

PROBABILITE

◆ *Dénombrement :*

• *Ordre et répétition*

Ordre important	Répétitions possibles	Résultat possible	Nombre de résultats possibles
<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>p – liste</i>	n^p
<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>p – arrangement</i>	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
<i>non</i>	<i>non</i>	<i>p – combinaison</i>	$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$

- *Problèmes de tirages*

Types de tirages	ordre	Répétition	Résultat possible	Nombre de résultats possibles
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$p - \text{liste}$	n^p
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - \text{arrangement}$	A_n^p
simultané	On ne tient pas compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - \text{combinaison}$	C_n^p

- *Problèmes de lancés ou de jets*

Objets lancés ou jetés	Nombre de faces	Nombre de lancés effectués	Calcul
Jeton ou pièce de monnaie	2 faces	n	2^n
Dé cubique	6 faces	n	6^n
Dé tétraédrique	4 faces	n	4^n

- *Problèmes de cartes*

Dans un jeu de cartes, les mains sont composées de p cartes pris parmi 32 cartes ou 52 cartes et donc l'outil de calcul est la combinaison C_n^p .

Voici la composition de chaque jeu :

Jeu de 32 Cartes	As	K	Q	J	10	9	8	7	Total					
Carreau	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Coeur	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Trêfle	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Pique	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Total	4	4	4	4	4	4	4	4	32					
Jeu de 52 Cartes	As	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2	Total
Carreau	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Coeur	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Trêfle	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Pique	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Total	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	52

- *Règles de calcul sur les combinaisons*

- ✓ On multiplie les combinaisons si les différentes étapes sont reliées par un « et »
- ✓ On additionne les combinaisons si les différents cas sont reliés par un « ou »

- ◆ *Calcul des probabilités :*

- *Définition*

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire

Une probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités $p_i = P(\omega_i)$ des événements élémentaires ω_i telles que :

- ✓ Pour tout $i, 0 \leq p_i \leq 1$
- ✓ $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- ✓ Pour tout événement $A \subset \Omega$, $P(A) =$
somme des probabilités des événements élémentaires qui réalisent A

- *Propriétés des probabilités*

Ensembles	Vocabulaire	Propriété
Ω	Evènement certain	$P(\Omega) = 1$
$\emptyset$	Evènement impossible	$P(\emptyset) = 0$
$\{\omega_i\}$	Evènement élémentaire	$P(\omega_i) = p_i$
$A \subseteq \Omega$	Evènement quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\bar{A}$	Evènement contraire de A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$A \cup B$	Evènement A ou B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$A \cap B$	Evènement A et B	

- *Calcul dans le cas d'équiprobabilité*

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

◆ *Probabilité conditionnelle :*

- *La formule pour calculer la probabilité de B sachant A*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- *Indépendance*

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- *Calcul de $P(A \cap B)$*

✓ Quand A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

✓ Quand A et B ne sont pas indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

- *Calcul de $P(B)$ quand B est lié à un évènement A*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

◆ *Variables aléatoires :*

- *Loi de probabilité*

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- *Espérance mathématique ; Variance et Ecart – type*

$$\checkmark E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

$$\checkmark V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ avec}$$

$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots + x_n^2p_n$$

$$\checkmark \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

◆ *Schéma de Bernoulli de paramètres n et p - Loi binomiale*

- *Calcul des probabilités dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p*

- ✓ Pour tout $k, 0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir exactement k succès est

$$p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- ✓ La probabilité d'obtenir uniquement que des succès est p^n

- ✓ La probabilité de n'obtenir aucun succès est $(1 - p)^n$

- ✓ La probabilité d'obtenir au moins un succès est $1 - (1 - p)^n$

- *Loi binomiale de paramètres n et p*

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p

- ✓ Pour tout $k, 0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

- ✓ $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$

- ✓ $E(X) = np$

- ✓ $V(X) = np(1 - p)$