

LA Probabilité(TSE)

1. PROBABILITES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Vocabulaire. • Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité. • Propriété. • Evénements indépendants - Définition ; - Propriétés.	• Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités : - Les cas possibles d'une expérience ; - Les cas favorables d'un événement • Calculer la probabilité d'un événement. • Démontrer que deux événements sont indépendants.

2. VARIABLES ALEATOIRES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition • Loi de probabilité. • Fonction de répartition. • Espérance mathématique. • Variance ; écart type	• Une variable aléatoire étant donnée : - Déterminer sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ; - Construire sa fonction de répartition ; - Calculer son espérance mathématique ; - Calculer sa variance et son écart type.

3. LOI BINOMIALE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves Bernoulli • $E(X) = np$. • $V(X) = np(1-p)$.	• Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli. ($0 \leq k \leq n$).

Dénombrement :

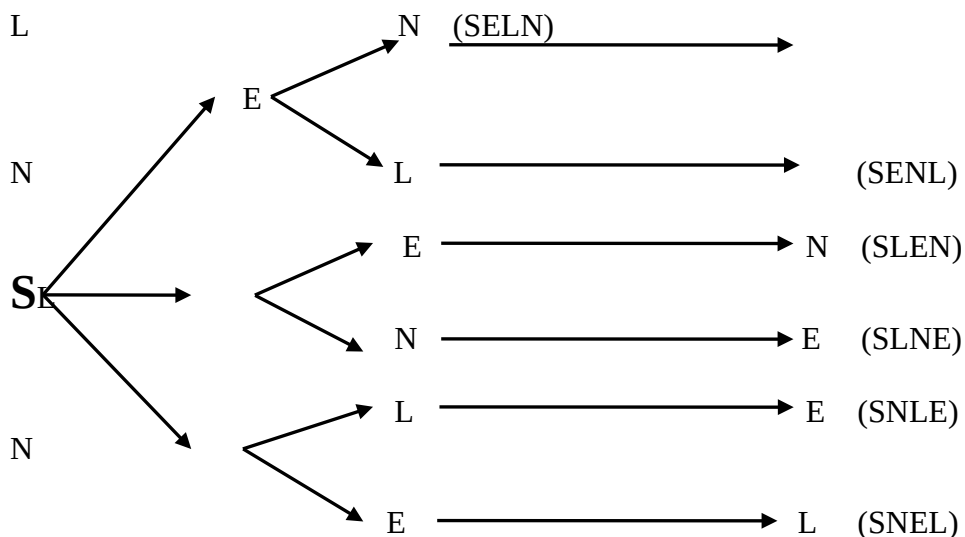
1) Théorie des ensembles :

a) **Activité 1 :**

Combien de mot peut-on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;	ESLN ;	LESN ;	NELS ;
SENL ;	 ;	 ;	 ;
SLNE;	 ;	 ;	 ;
SLNE;	 ;	 ;	 ;
SLEN;	 ;	 ;	 ;
SNLE;	 ;	 ;	 ;
SNEL;	 ;	 ;	 ;
Pour S en 1 ^{ère} Position	Pour E en 1 ^{ère} Position	Pour L en 1 ^{ère} Position	Pour N en 1 ^{ère} Position

Ainsi on aura donc formé au total $6 \times 4 = 24$ mots. Ceci peut être résumé par l'arbre ou le diagramme suivant :



On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) activité 2 :

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) ; combien de bureau peut-on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

Solution :

D		S		C	
45	×	44	×	43	= 85140

On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi A_{45}^3 tel que $A_{45}^3 = 45 \times 44 \times 43 = 85140$

c) Activité 3 :

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tire successivement 3 cartes.

- 1) Quel est le nombre de tirage possible ?
- 2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
- 3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

Solution :

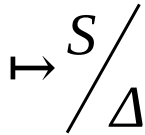
- 1) On a $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30 = 29760$
- 2) On a : $A_8^1 \times A_{24}^2$
- 3) On a : $A_{16}^1 \times A_{13}^2$

2) Probabilité sur un ensemble fini :

a- Vocabulaire :

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE = n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B. On note : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection de 2 ensemble** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note : $A \cap B$

N.B :



Exercices d'application :

Soit E et F deux ensembles tels que :

$$E = \{0, 1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 0, a, b, c, 4, 8\}$$

- 1) Déterminer $E \cap F$ et $E \setminus F$
- 2) Déterminer $\text{card} E$, $\text{card} F$, $\text{card}(E \cap F)$, $\text{card}(E \setminus F)$

Solution :

- 1) $E \cap F = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c\}$
 $E \setminus F = \{0, 1, 2\}$
- 2) $\text{Card } E = 4$, $\text{Card } F = 8$
 $\text{Card}(E \cap F) = 9$, $\text{Card}(E \setminus F) = 3$

b- Propriétés :

$$P_1 : \text{Card } \emptyset = 0$$

P_2 : Soient A et B deux univers finis :

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card } A - \text{Card}(A \cap B)$

P_3 : Soient A et B, deux ensembles distinctes de B, on appelle produit cartésien $A \times B$ l'ensemble défini par : $\{(x, y) / x \in A, y \in B\}$

Exemple:

Soient A et B deux ensembles tel que :

$$A = \{1, 2\}; B = \{a, b, c\}$$

- a) Donner les éléments de $A \times B$
- b) Déterminer $\text{Card}(A \times B)$

Solution :

- a) $A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$
- b) $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B = 2 \times 3 = 6$.

N.B :

- $A \times B \neq B \times A$ (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$.

P₄ : Complémentarité : On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A on la note $\overline{A}$ (1) (3) () () ()

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $F = \{0, 3, 4, 5\}$

- Déterminer $\overline{F}$
- Déterminer $\text{Card } \overline{F}$

Solution

a) $\overline{F}$

b) $\text{Card } \overline{F} = \text{Card } E - \text{Card } F = 9 - 4 = 5$

N.B : $\text{Card } \overline{F} = \text{Card } E - \text{Card } F$

3) Permutation-Arrangement - combinaison

a) **Permutation :**

- **Définition :**

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de $\{1 ; n\}$ dans F. Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n. On la note : $n!$ (et se lit Factorielle n).

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1$$

- **Propriétés :**

$$P_1 : 1! = 1 ; \quad P_2 : 0! = 1$$

b) **Arrangement :**

- **Définition:**

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$. On appelle arrangement de P éléments de E, toute injection de P dans E.

On le note : A_n^P et on lit : « A , n , P ».

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

- **Propriétés:**

$$P_1 : A_n^0 = 1$$

$$P_3 : A_n^n = n !$$

$$P_2 : A_n^1 = n P_4 : A_n^{n-1} = n !$$

c) Combinaison :

- Définition :

Soit **E** un ensemble à n éléments, et **P** un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$. On appelle combinaison de **p** éléments de **E** tout sous ensemble de **E** ayant **p** éléments.

On le note : C_n^P et on lit : $\ll C, n, P \gg$.

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n(n-1)\dots\dots\dots 2 \times 1} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Propriétés :

$$P_1 : C_n^0 = 1$$

$$P_3 : C_n^n = 1$$

$$P_2 : C_n^1 = n P_4 : C_n^{n-1} = n$$

N.B : Pour calculer le C_n^P , on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

P \ N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini (P- liste)

- Définition :

Soit **E** et **F** deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté : $A_n^{\hat{p}}$ tel que : $A_n^{\hat{p}} = n^p$

- Propriétés:

$$P_1 : A_n^{\hat{0}} = n^0 = 1 ;$$

$$P_2 : A_n^{\hat{1}} = n^1 = n ;$$

4) Les différents types de tirages

a) Tirages successif et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement**.

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

b) Tirages successif et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété. Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste**.

$$A_n^{\hat{P}} = n^P$$

c) Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot : **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison**.

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots \cdot 2 \cdot 1} \quad \text{ou} \quad C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d) Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot : **successif**, il faut en tenir compte de tous les ordres dans les quels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

Application :

Une boîte contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires. Déénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boîte et que :

a) le tirage est simultané

b) le tirage est successif et sans remise

- c) le tirage est successif et avec remise

Solution :

Ici : - le nombre d'élément qui constitue l'univers est : $n = 30$
 - le nombre d'élément tiré est : $p = 3$

- a) le tirage est simultané :

Alors le nombre de cas possible est : $C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

- b) le tirage est successif et sans remise :

Alors le nombre de cas possible est : $A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = 24360$

- c) le tirage est successif et avec remise :

Alors $\leq$ nombre de cas possible est : $A_{30}^3 = 30^3 = 2700$

I- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les événements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'événement A et le Nombre de Cas Possible. On note P_A ou $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de A}}$$

Exemple:

On jette un dé ordinaire non piqué. Soit ω l'ensemble des résultats possibles tel que : $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ω est appelé univers ou population.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre paire ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

Solution :

Le nombre de cas possible est : 6.

- a) La probabilité d'obtenir 1 chiffre paire est $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- b) La probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 est : $P = \frac{1}{6}$

c) La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 est $P = \frac{1}{10}$

d) La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égale à 6 est $P = \frac{6}{10}$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou l'évènement certain et A et B deux évènements élémentaires de Ω .
On a :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$) alors on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple :

Une urne contient 7 boules indiscernables au touché dont 3 blanches et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

- 1) Quelle est la probabilité d'avoir "A" exactement 2 boules blanches.
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir "B" au plus 1 boule noire.
- 3) Quelle est la probabilité d'avoir "C" 2 boules de même couleur.
- 4) Quelle est la probabilité d'avoir "D" des boules de même couleur.

Solution :

$\subseteq$

Tirage simultané : on utilise

Désignons par NCP : le Nombre de Cas Possibles
et

par NCF : le Nombre de Cas Favorable

$$\binom{a_{ij}}{1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq p}$$

$$(a_{ij})_{m \times p}, B = (b_{ij})_{m \times p}$$

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij}$$

3) Equiprobabilité:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque événement élémentaire est la même.

- Le lancé du dé est un événement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque

face est .

- Le lancé d'une pièce de monnaie est aussi un événement d'équiprobable car la probabilité

d'apparition de chaque face est de .

II- Probabilités conditionnelles et Indépendance

1) Définition :

Soient A et B deux événements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de

A par rapport à B ou probabilité de A sachant B. $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2) Indépendance :

Deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors :

$$\begin{cases} P_B(A) = P(A) \\ P_A(B) = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

3) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application x de Ω dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs prises par x , noté $x(\Omega)$ et s'appelle l'univers image de Ω par x .

4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image x_i , on désigne par " $X = x_i$ ", l'événement constitué par l'ensemble des éventualités e_k de Ω ayant pour image x_i par X on note " $X(e_k) = x_i$ " ou " $X = x_i$ ".

N.B : L'ensemble des événements " $X = x_i$ ", constitue une partition de Ω et forme un système complet d'événements.

On définit également les notations : $X > a$; $X \geq a$;

C'est l'ensemble des éventualités de Ω dont l'image est strictement supérieure à a , supérieure ou égale à a ,.....

5) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire x la fonction :

$P : x \mapsto P(X = x)$ qui à toute valeur image x_i associe la probabilité $P_i = P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	P_3		P_n

Avec $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

6) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x , la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F : x \mapsto P(X \leq x)$

N.B :

Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$; $F(x) = 1$ pour $x > x_n$

La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

7) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

a) Espérance mathématique X

On appelle espérance mathématique de X , le nombre $E(x) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$ tel que :

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

N.B :

C'est la moyenne pondérée des valeurs images x_i , pondérées par les probabilités P_i ($P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$)

Propriétés :

$$P_1 : E(x - E(x)) = 0$$

$$P_3 : E(x + k) = E(x) + k$$

$$P_2 : E(k) = k$$

$$P_4 : E(kx) = k E(x).$$

b) Variance :

On appelle variance de x l'espérance mathématique du carré de la variable $x - E(x)$. Elle est notée $V(x)$ telle que :

$$V(x) = E((x - E(x))^2)$$

$$\text{Ou } V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Propriétés :

$$P_1 : V(k) = 0 ; \quad P_2 : V(X+k) = V(X) \\ P_3 : V(kX) = k^2 V(X)$$

c) Ecart – type :

On appelle écart-type la racine carrée de la variance. On la note σ tel que $\sigma^2 = V(X)$

Propriété:

$$\sigma(kX) = k \sigma(X)$$

6°) Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité $q = 1 - p$.

7°) Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit P la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
P(X = x _i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Calculer l'espérance mathématique
- Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
- Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faire sa représentation graphique.

Exercice 2 :

On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Exercice 3 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A :

Dans cette partie on prend $p = 0,1$

- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Partie B :

On revient au cas général

- Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que $f(p) = p^2$

Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Démontrer que $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$

- On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.
 - Etudier le signe de $h(p)$ en fonction de P .
 - En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Solutions :

Exercice 1 :

a) Espérance mathématique est :

$$E(x) = 0 \times \left\{ x' = ax + by + c \right.$$

b) La variance et l'écart – type

- Variance :**

$$V(x) = \left(a^2 + b^2 \right)$$

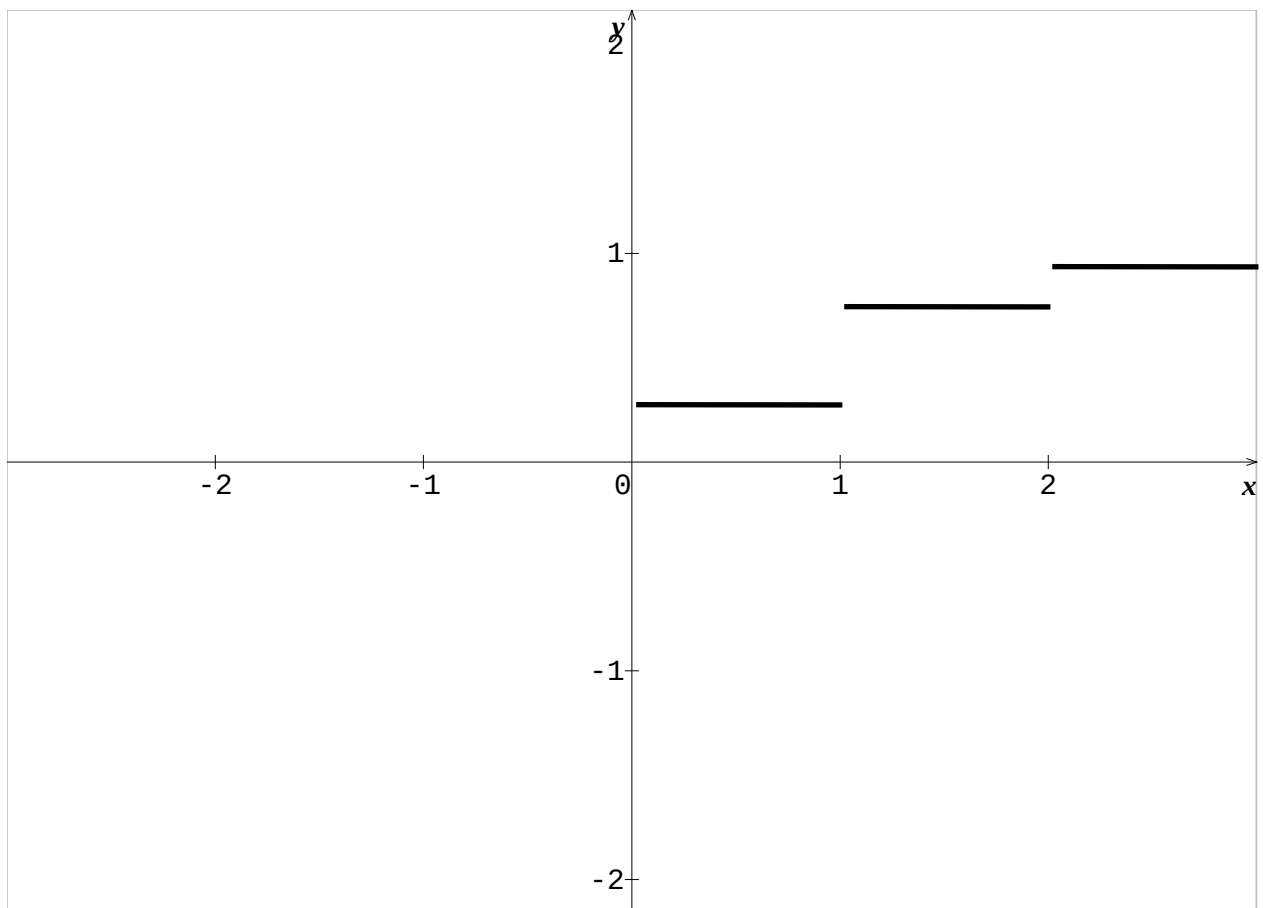
- L'écart – type : $\sigma(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$

c) La fonction de répartition est :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$$



La présentation graphique est définie par la figure suivante :



Exercice 2 :

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de

probabilité $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que

$$p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \Rightarrow p(x = 3) = \frac{45}{512} = 0,088$$

$$\Rightarrow p(x = 3) = 0,088$$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est $p(x = 3) = 0,088$.

Exercice 3 :

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

Partie A :

On donne $p = 0,1$

a) La probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne. $p_1 = p \quad p = p^2 = 0,1 \quad 0,1 = 0,01$

b) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

$$P_2 = p \quad p \quad p \quad p = p^4 = 0,1 \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,1 = 0,0001$$

c) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne. L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binomiale de paramètre $p = 0,1$ et $k = 3$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3 (0,1)^3 (0,9)^1 = 4 \quad (0,001) \quad (0,9) = 0,0036$$

d) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a 3 moteurs en panne.

$$p_4 = p_2 + p_3 = 0,0001 + 0,0036 = 0,0037$$

Partie B :

On revient au cas général

a) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Démontrons que $f(p) = p^2$

Un avions à 2 moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.

$$f(p) = p \quad p = p^2$$

b) $g(p)$ est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrons que $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

$$g(p) = p^4 + p(x = 3) = p^4 + C_4^3 p^3 (1 - p) = p^4 + 4 p^3 (1 - p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 + 4p^3 = p^2(-3p^2 + 4p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$$

c) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$

$$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p)$$

$$\Rightarrow h(p) = p^2(3p^2 - 4p + 1)$$

Si $p^2 > 0$ alors le signe de $h(p)$ dépend du signe $3p^2 - 4p + 1$

$$\text{Or } 3p^2 - 4p + 1 = 3(p - 1) \left(p - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow h(p) > 0 \text{ si } p \in]0 ; \frac{1}{3}[; h(p) < 0 \text{ si } p \in]\frac{1}{3} ; 1[; h(p) = 0 \text{ si } p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$$

En déduisons, suivant les valeurs de p , dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si $p \in]0 ; \frac{1}{3}[$, alors $h(p) > 0 \Rightarrow f(p) > g(p)$. Un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si $p \in]\frac{1}{3} ; 1[$, alors $h(p) < 0 \Rightarrow f(p) < g(p)$: Un avion à deux (2) moteurs est plus sûr.
- Si $p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$; alors $h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$: le risque est le même.