.
- La tangente en a , $y = \frac{x-a}{a} + \ln a$, passe par O si et seulement si $\ln a = 1 : T : y = \frac{x}{e}$. ln (concave) est au-dessous de T : $A = \int_0^e \frac{x}{e} dx - \int_1^e \ln x dx = \frac{e}{2} - 1 \text{ u.a.} = 2e - 4 \text{ cm}^2 \approx 1,44 \text{ cm}^2$.



■ Corrigé de l'exercice 8

- a) $V = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{4}$; b) $V = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \pi \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3}$;
 c) $V = \pi \int_0^{2\pi} (4 + 4 \sin x + \sin^2 x) dx = \pi(8\pi + 0 + \pi) = 9\pi^2$ (car $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi$).
- Sur $[0, 1]$, $0 \leq x^2 \leq x$: $V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}$.

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

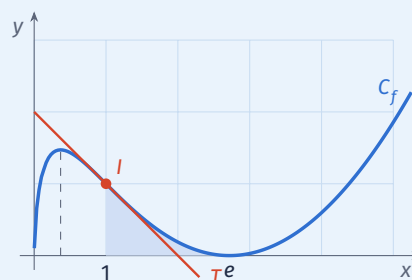
- $\varphi(x) = F(x+T) - F(x)$ a pour dérivée $f(x+T) - f(x) = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$: φ est constante, égale à $\varphi(0) = F(T)$. Si F est T -périodique, $F(T) = F(0) = 0$; réciproquement, si $\int_0^T f = 0$, $F(x+T) = F(x)$. $\int_0^x \sin^3 t dt = \int_0^x (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \frac{2}{3} - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$ est 2π -périodique ($\int_0^{2\pi} \sin^3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 = 0$, fonction impaire) ; $\int_0^x \sin^2 t dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ ne l'est pas (elle n'est pas bornée).
- Avec $x = t + k\pi$: $|\sin(t + k\pi)| = \sin t$ sur $[0, \pi]$, donc $\int_0^\pi (t + k\pi) \sin t dt = \pi + 2k\pi$ (par parties, $\int_0^\pi t \sin t dt = [-t \cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t dt = \pi$). Par Chasles : $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)\pi = n^2\pi$.

$$3. I = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) \sin^2 t \, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt - I = 2\pi^2 - I : \boxed{I = \pi^2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 10

1. $x(\ln x)^2 = (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 \rightarrow 0$ et $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , donc $f(x) = x - 2x \ln x + x(\ln x)^2 \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0. $\frac{f(x)}{x} = (1 - \ln x)^2 \rightarrow +\infty$: non dérivable, **demi-tangente verticale** en 0. En $+\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy).
2. $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1) = (\ln x)^2 - 1$: positif sur $]0, \frac{1}{e}[$ et sur $]e, +\infty[$, négatif sur $]\frac{1}{e}, e[$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{e} \approx 1,47$ et $f(e) = 0$.
3. $f''(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ change de signe en 1 seulement : unique point d'inflexion $I(1, 1)$; $f'(1) = -1$: $T : y = -x + 2$.

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$	



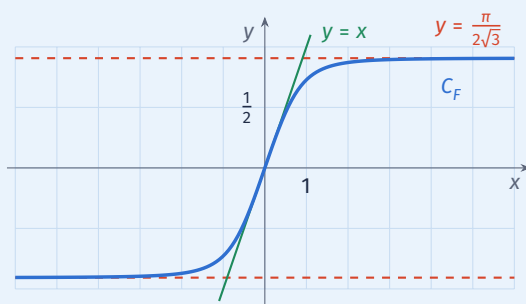
4. Par parties ($u = (1 - \ln x)^2$, $v' = x$) : $\int_1^e f = \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln x)^2 \right]_1^e + \int_1^e x(1 - \ln x) \, dx$, puis ($u = 1 - \ln x$, $v' = x$) : $\int_1^e x(1 - \ln x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln x) \right]_1^e + \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = -\frac{1}{2} + \frac{e^2 - 1}{4}$. Donc $\int_1^e f(x) \, dx = \frac{e^2 - 5}{4}$ et, $f \geq 0$, l'aire vaut $\frac{e^2 - 5}{4} \times 4 = \boxed{e^2 - 5 \text{ cm}^2} \approx 2,39 \text{ cm}^2$.

■ Corrigé de l'exercice 11

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$, $J_0 = 0$, $J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 1$, avec $u = \cos^n x$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$ (le crochet est nul) : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx) \, dx$. Or $\cos((n-1)x) = \cos(nx) \cos x + \sin(nx) \sin x$, donc $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x (\cos((n-1)x) - \cos x \cos(nx)) \, dx = I_{n-1} - I_n$: $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$ et $\boxed{I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}}$.
2. $u = \cos^n x$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$: $J_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \cos(nx) \, dx$, et $\sin x \cos(nx) = \cos x \sin(nx) - \sin((n-1)x)$: $J_n = \frac{1}{n} - J_n + J_{n-1}$, soit $2J_n = J_{n-1} + \frac{1}{n}$. Avec $c_n = 2^{n+1} J_n$: $c_n = c_{n-1} + \frac{2^n}{n}$, $c_0 = 0$, d'où $\boxed{2^{n+1} J_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}}$.
3. $J_n > 0$ (formule), donc $2J_n \geq \frac{1}{n}$. $J_1 = \frac{1}{2} \leq 2$, $J_2 = \frac{1}{2} \leq 1$; si $J_{n-1} \leq \frac{2}{n-1}$ avec $n \geq 3$, $J_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{2}{n}$ car $\frac{2}{n-1} \leq \frac{3}{n}$. Ainsi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = 2J_n \leq \frac{4}{n}$: la limite est $\boxed{0}$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$: F est sa primitive nulle en 0, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4} > 0$, $F''(x) = -\frac{2x(1+2x^2)}{(1+x^2+x^4)^2}$.
Avec $t = -u$: $F(-x) = -\int_0^x \frac{du}{1+u^2+u^4} = -F(x)$. F est strictement croissante ; F'' change de signe en 0 : **inflexion en 0**, tangente $y = x$.
2. $1+t^2+t^4 \geq 1+t^2$; si $t \geq 1$, $1-t^2 \leq 0$, et si $0 \leq t < 1$, $(1-t^2)(1+t^2+t^4) = 1-t^6 \leq 1$. En intégrant sur $[0, x]$: $x - \frac{x^3}{3} \leq F(x) \leq \arctan x < \frac{\pi}{2}$. F croissante et majorée a une limite $\ell \leq \frac{\pi}{2}$, et $\ell \geq F(1) \geq \frac{2}{3}$.
3. $t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$: $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2+t^4} = \int_{1/x}^1 \frac{du}{u^2(1+u^{-2}+u^{-4})} = \int_{1/x}^1 \frac{u^2 du}{1+u^2+u^4}$. Comme $y \mapsto \int_y^1$ est continue en 0 : $\ell = F(1) + \int_0^1 \frac{u^2 du}{1+u^2+u^4} = \int_0^1 \frac{1+u^2}{1+u^2+u^4} du$.
4. $\varphi'(u) = \frac{u^2+1}{u^2}$ et $\varphi(u)^2 + 3 = u^2 + 1 + \frac{1}{u^2} = \frac{u^4+u^2+1}{u^2}$: d'où l'égalité. Sur $]0, 1]$, une primitive est $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\varphi(u)}{\sqrt{3}}$, et pour $0 < \varepsilon < 1$: $\int_\varepsilon^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\varepsilon-1/\varepsilon}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2}$. Donc $\ell = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907$: asymptotes $y = \pm \ell$.



■ Corrigé de l'exercice 13

- a) $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(k/n)^2}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ décroît sur $[0, 1]$; $(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{1+x/\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, d'où $u_n \rightarrow \ln(1 + \sqrt{2})$.
- b) $v_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi/4}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos^2 \frac{k\pi}{4n}}$, avec $\frac{1}{\cos^2}$ croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$: $v_n \rightarrow \frac{4}{\pi} [\tan x]_0^{\pi/4} = \frac{4}{\pi}$. c) De même $w_n \rightarrow \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \frac{4}{\pi} [-\ln \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{2 \ln 2}{\pi}$.
- d) $\ln P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln(1 + \frac{k}{n})$ et $x \mapsto x \ln(1+x)$ croît sur $[0, 1]$; $\ln P_n$ tend vers $\int_0^1 x \ln(1+x) dx = [\frac{x^2}{2} \ln(1+x)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1 + \frac{1}{1+x}) dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; par continuité de $\exp$: $P_n \rightarrow e^{1/4}$.

■ Corrigé de l'exercice 14

Notons $z = e^{ix}$: $z\bar{z} = 1$, $z^k + \bar{z}^k = 2 \cos kx$, $z^k - \bar{z}^k = 2i \sin kx$.

$$1. \cos^4 x \sin^2 x = \frac{(z+\bar{z})^4(z-\bar{z})^2}{16 \times (-4)} = -\frac{1}{64} (z^2 + 2 + \bar{z}^2)(z^4 - 2 + \bar{z}^4), \text{ donc}$$

$$\cos^4 x \sin^2 x = -\frac{1}{64} (z^6 + \bar{z}^6 + 2(z^4 + \bar{z}^4) - (z^2 + \bar{z}^2) - 4) = \frac{1}{32} (2 + \cos 2x - 2 \cos 4x - \cos 6x).$$

$$\text{Comme } \int_0^{\pi/2} \cos(2kx) dx = \frac{\sin k\pi}{2k} = 0 \ (k \geq 1) : \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{2}{32} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}.$$

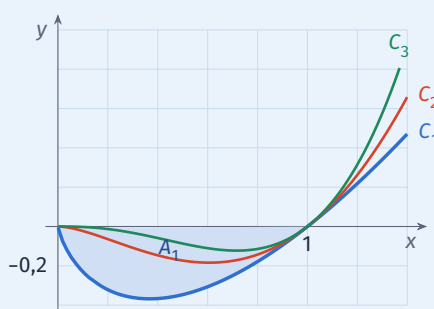
2. $\sin^5 x = \frac{(z-\bar{z})^5}{32i} = \frac{(z^5-\bar{z}^5)-5(z^3-\bar{z}^3)+10(z-\bar{z})}{32i} = \frac{\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x}{16}$; avec $\int_0^\pi \sin kx \, dx = \frac{2}{k}$ (k impair) :
 $\int_0^\pi \sin^5 x \, dx = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{5} - \frac{10}{3} + 20 \right) = \frac{16}{15}$.
3. Pour $0 < x < \pi$, $q = e^{2ix} \neq 1$: $\sum_{k=-n}^n q^k = q^{-n} \frac{q^{2n+1}-1}{q-1} = \frac{e^{i(2n+1)x}-e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}$, et le premier membre vaut $1 + \sum_{k=1}^n (e^{2ikx} + e^{-2ikx}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx)$. Ce polynôme trigonométrique est continu sur $\mathbb{R}$: il prolonge $\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}$ en 0 et en π . Donc $\int_0^\pi = \pi + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin 2kx}{2k} \right]_0^\pi = \boxed{\pi}$ et
 $\int_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\pi}{k} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 15

1. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$: L est sa primitive nulle en 1, $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $L(1) = 0$; L est strictement croissante, négative sur $]0, 1[$, positive sur $]1, +\infty[$.
2. $t = au$, $dt = a \, du$: $\int_a^{ax} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{a \, du}{au} = L(x)$, et par Chasles $L(ax) = \int_1^a + \int_a^{ax} = L(a) + L(x)$. Avec $a = x$ et $\frac{1}{x}$: $0 = L(1) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right)$; par récurrence $L(x^n) = nL(x)$.
3. $\frac{3-t}{2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t-1)(t-2)}{2t} \geq 0$ sur $[1, 2]$ et $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2}$: en intégrant, $\frac{1}{2} \leq L(2) \leq \int_1^2 \frac{3-t}{2} \, dt = \frac{3}{4}$. Puis $\frac{1}{t} - \left(1 - \frac{t}{4}\right) = \frac{(t-2)^2}{4t} \geq 0$, nul seulement en 2 : $L(3) > \int_1^3 \left(1 - \frac{t}{4}\right) \, dt = 1$ (fonction continue positive non nulle). L , continue et strictement croissante, prend la valeur 1 une seule fois, en un réel $e \in]2, 3[$ (TVI).
4. $L(2^n) = nL(2) \geq \frac{n}{2}$: L croissante non majorée, $\lim_{+\infty} L = +\infty$; $L(x) = -L\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\infty$ en 0^+ . Pour $y \geq 1$, $L(y) \leq \int_1^y 1 \, dt = y - 1$; donc $L(x) = 2L(\sqrt{x}) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$ et $0 \leq \frac{L(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$: $\frac{L(x)}{x} \rightarrow \boxed{0}$.

■ Corrigé de l'exercice 16

1. $f_n(x) = x^{n-1} \cdot x \ln x \rightarrow 0 = f_n(0)$: f_n est continue à droite en 0. $\frac{f_n(x)}{x} = x^{n-1} \ln x$ tend vers $-\infty$ si $n = 1$ (**demi-tangente verticale** en O) et vers 0 si $n \geq 2$ (f_n dérivable à droite en 0, $f'_n(0) = 0$, tangente horizontale). En $+\infty$: $f_n(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f_n(x)}{x} \rightarrow +\infty$ (**branche parabolique** de direction (Oy)).
2. $f'_n(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = x^{n-1}(n \ln x + 1)$: f_n décroît sur $[0, e^{-1/n}]$, croît sur $[e^{-1/n}, +\infty[$; minimum $f_n(e^{-1/n}) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \boxed{-\frac{1}{ne}}$.
3. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x-1) \ln x \geq 0$ ($x-1$ et $\ln x$ ont le même signe) : C_{n+1} est **au-dessus** de C_n ; elles se coupent en O et en $A(1, 0)$.



4. f_n est continue et négative sur $[0, 1]$: $A_n = -\int_0^1 f_n = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^n \ln x \, dx$. Par parties ($u = \ln x$,

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} :$$

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon}{n+1} - \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{(n+1)^2}, \quad \text{d'où} \quad A_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Entre C_n et C_{n+1} : $\int_0^1 (f_{n+1} - f_n) = A_n - A_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$ u.a. Enfin $A_k \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc $\sum_{k=1}^n A_k \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$; croissante et majorée, la somme converge (vers $\frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,645$, exercice 24).

27 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

a) $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, d'où $1 + \sin x + \cos x = \frac{2(1+t)}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \boxed{\ln 2}$.

b) $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $dx = 6 \sin t \cos t \, dt$, $\sqrt{\frac{3 \sin^2 t}{3 \cos^2 t}} = \tan t$: $\int_0^{\pi/4} 6 \sin^2 t \, dt = 3 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t) \, dt = \boxed{\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}}$.

c) $x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$, $dx = \frac{t dt}{1+t^2}$, $t \in [1, \sqrt{3}]$: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$.

d) $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $1 + \sin^2 x = \frac{1+2t^2}{1+t^2}$: $\int_0^1 \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}t) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\arctan \sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$.

■ Corrigé de l'exercice 18

Pour $x > 0$, $t^x = e^{x \ln t} \rightarrow 0$ en 0^+ , et $\frac{1-t^x}{1-t} \rightarrow x$ en 1 (nombre dérivé de $t \mapsto t^x$ en 1) : $H(x)$ est bien défini.

1. $\frac{1-t^{x+1}}{1-t} - \frac{1-t^x}{1-t} = t^x$, donc $H(x+1) - H(x) = \int_0^1 t^x \, dt = \frac{1}{x+1}$; avec $H(0) = 0$, une récurrence donne $H(n) = H_n$. Si $0 \leq x \leq y$ et $0 < t < 1$, $t^y \leq t^x$: les fonctions intégrées sont rangées, donc $H(x) \leq H(y)$.

2. $1-t = (1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})$: $H\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{1+\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{2u \, du}{1+u} = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = \boxed{2 - 2 \ln 2}$.

3. Par récurrence avec 1., $H(x+n) = H(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$; comme $n \leq x+n \leq n+1$ et H croît, $H_n \leq H(x+n) \leq H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$. Donc $H(x) = H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} + \varepsilon_n$ avec $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{n+1}$, et $\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} = \frac{x}{k(k+x)}$:

$$H(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{k(k+x)}. \quad \text{Pour } x = \frac{1}{2}, \frac{x}{k(k+x)} = \frac{1}{k(2k+1)} : \text{ la limite est } \boxed{2 - 2 \ln 2} \approx 0,614.$$

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $0 \leq f^n \leq M^n$ donne $I_n \leq M^n(b-a)$. Soit c tel que $f(c) = M$; par continuité en c , il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq M - \varepsilon$ si $x \in [a, b]$ et $|x - c| \leq \eta$: c'est le cas sur $[\alpha, \beta] = [c - \eta, c + \eta] \cap [a, b]$, segment non réduit à un point. Alors $I_n \geq (M - \varepsilon)^n(\beta - \alpha)$, et

$$(M - \varepsilon) \sqrt[n]{\beta - \alpha} \leq \sqrt[n]{I_n} \leq M \sqrt[n]{b - a}.$$

Les deux racines n -ièmes tendent vers 1 : pour n assez grand, $M - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{I_n} \leq M + \varepsilon$. Donc

$$\sqrt[n]{I_n} \rightarrow M \quad (\text{si } M = 0, f = 0 \text{ et c'est évident}).$$

2. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de maximum $\sqrt{2}$: limite $\boxed{\sqrt{2}}$. $g(x) = (2x - x^2)e^x \geq 0$ sur $[0, 2]$, $g'(x) = (2 - x^2)e^x$: maximum $g(\sqrt{2})$, limite $\boxed{(2\sqrt{2} - 2)e^{\sqrt{2}}} \approx 3,41$.

■ Corrigé de l'exercice 20

1. Si f convient, $c = \int_0^1 tf(t) dt$ est un réel et $f(x) = 1 + \lambda cx$; alors $c = \int_0^1 t(1 + \lambda ct) dt = \frac{1}{2} + \frac{\lambda c}{3}$, soit $c(3 - \lambda) = \frac{3}{2}$. **Si $\lambda = 3$: aucune solution.** Si $\lambda \neq 3$: $c = \frac{3}{2(3-\lambda)}$ et $\boxed{f(x) = 1 + \frac{3\lambda x}{2(3-\lambda)}}$, qui convient réciproquement (le calcul de c se refait à l'identique).
2. Pour $x \neq 0$, $u = xt$: $\int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$, donc $xf(x) = F(x)$ avec $F(x) = \int_0^x f$. Ainsi $f = \frac{F}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, en dérivant, $f(x) + xf'(x) = f(x)$: $f' = 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. f est constante sur chacun, et par continuité en 0 les deux constantes valent $f(0)$: $\boxed{f \text{ est constante}}$; réciproquement les constantes conviennent.
3. $x = t^2$: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2tf(t^2) dt$. Donc $\int_0^1 (f(t^2) - t)^2 dt = \left(\int_0^1 f - \frac{1}{3}\right) - \int_0^1 f + \frac{1}{3} = 0$: la fonction continue positive $(f(t^2) - t)^2$ est nulle, $f(t^2) = t$, soit $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$, qui convient : $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \int_0^1 x^2 dx$.

■ Corrigé de l'exercice 21

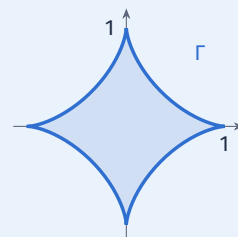
1. Pour $x, y \geq 0$: $\sqrt[3]{y^2} = 1 - \sqrt[3]{x^2} \iff x \leq 1$ et $y = g(x)$. L'équation ne change pas si l'on remplace x par $-x$ ou y par $-y$: $A = 4 \int_0^1 g$.

Avec $x = \cos^3 t$ (t de $\frac{\pi}{2}$ à 0), $dx = -3\cos^2 t \sin t dt$ et $g(\cos^3 t) = (\sin^2 t)^{3/2} = \sin^3 t$:

$$\int_0^1 g = 3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 u \sin^2 u du = \frac{3\pi}{32}$$

($u = \frac{\pi}{2} - t$ et exercice 14), d'où $\boxed{A = \frac{3\pi}{8}}$. Le solide est engendré par

$$|y| \leq g(|x|) : V = 2\pi \int_0^1 (1 - x^{2/3})^3 dx = 2\pi \left(1 - \frac{9}{5} + \frac{9}{7} - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{32\pi}{105}}.$$



2. Si $\alpha \neq 1$, $A_\alpha(A) = \frac{A^{1-\alpha-1}}{1-\alpha}$; si $\alpha = 1$, $A_1(A) = \ln A$. Limite finie si et seulement si $\alpha > 1$ (elle vaut $\frac{1}{\alpha-1}$). De même $V_\alpha(A) = \pi \int_1^A x^{-2\alpha} dx$ a une limite finie si et seulement si $2\alpha > 1$ (elle vaut $\frac{\pi}{2\alpha-1}$). Pour $\alpha = 1$: $A_1(A) \rightarrow +\infty$ mais $V_1(A) = \pi \left(1 - \frac{1}{A}\right) \rightarrow \boxed{\pi}$: la trompette contient un volume fini alors que la surface plane qui l'engendre a une aire infinie (de même pour $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$).

■ Corrigé de l'exercice 22

1. Pour $n = 0$: $f(b) = f(a) + \int_a^b f'$. Si la formule est vraie au rang n et f de classe C^{n+2} , on intègre par parties le reste R_n avec $u = f^{(n+1)}$, $v = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$: $R_n = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$: c'est la formule au rang $n+1$.
2. $|R_n| \leq \left| \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!} M dt \right| = \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$ et $|\cos^{(m)}| \leq 1$: on applique 2. avec $a = 0$, $b = x$, $n =$

$2p + 1$. Comme $\frac{|x|^m}{m!} \rightarrow 0$ (dès que $m \geq 2|x|$), le rapport de deux termes consécutifs est $\leq \frac{1}{2}$,

$\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \rightarrow \cos x$. Avec $p = 3$: $\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} \approx 0,54028$, à $\frac{1}{8!} < 2,5 \cdot 10^{-5}$ près.

4. $f(x) = \sqrt{1+x}$: $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$, $f'''(t) = \frac{3}{8}(1+t)^{-5/2} \in]0, \frac{3}{8}]$ pour $t \geq 0$; le reste $R_2 = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt$ est donc compris entre 0 et $\frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{16}$. Pour $x = 0,1$: $1,04875 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,04875 + 6,25 \cdot 10^{-5}$, soit $\sqrt{1,1} \approx 1,0488$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. $\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) = \sin(A+B)\sin(A-B)$ (formules de transformation) ; avec $A = nx$, $B = (n-1)x$: $J_n - J_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \sin((2n-1)x) dx = \frac{1}{2n-1}$ (car $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = 0$), et $J_0 = 0$:

$$J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}. \text{ Comme } H_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = J_n + \frac{1}{2} H_n :$$

$$\ln(2n+1) - \frac{1+\ln n}{2} \leq J_n \leq 1 + \ln(2n) - \frac{\ln(n+1)}{2}, \quad \text{donc} \quad \frac{J_n}{\ln n} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$, avec $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ et $x \sin x \geq \frac{2x^2}{\pi}$: on obtient l'encadrement. On le multiplie par $\sin^2(nx) \in [0, 1]$ et on intègre : $0 \leq J_n - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{x} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\pi x}{12} dx = \frac{\pi^3}{96}$, et $u = nx$ donne $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{x} dx = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u} du$.

3. Ainsi $\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u} du \geq J_n - \frac{\pi^3}{96} \rightarrow +\infty$ (et ce nombre vaut environ $\frac{1}{2} \ln n$). Comme $|\sin u| \geq \sin^2 u$ et que $x \mapsto \int_0^x \frac{|\sin u|}{u} du$ est croissante, $\int_0^x \frac{|\sin u|}{u} du \rightarrow +\infty$: alors que $\int_0^x \frac{\sin u}{u} du$ a une limite finie (exercice 25), la fonction $\left| \frac{\sin u}{u} \right|$ « n'est pas intégrable » sur $[0, +\infty[$.

28 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $B_0 = \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi^3}{24}$. Pour $n \geq 1$, par parties ($u = \cos^{2n} x$, $v = x$) :

$$A_n = \left[x \cos^{2n} x \right]_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2n-1} x dx = 2n \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2n-1} x dx.$$

Puis ($u = \sin x \cos^{2n-1} x$, $v = \frac{x^2}{2}$, crochet nul), avec $u' = \cos^{2n} x - (2n-1) \sin^2 x \cos^{2n-2} x$, soit $u' = 2n \cos^{2n} x - (2n-1) \cos^{2n-2} x$:

$$A_n = -n \int_0^{\pi/2} x^2 (2n \cos^{2n} x - (2n-1) \cos^{2n-2} x) dx = n(2n-1)B_{n-1} - 2n^2 B_n.$$

2. On divise par $n^2 A_n$, avec $\frac{2n-1}{n A_n} = \frac{2}{A_{n-1}}$ (Wallis) : $\frac{1}{n^2} = 2 \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - 2 \frac{B_n}{A_n}$. En sommant (télescopage) : $S_n = 2 \frac{B_0}{A_0} - 2 \frac{B_n}{A_n} = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{B_n}{A_n}$.

3. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$ (concavité), donc $x^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x = \frac{\pi^2}{4} (1 - \cos^2 x)$ et $0 \leq B_n \leq \frac{\pi^2}{4} (A_n - A_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{A_n}{2n+2}$. Ainsi $0 \leq \frac{B_n}{A_n} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} \rightarrow 0$ et $S_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$.

4. Soit $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} : T_{2n} = S_{2n} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{1}{2} S_n \rightarrow \frac{\pi^2}{12}$, et $T_{2n+1} = T_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^2}$ a la même limite : $T_n \rightarrow \frac{\pi^2}{12}$. En intégrant l'identité sur $[0, x]$ ($0 < x \leq 1$) : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$, avec $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$. En divisant par x et en intégrant sur $[0, 1]$ (fonctions prolongées par continuité en 0) : $\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - T_n \right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)^2}$, d'où $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}}$.

■ Corrigé de l'exercice 25

- Par parties ($u = \frac{1}{t}$, $v = -\cos t$) : $\int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_{\pi}^x - \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$, d'où la formule. $\Phi(x) = \int_{\pi}^x \frac{1+\cos t}{t^2} dt$ est croissante (intégrande positive) et majorée par $\int_{\pi}^x \frac{2}{t^2} dt \leq \frac{2}{\pi}$: elle a une limite, donc $\int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \Phi(x) - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{x}$ aussi ; comme $\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$, $\text{Si}(x) = \text{Si}(\pi) + \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$ a une limite finie ℓ .
- ($0 \leq g(t) \leq \frac{\pi t}{12}$: exercice 23 ; g est continue en 0.) $g'(t) = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2} = \frac{N(t)}{t^2 \sin^2 t}$ avec $N(t) = \sin^2 t - t^2 \cos t$. D'une part $N(t) \leq t^2 - t^2 \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = \frac{t^4}{2}$; d'autre part $0 \leq t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t$ donne $\sin^2 t \geq t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{36}$, et $t^2 \cos t \leq t^2 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{24}$, d'où $N(t) \geq \frac{t^4}{72} (12 - t^2) \geq 0$. Comme $t^2 \sin^2 t \geq \frac{4t^4}{\pi^2}$: $0 \leq g'(t) \leq \frac{\pi^2}{8}$.
- g est de classe C^1 sur $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$: $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} g(t) \sin(mt) dt = \left[-\frac{g(t) \cos(mt)}{m} \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} + \frac{1}{m} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} g'(t) \cos(mt) dt$, de valeur absolue $\leq \frac{g(\pi/2) + g(\varepsilon)}{m} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8m}$. On fait $\varepsilon \rightarrow 0$ ($g(\varepsilon) \rightarrow 0$, et $\varepsilon \mapsto \int_{\varepsilon}^{\pi/2}$ est continue) ; $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}$.
- Avec $u = (2n+1)t$: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du = \text{Si}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$, et $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}$ (ex. 14) ; par différence on obtient l'égalité demandée, dont le second membre tend vers 0 (question 3). Donc $\ell = \lim \text{Si}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 26

- TAF : $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(c)$, donc $|f(x)| \leq Mx$; de même avec π . Sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$: $|f(x)^2 \cot x| \leq M^2 x^2 \cdot \frac{\pi}{2x} = \frac{\pi M^2}{2} x \rightarrow 0$; en π^- , de même avec $\pi - x$.
- Sur $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$: $h^2 = f'^2 - 2ff' \cot + f^2 \cot^2$ et, par parties, $\int 2ff' \cot = [f^2 \cot] - \int f^2 \cot'$ avec $\cot' = -1 - \cot^2$. Donc $\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} h^2 = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (f'^2 - f^2) - [f^2 \cot]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}$. Le premier membre est positif ; quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le crochet tend vers 0 (question 1) et $\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (f'^2 - f^2) \rightarrow \int_0^{\pi} (f'^2 - f^2) : \boxed{\int_0^{\pi} f'^2 \leq \int_0^{\pi} f'^2}$.
- Pour $f = \lambda \sin$: $\int_0^{\pi} \lambda^2 \sin^2 = \int_0^{\pi} \lambda^2 \cos^2 = \frac{\lambda^2 \pi}{2}$. Réciproquement, s'il y a égalité, $\Psi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} h^2$ tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$; or Ψ croît quand ε décroît : $\Psi(\varepsilon) = 0$ pour tout ε , donc $h = 0$ sur $]0, \pi[$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Alors $\left(\frac{f}{\sin}\right)' = \frac{f' \sin - f \cos}{\sin^2} = \frac{h}{\sin} = 0 : f = \lambda \sin$ sur $]0, \pi[$, puis sur $[0, \pi]$ par continuité.
- $f(x) = g\left(\frac{x}{\pi}\right)$ vérifie les hypothèses ; avec $u = \frac{x}{\pi}$: $\int_0^{\pi} f^2 = \pi \int_0^1 g^2$ et $\int_0^{\pi} f'^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 g'^2$, d'où $\boxed{\int_0^1 g^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 g'^2}$. Pour $g(x) = x(1-x)$: $\int_0^1 g^2 = \frac{1}{30} \leq \frac{1}{3\pi^2} \approx 0,0338$, car $\int_0^1 (1-2x)^2 dx = \frac{1}{3}$ (la constante $\frac{1}{\pi^2}$ est optimale : égalité pour $\sin(\pi x)$).

■ Corrigé de l'exercice 27

1. $x^p(\ln x)^q \rightarrow 0$ en 0^+ ($p \geq 1$, croissances comparées). Par parties sur $[\varepsilon, 1]$ ($u = (\ln x)^q$, $v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$) :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^p(\ln x)^q dx = -\frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1} - \frac{q}{p+1} \int_{\varepsilon}^1 x^p(\ln x)^{q-1} dx ; \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0 : J_{p,q} = -\frac{q}{p+1} J_{p,q-1}.$$
 Comme $J_{p,0} = \frac{1}{p+1}$

$$: J_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}, \text{ et pour } p = q = k : \boxed{\frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}}.$$
2. $\varphi(x) = -x \ln x$: $\varphi'(x) = -1 - \ln x$, maximum $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, et $\varphi \geq 0$ sur $]0, 1]$. Pour $|u| \leq \frac{1}{e}$, $|\exp^{(N+1)}| = \exp \leq e^{1/e}$ entre 0 et u : Taylor-Lagrange (ex. 22) donne la majoration $\frac{e^{1/e}|u|^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{e^{1/e}}{e^{N+1}(N+1)!} = \delta_N$.
3. $x^{-x} = e^u$ avec $u = -x \ln x \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$: $\left|x^{-x} - \sum_{k=0}^N \frac{(-x \ln x)^k}{k!}\right| \leq \delta_N$ sur $[0, 1]$. On intègre ; $\frac{(-1)^k}{k!} J_{k,k} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$ (et $\int_0^1 1 dx = 1$ pour $k = 0$), donc $\left|\int_0^1 x^{-x} dx - \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{j^j}\right| \leq \delta_N \rightarrow 0$. De même $x^x = e^{x \ln x}$ et $\frac{1}{k!} J_{k,k} = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$. Avec $N = 5$ ($\delta_5 < 6 \cdot 10^{-6}$) : $\int_0^1 x^{-x} dx \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} + \frac{1}{46656} \approx \boxed{1,2913}$ et $\int_0^1 x^x dx \approx \boxed{0,7834}$.

■ Corrigé de l'exercice 28

1. Avec $u = ax$ puis $u = bx$ ($\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$) : $\int_{a\varepsilon}^A \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^A \frac{f(u)}{u} du$ et $\int_{b\varepsilon}^A \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^A \frac{f(u)}{u} du$; la différence se simplifie par Chasles ($a\varepsilon < b\varepsilon$, $aA < bA$).
2. Si m_ε et M_ε sont le minimum et le maximum de f sur $[a\varepsilon, b\varepsilon]$: $m_\varepsilon \ln \frac{b}{a} \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \leq M_\varepsilon \ln \frac{b}{a}$, et $m_\varepsilon, M_\varepsilon \rightarrow f(0)$ par continuité. En $+\infty$: pour $\eta > 0$, $|f(u) - L| \leq \eta$ dès que $u \geq X$; si $aA \geq X$, $\left|\int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u} du - L \ln \frac{b}{a}\right| \leq \eta \ln \frac{b}{a}$.
3. $\frac{f(ax)-f(bx)}{x} = a \frac{f(ax)-f(0)}{ax} - b \frac{f(bx)-f(0)}{bx} \rightarrow (a-b)f'(0)$: prolongement continu en 0. Alors $\int_0^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^A = f(0) \ln \frac{b}{a} - \int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow \boxed{(f(0) - L) \ln \frac{b}{a}}$.
4. $f(x) = e^{-x}$, $a = 1$, $b = 2$: limite $\boxed{\ln 2}$. $f = \arctan$ ($f(0) = 0$, $L = \frac{\pi}{2}$) : $\int_0^A \frac{\arctan x - \arctan 2x}{x} dx \rightarrow -\frac{\pi}{2} \ln 2$, donc la seconde limite vaut $\boxed{\frac{\pi}{2} \ln 2}$. Pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 3. prévoit $\ln 2$; directement, $\frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2x}\right) = \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x}$, d'où $\int_0^A = \ln \frac{1+2A}{1+A} \rightarrow \ln 2$.

■ Corrigé de l'exercice 29

1. $\int_0^1 K_n = \left[\arctan(nx)\right]_0^1 = \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Avec $x = \frac{u}{n}$, $dx = \frac{du}{n}$: $\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^n \frac{f(u/n)}{1+u^2} du$.
2. Soit $m_n = \max_{[0, A/n]} |f - f(0)|$. On coupe en A : $\left|\int_0^A \frac{f(u/n)-f(0)}{1+u^2} du\right| \leq m_n \arctan A \leq \frac{\pi}{2} m_n$ et $\left|\int_A^n \frac{f(u/n)-f(0)}{1+u^2} du\right| \leq 2M \int_A^n \frac{du}{1+u^2} \leq 2M \left(\frac{\pi}{2} - \arctan A\right)$. Soit $\varepsilon > 0$: on fixe A tel que $2M \left(\frac{\pi}{2} - \arctan A\right) \leq \varepsilon$; par continuité de f en 0, $m_n \rightarrow 0$, donc $\frac{\pi}{2} m_n \leq \varepsilon$ pour n assez grand. Ainsi $\int_0^1 K_n f = f(0) \arctan n + \int_0^n \frac{f(u/n)-f(0)}{1+u^2} du \rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} f(0)}$.
3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ prolongée par $f(0) = 1$ est continue sur $[0, 1]$: limite $\boxed{\frac{\pi}{2}}$. De même, avec $f = \exp$: $n \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+n^2x^2} = \int_0^1 K_n e^x \rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 30

1. Par récurrence : si B_{n-1} est un polynôme, les polynômes P tels que $P' = nB_{n-1}$ sont les $P(x) = n \int_0^x B_{n-1} + c$, et $\int_0^1 P = 0$ fixe c de façon unique. $B_1 = x + c$ avec $\frac{1}{2} + c = 0$; $B_2 = x^2 - x + c$ avec $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$; $B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ avec $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c = 0$; $B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 + c$ avec $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + c = 0$:

$$B_1 = x - \frac{1}{2}, \quad B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

2. Pour $n \geq 2$: $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n = n \int_0^1 B_{n-1} = 0$. Soit $D_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x)$: $D_1 = 1$; si $D_{n-1}(x) = (n-1)x^{n-2}$ ($n \geq 2$), alors $D'_n = nD_{n-1} = n(n-1)x^{n-2}$, donc $D_n(x) = nx^{n-1} + D_n(0) = nx^{n-1}$ car $D_n(0) = B_n(1) - B_n(0) = 0$.

3. Avec $n = p+1$: $k^p = \frac{B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)}{p+1}$; on somme de $k = 0$ à $N-1$ (télescopage). Pour $p = 3$ (et $N+1$

au lieu de N) : $1^3 + \dots + N^3 = \frac{B_4(N+1) - B_4(0)}{4} = \frac{(N+1)^2((N+1)^2 - 2(N+1) + 1)}{4} = \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^2$.

4. $C_0 = 1$, $C'_n(x) = (-1)^{n+1} B'_n(1-x) = (-1)^{n+1} n B_{n-1}(1-x) = n C_{n-1}(x)$ et $\int_0^1 C_n = (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du = 0$ ($u = 1-x$) : par unicité, $C_n = B_n$. Pour $n = 2m+1 \geq 3$: $B_n(1) = -B_n(0)$ ($x=0$) et $B_n(1) = B_n(0)$ (question 2), donc $B_{2m+1}(0) = 0$.

29

Corrigés : techniques de calcul

■ Corrigé de l'exercice 31

Dans chaque cas, la fonction à intégrer est continue sur le segment d'intégration.

a) Avec $u = 1+x^3 > 0$, $u' = 3x^2$: $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)}$.

b) Avec $u = 1 + \ln x \geq 1$ sur $[1, e]$, $u' = \frac{1}{x}$: forme $\frac{u'}{u^2}$, $\left[-\frac{1}{1+\ln x} \right]_1^e = -\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$.

c) Avec $u = 1 + \sin^2 x > 0$, $u' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$: forme $\frac{u'}{u}$, $\left[\ln(1 + \sin^2 x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\ln 2}$.

d) Avec $u = x^4$, $u' = 4x^3$: $\frac{x^3}{1+x^8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u'}{1+u^2}$, $\left[\frac{1}{4} \arctan(x^4) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{16}}$.

e) Avec $u = 1 + \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = 2u'u^2$, $\left[\frac{2}{3} (1+\sqrt{x})^3 \right]_1^4 = \frac{2}{3}(27-8) = \boxed{\frac{38}{3}}$.

f) $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = 4(1+v^2)$ avec $v = \frac{x-1}{2}$, $v' = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{x^2-2x+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v'}{1+v^2}$, d'où $\left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$.

g) $(3^x)' = (e^{x \ln 3})' = 3^x \ln 3$: avec $u = 1 + 3^x > 0$, $\frac{3^x}{1+3^x} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{u'}{u}$, d'où $\left[\frac{\ln(1+3^x)}{\ln 3} \right]_0^1 = \frac{\ln 4 - \ln 2}{\ln 3} = \boxed{\frac{\ln 2}{\ln 3}}$.

h) Avec $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{2u'}{1+u^2}$, d'où $\left[2 \arctan \sqrt{x} \right]_1^3 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. a) $(x-1)(x+2)+3 = x^2+x-2+3 = x^2+x+1$. Sur $[2, 3]$, $x-1 > 0$ et $\frac{x^2+x+1}{x-1} = x+2 + \frac{3}{x-1}$:

$$A = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln(x-1) \right]_2^3 = \left(\frac{9}{2} + 6 + 3 \ln 2 \right) - (2 + 4) = \boxed{\frac{9}{2} + 3 \ln 2}.$$

- b) En multipliant par $x+1$ puis en faisant $x = -1$: $a = \frac{2}{2} = 1$. Alors $x+3 = (x^2+1) + (bx+c)(x+1)$, d'où $(bx+c)(x+1) = -x^2+x+2 = (2-x)(x+1)$: $a = 1, b = -1, c = 2$. Donc

$$B = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2}}.$$

2. a) $\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 2x \sin 3x$, et $\cos 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$, d'où l'égalité. Donc

$$C = \left[-\frac{\cos 3x}{6} + \frac{\cos 5x}{20} + \frac{\cos x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \right) = \boxed{-\frac{2}{15}}$$

(négatif, bien que $\sin^2 x \geq 0$: $\sin 3x$ change de signe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$).

- b) $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x (1-\tan^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, donc $D = \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. Toutes les fonctions u et v choisies sont dérivables à dérivées continues sur le segment.

- a) $u = \arctan x, v' = \frac{1}{(1+x)^2}$; on choisit la primitive $v = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, nulle en 0 :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{x \arctan x}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{\pi}{8} - \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

En multipliant par $1+x$ et en faisant $x = -1$, on trouve le coefficient $-\frac{1}{2}$, puis $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)} = -\frac{1}{2(1+x)} + \frac{x+1}{2(1+x^2)}$, d'où $\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ et $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx = \boxed{\frac{\ln 2}{4}}$.

- b) $u = \ln x, v' = x^{-3}, v = -\frac{1}{2x^2}$: $\left[-\frac{\ln x}{2x^2} \right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{2x^3} = -\frac{1}{2e^2} + \left[-\frac{1}{4x^2} \right]_1^e = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}}$.

- c) $5^x = e^{x \ln 5}$ a pour primitive $\frac{5^x}{\ln 5}$. $u = 2x+1, v = \frac{5^x}{\ln 5}$: $\left[\frac{(2x+1)5^x}{\ln 5} \right]_0^1 - \frac{2}{\ln 5} \int_0^1 5^x dx = \frac{15-1}{\ln 5} - \frac{2(5-1)}{(\ln 5)^2} = \boxed{\frac{14}{\ln 5} - \frac{8}{(\ln 5)^2}}$.

- d) $\left(\frac{1}{2 \cos^2 x} \right)' = \frac{-2 \cos x \cdot (-\sin x)}{2 \cos^4 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. $u = x, v = \frac{1}{2 \cos^2 x}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \left[\frac{x}{2 \cos^2 x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\pi/3}{2 \cdot \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} [\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

e) $u = x^2, v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, v = \sqrt{1+x^2} :$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[x^2 \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}-2}{3} = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}.$$

2. $u = x^2, v = \frac{\sin 2x}{2} :$ $\int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \left[\frac{x^2 \sin 2x}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx = - \int_0^\pi x \sin 2x dx.$

Puis $u = x, v = -\frac{\cos 2x}{2} :$ $\int_0^\pi x \sin 2x dx = \left[-\frac{x \cos 2x}{2} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx = -\frac{\pi}{2} + 0.$ D'où
 $\int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

■ Corrigé de l'exercice 34

1. Chaque φ utilisée est dérivable à dérivée continue, et la fonction intégrée est continue.

a) $x = t^2, t \in [1, 2], dx = 2t dt :$ $\int_1^2 \frac{2t dt}{t^2 + t} = \int_1^2 \frac{2 dt}{t+1} = 2 \left[\ln(t+1) \right]_1^2 = \boxed{2 \ln \frac{3}{2}}.$

b) $t = \sqrt{e^x - 1} \iff x = \ln(1+t^2), t \in [0, 1], dx = \frac{2t}{1+t^2} dt :$

$$\int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

c) Avec $\varphi(x) = 1+x^3 : x^5 \sqrt{1+x^3} = \frac{1}{3}(\varphi(x)-1)\sqrt{\varphi(x)}\varphi'(x)$, donc

$$\int_0^1 x^5 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 (t-1)\sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{15} \right) = \boxed{\frac{4(\sqrt{2}+1)}{45}}.$$

d) $x = \sin t, dx = \cos t dt$, et $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ car $\cos t > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] :$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

e) $x = 2 \arctan t$ envoie $[0, 1]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$, et $\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, donc

$$2 + \cos x = \frac{3+t^2}{1+t^2} :$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^1 \frac{2 dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}.$$

2. a) $h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$: sur cet intervalle, h est constante, égale à $h(1) = \frac{\pi}{2}$. ✓

b) $x = \frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2} ; u = 2$ pour $x = \frac{1}{2}$ et $u = \frac{1}{2}$ pour $x = 2$: $I = \int_2^{\frac{1}{2}} u \arctan \frac{1}{u} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u} \arctan \frac{1}{u} du$. En ajoutant :

$$2I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u} \left(\arctan u + \arctan \frac{1}{u} \right) du = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} \left(\ln 2 - \ln \frac{1}{2} \right) = \pi \ln 2, \quad \boxed{I = \frac{\pi}{2} \ln 2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 35

1. Avec $x = -t$, $dx = -dt$: $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt$. Par Chasles (la variable est muette) : $\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$. ✓ (On retrouve $2 \int_0^a f$ si f est paire, 0 si f est impaire.)

2. Pour $h(x) = \frac{x^2 + \arctan x}{1 + x^2}$: $h(x) + h(-x) = \frac{2x^2}{1 + x^2}$ ($\arctan$ est impaire), donc

$$A = \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

3. a) $\sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $u(x) > 0$. $u(x)u(-x) = (\sqrt{1 + x^2} + x)(\sqrt{1 + x^2} - x) = 1 + x^2 - x^2 = 1$. ✓

b) La fonction $f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + u(x))}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($1 + u > 1$). Comme $u(-x) = \frac{1}{u(x)}$:

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{1 + x^2} \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 + \frac{1}{u}} \right) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1 + u}{1 + u} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad B = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

4. a) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, donc $g(x + \pi) = \frac{1}{1 + 2^{-\cos x}} = \frac{2^{\cos x}}{2^{\cos x} + 1}$ et $g(x) + g(x + \pi) = \frac{1 + 2^{\cos x}}{1 + 2^{\cos x}} = 1$.

Avec $x = t + \pi$: $\int_{\pi}^{2\pi} g(x) dx = \int_0^{\pi} g(t + \pi) dt$, donc $\int_0^{2\pi} g = \int_0^{\pi} (g(t) + g(t + \pi)) dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \boxed{\pi}$.

b) g est continue et 2π -périodique, donc (cours) $\int_a^{a+2\pi} g = \int_0^{2\pi} g = \boxed{\pi}$ pour tout réel a . Par Chasles, avec $2026\pi = 1013 \times 2\pi$:

$$\int_0^{2026\pi} g(x) dx = \sum_{k=0}^{1012} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} g(x) dx = 1013 \times \pi = \boxed{1013\pi}.$$

■ Corrigé de l'exercice 36

1. a) Si $a \leq 1$: $e^x \geq 1 \geq a$ sur $[0, 1]$, $F(a) = \int_0^1 (e^x - a) dx = \boxed{e - 1 - a}$. Si $a \geq e$: $e^x \leq e \leq a$, $F(a) = \boxed{a - e + 1}$.

b) Si $1 < a < e$, alors $0 < \ln a < 1$, $e^x - a \leq 0$ sur $[0, \ln a]$ et $e^x - a \geq 0$ sur $[\ln a, 1]$. Par Chasles :

$$F(a) = \int_0^{\ln a} (a - e^x) dx + \int_{\ln a}^1 (e^x - a) dx = (a \ln a - a + 1) + (e - 2a + a \ln a) = \boxed{2a \ln a - 3a + e + 1}.$$

c) Les trois expressions se raccordent en 1 ($e - 2$) et en e (1) : F est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $]1, e[$, $F'(a) = 2 \ln a + 2 - 3 = 2 \ln a - 1$, négatif sur $]1, \sqrt{e}[$ et positif sur $]\sqrt{e}, e[$. Avec a) : F est strictement décroissante sur $]-\infty, \sqrt{e}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$. Son minimum, atteint seulement en $a = \sqrt{e}$, vaut

$$F(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} \cdot \frac{1}{2} - 3\sqrt{e} + e + 1 = e - 2\sqrt{e} + 1 = \boxed{(\sqrt{e} - 1)^2} \approx 0,42.$$

$F(a)$ est l'aire (u.a.) comprise entre la courbe de $\exp$, la droite $y = a$ et les droites $x = 0$, $x = 1$: elle est minimale quand la droite horizontale passe par le point de la courbe d'abscisse $\frac{1}{2}$, milieu de $[0, 1]$.

2. a) $(x^2 - ax - b)^2 = x^4 - 2ax^3 + (a^2 - 2b)x^2 + 2abx + b^2$, donc, par linéarité :

$$G(a, b) = \frac{1}{5} - \frac{2a}{4} + \frac{a^2 - 2b}{3} + ab + b^2 = b^2 + \left(a - \frac{2}{3}\right)b + \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}. \checkmark$$

Puis $\left(b + \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 = b^2 + \left(a - \frac{2}{3}\right)b + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{3} + \frac{1}{9}$, et $\frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5} - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{a^2}{12} - \frac{a}{6} + \frac{4}{45} = \frac{(a-1)^2}{12} - \frac{1}{12} + \frac{4}{45}$, avec $\frac{4}{45} - \frac{1}{12} = \frac{16-15}{180} = \frac{1}{180}$. $\checkmark$

b) Les deux carrés sont positifs, donc $G(a, b) \geq \frac{1}{180}$, avec égalité si et seulement si $a = 1$ et

$$b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6} : \quad \boxed{\min G = \frac{1}{180} \text{ atteint en } (a, b) = \left(1, -\frac{1}{6}\right)}.$$

La droite $y = x - \frac{1}{6}$ est celle qui approche le mieux la parabole « en moyenne quadratique » sur $[0, 1]$.

30 Corrigés : propr. et encadrements

■ Corrigé de l'exercice 37

1. $2^x - 2 \leq 0 \iff x \leq 1$, et 2^x a pour primitive $\frac{2^x}{\ln 2}$. Par Chasles :

$$A = \int_{-1}^1 (2 - 2^x) dx + \int_1^2 (2^x - 2) dx = \left(4 - \frac{2 - \frac{1}{2}}{\ln 2}\right) + \left(\frac{4 - 2}{\ln 2} - 2\right) = \boxed{2 + \frac{1}{2 \ln 2}}.$$

$$\text{Sur } [0, \pi], \cos x - \frac{1}{2} \geq 0 \iff x \leq \frac{\pi}{3} : B = \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}}.$$

$$x \ln x - x \text{ est une primitive de } \ln, \text{ et } \ln x \leq 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{e}, 1\right] : C = \left[x - x \ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[x \ln x - x\right]_1^e = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = \boxed{2 - \frac{2}{e}}.$$

$$2. a) \int_0^1 (ax + b) dx = \frac{a}{2} + b = 1 \text{ et } \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0, \text{ d'où } b = -\frac{2a}{3}, -\frac{a}{6} = 1 : \boxed{P(x) = 4 - 6x}.$$

$$b) \text{ Par linéarité : } \int_0^1 P(x)(\alpha x + \beta) dx = \alpha \int_0^1 xP(x) dx + \beta \int_0^1 P(x) dx = \alpha \times 0 + \beta \times 1 = \beta. \text{ Ainsi } \int_0^1 (4 - 6x)(2026x + 7) dx = \boxed{7}.$$

■ Corrigé de l'exercice 38

1. Sur $[1, 2]$, $\frac{\arctan x}{x} > 0$ et $\int_1^2 \frac{\arctan x}{x} dx > 0$; les bornes étant inversées : $\int_2^1 \frac{\arctan x}{x} dx < 0$.

Sur $[0, 1]$, $\frac{1+x^2}{2} \leq 1$, donc $\ln \frac{1+x^2}{2} \leq 0$, et cette fonction continue n'est pas identiquement nulle : $\int_0^1 \ln \frac{1+x^2}{2} dx < 0$.

2. Sur $[1, e]$, $0 \leq \ln x \leq 1$, donc $\ln x \leq \sqrt{\ln x}$ (car $u \leq \sqrt{u}$ pour $0 \leq u \leq 1$) : $\int_1^e \ln x dx \leq \int_1^e \sqrt{\ln x} dx$.

Pour $t \geq 0$, $\sin t \leq t$; avec $t = \sin x \geq 0$: $\sin(\sin x) \leq \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'égalité n'ayant lieu qu'en 0.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

3. $\left| \int_0^1 \frac{\cos(\lambda x)}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|\cos(\lambda x)|}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. ✓
4. a) **Vrai.** Sinon, f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, 1]$ et, par le TVI, garde un signe constant, par exemple $f > 0$; f étant continue, positive et non nulle, $\int_0^1 f > 0$: contradiction.
- b) **Vrai.** $g(x) = f(x) - x$ est continue et $\int_0^1 g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$: d'après a), g s'annule en un point c , et $f(c) = c$.
- c) **Faux.** $g(x) = x^2 - \frac{1}{3}$: $\int_{-1}^1 g = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$, mais $g(0) = -\frac{1}{3} \neq 0$, donc g n'est pas impaire.
5. Par Chasles, puis avec $x = t + \pi$ et $\sin(t + \pi) = -\sin t$: $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx = - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\pi+t} dt$, d'où la formule. Sur $[0, \pi]$: $\sin t \geq 0$ et $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+\pi+t} = \frac{\pi}{(1+t)(1+\pi+t)} > 0$. La fonction intégrée est continue, positive, non identiquement nulle : $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx > 0$.

■ Corrigé de l'exercice 39

1. $\frac{1}{1+t^2} - (1-t^2) = \frac{1-(1-t^4)}{1+t^2} = \frac{t^4}{1+t^2} \geq 0$ et $(1-t^2+t^4) - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(1+t^6)-1}{1+t^2} = \frac{t^6}{1+t^2} \geq 0$. ✓
- Pour $x \geq 0$, on intègre l'encadrement sur $[0, x]$ (croissance de l'intégrale, $0 \leq x$) ; comme $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$:
- $$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$
2. Pour $x = \frac{1}{10}$: $0,0996666 \dots = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} \leq \arctan \frac{1}{10} \leq \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} = 0,0996686 \dots$: l'encadrement a une amplitude 2×10^{-6} , d'où $\arctan \frac{1}{10} \approx 0,09967$ à 10^{-5} près.
3. Pour $x \in [0, 1]$, on applique 1. à $x^3 \geq 0$: $x^3 - \frac{x^9}{3} \leq \arctan(x^3) \leq x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5}$. On intègre sur $[0, 1]$:
- $$\frac{1}{4} - \frac{1}{30} \leq K \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{30} + \frac{1}{80}, \quad \text{soit} \quad \frac{13}{60} \leq K \leq \frac{11}{48}.$$
- Ainsi $0,216 < K < 0,230$, donc $0,21 < K < 0,23$: $K \approx 0,22$ à 10^{-2} près ($K \approx 0,225$).

■ Corrigé de l'exercice 40

1. a) $P = 1$: $\int_{m-h}^{m+h} dx = 2h$ et $\frac{h}{3}(1+4+1) = 2h$. $P = (x-m)^2$: $\left[\frac{(x-m)^3}{3} \right]_{m-h}^{m+h} = \frac{2h^3}{3}$ et $\frac{h}{3}(h^2 + 0 + h^2) = \frac{2h^3}{3}$.
 $P = (x-m)^k$, $k \in \{1, 3\}$: avec $t = x - m$, $\int_{m-h}^{m+h} (x-m)^k dx = \int_{-h}^h t^k dt = 0$ (fonction impaire), et $\frac{h}{3}((-h)^k + 0 + h^k) = 0$. ✓
- b) Les deux membres de (S) dépendent **linéairement** de P ; (S) est vraie pour 1 , $x-m$, $(x-m)^2$, $(x-m)^3$, donc pour toute combinaison $P = \alpha + \beta(x-m) + \gamma(x-m)^2 + \delta(x-m)^3$, c'est-à-dire pour tout polynôme de degré ≤ 3 (il suffit de développer $P(m+t)$ en puissances de t). Avec

$$a = m - h, b = m + h, 2h = b - a :$$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(x) dx = \frac{P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)}{6}.$$

Pour $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ sur $[0, 2]$ ($m = h = 1$) : $\mu = \frac{P(0) + 4P(1) + P(2)}{6} = \frac{3 + 8 + 3}{6} = \boxed{\frac{7}{3}}.$

Directement : $\frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 3x \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{16}{3} + 6 \right) = \frac{7}{3}. \checkmark$

2. $m = h = \frac{1}{2}$: $\pi \approx \frac{1}{6} \left(4 + 4 \times \frac{4}{1 + \frac{1}{4}} + 2 \right) = \frac{1}{6} \left(6 + \frac{64}{5} \right) = \boxed{\frac{47}{15} \approx 3,1333}$, avec une erreur $\pi - \frac{47}{15} \approx 8 \times 10^{-3}$.

3. Pour $t \in [a, b]$, $0 \leq a \leq t \leq b$, donc $\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+a^2}$; on intègre sur $[a, b]$ (inégalité de la moyenne), avec $\int_a^b \frac{dt}{1+t^2} = \arctan b - \arctan a. \checkmark$

Avec $a = 1, b = \frac{4}{3}$: $\frac{1/3}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{3}{25}$ et $\frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}$, d'où $\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan \frac{4}{3} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}}.$

■ Corrigé de l'exercice 41

1. $h(t) = t - 1 - \ln t$: $h'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$; h décroît strictement sur $]0, 1]$, croît strictement sur $[1, +\infty[$, et $h(1) = 0$. Donc $h(t) \geq 0$, avec égalité seulement en $t = 1. \checkmark$

2. a) f , continue sur le segment $[0, 1]$, y atteint son minimum $\mu > 0$; donc $m \geq \mu > 0$. Pour tout x : $\ln \frac{f(x)}{m} \leq \frac{f(x)}{m} - 1$, soit $\ln f(x) - \ln m \leq \frac{f(x)}{m} - 1$. On intègre sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \ln f(x) dx - \ln m \leq \frac{1}{m} \int_0^1 f(x) dx - 1 = 0. \checkmark$$

b) Si f est constante égale à c , les deux membres valent $\ln c$. Réciproquement, en cas d'égalité, la fonction $\varphi : x \mapsto h\left(\frac{f(x)}{m}\right)$ (avec h du 1.) est continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle, donc $\frac{f(x)}{m} = 1$ pour tout x : **f est constante.**

3. Les trois fonctions utilisées sont continues, strictement positives et non constantes : l'inégalité est **stricte**.

a) Par parties ($u = \ln(1+x), v = 1+x$) : $\int_0^1 \ln(1+x) dx = \left[(1+x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx = \boxed{2 \ln 2 - 1}$, et $\int_0^1 (1+x) dx = \frac{3}{2}$. Donc $2 \ln 2 - 1 < \ln \frac{3}{2}$, soit $\ln 4 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{8}{3} < 1$: $\boxed{e > \frac{8}{3}}.$

b) $\int_0^1 \ln \frac{1}{1+x} dx = 1 - 2 \ln 2$ et $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$: $1 - 2 \ln 2 < \ln(\ln 2)$, d'où $\ln 2 > e^{1-2 \ln 2} = \frac{e}{4}$.

$\int_0^1 \ln(2^x) dx = \ln 2 \int_0^1 x dx = \frac{\ln 2}{2}$ et $\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$: $\frac{\ln 2}{2} < \ln \frac{1}{\ln 2}$, soit $\sqrt{2} < \frac{1}{\ln 2}$. Bilan :

$$\boxed{\frac{e}{4} < \ln 2 < \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (0,679 \dots < 0,693 \dots < 0,707 \dots).$$

■ Corrigé de l'exercice 42

1. a) $\varphi(x) = f(x) - f(m) - f'(m)(x - m)$: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(m)$, et f' est croissante ($f'' \geq 0$). Donc $\varphi' \leq 0$ sur $[a, m]$, $\varphi' \geq 0$ sur $[m, b]$: φ admet en m son minimum $\varphi(m) = 0$, d'où $\varphi \geq 0$. ✓
- b) $\psi(a) = \psi(b) = 0$ et ψ est dérivable : par Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\psi'(c) = 0$. Or $\psi'' = -f'' \leq 0$: ψ' est décroissante, donc $\psi' \geq 0$ sur $[a, c]$ et $\psi' \leq 0$ sur $[c, b]$. Ainsi ψ croît sur $[a, c]$ à partir de $\psi(a) = 0$ et décroît sur $[c, b]$ jusqu'à $\psi(b) = 0$: $\psi \geq 0$ sur $[a, b]$. ✓

2. On intègre les inégalités de 1. sur $[a, b]$ (croissance de l'intégrale). Comme $\int_a^b (x - m) dx = \left[\frac{(x-m)^2}{2} \right]_a^b = 0$:

$$\int_a^b (f(m) + f'(m)(x - m)) dx = (b - a)f(m), \quad \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

ce qui donne l'encadrement annoncé. ✓

Géométriquement (pour $f \geq 0$) : l'aire sous la courbe est comprise entre celle du rectangle de hauteur $f(m)$ (égale à l'aire sous la tangente en m) et celle du trapèze sous la corde.

3. a) $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ sur $[k, k+1]$, avec $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{k+1}{k}$, $f\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2k+1}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2k+1}{2k(k+1)}$: c'est l'encadrement voulu. ✓

Pour $k = 2$ et $k = 3$: $\frac{2}{5} \leq \ln \frac{3}{2} \leq \frac{5}{12}$ et $\frac{2}{7} \leq \ln \frac{4}{3} \leq \frac{7}{24}$; comme $\ln 2 = \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3}$: $\boxed{\frac{24}{35} \leq \ln 2 \leq \frac{17}{24}}$
(0,6857 ... $\leq$ 0,6931 ... $\leq$ 0,7083 ...).

- b) Avec $t = \tan \frac{\pi}{8} > 0$: $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2}$, donc $t^2 + 2t - 1 = 0$ et $t = \sqrt{2} - 1$. $\tan'' = (1 + \tan^2)' = 2 \tan(1 + \tan^2) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \left[-\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}, \text{ et Hermite-Hadamard donne } \frac{\pi}{4}(\sqrt{2} - 1) \leq \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{0+1}{2} :$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1) \leq \ln 2 \leq \frac{\pi}{4}} \quad (0,650 \dots \leq 0,693 \dots \leq 0,785 \dots).$$

31 Corrigés : aires et volumes

■ Corrigé de l'exercice 43

L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$.

1. Les courbes se coupent en $x = 0$, et $e^x \geq e^{-x}$ pour $x \geq 0$: $A = \int_0^{\ln 3} (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_0^{\ln 3} =$

$$3 + \frac{1}{3} - 2 = \frac{4}{3} \text{ u.a.} = \frac{16}{3} \text{ cm}^2.$$

2. Pour $x \neq 0$: $\frac{4}{x} = 5 - x \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x \in \{1, 4\}$. Sur $[1, 4]$: $(5 - x) - \frac{4}{x} = \frac{-(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$, la droite est au-dessus :

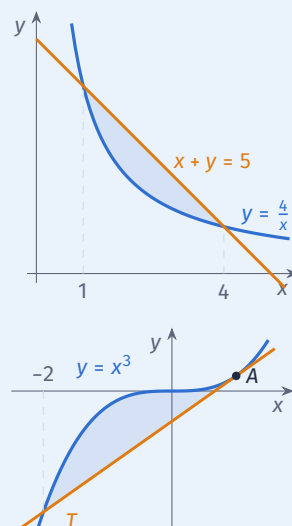
$$A = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x\right]_1^4,$$

$$A = \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \text{ u.a.} = 30 - 32 \ln 2 \approx 7,82 \text{ cm}^2.$$

3. La tangente en A est T : $y = 3x - 2$, et $x^3 - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$: T recoupe la courbe en $x = -2$ et la courbe est au-dessus de T sur $[-2, 1]$:

$$A = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^1,$$

$$A = \frac{27}{4} \text{ u.a.} = 27 \text{ cm}^2.$$



■ Corrigé de l'exercice 44

1. a) Sur $[0, 1]$: $\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right)$, donc $V = \pi \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{\pi}{4} \left[\ln \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \ln 3 \approx 0,86 \text{ cm}^3$.

b) $\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$: $V = \pi \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x)^2} = \pi \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \approx 0,61 \text{ cm}^3$.

c) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \pi \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \sqrt{3} \approx 5,44 \text{ cm}^3$.

d) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$: $V = \pi \left[x - \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{\pi^2}{2} + \pi \approx 8,08 \text{ cm}^3$.

2. $V = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 h - \frac{R^3 - (R-h)^3}{3} \right) = \pi \left(R^2 h - \frac{3R^2 h - 3Rh^2 + h^3}{3} \right) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$.

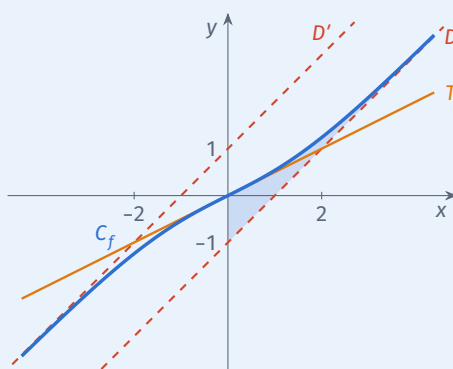
Pour $h = 2R$: $V = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$, le volume de la boule. ✓

L'eau du bol forme une calotte de hauteur $h = 5$ d'une boule de rayon $R = 10$: $V = 25\pi \left(10 - \frac{5}{3} \right) =$

$\frac{625\pi}{3} \approx 654,5 \text{ cm}^3$. Le bol (demi-boule) contient $\frac{2000\pi}{3} \text{ cm}^3$: il est rempli aux $\frac{5}{16}$ (31,25 %) alors que l'eau atteint la moitié de sa hauteur.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $\frac{2}{1+e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^x+1} = 2 - \frac{2}{1+e^x}$, donc $f(-x) = -x - 1 + 2 - \frac{2}{1+e^x} = -f(x)$: f est impaire.
- $f(x) - (x-1) = \frac{2}{1+e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$ et est strictement positif : D est asymptote en $+\infty$ et C_f est au-dessus de D . Par symétrie de centre O , D' : $y = x + 1$ est asymptote en $-\infty$, et C_f est en dessous de D' ($f(x) - (x+1) = -\frac{2e^x}{1+e^x} < 0$).
2. $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+2e^x+e^{2x}-2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$, avec $f(0) = 0$. En dérivant $-2e^x(1+e^x)^{-2}$: $f''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$, du signe de x : O est un point d'inflexion, et $f'(0) = \frac{2}{4}$: T : $y = \frac{x}{2}$.



3. a) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$. Sur $[0, \lambda]$, C_f est au-dessus de D (1 u.a. = 4 cm²) :

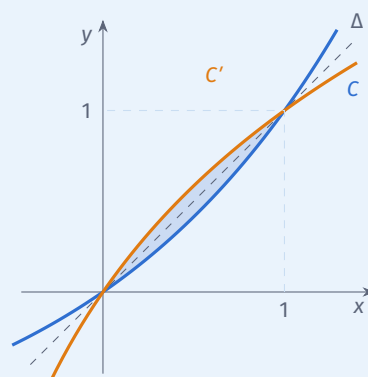
$$\int_0^\lambda \frac{2dx}{1+e^x} = 2 \left[x - \ln(1+e^x) \right]_0^\lambda = 2\lambda - 2 \ln(1+e^\lambda) + 2 \ln 2 = 2 \ln 2 - 2 \ln(1+e^{-\lambda}),$$

car $\lambda - \ln(1+e^\lambda) = -\ln(e^{-\lambda}+1)$. Donc $A(\lambda) = 8 \ln 2 - 8 \ln(1+e^{-\lambda})$ cm².

- b) $e^{-\lambda} \rightarrow 0$, donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = 8 \ln 2 \approx 5,55$ cm². Par symétrie de centre O , le domaine compris entre C_f et D' pour $x \leq 0$ a la même aire limite : au total $16 \ln 2 \approx 11,09$ cm².

■ Corrigé de l'exercice 46

1. $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$: f est continue et strictement croissante, de limite -1 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +\infty[$. Et $y = 2^x - 1 \iff 2^x = 1+y \iff x = \frac{\ln(1+y)}{\ln 2}$.
✓
2. $g''(x) = 2^x (\ln 2)^2 > 0$: g' est strictement croissante, avec $g'(0) = \ln 2 - 1 < 0$ et $g'(1) = 2 \ln 2 - 1 > 0$; g' s'annule en un unique $x_0 \in]0, 1[$. Donc g décroît sur $[0, x_0]$ et croît sur $[x_0, 1]$; comme $g(0) = g(1) = 0$, $g \leq 0$ sur $[0, 1]$.
Sur $[0, 1]$, C est sous Δ ; par symétrie par rapport à Δ , C' est au-dessus de Δ (pour $y = f(x) \in [0, 1]$: $f^{-1}(y) = x \geq f(x) = y$).



3. C et Δ se coupent en $x = 0$ et $x = 1$: $A = \int_0^1 (x - 2^x + 1) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,057 \text{ u.a.}}$

La symétrie par rapport à Δ (repère orthonormé) conserve les aires et échange C et C' : le domaine entre Δ et C' a aussi l'aire A, et le domaine entre C et C' a pour aire $2A = \boxed{3 - \frac{2}{\ln 2}} \text{ u.a.}$

De plus

$$\int_0^1 (\log_2(1+x) - x) dx = A, \quad \text{donc} \quad \int_0^1 \log_2(1+x) dx = A + \frac{1}{2} = \boxed{2 - \frac{1}{\ln 2}}.$$

Vérification : $\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 dx = 2 \ln 2 - 1$, et $\frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2} = 2 - \frac{1}{\ln 2}$. ✓

4. Sur $[0, 1]$, $0 \leq 2^x - 1 \leq x$: $V = \pi \int_0^1 (x^2 - (2^x - 1)^2) dx = \pi \left(\frac{1}{3} - \int_0^1 (4^x - 2 \cdot 2^x + 1) dx \right) = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2 \ln 2} + \frac{2}{\ln 2} - 1 \right)$, soit $V = \pi \left(\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{2}{3} \right) \approx 0,17 \text{ u.v.}$ (on a utilisé $\int_0^1 4^x dx = \frac{3}{\ln 4} = \frac{3}{2 \ln 2}$).

■ Corrigé de l'exercice 47

1. a) $M(x, y)$ est dans le disque $\iff x^2 + (y - R)^2 \leq r^2 \iff |x| \leq r$ et $|y - R| \leq \sqrt{r^2 - x^2} \iff |x| \leq r$ et $g(x) \leq y \leq f(x)$. De plus $g \geq R - r > 0$. ✓

b) $V = \pi \int_{-r}^r (f^2 - g^2) dx = \pi \int_{-r}^r (f - g)(f + g) dx = \pi \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot 2R dx = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

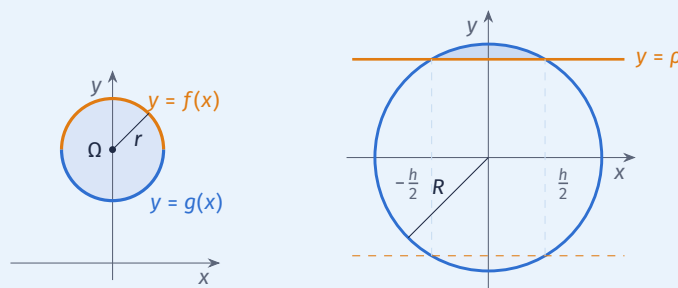
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ décrit le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon r : l'intégrale est l'aire du demi-disque, $\frac{\pi r^2}{2}$. Donc $V = 2\pi^2 R r^2$.

c) $\pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$. ✓ Bouée : $V = 2\pi^2 \times 20 \times 25 = 1000\pi^2 \approx 9\,870 \text{ cm}^3$, soit environ 9,9 litres.

2. a) Pour $|x| \leq \frac{h}{2}$: $R^2 - x^2 \geq R^2 - \frac{h^2}{4} = \rho^2$, d'où $\sqrt{R^2 - x^2} \geq \rho > 0$. Alors

$$V = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (R^2 - x^2 - \rho^2) dx = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) dx = 2\pi \left[\frac{h^2 x}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{h}{2}} = 2\pi \left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right) = \boxed{\frac{\pi h^3}{6}}.$$

b) Le résultat ne dépend pas de R ! Pour $h = 6 \text{ cm}$: $36\pi \approx 113 \text{ cm}^3$, que l'anneau soit taillé dans une orange ou dans la Terre (il est alors immense mais d'une minceur extrême).



■ Corrigé de l'exercice 48

1. a) $\varphi(x) = e^x - e^t - e^t(x-t)$: $\varphi'(x) = e^x - e^t$ est du signe de $x - t$, donc φ admet en t son minimum $\varphi(t) = 0$: la courbe est au-dessus de T_t . Avec $\int_0^1 (x-t) dx = \frac{1}{2} - t$:

$$A(t) = \int_0^1 \varphi(x) dx = e - 1 - e^t - e^t\left(\frac{1}{2} - t\right) = e - 1 - e^t\left(\frac{3}{2} - t\right).$$

- b) $A'(t) = -e^t\left(\frac{3}{2} - t\right) + e^t = e^t\left(t - \frac{1}{2}\right)$: A décroît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. L'aire est minimale pour la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$, milieu de $[0, 1]$, d'équation $y = \sqrt{e}\left(x + \frac{1}{2}\right)$:

$$A_{\min} = e - 1 - \sqrt{e} \approx 0,070 \text{ u.a.}$$

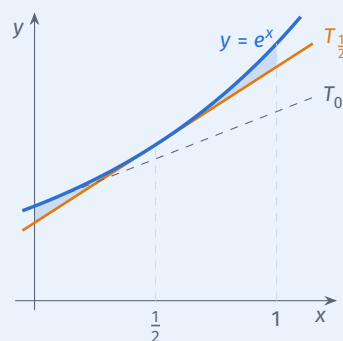
2. a) $\int_a^b (x-t) dx = \frac{(b-t)^2 - (a-t)^2}{2} = \frac{(b-a)(a+b-2t)}{2} = (b-a)(m-t)$, d'où l'expression de $A(t)$ par linéarité. En dérivant :

$$A'(t) = -(b-a)(f'(t) - f'(t) + (m-t)f''(t)) = (b-a)f''(t)(t-m). \checkmark$$

- b) $f'' > 0$: $A' < 0$ sur $[a, m[$ et $A' > 0$ sur $]m, b]$, donc A est minimale en $t = m$: la meilleure tangente est celle du point milieu.

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, 3]$ ($f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$), $m = 2$: tangente $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) = 1 - \frac{x}{4}$, et

$$A(2) = \int_1^3 \frac{dx}{x} - 2 \times \frac{1}{2} = \ln 3 - 1 \approx 0,099 \text{ u.a.}$$



32

Corrigés : fonctions définies par intégrale

■ Corrigé de l'exercice 49

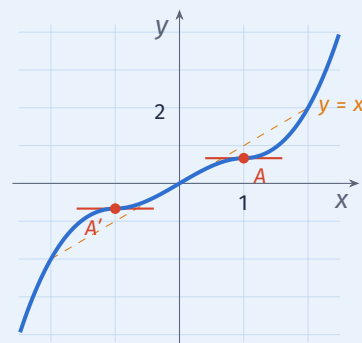
1. $t \mapsto |t^2 - 1|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc F (sa primitive nulle en 0) est dérivable et $F'(x) = |x^2 - 1| \geq 0$, avec égalité seulement en ± 1 : F est **strictement croissante**. Avec $t = -u$: $F(-x) = \int_0^{-x} |t^2 - 1| dt = -\int_0^x |u^2 - 1| du = -F(x)$: F est impaire.

2. Sur $[0, 1]$, $|t^2 - 1| = 1 - t^2$: $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$, et $F(1) = \frac{2}{3}$. Pour $x \geq 1$ (Chasles) : $F(x) = \frac{2}{3} + \int_1^x (t^2 - 1) dt = \frac{2}{3} + \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$, soit

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{4}{3}. \text{ Donc } F(x) \rightarrow +\infty \text{ et } \frac{F(x)}{x} = \frac{x^2}{3} - 1 + \frac{4}{3x} \rightarrow +\infty$$

: **branche parabolique de direction** (Oy). Par imparité, $F \rightarrow -\infty$ en $-\infty$; F étant continue et strictement croissante, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\frac{F'(x)-F'(1)}{x-1}$ vaut $\frac{1-x^2}{x-1} = -(1+x) \rightarrow -2$ à gauche et $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \rightarrow 2$ à droite : F' n'est pas dérivable en 1. Sur $]0, 1[$, $F''(x) = -2x < 0$; sur $]1, +\infty[$, $F''(x) = 2x > 0$: C_F est concave sur $[0, 1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$. Elle change de concavité en $A(1, \frac{2}{3})$, point d'inflexion où la tangente est **horizontale** ($F'(1) = 0$). Autres points d'inflexion : O ($F''(x) = -2x$ change de signe en 0 ; tangente $y = x$) et, par symétrie, $A'(-1, -\frac{2}{3})$.



■ Corrigé de l'exercice 50

1. Pour $t \in [0, 1]$: si $x \geq 0$, $1+xt \geq 1$; si $-1 < x < 0$, $1+xt \geq 1+x > 0$. L'intégrande est continu sur $[0, 1]$: $\varphi(x)$ existe. $\varphi(0) = \int_0^1 dt = 1$, et pour $x \neq 0$: $\varphi(x) = \left[\frac{\ln(1+xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
2. Si $-1 < x < y$: pour $t \in]0, 1]$, $1+xt < 1+yt$, donc $\frac{1}{1+xt} - \frac{1}{1+yt}$ est continue, positive, non identiquement nulle sur $[0, 1]$: son intégrale $\varphi(x) - \varphi(y)$ est **strictement** positive. Pour $x \geq 0$ et $t \in [0, 1]$: $1 \leq 1+xt \leq 1+x$, d'où $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+xt} \leq 1$, et l'on intègre sur $[0, 1]$. En multipliant par $x > 0$: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ (évident pour $x = 0$).
3. $(1+xt)(1-xt) + x^2t^2 = 1$ donne l'identité. Comme $|xt| \leq |x|$, $1+xt \geq 1-|x| > 0$. En intégrant :

$$\varphi(x) - 1 + \frac{x}{2} = x^2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+xt} dt, \quad \text{donc} \quad \left| \varphi(x) - 1 + \frac{x}{2} \right| \leq x^2 \int_0^1 \frac{t^2}{1-|x|} dt = \frac{x^2}{3(1-|x|)}.$$

Ainsi $\varphi(x) \rightarrow 1 = \varphi(0)$ (φ continue en 0) et $\left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{|x|}{3(1-|x|)} \rightarrow 0$: $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$. On retrouve $\frac{\ln(1+x)}{x} = \varphi(x) \rightarrow 1$, et $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{\varphi(x)-1}{x} \rightarrow -\frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est continue sur I ($\cos > 0$) : F est dérivable et $F'(x) = \frac{1}{\cos x} > 0$. Avec $t = -u$: $F(-x) = -\int_0^x \frac{du}{\cos(-u)} = -F(x)$. Sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\cos t} \geq 1$, d'où $F(x) \geq x$ pour $x \geq 0$. Enfin $F''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$: la courbe est concave sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, avec un point d'inflexion en O (tangente $y = x$).
2. $H(x) = \ln \frac{1+\sin x}{\cos x}$ est définie sur I ($1+\sin x > 0$, $\cos x > 0$) et

$$H'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1+\sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x} = F'(x), \quad H(0) = 0 = F(0),$$

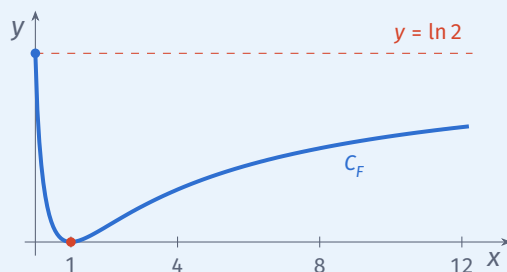
donc $H = F$. En $\frac{\pi^-}{2}$: $1+\sin x \rightarrow 2$ et $\cos x \rightarrow 0^+$, donc $F \rightarrow +\infty$; par imparité, $F \rightarrow -\infty$ en $-\frac{\pi^+}{2}$.

3. F est continue, strictement croissante, de limites $\mp\infty$: bijection de I sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, $\theta = \arctan(e^y) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $x = 2\theta - \frac{\pi}{2} \in I$: $1+\sin x = 1-\cos 2\theta = 2\sin^2 \theta$ et $\cos x = \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$, d'où $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \tan \theta = e^y$ et $F(x) = y$: $G(y) = 2\arctan(e^y) - \frac{\pi}{2}$. D'une part $G'(y) = \frac{1}{F'(G(y))} = \cos G(y)$; d'autre part $G'(y) = \frac{2e^y}{1+e^{2y}}$. (Accord : $\cos(2\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1+\tan^2 \theta}$.)

4. $10F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10 \ln(1+\sqrt{2}) \approx \boxed{8,81 \text{ cm}}$ et $10F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \ln(2+\sqrt{3}) \approx \boxed{13,17 \text{ cm}}$. À 20 cm : $x = G(2) = 2 \arctan(e^2) - \frac{\pi}{2} \approx 1,302 \text{ rad}$, soit environ $\boxed{74,6^\circ}$. Comme $F \rightarrow +\infty$, les pôles ne figurent pas sur la carte.

■ Corrigé de l'exercice 52

- $t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$: $F'(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2}$, du signe de $\ln x$. F décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$: son minimum est $F(1) = 0$, donc $F \geq 0$, avec égalité seulement en 1.
- Avec $t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$: $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{-\ln u}{\left(1+\frac{1}{u}\right)^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_1^x \frac{\ln u}{(u+1)^2} du = F(x)$.
- $v(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$, donc $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$. IPP avec $u(t) = \ln t$: $F(x) = \left[\frac{t \ln t}{1+t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{x \ln x}{1+x} - \left[\ln(1+t)\right]_1^x = \boxed{\frac{x \ln x}{1+x} - \ln \frac{1+x}{2}}$.
- $F(x) = \ln 2 - \frac{\ln x}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow \boxed{\ln 2}$ en $+\infty$ (car $\frac{x \ln x}{1+x} - \ln x = -\frac{\ln x}{1+x}$). En 0^+ : $x \ln x \rightarrow 0$, donc $F(x) \rightarrow -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$ (ou : $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$). La droite $y = \ln 2$ est asymptote en $+\infty$; F croissante sur $[1, +\infty[$ donne $F < \ln 2$. $\frac{F(x)-\ln 2}{x} = \frac{\ln x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow -\infty - 1 = -\infty$: F n'est pas dérivable à droite en 0 ; C_F a en $(0, \ln 2)$ une **demi-tangente verticale**.



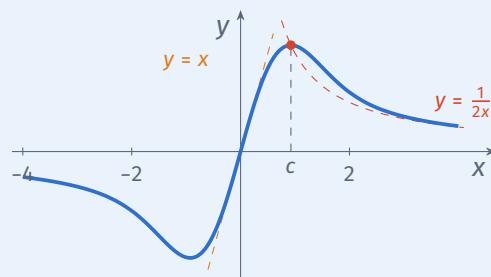
■ Corrigé de l'exercice 53

- $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$: $li'(x) = \frac{1}{\ln x} > 0$ (li croissante) et $li''(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0$ (li concave). Pour $2 \leq t \leq x$: $\frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln x}$, d'où $li(x) \geq \frac{x-2}{\ln x}$, qui tend vers $+\infty$ (car $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$) : $li(x) \rightarrow +\infty$.
- IPP avec $u(t) = \frac{1}{\ln t}$, $v(t) = t$, $u'(t) = -\frac{1}{t(\ln t)^2}$: $li(x) = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + K(x)$.
- $K(x) \geq 0$, et $\sqrt{x} \geq 2$ permet d'écrire $K(x) = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}$. Sur $[2, \sqrt{x}]$: $\frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{(\ln 2)^2}$, d'où un premier terme $\leq \frac{\sqrt{x}}{(\ln 2)^2}$. Sur $[\sqrt{x}, x]$: $\ln t \geq \ln \sqrt{x} = \frac{\ln x}{2}$, donc $\frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{4}{(\ln x)^2}$, d'où un second terme $\leq \frac{4x}{(\ln x)^2}$.
- $\frac{li(x) \ln x}{x} = 1 - \frac{2 \ln x}{x \ln 2} + \frac{K(x) \ln x}{x}$, avec $0 \leq \frac{K(x) \ln x}{x} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}(\ln 2)^2} + \frac{4}{\ln x} \rightarrow 0$. Donc $\boxed{\frac{li(x) \ln x}{x} \rightarrow 1}$. Alors $\frac{li(x)}{x} = \frac{li(x) \ln x}{x} \times \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$, et $li \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Ox) .

■ Corrigé de l'exercice 54

- $E(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ est la primitive nulle en 0 de $t \mapsto e^{t^2}$: $D = e^{-x^2} E$ est dérivable et $D'(x) = -2xe^{-x^2} E(x) + e^{-x^2} e^{x^2} = \boxed{1 - 2x D(x)}$. Avec $t = -u$, $E(-x) = -E(x)$: D est impaire. $D(0) = 0$, $D'(0) = 1$: tangente $y = x$.
- a) Pour $0 \leq t < x$: $0 < e^{t^2} < e^{x^2}$, donc ($x > 0$, fonctions continues) $0 < E(x) < x e^{x^2}$, soit $0 < D(x) < x$.
b) $E(x) \geq \int_0^x \frac{t}{x} e^{t^2} dt = \frac{1}{2x} \left[e^{t^2} \right]_0^x = \frac{e^{x^2} - 1}{2x}$; en multipliant par $2x e^{-x^2}$: $2x D(x) \geq 1 - e^{-x^2}$.

3. a) $\left(\frac{e^{t^2}}{2t}\right)' = e^{t^2} \left(1 - \frac{1}{2t^2}\right)$ et, pour $t \geq a$, $1 - \frac{1}{2t^2} \geq 1 - \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{c_a} > 0$: d'où $e^{t^2} \leq c_a \left(\frac{e^{t^2}}{2t}\right)'$.
- b) En intégrant sur $[a, x]$: $\int_a^x e^{t^2} dt \leq c_a \left(\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e^{a^2}}{2a}\right) \leq c_a \frac{e^{x^2}}{2x}$, donc $E(x) \leq E(a) + c_a \frac{e^{x^2}}{2x}$; on multiplie par $2x e^{-x^2} > 0$.
- c) $c_a = 1 + \frac{1}{2a^2-1} \rightarrow 1$: on fixe $a \geq 1$ avec $c_a \leq 1 + \varepsilon$. Comme $x e^{-x^2} \rightarrow 0$ et $e^{-x^2} \rightarrow 0$, il existe $X \geq a$ tel que, pour $x \geq X$, $2x e^{-x^2} E(a) \leq \varepsilon$ et $e^{-x^2} \leq \varepsilon$; alors $1 - \varepsilon \leq 2x D(x) \leq 1 + 2\varepsilon$. Ceci pour tout ε : $2xD(x) \rightarrow 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x D(x) = \frac{1}{2}$ et $D(x) = \frac{x D(x)}{x} \rightarrow \boxed{0}$.
4. D est continue, $D(0) = 0 < D(1)$, et $D \rightarrow 0$ en $+\infty$: il existe $A > 1$ tel que $D(x) < D(1)$ pour $x \geq A$. Sur le segment $[0, A]$, D atteint un maximum $D(c) \geq D(1)$, qui est donc le maximum sur $[0, +\infty[$. Comme $D(0) < D(1)$ et $D(A) < D(1)$, $c \in]0, A[$: c'est un point intérieur, donc $D'(c) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{D(c) = \frac{1}{2c}}$ ($c \approx 0,924$, $D(c) \approx 0,541$).



33 Corrigés : suites et sommes de Riemann

■ Corrigé de l'exercice 55

1. $\sin$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: pour $x \in [kh, (k+1)h]$, $\sin(kh) \leq \sin x \leq \sin((k+1)h)$, et l'on intègre sur un intervalle de longueur h . En sommant pour $k = 0, \dots, n-1$ (Chasles) : $R_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \leq S_n$.
2. La somme est télescopique : $S_n - R_n = h(\sin(nh) - \sin 0) = h \sin \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2n}}$. Alors $0 \leq 1 - R_n \leq S_n - R_n = \frac{\pi}{2n} \leq 10^{-2}$ dès que $n \geq 50\pi \approx 157,08$: $\boxed{n_0 = 158}$ convient.
3. $e^{ih} \neq 1$ ($0 < h \leq \frac{\pi}{2}$). Avec $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$:

$$\sum_{k=1}^n e^{ikh} = e^{ih} \frac{e^{inh} - 1}{e^{ih} - 1} = e^{ih} \frac{2i \sin \frac{nh}{2} e^{i\frac{nh}{2}}}{2i \sin \frac{h}{2} e^{i\frac{h}{2}}} = e^{i\frac{(n+1)h}{2}} \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

La partie imaginaire donne la formule. Avec $nh = \frac{\pi}{2}$: $\sin \frac{nh}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{(n+1)h}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}$, d'où $S_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{h}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right)$.

4. Quand $n \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow 0$: $\frac{h}{\sin \frac{h}{2}} = 2 \cdot \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \rightarrow 2$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $S_n \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{1}$. Comme $S_n \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ (théorème du cours), cette intégrale vaut 1, sans recourir à une primitive.

■ Corrigé de l'exercice 56

Les fonctions f obtenues sont continues sur $[0, 1]$ (et même monotones), donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f$.

a) $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}$, $f(x) = x e^x$: $u_n \rightarrow \int_0^1 x e^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = \boxed{1}$.

b) $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)(2n+k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(2+\frac{k}{n}\right)}$, $f(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$: $v_n \rightarrow \left[\ln \frac{1+x}{2+x}\right]_0^1 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \boxed{\ln \frac{4}{3}}$.

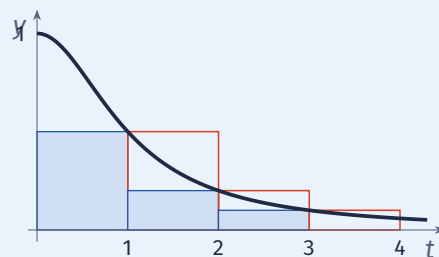
c) $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2\frac{k}{n}+2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, $f(x) = \frac{2}{1+(2x+1)^2}$, de primitive $\arctan(2x+1)$: $w_n \rightarrow \arctan 3 - \frac{\pi}{4} = \boxed{\arctan \frac{1}{2}} \approx 0,464$ (car $\tan\left(\arctan 3 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3-1}{1+3}$).

d) $z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, de primitive $\sqrt{1+x^2}$: $z_n \rightarrow \boxed{\sqrt{2}-1}$.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. $f'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \leq 0$: f décroît sur $[0, +\infty[$. Sur $[k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$; sur $[k-1, k]$, $f(t) \geq f(k)$. En intégrant (longueur 1) : $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$. Sur la figure, le rectangle bleu (sous la courbe) et le rectangle rouge (au-dessus) ont la même aire $f(k)$.

2. En sommant pour $k = 1, \dots, n$: $\int_1^{n+1} f \leq S_n \leq \int_0^n f$, soit $\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4} \leq S_n \leq \arctan n$. (S_n) est croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$: elle converge vers L , et à la limite $\frac{\pi}{4} \leq L \leq \frac{\pi}{2}$.



3. a) $\psi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ vérifie $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ sur $]0, +\infty[$, et $\psi(1) = \frac{\pi}{2}$.

b) $S_N - S_n = \sum_{k=n+1}^N f(k)$, donc $\arctan(N+1) - \arctan(n+1) \leq S_N - S_n \leq \arctan N - \arctan n$. Quand $N \rightarrow +\infty$: $\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq L - S_n \leq \frac{\pi}{2} - \arctan n$, soit $\boxed{\arctan \frac{1}{n+1} \leq L - S_n \leq \arctan \frac{1}{n}}$.

4. Comme $\frac{\arctan h}{h} \rightarrow 1$ ($h \rightarrow 0$) : $n \arctan \frac{1}{n} \rightarrow 1$ et $n \arctan \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1) \arctan \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$, d'où $\boxed{n(L - S_n) \rightarrow 1}$. Avec $n = 3$: $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$, et $0,8 + \arctan \frac{1}{4} \approx 1,0450$, $0,8 + \arctan \frac{1}{3} \approx 1,1218$: $1,04 < L < 1,13$ (en fait $L \approx 1,0767$).

■ Corrigé de l'exercice 58

1. Avec $x = 1 - t$: $B(p, q) = \int_1^0 (1-t)^p t^q (-dt) = B(q, p)$. $B(p, 0) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$.

2. IPP avec $u(x) = (1-x)^q$, $v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$: le crochet $\left[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1}\right]_0^1$ est nul ($q \geq 1$), et il reste $B(p, q) = \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{q}{p+1} B(p+1, q-1)$. Récurrence sur q de « pour tout p , $B(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$ » : vrai pour $q = 0$ ($B(p, 0) = \frac{p!}{(p+1)!}$) ; si c'est vrai au rang $q-1$, alors $B(p, q) = \frac{q}{p+1} \cdot \frac{(p+1)! (q-1)!}{(p+q+1)!} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$.

3. $(1-x)^q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k x^k$, d'où, par linéarité, $B(p, q) = \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \int_0^1 x^{p+k} dx = \sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} \binom{q}{k}$. Pour $p = q = 2$: $\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{2! 2!}{5!}$.

4. $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, donc $B(n, n) = \int_0^1 (x(1-x))^n dx \leq \frac{1}{4^n}$. Or $B(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$, d'où

$$\boxed{\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 59

1. $B = \left[\ln(1+x+x^2) \right]_0^1 = \boxed{\ln 3}$. Comme $3 + (2x+1)^2 = 4(1+x+x^2)$: $\left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)' = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{(2x+1)^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}$, donc $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}} \approx 0,6046$.
2. Pour $x \in [0, 1[$, avec $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$: $\sum_{k=0}^{n-1} (x^{3k} - x^{3k+1}) = (1-x) \frac{1-x^{3n}}{1-x^3} = \frac{1-x^{3n}}{1+x+x^2}$; pour $x = 1$, les deux membres sont nuls.
3. On intègre sur $[0, 1]$: $\int_0^1 (x^{3k} - x^{3k+1}) dx = \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2}$, d'où $u_n = A - r_n$. Sur $[0, 1]$, $1 \leq 1+x+x^2 \leq 3$, donc $\frac{x^{3n}}{3} \leq \frac{x^{3n}}{1+x+x^2} \leq x^{3n}$ et $\boxed{\frac{1}{3(3n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{3n+1}}$. Ainsi $u_n \rightarrow A$. Les sommes partielles σ_m de la série vérifient $\sigma_{2n} = u_n$ et $\sigma_{2n+1} = u_n + \frac{1}{3n+1}$: elles tendent toutes vers $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
4. $1+x-2x^2 = (1-x)(1+2x)$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} (x^{3k} + x^{3k+1} - 2x^{3k+2}) = (1-x)(1+2x) \frac{1-x^{3n}}{1-x^3} = \frac{(1+2x)(1-x^{3n})}{1+x+x^2}$. En intégrant : $v_n = B - s_n$, avec $0 \leq s_n = \int_0^1 \frac{(1+2x)x^{3n}}{1+x+x^2} dx \leq \int_0^1 3x^{3n} dx = \frac{3}{3n+1}$. Donc $\boxed{v_n \rightarrow \ln 3}$: $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots = \ln 3$.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. $\frac{e^t-1}{t} \rightarrow 1$ (nombre dérivé de exp en 0), donc $\varphi(t) \rightarrow 1 = \varphi(0)$: φ est continue. Pour $t > 0$: $e^t - 1 \geq t > 0$, d'où $0 < \varphi(t) \leq 1$. $F' = \varphi > 0$: F est strictement croissante.
2. Pour $t > 0$: $\sum_{k=1}^n e^{-kt} = e^{-t} \frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} = \frac{1-e^{-nt}}{e^t-1}$, donc $\sum_{k=1}^n t e^{-kt} = \varphi(t)(1-e^{-nt}) = \varphi(t) - r_n(t)$. En $t = 0$, les deux membres valent 1. Enfin $0 \leq r_n(t) = \varphi(t)e^{-nt} \leq e^{-nt}$.
3. IPP avec $u(t) = t$, $v(t) = -\frac{e^{-kt}}{k}$: $\int_0^x t e^{-kt} dt = -\frac{x e^{-kx}}{k} + \frac{1}{k} \int_0^x e^{-kt} dt = \boxed{\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{x}{k} \right) e^{-kx}} \leq \frac{1}{k^2}$, qui tend vers $\frac{1}{k^2}$ car $x e^{-kx} \rightarrow 0$.
4. On intègre l'identité de 2 sur $[0, x]$ (fonctions continues) : $F(x) = \sum_{k=1}^n \int_0^x t e^{-kt} dt + \int_0^x r_n \leq H_n + \int_0^x e^{-nt} dt \leq H_n + \frac{1}{n}$. Avec $n = 1$: $F \leq 2$; croissante et majorée, F a une limite finie ℓ , et $\ell \leq H_n + \frac{1}{n}$. De plus $F(x) \geq \sum_{k=1}^n \int_0^x t e^{-kt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} H_n$, d'où $\ell \geq H_n$. Ainsi $0 \leq \ell - H_n \leq \frac{1}{n}$ et $\boxed{H_n \rightarrow \ell}$.

34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Si $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$, alors, par linéarité, $\int_0^1 P f = \sum_{k=0}^n c_k \int_0^1 x^k f = 0$.
2. Les points c_i découpent $[0, 1]$ en intervalles ; à l'intérieur de chacun, f ne s'annule pas, donc garde un signe constant (théorème des valeurs intermédiaires). P a pour racines simples exactement les points où f change de signe : P change de signe en ces points et seulement en eux. Donc $P f$ a le même signe sur deux intervalles consécutifs : $P f$ garde un signe constant sur $[0, 1]$ (continuité). Or $\deg P \leq m \leq n$, donc $\int_0^1 P f = 0$: la fonction continue $P f$, de signe constant et d'intégrale nulle, est nulle. Ainsi f est nulle hors des racines de P , donc partout par continuité : contradiction.
3. Donc f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]0, 1[$. Pour $f(x) = 6x^2 - 6x + 1$: $\int_0^1 f = 2 - 3 + 1 = 0$ et $\int_0^1 x f = \frac{6}{4} - 2 + \frac{1}{2} = 0$; f s'annule en $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \in]0, 1[$: exactement $n + 1 = 2$ fois, la borne est atteinte.
4. $\sin(x - c) = \sin x \cos c - \cos x \sin c$, d'où l'intégrale nulle par linéarité. Supposons que g s'annule au plus une fois sur $]0, \pi[$. Si g ne change pas de signe sur $]0, \pi[$, alors $g(x) \sin x$ est de signe constant sur $[0, \pi]$, d'intégrale nulle, donc nulle : $g = 0$ sur $]0, \pi[$, puis partout, ce qui est exclu. Sinon, g change de signe en un unique point $c \in]0, \pi[$. Pour $x \in [0, \pi]$, $x - c \in]-\pi, \pi[$, donc $\sin(x - c)$ est négatif pour $x < c$ et positif pour $x > c$: $g(x) \sin(x - c)$ garde un signe constant, et son intégrale est nulle ; on conclut de même à $g = 0$: contradiction. Donc g s'annule au moins deux fois. Exemple : $\sin 3x \sin x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$ et $\sin 3x \cos x = \frac{\sin 4x + \sin 2x}{2}$ ont une intégrale nulle sur $[0, \pi]$; $\sin 3x$ s'annule exactement en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sur $]0, \pi[$.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. $\cos(jt) \cos(kt) = \frac{1}{2} [\cos(j-k)t + \cos(j+k)t]$, $\sin(jt) \sin(kt) = \frac{1}{2} [\cos(j-k)t - \cos(j+k)t]$, et $\int_0^{2\pi} \cos(mt) dt$ vaut 0 si $m \in \mathbb{Z}^*$, 2π si $m = 0$. D'où :

$$\int_0^{2\pi} \cos(jt) \cos(kt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \pi & \text{si } j = k \geq 1 \\ 2\pi & \text{si } j = k = 0 \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} \sin(jt) \sin(kt) dt = \begin{cases} \pi & \text{si } j = k \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $|P(e^{it})|^2 = A(t)^2 + B(t)^2 = \sum_{j,k} a_j a_k [\cos(jt) \cos(kt) + \sin(jt) \sin(kt)]$. En intégrant, seuls les termes $j = k$ subsistent : $\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt = 2\pi a_0^2 + \sum_{k \geq 1} (\pi + \pi) a_k^2 = 2\pi \sum_{k=0}^n a_k^2$.
3. $|P(e^{it})|^2 \leq M^2$ et l'intégration donne $\sum a_k^2 \leq M^2$, donc $|a_k| \leq M$. Si $a_n = 1$: $M^2 \geq \sum a_k^2 \geq 1$, donc $M \geq 1$. Si $M = 1$: $1 \geq 1 + \sum_{k < n} a_k^2$, donc $a_k = 0$ pour $k < n$ et $P = z^n$; réciproquement $|e^{int}| = 1$.
4. $|1 + e^{it}|^2 = (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 + 2 \cos t = 4 \cos^2 \frac{t}{2}$, d'où $|P(e^{it})|^2 = 4^n \cos^{2n} \frac{t}{2}$. Avec Parseval ($a_k = \binom{n}{k}$), puis $u = \frac{t}{2}$ et la symétrie $u \mapsto \pi - u$ de $\cos^{2n}$ sur $[0, \pi]$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{4^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2} dt = \frac{2 \cdot 4^n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2n} u du = \frac{2 \cdot 4^n}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \boxed{\binom{2n}{n}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 63

- $t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \geq 0$, donc $e^{-t^2} \leq e^{1-2t}$ et $G(x) \leq \int_0^x e^{1-2t} dt = \frac{e}{2} (1 - e^{-2x}) \leq \frac{e}{2}$. G est croissante ($G'(x) = e^{-x^2} > 0$) et majorée : elle a une limite finie G en $+\infty$.
- Pour $u \in [0, 1[$: $\ln(1 - u^2) \leq -u^2$ et $\ln(1 + u^2) \leq u^2$; en multipliant par n et en passant à l'exponentielle : $(1 - u^2)^n \leq e^{-nu^2}$ et $(1 + u^2)^n \leq e^{nu^2}$. Pour $u = 1$: $0 \leq e^{-n} \leq 2^{-n}$.
- $t = \sqrt{n} u$, $dt = \sqrt{n} du$: $G(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \int_0^1 e^{-nu^2} du$, et l'on intègre l'encadrement de 2 sur $[0, 1]$.
- $u = \sin \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $du = \cos \theta d\theta$ et $1 - u^2 = \cos^2 \theta$, d'où $\int_0^1 (1 - u^2)^n du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta = W_{2n+1}$. $u = \tan \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$: $du = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ et $\frac{1}{1+u^2} = \cos^2 \theta$, d'où $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \theta d\theta = W_{2n-2}$.
- $\sqrt{n} W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{2n+1} W_{2n+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et de même $\sqrt{n} W_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}} \cdot \sqrt{2n-2} W_{2n-2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par encadrement, $G(\sqrt{n}) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; comme $G(x) \rightarrow G$, on a $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Enfin $G(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} I_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$, et les deux bornes tendent vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: $\sqrt{n} I_n \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 64

- $F(x) = \int_0^x f$ est dérivable, $F' = f$, $F(0) = 0$. Donc $g(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x} \rightarrow F'(0) = f(0) = g(0)$: g est continue en 0, et continue et dérivable sur $]0, 1]$ comme quotient. $g'(x) = \frac{x f(x) - F(x)}{x^2} = \frac{f(x) - g(x)}{x}$.
- $(x g^2)' = g^2 + 2x g g' = g^2 + 2g(f - g) = 2fg - g^2$. En intégrant sur $[\varepsilon, 1]$: $g(1)^2 - \varepsilon g(\varepsilon)^2 = 2 \int_{\varepsilon}^1 fg - \int_{\varepsilon}^1 g^2$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\varepsilon g(\varepsilon)^2 \rightarrow 0 \times f(0)^2 = 0$, et $\int_{\varepsilon}^1 h \rightarrow \int_0^1 h$ pour h continue sur $[0, 1]$. D'où $\int_0^1 g^2 = 2 \int_0^1 fg - g(1)^2$.
- Donc $\int_0^1 g^2 \leq 2 \int_0^1 fg \leq 2 \sqrt{\int_0^1 f^2} \sqrt{\int_0^1 g^2}$ (Cauchy-Schwarz). Si $\int_0^1 g^2 > 0$, on divise par sa racine : $\sqrt{\int_0^1 g^2} \leq 2 \sqrt{\int_0^1 f^2}$, d'où l'inégalité (évidente si $\int_0^1 g^2 = 0$).
- $F(x) = 2(\sqrt{x+a} - \sqrt{a})$, donc $g(x) = \frac{2(\sqrt{x+a} - \sqrt{a})}{x} = \frac{2}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}}$ (formule valable aussi en 0), et $\int_0^1 f^2 = [\ln(x+a)]_0^1 = \ln \frac{1+a}{a}$. Avec $s = \sqrt{x+a}$, $dx = 2s ds$:

$$\int_0^1 g^2 = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{1+a}} \frac{8s ds}{(s + \sqrt{a})^2} = 8 \left[\ln(s + \sqrt{a}) + \frac{\sqrt{a}}{s + \sqrt{a}} \right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{1+a}} = 8 \ln \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{a}} - 4.$$

Ainsi $\int_0^1 g^2 = -4 \ln a + c(a)$, où $c(a) \rightarrow -8 \ln 2 - 4$, et $\int_0^1 f^2 = -\ln a + \ln(1+a)$; en divisant par $-\ln a \rightarrow +\infty$, le quotient tend vers $\boxed{4}$. Pour toute constante $C < 4$, il existe donc f telle que $\int_0^1 g^2 > C \int_0^1 f^2$: la constante 4 est optimale.

■ Corrigé de l'exercice 65

- Si $P = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ ($c_k \in \mathbb{Z}$), alors $d_n \int_0^1 P = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d_n}{k+1}$, et $k+1 \leq n$ divise d_n : c'est un entier.
- D'après l'exercice 58, $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-m} dx = \frac{(m-1)!(n-m)!}{n!} = \frac{1}{m \binom{n}{m}}$, car $m \binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}$. L'intégrande est un polynôme à coefficients entiers de degré $n-1$: $\frac{d_n}{m \binom{n}{m}}$ est un entier, donc $m \binom{n}{m} \mid d_n$.

3. Avec $(m, n) = (k, 2k) : k \binom{2k}{k} \mid d_{2k} \mid d_{2k+1}$. Puis $(2k+1) \binom{2k}{k} = \frac{(2k+1)!}{k!k!} = (k+1) \binom{2k+1}{k+1}$, qui divise d_{2k+1} (cas $(m, n) = (k+1, 2k+1)$). Écrivons $d_{2k+1} = \binom{2k}{k} q : k \mid q$ et $(2k+1) \mid q$, avec $k \wedge (2k+1) = k \wedge 1 = 1$; d'après Gauss, $k(2k+1) \mid q$, d'où $k(2k+1) \binom{2k}{k} \mid d_{2k+1}$.
4. Donc $d_{2k+1} \geq k(2k+1) \binom{2k}{k} \geq k(2k+1) \frac{4^k}{2^{k+1}} = k 4^k$. Si $n = 2k+1 \geq 7$ ($k \geq 3$) : $d_n \geq 2 \cdot 4^k = 2^n$. Si $n = 2k+2 \geq 10$ ($k \geq 4$) : $d_n \geq d_{2k+1} \geq k 4^k \geq 4^{k+1} = 2^n$. Enfin $d_8 = 840 \geq 2^8 = 256$: $d_n \geq 2^n$ pour $n \geq 7$ (alors que $d_6 = 60 < 64$).
5. L'exposant d'un nombre premier $p \leq n$ dans d_n est le plus grand entier α tel que $p^\alpha \leq n$; donc $d_n = \prod_{p \leq n} p^{\alpha_p}$ avec chaque facteur $p^{\alpha_p} \leq n$, et $d_n \leq n^{N(n)}$. Pour $n \geq 7$: $2^n \leq n^{N(n)}$, d'où $N(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$. Avec l'exercice 53, $N(n)$ est de l'ordre de $\text{li}(n) \approx \frac{n}{\ln n}$: la minoration a le bon ordre de grandeur (constante $\ln 2 \approx 0,69$ au lieu de 1).

■ Corrigé de l'exercice 66

1. IPP avec $u = f^2$, $v(x) = x : \int_{-a}^a f^2 = \left[x f(x)^2 \right]_{-a}^a - \int_{-a}^a x \cdot 2f(x)f'(x) dx = -2 \int_{-a}^a x f f'$, le crochet étant nul car $f(\pm a) = 0$.
2. Cauchy-Schwarz appliqué à $x \mapsto x f(x)$ et $f' : \left(\int_{-a}^a x f f' \right)^2 \leq \int_{-a}^a x^2 f^2 \times \int_{-a}^a f'^2$; on multiplie par 4 et l'on utilise 1.
3. $f(\pm 1) = 0$, $f'(x) = -2x$: $\int_{-1}^1 f^2 = \frac{16}{15}$, $\int_{-1}^1 x^2 f^2 = \frac{16}{105}$, $\int_{-1}^1 f'^2 = \frac{8}{3}$, et $\left(\frac{16}{15} \right)^2 = \frac{256}{225} \approx 1,14 \leq 4 \cdot \frac{16}{105} \cdot \frac{8}{3} = \frac{512}{315} \approx 1,63$.
4. f_a est de classe C^1 , nulle en $\pm a$, et $f'_a(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$. Notons $J(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, qui tend vers $\sqrt{\pi}$ (exercice 63 et parité). Par parties ($u = x$, $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$) :

$$\int_{-a}^a f_a'^2 = \int_{-a}^a x^2 e^{-x^2} dx = \left[-\frac{x}{2} e^{-x^2} \right]_{-a}^a + \frac{1}{2} J(a) = -a e^{-a^2} + \frac{1}{2} J(a) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ensuite $f_a^2 = e^{-x^2} - 2e^{-\frac{a^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-a^2}$. Comme $0 \leq \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 2a$ et $0 \leq \int_{-a}^a x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{2a^3}{3}$:

$$\left| \int_{-a}^a f_a^2 - J(a) \right| \leq 4a e^{-\frac{a^2}{2}} + 2a e^{-a^2}, \quad \left| \int_{-a}^a x^2 f_a^2 - \int_{-a}^a x^2 e^{-x^2} \right| \leq \frac{4a^3}{3} e^{-\frac{a^2}{2}} + \frac{2a^3}{3} e^{-a^2},$$

et ces majorants tendent vers 0 : $\int_{-a}^a f_a^2 \rightarrow \sqrt{\pi}$ et $\int_{-a}^a x^2 f_a^2 \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Le quotient $\frac{(\int f_a^2)^2}{4 \int x^2 f_a^2 \cdot \int f_a'^2}$ tend donc vers $\frac{\pi}{4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 1$: la constante 4 ne peut pas être remplacée par une constante plus petite.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Techniques de calcul	31 à 36	/ 6	
Thème B · Propriétés et encadrements	37 à 42	/ 6	
Thème C · Aires et volumes	43 à 48	/ 6	
Thème D · Fonctions définies par intégrale	49 à 54	/ 6	
Thème E · Suites et sommes de Riemann	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Équations différentielles

Maths Olympiad